UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

CAMELIA MĂDĂLINA BĂLĂEŢI

FUNCŢII UNIVALENTE DE UNA ŞI MAI MULTE VARIABILE COMPLEXE

Rezumatul tezei de doctorat

Conducător ştiinţific:
Prof. univ. dr. GRIGORE ŞTEFAN SĂLĂGEAN

Cluj-Napoca
2010

Cuprins

Introducere **4**

1 Funcţii univalente de o variabilă complexă **5**
1.1 Rezultate elementare din teoria funcţiilor univalente 5
1.2 Funcţii analitice cu partea reală pozitivă 5
1.3 Subordonare. Principiul subordonării 5
1.4 Funcţii stelate. Funcţii convexe 5
1.5 Funcţii a căror derivată are partea reală pozitivă 6
1.6 Subordonări diferenţiale 6
1.7 Superordonări diferenţiale 7
1.8 Lanţuri de subordonare. Ecuaţia diferenţială Loewner 8
1.9 Operatori integrali 8

2 Funcţii univalente de mai multe variabile complexe **9**
2.1 Funcţii olomorfe în $\mathbb{C}^n$. Aplicaţii biolomorfe 9
2.2 Automorfismele bilei unitate Euclidiene 9
2.3 Generalizări ale funcţiilor cu partea reală pozitivă 9
2.4 Aplicaţii stelate. Aplicaţii convexe 9
2.5 Lanţuri Loewner şi ecuaţia diferenţială Loewner în $\mathbb{C}^n$ 10
2.6 Aplicaţii spiralate 12
2.7 Aplicaţii aproape stelate de ordinul α 13
2.8 Generalizări ale operatorului extins Roper-Suffridge. Operatorul Pfaltzgraff-Suffridge 13

3 Aplicaţii ale metodelor subordonărilor şi superordonărilor diferenţiale **16**
3.1 Subordonări diferenţiale definite cu operatorul integral 16
3.2 O clasă de funcţii univalente obţinută cu ajutorul operatorului integral aplicat funcţiilor meromorfe 18
3.3 O clasă de funcţii stelate de ordinul α 20
3.4 Superordonări diferenţiale definite cu operatorul integral 21
3.5 Subordonante ale unor superordonări diferenţiale 22

4 Aproape stelaritate de ordin complex λ **28**
4.1 Funcţii şi aplicaţii aproape stelate de ordin complex λ. Caracterizare prin lanţuri Loewner 28
4.2 Aplicaţii cu generalizări ale operatorului extins Roper-Suffridge 30

4.3 Aproape stelaritate de ordin complex λ şi operatorul extins Pfaltzgraff-Suffridge 31
4.4 Condiţii suficiente de aproape stelaritate de ordin complex λ 32

Bibliografie **34**

Cuvinte cheie: funcţie univalentă, subordonare diferenţială, superordonare diferenţială, lanţ Loewner, operator integral, aplicaţie biolomorfă, stelaritate, spiralitate, aproape stelaritate de ordinul α, operator extins Roper-Suffridge, operator Pfaltzgraff-Suffridge

Introducere

Teoria geometrică a funcţiilor de o variabilă complexă s-a conturat ca ramură aparte a analizei complexe în secolul al XX-lea când au apărut primele lucrări importante în acest domeniu, datorate lui P. Koebe [58], I.W. Alexander [2], L. Bieberbach [16].

Noţiunea de funcţie univalentă ocupă un rol central în teoria geometrică a funcţiilor analitice, prima lucrare datând din 1907 şi se datorează lui Koebe [58]. Studiul funcţiilor univalente a fost continuat de Plemelj [92], Gronwall [48] şi Faber [31].

În prezent există numeroase tratate şi monografii dedicate studiului funcţiilor univalente, dintre care amintim pe cele ale lui P. Montel [80], Z. Nehari [81], L.V. Ahlfors [1], Ch. Pommerenke [95], A.W. Goodman [39], P.L. Duren [30], D.J. Hallenbeck, T.H. Mac Gregor [50], S.S. Miller, P.T. Mocanu [75] şi P.T. Mocanu, T. Bulboacă, Gr. Şt. Sălăgean [79].

Problema extinderii rezultatelor din teoria geometrică a funcţiilor de o variabilă complexă la mai multe variabile complexe a fost formulată prima dată de către H. Cartan în Apendixul la cartea lui P. Montel apărută în anul 1933 [22].

Extinderea proprietăţilor geometrice ale aplicaţiilor biolomorfe a fost începută în anii 1960-1980 de către matematicienii japonezi I. Ono [83], T. Higuchi [54], K. Kikuchi [57] şi a fost reluată în ultimii 20 de ani de către J.A. Pfaltzgraff, T.J. Suffridge, C. FitzGerald, S. Gong, I. Graham, G. Kohr, H. Hamada, P. Liczberski, P. Curt, etc.

În această teză am introdus noi clase de funcţii univalente respectiv de aplicaţii univalente pe care le-am studiat folosind diverse metode.

În cele ce urmează, la fiecare capitol am selectat cele mai relevante rezultate, cu precădere cele originale. Rezultatele din primele capitole sunt renumerotate. In final este inclusă întreaga bibliografie.

Capitolul 1

Funcţii univalente de o variabilă complexă

În acest capitol sunt prezentate noţiuni si rezultate elementare din teoria geometrică a funcţiilor de o variabilă complexă. Sunt tratate clase de funcţii univalente, metodele subordonărilor şi superordonărilor diferenţiale, metoda lanţurilor Loewner şi operatori integrali de tip Sălăgean.

1.1 Rezultate elementare din teoria funcţiilor univalente

1.2 Funcţii analitice cu partea reală pozitivă

Funcţiile analitice cu partea reală pozitivă au un rol important în caracterizarea unor clase speciale de funcţii univalente.

Definiţia 1.2.1 *Prin clasa funcţiilor lui Charathèodory înţelegem clasa*

$$\mathcal{P} = \{p \in \mathcal{H}(U) : p(0) = 1,\ \operatorname{Re} p(z) > 0,\ z \in U\}.$$

1.3 Subordonare. Principiul subordonării

Definiţia 1.3.1 *Fie $f, g \in \mathcal{H}(U)$. Spunem că funcţia f este subordonată funcţiei g şi vom scrie $f \prec g$ sau $f(z) \prec g(z)$ dacă există o funcţie $w \in \mathcal{H}(U)$, cu $w(0) = 0$ şi $|w(z)| < 1,\ z \in U$ astfel încât $f(z) = g(w(z)),\ z \in U$.*

1.4 Funcţii stelate. Funcţii convexe

Noţiunea de funcţie stelată a fost introdusă de J. Alexander [2] în 1915.

Definiţia 1.4.1 *Fie funcţia $f \in \mathcal{H}(U)$ cu $f(0) = 0$. Spunem că funcţia f este stelată în raport cu originea (sau, pe scurt stelată) dacă f este univalentă în U şi $f(U)$ este un domeniu stelat în raport cu originea.*

Teorema 1.4.2 *[79] Fie funcţia $f \in \mathcal{H}(U)$ cu $f(0) = 0$. Funcţia f este stelată dacă şi numai dacă $f'(0) \neq 0$ şi*

$$\mathrm{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)} > 0,\ z \in U. \tag{1.4.1}$$

Definiţia 1.4.3 *[79] Notăm cu S^* clasa funcţiilor $f \in \mathcal{A}$ care sunt stelate (şi normate) în discul unitate, adică*

$$S^* = \left\{ f \in \mathcal{A} : \mathrm{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)} > 0,\ z \in U \right\}.$$

Noţiunea de funcţie convexă a fost introdusă de E. Study [110] în 1913.

Definiţia 1.4.4 *Funcţia f se numeşte convexă în U (sau, pe scurt convexă) dacă funcţia f este univalentă în U şi $f(U)$ este un domeniu convex.*

Teorema 1.4.5 *[79] Fie funcţia $f \in \mathcal{H}(U)$. Atunci f este convexă dacă şi numaii dacă $f'(0) \neq 0$ şi*

$$\mathrm{Re}\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1 > 0,\ z \in U. \tag{1.4.2}$$

Definiţia 1.4.6 *Notăm cu K clasa funcţiilor $f \in \mathcal{A}$ care sunt convexe în discul unitate*

$$K = \left\{ f \in \mathcal{A} : \mathrm{Re}\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1 > 0,\ z \in U \right\}.$$

1.5 Funcţii a căror derivată are partea reală pozitivă

1.6 Subordonări diferenţiale

Metoda subordonărilor diferenţiale (sau a funcţiilor admisibile) este una din cele mai noi metode folosite în teoria geometrică a funcţiilor analitice. Bazele aceste teorii au fost puse de S.S. Miller şi P.T. Mocanu în lucrările [73], [74].

Definiţia 1.6.1 *Vom nota cu $\mathcal{Q}$ mulţimea funcţiilor q care sunt olomorfe şi injective pe $\overline{U} \setminus E(q)$, unde*

$$E(q) = \left\{ \zeta \in \partial U : \lim_{z \to \zeta} q(z) = \infty \right\},$$

şi în plus $q'(\zeta) \neq 0$ pentru $\zeta \in \partial U \setminus E(q)$.

Lema 1.6.2 *[56],[73] (lema lui I.S. Jack, S.S. Miller, P.T. Mocanu) Fie $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ cu $0 < r_0 < 1$ şi fie $f(z) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \cdots$ o funcţie continuă în $\overline{U}_{r_0}$ şi analitică în $U_{r_0} \cup \{z_0\}$ cu $f(z) \not\equiv 0$ şi $n \geq 1$. Dacă*

$$|f(z_0)| = \max\{|f(z)| : z \in \overline{U}_{r_0}\}$$

atunci există un număr real m, $m \geq n$, astfel încât *(i)* $\dfrac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)} = m$

(ii) $\mathrm{Re}\dfrac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)} + 1 \geq m.$

Teorema 1.6.3 *[51] (D.J. Hallenbeck, St. Ruschweyh) Fie funcţia convexă* h*, cu* $h(0) = a$ *şi fie* $\gamma \in \mathbb{C}^*$ *astfel încât* $\mathrm{Re}\,\gamma \geq 0$*. Dacă funcţia* $p \in \mathcal{H}[a, n]$ *şi*

$$p(z) + \frac{1}{\gamma} z p'(z) \prec h(z)$$

atunci

$$p(z) \prec q(z) \prec h(z)$$

unde

$$q(z) = \frac{\gamma}{n z^{\frac{\gamma}{n}}} \int_0^z h(t) t^{\frac{\gamma}{n} - 1} dt.$$

Funcţia q *este convexă şi este cea mai bună* (a, n) *dominantă a subordonării.*

1.7 Superordonări diferenţiale

Problema duală a subordonărilor diferenţiale, cea a determinării de subordonate pentru superordonări diferenţiale a fost iniţiată de S.S. Miller şi P.T. Mocanu [76] în anul 2003.

Teorema 1.7.1 *[76] Fie* h *o funcţie convexă în* U*, cu* $h(0) = a$*,* $\gamma \neq 0$*,* $\mathrm{Re}\gamma \geq 0$ *şi* $p \in \mathcal{H}[a, n] \cap \mathcal{Q}$*. Dacă* $p(z) + \dfrac{z p'(z)}{\gamma}$ *este univalentă în* U*,*

$$h(z) \prec p(z) + \frac{z p'(z)}{\gamma}$$

atunci

$$q(z) \prec p(z),$$

unde

$$q(z) = \frac{\gamma}{n z^{\frac{\gamma}{n}}} \int_0^z h(t) t^{\frac{\gamma}{n} - 1} dt.$$

Funcţia q *este convexă şi este cea mai bună subordonantă.*

Teorema 1.7.2 *[76] Fie* q *o funcţie convexă în* U *şi* h *definită astfel*

$$h(z) = q(z) + \frac{z q'(z)}{\gamma}, \ z \in U$$

cu $\gamma \neq 0$*,* $\mathrm{Re}\gamma \geq 0$*. Dacă* $p \in \mathcal{H}[a, n] \cap \mathcal{Q}$*, şi* $p(z) + \frac{z p'(z)}{\gamma}$ *este o funcţie univalentă în* U *cu*

$$h(z) \prec p(z) + \frac{z p'(z)}{\gamma}, \ z \in U$$

atunci

$$q(z) \prec p(z),$$

unde

$$q(z) = \frac{\gamma}{n z^{\frac{\gamma}{n}}} \int_0^n h(t) t^{\frac{\gamma}{n} - 1} dt.$$

Funcţia q *este cea mai bună subordonantă.*

1.8 Lanţuri de subordonare. Ecuaţia diferenţială Loewner

Metoda lanţurilor de subordonare sau a lanţurilor Loewner a fost introdusă de Loewner [70] în anul 1923 şi dezvoltată apoi de către alţi matematicieni (P.P. Kufarev [66] 1943, Ch. Pommerenke [96] 1965, G.S. Goodman [38] 1968).

Definiţia 1.8.1 *Funcţia* $f : U \times [0, \infty) \to \mathbb{C}$, *cu* $f(z, t)$ *de forma*

$$f(z,t) = e^t z + a_2(t)z^2 + \cdots , \ |z| < 1$$

este un lanţ de subordonare (sau lanţ Loewner) dacă: $f(\cdot, t)$ *este olomorfă şi univalentă în* U, *pentru orice* $t \in [0, \infty)$ *şi*

$$f(z, s) \prec f(z, t) \tag{1.8.1}$$

pentru $0 \leq s \leq t < \infty$.

Teorema 1.8.2 *[96] O familie de funcţii* $\{f(z, t)\}_{t \geq 0}$ *cu* $f(0, t) = 0, \ f'(0, t) = e^t$ *este un lanţ Loewner dacă şi numai dacă următoarele condiţii sunt adevărate:*

(i) Există $r \in (0, 1)$ *şi o constantă* $M \geq 0$ *astfel încât* $f(\cdot, t)$ *este olomorfă pe* U_r *pentru orice* $t \geq 0$, *local absolut continuă în* $t \geq 0$, *local uniform în raport cu* $z \in U_r$, *şi*

$$|f(z,t)| \leq Me^t, \ |z| \leq r, \ t \geq 0.$$

(ii) Există o funcţie $p(z, t)$ *astfel încât* $p(\cdot, t) \in \mathcal{P}$ *pentru orice* $t \geq 0$, $p(z, \cdot)$ *este măsurabilă pe* $[0, \infty)$ *pentru fiecare* $z \in U$, *şi pentru orice* $z \in U_r$,

$$\frac{\partial f}{\partial t}(z,t) = zf'(z,t)p(z,t), \ a.p.t. \ t \geq 0. \tag{1.8.2}$$

(iii) Pentru orice $t \geq 0$, $f(\cdot, t)$ *este prelungirea continuă a lui* $f(\cdot, t)\,|_{U_r}$ *la* U, *şi mai mult ea există în condiţiile (i) şi (ii).*

1.9 Operatori integrali

În 1983 Gr. Şt. Sălăgean [104] a definit doi operatori pe baza cărora s-au obţinut de-a lungul timpului rezultate remarcabile în teoria geometrică a funcţiilor univalente. Pe parcursul tezei folosim operatorul integral definit astfel:

Definiţia 1.9.1 *Fie* $f \in \mathcal{H}(U)$, $f(0) = 0$. *Definim operatorul integral* I^m, $m \in \mathbb{N}$, *prin*

(i) $I^0 f(z) = f(z)$

(ii) $I^1 f(z) = If(z) = \int_0^z f(t)t^{-1}dt$

(iii) $I^m f(z) = I(I^{m-1} f(z))$.

Capitolul 2

Funcţii univalente de mai multe variabile complexe

Acest capitol este dedicat prezentării unor rezultate din teoria geometrică a funţiilor univalente de mai multe variabile complexe, astfel sunt tratate câteva clase de aplicaţii biolomorfe, automorfismele bilei unitate Euclidiene, metoda lanţurilor Loewner, generalizări ale operatorului extins Roper-Suffridge, respectiv Pfaltzgraff-Suffridge. În general, sunt prezentate doar rezultate obţinute pe bila unitate Euclidiană din $\mathbb{C}^n$.

2.1 Funcţii olomorfe în $\mathbb{C}^n$. Aplicaţii biolomorfe

2.2 Automorfismele bilei unitate Euclidiene

2.3 Generalizări ale funcţiilor cu partea reală pozitivă

Fie $\mathbb{C}^n$ spaţiul n-dimensional complex înzestrat cu norma arbitrară $\|\cdot\|$. Pentru orice $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, fie

$$T(z) = \{l_z \in L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}) : \ l_z(z) = \|z\|, \ \|l_z\| = 1\}.$$

În cazul normei Euclidiene $\|\cdot\|$, dacă $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ şi $l_z \in T(z)$, atunci

$$l_z(w) = \left\langle w, \frac{z}{\|z\|} \right\rangle, \quad w \in \mathbb{C}^n.$$

Pe lângă $T(z)$, un rol important îl joacă următoarele clase:

$$\mathcal{N}_0 = \{w : B^n \to \mathbb{C}^n, \ w \in \mathcal{H}(B^n), \ w(0) = 0, \ \mathrm{Re}\,\langle w(z), z\rangle \geq 0, \ z \in B^n\}$$
$$\mathcal{N} = \{w : B^n \to \mathbb{C}^n, \ w \in \mathcal{H}(B^n), \ w(0) = 0, \ \mathrm{Re}\,\langle w(z), z\rangle > 0, \ z \in B^n \setminus \{0\}\}$$
$$\mathcal{M} = \{w \in \mathcal{N} : \ Dw(0) = I_n\}.$$

2.4 Aplicaţii stelate. Aplicaţii convexe

În acest paragraf sunt prezentate aplicaţii stelate şi aplicaţii convexe pe bila unitate Euclidiană, dar rezultatele sunt valabile şi în cazul normei arbitrare [36], [44].

Definiţia 2.4.1 *Fie $f : B^n \to \mathbb{C}^n$ o aplicaţie olomorfă. Spunem că f este o aplicaţie stelată dacă f este biolomorfă, $f(0) = 0$ şi $f(B^n)$ este un domeniu stelat în raport cu originea ($tf(z) \subseteq f(B^n)$ pentru orice $z \in B^n$ şi $t \in [0,1]$).*

Notăm cu $S^*(B^n)$ clasa aplicaţiilor normate şi stelate din B^n.

Teorema de caracterizare pentru aplicaţiile stelate este dată de Matsuno în 1955 [72]. Teorema a fost generalizată pe bila unitate din $\mathbb{C}^n$ în raport cu norma arbitrară şi respectiv pe bila unitate din spaţiul complex Banach de către Suffridge [112], [113].

Teorema 2.4.2 *Dacă $f : B^n \to \mathbb{C}^n$ este o aplicaţie local biolomorfă cu $f(0) = 0$, atunci f este stelată pe B^n dacă şi numai dacă există $h \in \mathcal{M}$ astfel încât*

$$f(z) = Df(z)h(z), \quad z \in B^n$$

i.e.

$$\operatorname{Re}\langle [Df(z)]^{-1} f(z), z\rangle > 0, \quad z \in B^n \setminus \{0\}.$$

Definiţia 2.4.3 *Aplicaţia $f : B^n \to \mathbb{C}^n$ se numeşte convexă dacă f este biolomorfă pe B^n şi $f(B^n)$ este un domeniu convex ($(1-t)f(z) + tf(w) \in f(B^n)$ pentru $z, w \in B^n$ şi $t \in [0,1]$).*

Notăm $K(B^n)$ clasa aplicaţiilor normate şi convexe din B^n.

Teorema de caracterizare analitică a convexităţii în cazul aplicaţiilor local biolomorfe a fost obţinută prin metode diferite de către Kikuchi în 1973 [57] şi de către Gong, Wang, Yu [37] în 1993.

Teorema 2.4.4 *Fie $f : B^n \to \mathbb{C}^n$ o aplicaţie local biolomorfă. Atunci f este convexă dacă şi numai dacă*

$$1 - \operatorname{Re}\langle [Df(z)]^{-1} D^2 f(z)(v,v), z\rangle > 0,$$

pentru orice $z \in B^n$ astfel încât $\|v\| = 1$ şi $\operatorname{Re}\langle z, v\rangle = 0$.

2.5 Lanţuri Loewner şi ecuaţia diferenţială Loewner în $\mathbb{C}^n$

Metoda lanţurilor Loewner la mai multe variabile a fost generalizată de către Pfaltzgraff [89] în 1974. Poreda [99] a rafinat rezultatele astfel încât s-au obţinut generalizări pe bila unitate a spaţiului Banach. De asemenea, rezultate remarcabile privind teoria lanţurilor Loewner în $\mathbb{C}^n$ se regăsesc în lucrările autorilor Graham, Hamada, Kohr [40], Graham, Kohr, Kohr [45], Graham, Kohr [44].

Definiţia 2.5.1 *O aplicaţie $f : B^n \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^n$ se numeşte lanţ de subordonare dacă satisface următoarele condiţii:*

(i) $f(\cdot,t) \in \mathcal{H}(B^n)$ şi $Df(0,t) = \varphi(t)I_n$, $t \geq 0$, unde $\varphi : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ este funcţie continuă pe $[0,\infty)$ astfel încât $\varphi(t) \neq 0$, $t \geq 0$, $|\varphi(\cdot)|$ este strict crescătoare pe $[0,\infty)$, şi $|\varphi(t)| \to \infty$ când $t \to \infty$;

(ii) $f(\cdot,s) \prec f(\cdot,t)$, când $0 \leq s \leq t < \infty$, adică există o aplicaţie Schwarz $v_{s,t}(\cdot) = v(\cdot,s,t)$, numită aplicaţie de tranziţie asociată lui $f(z,t)$, astfel încât $f(z,s) = f(v(z,s,t),t)$, $0 \leq s \leq t < \infty$, $z \in B^n$.

Un lanţ de subordonare se numeşte lanţ de subordonare univalent (sau lanţ Loewner) dacă în plus $f(\cdot,t)$ este univalentă în B^n pentru orice $t \geq 0$. Spunem că $f(z,t)$ este lanţ Loewner normat dacă $Df(0,t) = e^t I_n$.

Teorema 2.5.2 *Fie $f(z,t)$ un lanţ Loewner. Atunci există o aplicaţie $h = h(z,t)$ astfel încât $h(\cdot,t) \in \mathcal{M}$ pentru orice $t \geq 0$, $h(z,t)$ este măsurabilă în t pentru orice $z \in B^n$, şi pentru aproape toţi $t \geq 0$,*

$$\frac{\partial f}{\partial t}(z,t) = Df(z,t)h(z,t), \ \forall \ z \in B^n. \tag{2.5.1}$$

(există o mulţime de măsură nulă $E \subset (0,\infty)$ astfel încât pentru orice $t \in [0,\infty) \setminus E$, $\dfrac{\partial f}{\partial t}(\cdot,t)$ există şi este olomorfă în B^n). Pentru $t \in [0,\infty) \setminus E$ şi $z \in B^n$, (2.5.1) este adevărată.

Mai mult, dacă există un şir $\{t_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ astfel încât $t_m > 0$, $t_m \to \infty$ şi

$$\lim_{m\to\infty} e^{-t_m} f(z,t_m) = F(z) \tag{2.5.2}$$

local uniform în B^n, atunci

$$f(z,s) = \lim_{t\to\infty} e^t w(z,s,t)$$

local uniform în B^n pentru orice $s \geq 0$, unde $w(t) = w(z,s,t)$ este soluţia problemei

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -h(w,t), \ \text{a.p.t. } t \geq s, \ w(s) = z$$

pentru orice $z \in B^n$.

Ca şi consecinţă a Teoremei 2.5.2 avem că aplicaţiile de tranziţie generează lanţurile Loewner, astfel:

Corolar 2.5.3 *[28], [40], [44] Fie $f : B^n \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^n$ lanţ Loewner şi fie $v = v(z,s,t)$ aplicaţia de tranziţie asociată lui $f(z,t)$. Presupunem că $\{e^{-t}f(z,t)\}_{t\geq 0}$ este familie normală. Atunci pentru orice $s \geq 0$, are loc limita*

$$f(z,s) = \lim_{t\to\infty} e^t v(z,s,t)$$

local uniform pe B^n.

Corolar 2.5.4 *[28], [40], [46] Fie $f(z,t)$ un lanţ Loewner astfel încât $\{e^{-t}f(z,t)\}_{t\geq 0}$ este o familie normală. Atunci*

$$\frac{\|z\|}{(1+\|z\|)^2} \leq \|e^{-t}f(z,t)\| \leq \frac{\|z\|}{(1-\|z\|)^2}, \quad z \in B^n, \ t \geq 0. \tag{2.5.3}$$

În particular, dacă $f(z) = f(z,0)$ atunci

$$\frac{\|z\|}{(1+\|z\|)^2} \leq \|f(z)\| \leq \frac{\|z\|}{(1-\|z\|)^2}, \ z \in B^n.$$

Teorema 2.5.5 *[46] Orice şir de lanţuri Loewner $\{f_k(z,t)\}_{k\in\mathbb{N}}$, astfel încât $\{e^{-t}f_k(z,t)\}_{t\geq 0}$ este o familie normală în B^n pentru orice $k \in \mathbb{N}$, conţine un subşir care converge local uniform în B^n către un lanţ Loewner $f(z,t)$ pentru orice $t \geq 0$ fixat, astfel încât $\{e^{-t}f(z,t)\}_{t\geq 0}$ este familie normală în B^n.*

2.6 Aplicaţii spiralate

Pentru un operator liniar $A \in L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ introducem notaţia

$$m(A) = \min\{\mathrm{Re}\,\langle A(z), z\rangle : \ \|z\| = 1\}.$$

Definiţia 2.6.1 *Fie $f : B^n \to \mathbb{C}^n$ o aplicaţie normată biolomorfă din B^n. Fie $A \in L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ astfel încât $m(A) > 0$. Vom spune că f este spiralată relativ la A dacă $e^{-tA} f(B^n) \subseteq f(B^n)$ pentru orice $t \geq 0$, unde*

$$e^{-tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} t^k A^k. \tag{2.6.1}$$

Teorema 2.6.2 *Fie $A \in L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ astfel încât $m(A) > 0$ şi fie $f : B^n \to \mathbb{C}^n$ o aplicaţie normată şi biolomorfă. Atunci f este spiralată relativ la A dacă şi numai dacă*

$$[Df(z)]^{-1} A f(z) \in \mathcal{N}.$$

În particular dacă $A = e^{-i\alpha} I_n$ pentru $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, Hamada şi Kohr [52] au studiat o clasă de aplicaţii numite spiralate de tip α.

În acest caz condiţia (2.6.1) se reduce la

$$e^{-i\alpha} [Df(z)]^{-1} f(z) \in \mathcal{N}. \tag{2.6.2}$$

Dacă $A = e^{-i\alpha}$, $\alpha \in (\pi/2, \pi/2)$ din Definiţia 2.6.1 vom deduce noţiunea uzuală de spiralitate de tip α în discul unitate, noţiune introdusă de L. Špaček în 1932 [107].

În teorema următoare dată de Pommerenke [95] este prezentată o condiţie necesară şi suficentă de spiraliate de tip α pentru funcţii olomorfe.

Teorema 2.6.3 *Presupunem că f este o fucţie olomorfă normată în U, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ şi $a = \tan\alpha$. Atunci f este spiralată de tip α dacă şi numai dacă*

$$F(z,t) = e^{(1-ia)t} f(e^{iat} z), \ z \in U, \ t \geq 0,$$

este un lanţ Loewner. În particular, f este stelată dacă şi numai dacă $F(z,t) = e^t f(z)$ este un lanţ Loewner.

Hamada şi Kohr [52] au arătat că şi aplicaţiile spiralate de tip α pot fi scufundate în lanţuri Loewner.

Teorema 2.6.4 *Fie $f : B^n \to \mathbb{C}^n$ o aplicaţie local biolomorfă normată şi fie $\alpha \in \mathbb{R}$, $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$. Atunci f este aplicaţie spiralată de tip α dacă $f(z,t)$ dată prin*

$$f(z,t) = e^{(1-ia)t} f(e^{iat} z), \quad z \in B^n, \ t \geq 0,$$

unde $a = \tan\alpha$, este lanţ Loewner.

2.7 Aplicaţii aproape stelate de ordinul α

O noţiune pe care o vom folosi pe parcursul lucrării este cea de aproape stelaritate de ordin α, unde $\alpha \in [0,1)$. Următoarea definiţie a fost introdusă de G. Kohr [59], [62] în cazul bilei unitate Euclidiene şi $\alpha = \frac{1}{2}$ şi de Feng [32] în cazul bilei unitate a spaţiului Banach complex X şi $\alpha \in [0,1)$. Vom prezenta aceată noţiune pentru cazul bilei Euclidiene.

Definiţia 2.7.1 *Presupunem $0 \leq \alpha < 1$. O aplicaţie local biolomorfă normată $f : B^n \to \mathbb{C}^n$ se numeşte aproape stelată de ordin α dacă*

$$\mathrm{Re}\langle [Df(z)]^{-1} f(z), z\rangle > \alpha \|z\|^2, \;\; z \in B^n \setminus \{0\}. \tag{2.7.1}$$

În cazul unei variabile complexe inegalitatea (2.7.1) devine

$$\mathrm{Re}\frac{f(z)}{zf'(z)} > \alpha, \;\; z \in U.$$

Q.H. Xu şi T.S. Liu [68] au demonstrat următoarea caracterizare a aproape stelarităţii de ordin α în termeni de lanţuri Loewner.

Teorema 2.7.2 *Presupunem că f este o funcţie olomorfă normată în U şi $0 \leq \alpha < 1$. Atunci f este o funcţie aproape stelată de ordin α dacă şi numai dacaă*

$$F(z,t) = e^{\frac{1}{1-\alpha}t} f(e^{\frac{\alpha}{\alpha-1}t} z), \;\; z \in U, \;\; t \geq 0,$$

este un lanţ Loewner. În particular, f este funcţie stelată (i.e., $\alpha = 0$) dacă şi numai dacă $F(z,t) = e^t f(z)$ este un lanţ Loewner.

Următorul rezultat dat tot de Q.H. Xu şi T.S. Liu [68] este o generalizare a Teoremei 2.7.2 pentru cazul n-dimensional. Rezultatul original a fost obţinut pe bila unitate a lui $\mathbb{C}^n$ în raport cu norma arbitrară.

Teorema 2.7.3 *Presupunem că f este o aplicaţie local biolomorfă normată în B^n şi $0 \leq \alpha < 1$. Atunci f este aproape stelată de ordin α dacă şi numai dacă*

$$F(z,t) = e^{\frac{t}{1-\alpha}} f(e^{\frac{\alpha}{\alpha-1}t} z), \;\; z \in B^n, \;\; t \geq 0,$$

este un lanţ Loewner. În particular, f este stelată (i.e. $\alpha = 0$) dacă şi numai dacă $F(z,t) = e^t f(z)$ este lanţ Loewner.

2.8 Generalizări ale operatorului extins Roper-Suffridge. Operatorul Pfaltzgraff-Suffridge

În spaţiul euclidian n-dimensional $\mathbb{C}^n$, fie $\widetilde{z} = (z_2, \cdots, z_n)$ astfel încât $z = (z_1, \widetilde{z})$.

Operatorul extins Roper-Suffridge este definit pentru funcţii local univalente normate în discul unitate U prin

$$\Phi_n(f)(z) = F(z) = \left(f(z_1), \sqrt{f'(z_1)}\widetilde{z} \right). \tag{2.8.1}$$

Considerăm ramura radicalului pentru care $\sqrt{f'(0)} = 1$.

Acest operator a fost introdus de către Roper şi Suffridge în 1995 cu scopul de a extinde o funcţie convexă arbitrară din discul unitate U la o aplicaţie convexă din bila unitate Euclidiană a lui $\mathbb{C}^n$.

I. Graham, G. Kohr, M. Kohr [45] au generalizat acest operator la

$$\Phi_{n,\gamma}(f)(z) = \left(f(z_1), \left(f'(z_1)\right)^{\gamma} \widetilde{z}\right), \tag{2.8.2}$$

unde $\gamma \in [0, \frac{1}{2})$ şi considerăm ramura funcţiei putere astfel încât $(f'(z))^{\gamma} \mid_{z_1=0} = 1$.

Teorema 2.8.1 *[45] Presupunem că $f \in S$ şi $\gamma \in [0, \frac{1}{2}]$, atunci $\Phi_{n,\gamma}(f)$ poate fi scufundat într-un lanţ Loewner, unde*

$$\Phi_{n,\gamma}(f)(z) = \left(f(z_1), \left(f'(z_1)\right)^{\gamma} \widetilde{z}\right), \ z = (z_1, \widetilde{z}) \in B^n$$

şi $z_1 \in U$, $\widetilde{z} = (z_2, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$. Ramura funcţiei putere este dată astfel încât

$$\left(f'(z_1)\right)^{\gamma} \mid_{z_1=0} = 1.$$

În [42] I. Graham şi G. Kohr au introdus un alt operator extins Roper-Suffridge

$$\Phi_{n,\beta}(f)(z) = \left(f(z_1), \left(\frac{f(z_1)}{z_1}\right)^{\beta} \widetilde{z}\right), \tag{2.8.3}$$

unde $\beta \in [0, 1]$. Considerăm ramura funcţiei putere astfel încât $\left(\frac{f(z_1)}{z_1}\right)^{\beta} \mid_{z_1=0} = 1$.

Teorema 2.8.2 *[43] Presupunem că $f \in S$ şi $\beta \in [0, 1]$, atunci $\Phi_{n,\alpha}(f)$ poate fi scufundat într-un lanţ Loewner, unde*

$$\Phi_{n,\beta}(f)(z) = \left(f(z_1), \left(\frac{f(z_1)}{z_1}\right)^{\beta} \widetilde{z}\right), \ z \in (z_1, \widetilde{z}) \in B^n,$$

şi $z_1 \in U$, $\widetilde{z} = (z_2, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$. Considerăm ramura funcţiei putere astfel încât $\left(\frac{f(z_1)}{z_1}\right)^{\beta} \mid_{z_1=0} = 1$.

În 2002, I. Graham, H. Hamada, G. Kohr şi T. Suffridge [41] au dat o altă generalizare a operatorului extins Roper-Suffridge de forma

$$\Phi_{n,\beta,\gamma}(f)(z) = \left(f(z_1), \left(\frac{f(z_1)}{z_1}\right)^{\beta} (f'(z_1))^{\gamma} \widetilde{z}\right), \tag{2.8.4}$$

unde $\beta \in [0, 1]$ şi $\gamma \in [0, \frac{1}{2}]$ astfel încât $\beta + \gamma \leq 1$. Considerăm ramurile funcţiei putere pentru care $\left(\frac{f(z_1)}{z_1}\right)^{\beta} \mid_{z_1=0} = 1$ şi $(f'(z_1))^{\gamma} \mid_{z_1=0} = 1$.

Teorema 2.8.3 *[41] Presupunem că $f \in S$ şi $\beta \in [0, 1]$, $\gamma \in [0, \frac{1}{2}]$ cu $\gamma + \beta \leq 1$, atunci*

$$\Phi_{n,\beta,\gamma}(f)(z) = \left(f(z_1), \left(\frac{f(z_1)}{z_1}\right)^{\beta} (f'(z_1))^{\gamma} \widetilde{z}\right), \ z = (z_1, \widetilde{z}) \in B^n,$$

şi $z_1 \in U$, $\widetilde{z} = (z_2, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$. Considerăm ramura funcţiei putere astfel încât $\left(\frac{f(z_1)}{z_1}\right)^{\beta} \mid_{z_1=0} = 1$ şi $(f'(z_1))^{\gamma} \mid_{z_1=0} = 1$.

Pentru $n \geq 1$, mulţimea $z' = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ şi $z = (z', z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$.

Un alt operator care extinde aplicaţii (local) univalente din B^n la aplicaţii (local) univalente din B^{n+1} este operatorul introdus de Pfaltzgraf şi Suffridge [91].

Definiţia 2.8.4 *Operatorul extins Pfaltzgraff-Suffridge* $\Psi_n : \mathcal{L}S_n \to \mathcal{L}S_{n+1}$ *este definit prin*

$$\Psi_n(f)(z) = \left(f(z'), z_{n+1}[J(z')]^{\frac{1}{n+1}}\right), \; z = (z', z_{n+1}) \in B^{n+1}. \tag{2.8.5}$$

Considerăm ramura funcţiei putere astfel încât

$$[J_f(z')]^{\frac{1}{n+1}} \mid_{z'=0} = 1.$$

Capitolul 3

Aplicaţii ale metodelor subordonărilor şi superordonărilor diferenţiale

În acest capitol sunt definite clase de funcţii univalente pe discul unitate U al planului complex. Pentru definirea unor clase s-a folosit operatorul integral $I^m f$ prezentat în paragraful 1.9. Folosind metoda subordonărilor şi superordonărilor diferenţiale sunt puse în evidenţa proprietăţi ale acestor clase şi de asemenea sunt prezentate exemple concrete de subordonante ale unor superordonări diferenţiale.

Rezultatele acestui capitol sunt originale şi sunt cuprinse în lucrările [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [13].

3.1 Subordonări diferenţiale definite cu operatorul integral

În acest paragraf este definită o nouă clasă de funcţii univalente, folosind operatorul integral $I^m f$. Folosind metoda subordonărilor diferenţiale sunt puse in evidenţă proprietăţi ale acestei clase.

Definiţia 3.1.1 *Dacă $0 \leq \alpha < 1$ şi $m \in \mathbb{N}$, fie $\mathcal{I}_n^m(\alpha)$ clasa funcţiilor $f \in \mathcal{A}_n$ care satisfac inegalitatea*

$$\mathrm{Re}[I^m f(z)]' > \alpha.$$

Observaţia 3.1.2 *Pentru $m = 0$, se obţine*

$$\mathrm{Re} f'(z) > \alpha, \ z \in U.$$

În cazul în care $f \in \mathcal{A}$ se obţine următoarea definiţie.

Definiţia 3.1.3 *Dacă $0 \leq \alpha < 1$ şi $m \in \mathbb{N}$, fie $\mathcal{I}^m(\alpha)$ clasa funcţiilor $f \in \mathcal{A}$ care satisfac inegalitatea*

$$\mathrm{Re}[I^m f(z)]' > \alpha.$$

Se observă că în acest caz pentru $m = 0$ se obţine clasa funcţiilor cu rotaţie mărginită.

Teorema 3.1.4 *[10] Dacă* $0 \leq \alpha < 1$ *şi* $m, n \in \mathbb{N}$*, atunci avem*

$$\mathcal{I}_n^m(\alpha) \subset \mathcal{I}_n^{m+1}(\delta),$$

unde

$$\delta(\alpha, n) = 2\alpha - 1 + 2(1-\alpha)\frac{1}{n}\beta(\frac{1}{n})$$

şi

$$\beta(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}dt.$$

Rezultatul este exact.

Pentru clasa $\mathcal{I}^m(\alpha)$ obţinem următorul rezultat.

Corolar 3.1.5 *[4] Dacă* $0 \leq \alpha < 1$ *şi* $m \in \mathbb{N}$*, atunci au loc incluziunile*

$$\mathcal{I}^m(\alpha) \subset \mathcal{I}^{m+1}(\delta),$$

unde

$$\delta = \delta(\alpha) = 2\alpha - 1 + 2(1-\alpha)\ln 2$$

iar acest rezultat este exact.

Teorema 3.1.6 *[10] Fie* q *o funcţie convexă cu* $q(0) = 1$ *şi fie* h *o funcţie astfel încât*

$$h(z) = q(z) + nzq'(z),\ z \in U.$$

Dacă $f \in \mathcal{A}_n$ *şi verifică subordonarea diferenţială*

$$[I^m f(z)]' \prec h(z) \tag{3.1.1}$$

atunci

$$\left[I^{m+1} f(z)\right]' \prec q(z),\ z \in U$$

iar acest rezultat este exact.

Pentru clasa $\mathcal{A}$ se obţine următorul corolar.

Teorema 3.1.7 *[10] Fie* $h \in \mathcal{H}(U)$*, cu* $h(0) = 1$*,* $h'(0) \neq 0$*, care verifică*

$$\text{Re}\left[1 + \frac{zh''(z)}{h'(z)}\right] > -\frac{1}{2n},\ z \in U,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Dacă $f \in \mathcal{A}_n$ *şi verifică subordonarea diferenţială*

$$[I^m f(z)]' \prec h(z), \tag{3.1.2}$$

atunci

$$\left[I^{m+1} f(z)\right]' \prec q(z),\ z \in U$$

unde

$$q(z) = \frac{1}{nz^{\frac{1}{n}}} \int_0^z h(t)t^{\frac{1}{n}-1}dt,\ z \in U.$$

Funcţia q *este convexă şi este cea mai bună dominantă.*

Teorema 3.1.8 *[10] Fie q o funcţie convexă, $q(0) = 1$, şi*

$$h(z) = q(z) + nzq(z).$$

Dacă $f \in \mathcal{A}_n$ şi verifică subordonarea diferenţială

$$[I^m f(z)]' \prec h(z) \tag{3.1.3}$$

atunci

$$\frac{I^m f(z)}{z} \prec q(z), \ z \in U, z \neq 0.$$

Rezultatul este exact.

Teorema 3.1.9 *[10] Fie $h \in \mathcal{H}(U)$, $h(0) = 0$, $h'(0) \neq 0$ care satisface inegalitatea*

$$\operatorname{Re}\left[1 + \frac{zh''(z)}{h'(z)}\right] > -\frac{1}{2n}, \ z \in U.$$

Dacă $f \in A_n$ şi verifică subordonarea diferenţială

$$[I^m f(z)]' \prec h(z) \tag{3.1.4}$$

atunci

$$\frac{I^m f(z)}{z} \prec q(z), \ z \in U, \ z \neq 0,$$

unde

$$q(z) = \frac{1}{nz^{\frac{1}{n}}} \int_0^z h(t) t^{\frac{1}{n}-1} dt, \ z \in U.$$

Funcţia q este convexă şi este cea mai bună dominantă.

Observaţia 3.1.10 *În cazul particular $n = 1$ aceste teoreme au fost studiate în [4] şi sunt incluse în teză ca şi corolare.*

Observaţia 3.1.11 *Pentru operatorul diferenţial rezultate similare au fost obţinute în lucrările [85], [86], [88].*

3.2 O clasă de funcţii univalente obţinută cu ajutorul operatorului integral aplicat funcţiilor meromorfe

Pentru $k \geq 0$, vom nota prin Σ_k clasa funcţiilor meromorfe definite pe $\dot{U}$ şi care au forma

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=k}^{\infty} a_n z^n.$$

Definiţia 3.2.1 *Dacă $0 \leq \alpha < 1$, $k \in \mathbb{Z}_+$ şi $m \in \mathbb{N}$, vom nota $\Sigma_k(\alpha, m)$ clasa funcţiilor $f \in \Sigma_k$ care satisfac inegalitatea*

$$\operatorname{Re}\left[I^m(z^2 f(z))\right]' > \alpha, \ z \in \dot{U}. \tag{3.2.1}$$

Teorema 3.2.2 *[6] Fie $0 \leq \alpha < 1$, $k \in \mathbb{Z}_+$ şi $m \in \mathbb{N}$. Atunci au loc incluziunile*

$$\Sigma_k(\alpha, m) \subset \Sigma_k(\delta, m+1), \tag{3.2.2}$$

unde

$$\delta = \delta(\alpha, m) = 2\alpha - 1 + 2(1-\alpha)\frac{1}{k+1}\beta\left(\frac{1}{k+1}\right)$$

şi

$$\beta(x) = \int_0^z \frac{t^{x-1}}{1+t}dt.$$

Teorema 3.2.3 *[6] Fie q o funcţie convexă, $q(0) = 1$ şi fie h o funcţie dată prin următoarea egalitate*

$$h(z) = q(z) + z(k+1)q'(z), \ z \in U.$$

Dacă $f \in \Sigma_k(\alpha, m)$ şi verifică subordonarea diferenţială

$$\left[I^m(z^2 f(z))\right]' \prec h(z), \ z \in \dot{U} \tag{3.2.3}$$

atunci

$$\left[I^{m+1}(z^2 f(z))\right]' \prec q(z), \ z \in \dot{U}$$

iar acest rezultat este exact.

Teorema 3.2.4 *[6] Fie q o funcţie convexă cu $q(0) = 1$ şi*

$$h(z) = q(z) + z(k+1)q'(z), \ z \in U.$$

Dacă $f \in \Sigma_k(\alpha, n)$ şi verifică subordonarea diferenţială

$$\left[I^m(z^2 f(z))\right]' \prec h(z), \ z \in \dot{U} \tag{3.2.4}$$

atunci

$$\frac{I^m(z^2 f(z))}{z} \prec q(z), \ z \in \dot{U}$$

iar rezultatul este exact.

Teorema 3.2.5 *[6] Fie $h \in \mathcal{H}(U)$, cu $h(0) = 1$, şi $h'(0) \neq 0$ care verifică inegalitatea*

$$\mathrm{Re}\left[1 + \frac{zh''(z)}{h'(z)}\right] > -\frac{1}{2}, \ z \in U.$$

Dacă $f \in \Sigma_k(\alpha, m)$ şi verifică subordonarea diferenţială

$$\left[I^m(z^2 f(z))\right]' \prec h(z), \ z \in \dot{U} \tag{3.2.5}$$

atunci

$$\left[I^{m+1}(z^2 f(z)\right]' \prec q(z), \ z \in \dot{U}$$

unde

$$q(z) = \frac{1}{(k+1)z^{\frac{1}{k+1}}} \int_0^z h(t) t^{\frac{1}{k+1}-1} dt, \ z \in U. \tag{3.2.6}$$

Funcţia q este convexă şi este cea mai bună $(1, k+1)$ dominantă.

Teorema 3.2.6 *[6] Fie $h \in \mathcal{H}(U)$ cu $h(0) = 1$, $h'(0) \neq 0$, care verifică inegalitatea*

$$\mathrm{Re}\left[1 + \frac{zh''(z)}{h'(z)}\right] > -\frac{1}{2},\ z \in U.$$

Dacă $f \in \Sigma_k(\alpha, m)$ şi verifică subordonarea diferenţială

$$\left[I^m(z^2 f(z))\right]' \prec h(z),\ z \in \dot{U} \tag{3.2.7}$$

atunci

$$\frac{I^m(z^2 f(z))}{z} \prec q(z),\ z \in \dot{U}$$

unde

$$q(z) = \frac{1}{(k+1)z^{\frac{1}{k+1}}} \int_0^z h(t) t^{\frac{1}{k+1}-1} dt,\ z \in U.$$

Funcţia q este convexă şi este cea mai bună $(1, k+1)$ dominantă.

3.3 O clasă de funcţii stelate de ordinul α

Definiţia 3.3.1 *Fie $0 \leq \alpha < 1$ şi $f \in \mathcal{A}_n$ astfel încât*

$$\frac{f(z)f'(z)}{z} \neq 0,\ 1 + \frac{zf'(z)}{f(z)} \neq 0,\ z \in U.$$

Spunem că funcţia f este din clasa $M_\beta^n(\alpha)$, $\beta \in \mathbb{R}$ dacă funcţia $g : U \to \mathbb{C}$ dată prin

$$g(z) = f(z) \left[\frac{1}{2} \frac{zf'(z)}{f(z)} \left(1 + \frac{zf'(z)}{f(z)}\right)\right]^\beta$$

este stelată de ordinul α.

Observaţia 3.3.2 *Dacă $\beta = \frac{1}{2}$ în Definiţia 3.3.1 vom obţine clasa $M^n(\alpha)$ din [84].*

Observaţia 3.3.3 *Dacă $\beta = 0$ atunci $g(z) = f(z)$ şi $M_\beta^n(\alpha) = S^*$.*

Teorema 3.3.4 *[13] Pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ cu $\alpha \in [0, 1)$ şi $\beta > 0$ are loc incluziunea*

$$M_\beta^n(\alpha) \subset S^*(\alpha).$$

Pentru cazul particular $\beta = \dfrac{1}{2}$ obţinem următorul corolar.

Corolar 3.3.5 *[84] Pentru orice număr real α, $0 \leq \alpha < 1$ are loc incluziunea*

$$M^n(\alpha) \subset S^*(\alpha).$$

3.4 Superordonări diferenţiale definite cu operatorul integral

Rezultatele acestui paragraf sunt obţinute cu ajutorul metodei superordonărilor diferenţiale.

Teorema 3.4.1 *[9] Fie $h \in \mathcal{H}(U)$ o funcţie convexă în U, cu $h(0) = 1$ şi $f \in \mathcal{A}_n$, $n \in \mathbb{N}^*$.*
Presupunem că $[I^m f(z)]'$ este univalentă cu $[I^{m+1} f(z)] \in \mathcal{H}[1, n] \cap \mathcal{Q}$.
Dacă

$$h(z) \prec [I^m f(z)]', \ z \in U \tag{3.4.1}$$

atunci

$$q(z) \prec [I^{m+1} f(z)]', \ z \in U \tag{3.4.2}$$

unde

$$q(z) = \frac{1}{nz^{\frac{1}{n}}} \int_0^z h(t) t^{\frac{1}{n}-1} dt.$$

Funcţia q este convexă şi este cea mai bună subordonantă.

Teorema 3.4.2 *[9] Fie $h \in \mathcal{H}(U)$ o funcţie convexă în U, cu $h(0) = 1$ şi $f \in \mathcal{A}_n$.*
Presupunem că $[I^m f(z)]'$ este univalentă cu $\frac{I^m f(z)}{z} \in \mathcal{H}[1, n] \cap \mathcal{Q}$.
Dacă

$$h(z) \prec [I^m f(z)]', \ z \in U \tag{3.4.3}$$

atunci

$$q(z) \prec \frac{I^m f(z)}{z}, \ z \in U \tag{3.4.4}$$

unde

$$q(z) = \frac{1}{nz^{\frac{1}{n}}} \int_0^z h(t) t^{\frac{1}{n}-1} dt.$$

Funcţia q este convexă şi este cea mai bună subordonantă.

Teorema 3.4.3 *[9] Fie q funcţie convexă în U şi h definită prin*

$$h(z) = q(z) + zq'(z), \ z \in U.$$

Dacă $f \in \mathcal{A}_n$, $[I^{m+1}]'$ este univalentă în U, $[I^{m+1} f(z)]' \in \mathcal{H}[1, n] \cap \mathcal{Q}$ şi

$$h(z) \prec [I^{m+1} f(z)]' \tag{3.4.5}$$

atunci

$$q(z) \prec [I^{m+1} f(z)]' \tag{3.4.6}$$

unde

$$q(z) = \frac{1}{nz^{\frac{1}{n}}} \int_0^z h(t) t^{\frac{1}{n}-1} dt.$$

Funcţia q este cea mai bună subordonantă.

Teorema 3.4.4 *[9] Fie q o funcţie convexă în U şi h definită prin*

$$h(z) = q(z) + zq'(z).$$

Dacă $f \in \mathcal{A}_n$, $[I^m f(z)]'$ este univalentă în U, $\frac{I^m f(z)}{z} \in \mathcal{H}[1,n] \cap \mathcal{Q}$ şi

$$h(z) \prec [I^m f(z)]' \tag{3.4.7}$$

atunci

$$q(z) \prec \frac{I^m f(z)}{z} \tag{3.4.8}$$

unde

$$q(z) = \frac{1}{nz^{\frac{1}{n}}} \int_0^z h(t) t^{\frac{1}{n}-1} dt.$$

Funcţia q este cea mai bună subordonantă.

Observaţia 3.4.5 *În cazul particular $n = 1$ aceste teoreme sunt incluse în teză ca şii corolare.*

3.5 Subordonante ale unor superordonări diferenţiale

În această secţiune sunt stabilite câteva superordonări diferenţiale utilizând operatorul integral de tip Sălăgean şi exemple concrete de funcţii convexe.

Teorema 3.5.1 *[8] Fie $R \in (0,1]$ şi fie h convexă în U, definită prin*

$$h(z) = 1 + Rz + \frac{Rz}{2+Rz} \tag{3.5.1}$$

cu $h(0) = 1$.

Fie $f \in \mathcal{A}_n$ pentru care presupunem că $[I^m f(z)]'$ este univalentă şi $[I^{m+1} f(z)]' \in \mathcal{H}[1,n] \cap \mathcal{Q}$.

Dacă

$$h(z) \prec [I^m f(z)]', \ z \in U \tag{3.5.2}$$

atunci

$$q(z) \prec [I^{m+1} f(z)]', \ z \in U, \tag{3.5.3}$$

unde

$$q(z) = \frac{1}{nz^{\frac{1}{n}}} \int_0^z \left(1 + Rt + \frac{Rt}{2+Rt}\right) t^{\frac{1}{n}-1} dt, \tag{3.5.4}$$

$$q(z) = 1 + \frac{Rz}{n+1} + R\frac{1}{n} M(z) \frac{1}{z^{\frac{1}{n}}}$$

şi

$$M(z) = \int_0^z \frac{t^{\frac{1}{n}}}{2+Rt} dt.$$

Funcţia q este convexă şi este cea mai bună subordonantă.

Dacă $n = 1$, din Teorema 3.5.1 obţinem următorul corolar.

Corolar 3.5.2 *[8] Fie $R \in (0, 1]$ şi fie h o funcţie convexă în U, definită prin*

$$h(z) = 1 + Rz + \frac{Rz}{2 + Rz}$$

cu $h(0) = 1$.

Fie $f \in \mathcal{A}$ şi presupunem că $[I^m f(z)]'$ este univalentă $[I^{m+1} f(z)]' \in \mathcal{H}[1, 1] \cap \mathcal{Q}$. Dacă

$$h(z) \prec [I^m f(z)]', \ z \in U$$

atunci

$$q(z) \prec [I^{m+1} f(z)]', \ z \in U,$$

unde

$$q(z) = \frac{1}{z} \int_0^z \Big(1 + Rt + \frac{Rt}{2 + Rt}\Big) dt,$$

$$q(z) = 1 + \frac{Rz}{2} + RM(z) \frac{1}{z}$$

şi

$$M(z) = \frac{z}{R} - \frac{2}{R^2} \ln(2 + Rz) + \frac{2}{R} \ln 2, \ z \in U.$$

Funcţia q este convexă şi este cea mai bună subordonantă.

Dacă $R = 1$, Teorema 3.5.1 devine:

Corolar 3.5.3 *[5] Fie h convexă în U, definită prin*

$$h(z) = 1 + z + \frac{z}{2 + z} \tag{3.5.5}$$

cu $h(0) = 1$.

Fie $f \in \mathcal{A}_n$ şi presupunem că $[I^m f(z)]'$ este univalentă şi $[I^{m+1} f(z)]' \in \mathcal{H}[1, n] \cap \mathcal{Q}$. Dacă

$$h(z) \prec [I^m f(z)]', \ z \in U \tag{3.5.6}$$

atunci

$$q(z) \prec [I^{m+1} f(z)]', \ z \in U, \tag{3.5.7}$$

unde

$$q(z) = \frac{1}{nz^{\frac{1}{n}}} \int_0^z \Big(1 + t + \frac{t}{2 + t}\Big) t^{\frac{1}{n} - 1} dt, \tag{3.5.8}$$

$$q(z) = 1 + \frac{z}{n + 1} + \frac{1}{n} M(z) \frac{1}{z^{\frac{1}{n}}}$$

şi

$$M(z) = \int_0^z \frac{t^{\frac{1}{n}}}{2 + t} dt.$$

Funcţia q este convexă şi este cea mai bună subordonantă.

Pentru $n = 1$ şi $R = 1$ avem următorul corolar.

Corolar 3.5.4 *[5] Fie h convexă în U, definită prin*

$$h(z) = 1 + z + \frac{z}{2+z}$$

cu $h(0) = 1$.

Fie $f \in \mathcal{A}$ şi presupunem că $[I^m f(z)]'$ este univalentă şi $[I^{m+1} f(z)]' \in \mathcal{H}[1,1] \cap \mathcal{Q}$.

Dacă

$$h(z) \prec [I^m f(z)]', \ z \in U$$

atunci

$$q(z) \prec [I^{m+1} f(z)]', \ z \in U,$$

unde

$$q(z) = \frac{1}{z}\int_0^z \Big(1 + t + \frac{t}{2+t}\Big)dt,$$

$$q(z) = 1 + \frac{z}{2} + M(z)\frac{1}{z}$$

şi

$$M(z) = z - 2\ln(2+z) + \ln 2, \ z \in U.$$

Funcţia q este convexă şi este cea mai bună subordonată.

Teorema 3.5.5 *[8] Fie $R \in (0,1]$ şi fie h convexă în U, definită prin*

$$h(z) = 1 + Rz + \frac{Rz}{2+Rz}$$

cu $h(0) = 1$. Fie $f \in \mathcal{A}_n$ şi presupunem că $[I^m f(z)]'$ este univalentă şi $\dfrac{I^m f(z)}{z} \in \mathcal{H}[1,n] \cap \mathcal{Q}$.

Dacă

$$h(z) \prec [I^m f(z)]', \ z \in U, \tag{3.5.9}$$

atunci

$$q(z) \prec \frac{I^m f(z)}{z}, \ z \in U, \tag{3.5.10}$$

unde

$$q(z) = \frac{1}{nz^{\frac{1}{n}}}\int_0^z \Big(1 + Rt + \frac{Rt}{2+Rt}\Big)t^{\frac{1}{n}-1}dt =$$
$$= 1 + \frac{Rz}{n+1} + R\frac{1}{n}M(z)\frac{1}{z^{\frac{1}{n}}}$$

şi

$$M(z) = \int_0^z \frac{t^{\frac{1}{n}}}{2+Rt}dt, \ z \in U.$$

Funcţia q este convexă şi este cea mai bună subordonantă.

Prin prticularizări pentru $n = 1$ şi $R = 1$ se obţin următoarele corolare.

Corolar 3.5.6 *[8] Fie $R \in (0, 1]$ şi h o funcţie convexă în U, definită prin*

$$h(z) = 1 + Rz + \frac{Rz}{2 + Rz}$$

cu $h(0) = 1$. Fie $f \in \mathcal{A}$ şi presupunem că $[I^m f(z)]'$ este univalentă şi $\dfrac{I^m f(z)}{z} \in \mathcal{H}[1, 1] \cap \mathcal{Q}$.

Dacă

$$h(z) \prec [I^m f(z)]', \ z \in U,$$

atunci

$$q(z) \prec \frac{I^m f(z)}{z}, \ z \in U,$$

unde

$$q(z) = \frac{1}{z} \int_0^z \Big(1 + Rt + \frac{Rt}{2 + Rt}\Big) dt =$$

$$= 1 + \frac{Rz}{2} + RM(z)\frac{1}{z}$$

şi

$$M(z) = \frac{z}{R} - \frac{2}{R^2} \ln(2 + Rz) + \frac{2}{R} \ln 2, \ z \in U.$$

Funcţia q este convexă şi este cea mai bună subordonantă.

Corolar 3.5.7 *[5] Fie h convexă în U, definită prin*

$$h(z) = 1 + z + \frac{z}{2 + z}$$

cu $h(0) = 1$. Fie $f \in \mathcal{A}_n$ şi presupunem că $[I^m f(z)]'$ este univalentă şi $\frac{I^m f(z)}{z} \in \mathcal{H}[1, n] \cap \mathcal{Q}$.

Dacă

$$h(z) \prec [I^m f(z)]', \ z \in U, \tag{3.5.11}$$

atunci

$$q(z) \prec \frac{I^m f(z)}{z}, \ z \in U, \tag{3.5.12}$$

unde

$$q(z) = \frac{1}{nz^{\frac{1}{n}}} \int_0^z \Big(1 + t + \frac{t}{2 + t}\Big) t^{\frac{1}{n} - 1} dt =$$

$$= 1 + \frac{z}{n + 1} + \frac{1}{n} M(z) \frac{1}{z^{\frac{1}{n}}}$$

şi

$$M(z) = \int_0^z \frac{t^{\frac{1}{n}}}{2 + t} dt, \ z \in U.$$

Funcţia q este convexă şi este cea mai bună subordonantă.

Corolar 3.5.8 *[5] Fie h convexă în U, definită prin*

$$h(z) = 1 + z + \frac{z}{2+z}$$

cu $h(0) = 1$. Fie $f \in \mathcal{A}$ şi presupunem că $[I^m f(z)]'$ este univalentă şi $\frac{I^m f(z)}{z} \in \mathcal{H}[1,1] \cap \mathcal{Q}$.

Dacă

$$h(z) \prec [I^m f(z)]', \ \ z \in U,$$

atunci

$$q(z) \prec \frac{I^m f(z)}{z}, \ \ z \in U,$$

unde

$$q(z) = \frac{1}{z} \int_0^z \Big(1 + t + \frac{t}{2+t}\Big) dt = \\ = 1 + \frac{z}{2} + M(z)\frac{1}{z}$$

şi

$$M(z) = z - 2\ln(2+z) + 2\ln 2, \ \ z \in U.$$

Funcţia q este convexă şi este cea mai bună subordonantă.

Observaţia 3.5.9 *În cazul operatorului diferenţial, pentru funcţia*

$$h(z) = 1 + Rz + \frac{Rz}{2+Rz}$$

s-au obţinut rezultate similare în [24].

Teorema 3.5.10 *[7] Fie funcţia convexă*

$$h(z) = \frac{1 + (2\alpha - 1)z}{1+z}, \ \ z \in U.$$

Fie $f \in \mathcal{I}^m(\alpha)$, şi presupunem că $[I^m f(z)]'$ este univalentă

$$\left[I^{m+1} f(z)\right]' \in \mathcal{H}[1,1] \cap \mathcal{Q}.$$

Dacă

$$h(z) \prec [I^m f(z)]', \ \ z \in U, \tag{3.5.13}$$

atunci

$$q(z) \prec [I^{m+1} f(z)]', \ \ z \in U,$$

unde

$$q(z) = 2\alpha - 1 + 2(1-\alpha)\frac{\log(1+z)}{z}. \tag{3.5.14}$$

Funcţia q este convexă şi este cea mai bună subordonantă.

Teorema 3.5.11 *[7] Fie funcţia convexă*

$$h(z) = \frac{1 + (2\alpha - 1)z}{1 + z}.$$

Fie $f \in \mathcal{I}^m(\alpha)$, *şi presupunem că* $[I^m f(z)]'$ *este univalentă şi*

$$\frac{I^m f(z)}{z} \in \mathcal{H}[1, 1] \cap \mathcal{Q}.$$

Dacă

$$h(z) \prec [I^m f(z)]', \ z \in U \tag{3.5.15}$$

atunci

$$q(z) \prec \frac{I^m f(z)}{z}, \ z \in \dot{U}$$

unde

$$q(z) = 2\alpha - 1 + 2(1 - \alpha)\frac{\log(1 + z)}{z}.$$

Funcţia q *este convexă şi este cea mai bună subordonantă.*

Capitolul 4

Aproape stelaritate de ordin complex λ

În acest capitol este abordată noţiunea de aproape stelaritate de ordin complex λ atât în $\mathbb{C}^n$ cât şi în $\mathbb{C}$. Sunt prezentate teoreme de caracterizare a aproape stelarităţii de ordin complex λ cu ajutorul lanţurilor Loewner, condiţii suficiente de aproape stelaritate de ordin complex λ, rezultate de compactitate, exemple concrete precum şi rezultate privind păstrarea aproape stelarităţii de ordin complex λ prin generalizări ale operatorului extins Roper-Suffridge respectiv Pfaltzgraff-Suffridge.

Rezultatele sunt originale şi sunt cuprinse în lucrările [11], [12], [14], [15].

4.1 Funcţii şi aplicaţii aproape stelate de ordin complex λ. Caracterizare prin lanţuri Loewner

Definiţia 4.1.1 *Fie $\lambda \in \mathbb{C}$ cu $\mathrm{Re}\lambda \leq 0$. O aplicaţie local biolomorfă normată $f : B^n \to \mathbb{C}^n$ se numeşte aplicaţie aproape stelată de ordin complex λ dacă*

$$\mathrm{Re}\Big\{(1-\lambda)\langle [Df(z)]^{-1}f(z), z\rangle\Big\} > -\mathrm{Re}\lambda\|z\|^2,\ z \in B^n \setminus \{0\}. \tag{4.1.1}$$

Este uşor de văzut că în cazul unei variabile inegalitatea (4.1.1) devine

$$\mathrm{Re}\left[(1-\lambda)\frac{f(z)}{zf'(z)}\right] > -\mathrm{Re}\lambda,\ z \in U. \tag{4.1.2}$$

Vom nota cu $S^*_\lambda(B^n)$ mulţimea aplicaţiilor aproape stelate de ordin complex λ.

Exemplu 4.1.2 *Fie $\lambda \in \mathbb{C}$ astfel încât $\mathrm{Re}\lambda \leq 0$, şi fie $f : U \to \mathbb{C}$ dată prin $f(z) = z(1 + \frac{1+\lambda}{1-\lambda}z)^{-\frac{2}{1+\lambda}}$, $z \in U$, unde se ia în considerare ramura funcţiei putere pentru care*

$$\left(1 + \frac{1+\lambda}{1-\lambda}z\right)^{-\frac{2}{1+\lambda}} |_{z=0} = 1.$$

Atunci f este funcţie aproape stelată de ordin complex λ în discul unitate U.

Exemplu 4.1.3 *(i) Fie f_j o funcţie aproape stelată de ordin complex λ în discul unitate U pentru $j = 1, \ldots, n$. Atunci $f : B^n \to \mathbb{C}^n$ dată prin $f(z) = (f_1(z_1), \ldots, f_n(z_n))$ este aplicaţie aproape stelată de ordin complex λ în B^n.*

(ii) În particular, dacă $f_j(z_j)$ este dată ca şi în Exemplul 4.1.2 pentru $j = 1, \ldots, n$, atunci $f(z) = (f_1(z_1), \ldots, f_n(z_n))$ este aproape stelată de ordin complex λ în B^n.

O condiţie necesară şi suficientă de aproape stelaritate de ordin complex λ în U în termeni de lanţuri Loewner va fi prezentată în teorema următoare.

Teorema 4.1.4 *[14] Fie $f : U \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă normată şi fie $\lambda \in \mathbb{C}$ astfel încât* $\mathrm{Re}\lambda \leq 0$. *Atunci f este funcţie aproape stelată de ordin complex λ dacă şi numai dacă*

$$F(z,t) = e^{(1-\lambda)t} f(e^{\lambda t} z), \quad z \in U, \ t \geq 0,$$

este un lanţ Loewner. În particular, f este funcţie stelată (i. e. $\lambda = 0$) dacă şi numai dacă $F(z,t) = e^t f(z)$ este un lanţ Loewner.

Observaţia 4.1.5 *Din Teorem 4.1.1 obţinem Teorema 2.6.3 pentru $\lambda = i \tan \alpha$, $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. De asemenea, dacă $\lambda = \alpha/(\alpha - 1)$, unde $\alpha \in [0, 1)$, Teorema 4.1.1 se reduce la Teorema 2.7.2.*

Corolar 4.1.6 *[14] Fie $f(z)$ o funcţie aproape stelată de ordin complex λ. Atunci*

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |e^{-\lambda t} f(e^{\lambda t} z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}, \ z \in U, \ t \geq 0.$$

În particular, dacă $t = 0$ atunci

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}, \ z \in U.$$

Teorema 4.1.7 *[14] Fie $f : B^n \to \mathbb{C}^n$ o aplicaţie olomorfă normată şi fie $\lambda \in \mathbb{C}$ astfel încât* $\mathrm{Re}\lambda \leq 0$. *Atunci f este aplicaţie aproape stelată de ordin complex λ dacă şi numai dacă*

$$F(z,t) = e^{(1-\lambda)t} f(e^{\lambda t} z), \quad z \in B^n, \ t \geq 0,$$

este un lanţ Loewner. În particular, f este o aplicaţie stelată (i. e. $\lambda = 0$) dacă şi numai dacă $F(z,t) = e^t f(z)$ este lanţ Loewner.

Observaţia 4.1.8 *Având în vedere Teorema 4.1.7, vom obţine Teorema 2.6.4 pentru $\lambda = i \tan \alpha$ şi $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. De asemenea, dacă $\lambda = \alpha/(\alpha - 1)$, unde $\alpha \in [0, 1)$, Teorema 4.1.7 se reduce la Teorema 2.7.3. De asemenea, dacă $\lambda = 0$ în Teorema 4.1.7, vom obţine caracterizarea uzuală a stelarităţii în termeni de lanţuri Loewner.*

Din Teorema 4.1.7 şi rezultatul de deformare pentru clasa tuturor lanţurilor Loewner $F(z,t)$ astfel încât $\{e^{-t} F(\cdot, t)\}_{t \geq 0}$ este o familie normală în B^n (a se vedea [45]), obţinem următorul corolar.

Corolar 4.1.9 *[14] Fie $f : B^n \to \mathbb{C}^n$ o aplicaţie aproape stelată de ordin complex λ. Atunci*

$$\frac{\|z\|}{(1+\|z\|)^2} \leq \|f(z)\| \leq \frac{\|z\|}{(1-\|z\|)^2}, \ z \in B^n.$$

Teorema 4.1.10 *[11] Mulţimea $S^*_\lambda(B^n)$ este compactă.*

4.2 Aplicaţii cu generalizări ale operatorului extins Roper-Suffridge

În acest paragraf sunt obţinute câteva rezultate cu privire la păstrarea aproape stelarităţii de ordin complex λ prin generalizări ale operatorului extins Roper-Suffridge. Aceste rezultate constitue exemple concrete de aplicaţii aproape stelate de ordin complex λ în bila unitate Euclidiană din $\mathbb{C}^n$.

Teorema 4.2.1 *[14] Presupunem că f este o funcţie aproape stelată de ordin complex λ în U şi $F_\gamma(z) = \Phi_{n,\gamma}(f)(z)$ este definită ca în Teorema 2.8.1. Atunci F_γ este o aplicaţie aproape stelată de ordin complex λ în B^n.*

Teorema 4.2.2 *[14] Presupunem că f este o funcţie aproape stelată de ordin complex λ în U şi că $F_\beta(z) = \Phi_{n,\beta}(f)(z)$ este definită ca în Teorema 2.8.2. Atunci F_β este o aplicaţie aproape stelată de ordin complex λ în B^n.*

Teorema 4.2.3 *[14] Presupunem că f este o aplicaţie aproape stelată de ordin complex λ în U şi $F_{\beta,\gamma}(z) = \Phi_{n,\beta,\gamma}(f)(z)$ este definită ca în Teorema 2.8.3. Atunci $F_{\beta,\gamma}$ este o aplicaţie aproape stelată de ordin complex λ în B^n.*

Păstrarea aproape stelarităţii de ordin complex λ prin generalizări ale operatorului extins Roper-Suffridge se poate demonstra şi fără ajutorul lanţurilor Loewner. Pentru aceasta vom prezenta mai întâi două rezultate cunoscute.

Lema 4.2.4 *[30] Fie f o funcţie olomorfă în U. Atunci $\mathrm{Re} f(z) \geq 0,\ \forall z \in U$, dacă şi numai dacă există o funcţie crescătoare, μ, pe $[0, 2\pi]$, care satisface $\mu(2\pi) - \mu(0) = \mathrm{Re} f(0)$, astfel încât*

$$f(z) = \int_0^2 \pi \frac{1 + ze^{-i\theta}}{1 - ze^{-i\theta}} d\mu(\theta) + i\mathrm{Im} f(0),\ z \in U.$$

Lema 4.2.5 *[68],[106] Pentru $w \in \mathbb{C}$, avem*

1. $\mathrm{Re}(1 - w^2)(1 - \overline{w})^2 = (1 - |w|^2)|1 - w|^2$;
2. $\mathrm{Re}(1 + 2w - w^2)(1 - \overline{w})^2 = (1 - |w|^2)^2 - 2|w|^2|1 - w|^2$.

Teorema 4.2.6 *[15] Dacă f este o aplicaţie aproape stelată de ordin complex λ în discul unitate U, atunci*

$$F(z) = \Phi_{n,\beta,\gamma}(f)(z) = \left(f(z_1), \left(\frac{f(z_1)}{z_1} \right)^\beta (f'(z_1))^\gamma \widetilde{z} \right)$$

este o aplicaţie apropae stelată de ordin complex λ on B^n, unde $z = (z_1, \widetilde{z}) \in B^n$, $z_1 \in U$, $\widetilde{z} = (z_2, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$, $\beta \in [0, 1]$, şi $\gamma \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ astfel încât $\beta + \gamma \leq 1$, $f(z_1) \neq 0$ unde $z_1 \in U \setminus \{0\}$ şi $\left(\frac{f(z_1)}{z_1}\right)^\beta$, $(f'(z_1))^\gamma$ satisface $\left(\frac{f(z_1)}{z_1}\right)^\beta |_{z_1=0} = 1$, respectiv $(f'(z_1))^\gamma |_{z_1=0} = 1$.

Dacă $\lambda = 0$, atunci Teorema 4.2.6 este rezultatul pentru aplicaţii stelate.

Corolar 4.2.7 *[41] Dacă f este funcţie stelată în discul unitate U, atunci*

$$F(z) = \Phi_{n,\beta,\gamma}(f)(z) = \left(f(z_1), \left(\frac{f(z_1)}{z_1} \right)^{\beta} (f'(z_1))^{\gamma} \widetilde{z} \right)$$

este aplicaţie stelată în B^n, unde $z = (z_1, \widetilde{z}) \in B^n$, $z_1 \in U$, $\widetilde{z} = (z_2, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$, $\beta \in [0,1]$, şi $\gamma \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ astfel încât $\beta + \gamma \leq 1$, $f(z_1) \neq 0$ unde $z_1 \in U \setminus \{0\}$ şi $\left(\frac{f(z_1)}{z_1}\right)^{\beta}$, $(f'(z_1))^{\gamma}$ satisface $\left(\frac{f(z_1)}{z_1}\right)^{\beta} |_{z_1=0} = 1$, respectiv $(f'(z_1))^{\gamma} |_{z_1=0} = 1$.

Pentru $\beta = 0$, vom obţine următorul corolar.

Corolar 4.2.8 *[15] Dacă f este funcţie aproape stelată de ordin complex λ, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\lambda \leq 0$ în discul unitate U, atunci*

$$F(z) = \Phi_{n,\gamma}(f)(z) = (f(z_1), (f'(z_1))^{\gamma} \widetilde{z})$$

este aplicaţie aproape stelată de ordin complex λ în B^n, unde $\gamma \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, şi $(f'(z_1))^{\gamma}$ satisface $(f'(z_1))^{\gamma} |_{z_1=0} = 1$.

Dacă $\gamma = 0$, din Teorema 4.2.6 se obţine următorul corolar.

Corolar 4.2.9 *[15] Dacă f este funcţie aproape stelată de ordin complex λ, $\mathrm{Re}\lambda \leq 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$ în discul unitate U, atunci*

$$F(z) = \Phi_{n,\beta}(f)(z) = \left(f(z_1), \left(\frac{f(z_1)}{z_1} \right)^{\beta} \widetilde{z} \right)$$

este o aplicaţie aproape stelată de ordin complex λ on B^n, $\beta \in [0,1]$, $\left(\frac{f(z_1)}{z_1}\right)^{\beta} |_{z_1=0} = 1$.

4.3 Aproape stelaritate de ordin complex λ şi operatorul extins Pfaltzgraff-Suffridge

În teorema următoare este demonstrat că operatorul extins Pfaltzgraff-Suffridge păstrează aproape stelaritatea de ordin complex λ.

Teorema 4.3.1 *[11] Fie f o aplicaţie aproape stelată de ordin complex λ în B^n. Atunci $F = \Psi_n(f)$ definit în relaţia (2.8.5) este de asemenea o aplicaţie aproape stelată de ordin complex λ în B^{n+1}.*

În cazul particular $\lambda = i \tan \alpha$ se obţine următorul corolar.

Corolar 4.3.2 *[11] Fie f este o aplicaţie spiralată de tip α în B^n. Atunci $F = \Psi_n(f)$ este o aplicaţie spiralată de tip α în B^{n+1}.*

Pe de altă parte, dacă în demonstraţia Teoremei 4.3.1 luăm $\lambda = \dfrac{\alpha}{\alpha - 1}$ obţinem următorul corolar.

Corolar 4.3.3 *[11] Fie f o aplicaţie aproape stelată de ordin α în B^n. Atunci $F = \Psi_n(f)$ este o aplicaţie aproape stelată de ordin α în B^{n+1}.*

O altă consecinţă a Teoremei 4.3.1 este dată de rezultatul următor, care ne dă un răspuns pozitiv la întrebarea lui Pfaltzgraff şi Suffridge privind păstrarea stelarităţii prin operatorul Ψ_n şi demonstrat de către I. Graham, G. Kohr, J.A. Pfaltzgraff în [47].

Corolar 4.3.4 *Fie $f \in S^*(B^n)$. Atunci $F = \Psi_n(f) \in S^*(B^{n+1})$.*

Exemplu 4.3.5 *Fie $f_j,\ j = 1, \dots, n$ funcţii aproape stelate de ordin complex λ. Atunci $f : B^n \to \mathbb{C}^n$ dată prin $f(z') = (f_1(z_1), \dots, f_n(z_n))$ este aproape stelată de ordin complex λ în B^n. Din Teorema 4.3.1, deducem că $F : B^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ dată prin*

$$F(z) = \Big(f_1(z_1), \dots, f_n(z_n), z_{n+1} \prod_{j=1}^{n} [f_j'(z_j)]^{\frac{1}{n+1}}\Big),\ z = (z', z_{n+1}) \in B^n$$

este aproape stelată de ordin complex λ on B^{n+1}. Spre exemplu, aplicaţia

$$F(z) = \Big(z_1\Big(1 + \frac{1+\lambda}{1-\lambda}z_1\Big)^{-\frac{2}{1+\lambda}}, \dots, z_n\Big(1 + \frac{1+\lambda}{1-\lambda}z_n\Big)^{-\frac{2}{1+\lambda}},$$
$$z_{n+1} \prod_{j=1}^{n} \Big[(1 - z_j)\Big(1 + \frac{1+\lambda}{1-\lambda}z_j\Big)\Big]^{-\frac{3+\lambda}{(1+n)(1+\lambda)}}\Big)$$

este aproape stelată de ordin complex λ în B^{n+1}.

Teorema 4.3.6 *[11] Mulţimea $\Psi_n[S^*_\lambda(B^n)]$ este compactă.*

4.4 Condiţii suficiente de aproape stelaritate de ordin complex λ

În acest paragraf sunt prezentate condiţii suficiente de aproape stelaritate de ordin complex λ atât în discul unitate U cât şi în bila unitate Euclidiană B^n, condiţii obţinute cu ajutorul Lemei 1.6.2 (Jack-Miller şi Mocanu) precum şi de varianta n-dimensională dată de P. Liczberski în cazul bilei unitate Euclidiene [62], [67].

Lema 4.4.1 *Fie $f \in H(B^n)$ cu $f(0) = 0$. Dacă*

$$\|f(z_0)\| = \max\{\|f(z)\| : \|z\| \leq \|z_0\|\},\ z_0 \in B^n,$$

atunci există numerele reale m, s, $s \geq m \geq 1$, astfel încât următoarele condiţii sunt adevărate

$$\langle Df(z_0)(z_0), z_0\rangle = m\|f(z_0)\|^2, \tag{4.4.1}$$

$$\|Df(z_0)(z_0)\| = s\|f(z_0)\| \tag{4.4.2}$$

şi

$$\mathrm{Re}\langle D^2f(z_0)(z_0, z_0), z_0\rangle \geq m(m-1)\|f(z_0)\|^2. \tag{4.4.3}$$

Mai mult, pentru $n > 1$, $m = s$ dacă şi numai dacă

$$Df(z_0)(z_0) = mf(z_0).$$

Teorema 4.4.2 *[12] Fie $f : U \to \mathbb{C}$ funcţie olomorfă şi normată şi $\lambda \in \mathbb{C}$ cu* $\mathrm{Re}\lambda \leq 0$, *astfel încât*

$$\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| < \frac{1}{1+|1-\lambda|},\ z \in U.$$

Atunci f este o funcţie aproape stelată de ordin complex λ.

În cazul în care $\lambda = 0$, vom obţine următoarea condiţie suficientă de stelaritate din discul unitate U.

Corolar 4.4.3 *Fie $f : U \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă, cu $f(0) = f'(0) - 1 = 0$, astfel încât*

$$\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| < \frac{1}{2},\ z \in U.$$

Atunci f este o funcţie stelată.

Versiunea n-dimensională a Teoremei 4.4.2 este dată de următorul rezultat.

Teorema 4.4.4 *[12] Fie $f : B^n \to \mathbb{C}^n$ aplicaţie local biolomorfă normată şi $\lambda \in \mathbb{C}$ cu* $\mathrm{Re}\lambda \leq 0$, *astfel încât*

$$\|[Df(z)(z)]^{-1}D^2f(z)(z,\cdot)\| < \frac{1}{1+|1-\lambda|},\ z \in B^n.$$

Atunci f este aplicaţie aproape stelată de ordin complex λ.

Pentru valori particulare ale lui λ din Teorema 4.4.4 se obţin câteva rezultate interesante.

Dacă $\lambda = 0$, din Teorema 4.4.4 obţinem următorul rezultat pentru aplicaţii stelate.

Corolar 4.4.5 *Fie $f : B^n \to \mathbb{C}^n$ aplicaţie local biolomorfă normată astfel încât*

$$\|[Df(z)(z)]^{-1}D^2f(z)(z,\cdot)\| < \frac{1}{2},\ z \in B^n.$$

Atunci f este o aplicaţie stelată.

În cazul particular $\lambda = -1$ vom obţine următorul rezultat pentru aplicaţii aproape stelate de ordin $1/2$.

Corolar 4.4.6 *Fie $f : B^n \to \mathbb{C}^n$ aplicaţie local biolomorfă normată astfel încât*

$$\|[Df(z)(z)]^{-1}D^2f(z)(z,\cdot)\| < \frac{1}{3},\ z \in B^n.$$

Atunci f este o aplicaţie aproape stelată de ordin $1/2$.

Pentru $\lambda = i\tan\alpha$ vom obţine o condiţie suficientă de spiralitate de tip α, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Corolar 4.4.7 *Fie $f : B^n \to \mathbb{C}^n$ aplicaţie local biolomorfă normată astfel încât*

$$\|[Df(z)(z)]^{-1}D^2f(z)(z,\cdot)\| < \frac{1}{2},\ z \in B^n.$$

Atunci f este o aplicaţie spiralată de tip α, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Bibliografie

[1] L.V. Ahlfors, *Conformal Invariants. Topics in Geometric Function Theory*, Mc Graw-Hill, New-York, 1973.

[2] J.W. Alexander, *Function which map the interior of the unit circle upon simple regions*, Ann. of Math., 17(1915-1916), 12-22.

[3] R.W. Barnard, C.H. FitzGerald, S. Gong, *The growth and 1/4-theorems for starlike mappings in* $\mathbb{C}^n$, Pacif. J. Math., 150(1991), 13-22.

[4] **C.M. Bălăeţi**, *A class of holomorphic functions defined by integral operator*, Acta Universitatis Apulenssis, Mathematics-Informatics, 15(2008), 379-386.

[5] **C.M. Bălăeţi**, *Superordination results in the complex plane*, Acta Universitatis Apulenssis, Mathematics-Informatics, 20(2009), 43-48.

[6] **C.M. Bălăeţi**, *Applications of the integral operator to the class of meromorphic functions*, Bul. Acad. Şt. Rep. Mol, 1(59), 2009, 37-44.

[7] **C.M. Bălăeţi**, *Differential superordinations defined by an integral operator*, J. of Math. and Appl., 31(2009), 31-38.

[8] **C.M. Bălăeţi**, *An Integral Operator Associated with Differential Superordinations*, An. Şt. Ovidius Constanţa, Seria Matematica, 17, 3(2009), 37-44.

[9] **C.M. Bălăeţi**, *A special differential superordinations in the complex plane*, Studia Univ. Babeş-Bolyai Math., LV, No.1(2010), 31-40.

[10] **C.M. Bălăeţi**, *A general class of holomorphic functions defined by integral operator*, (va apare, General Mathematics).

[11] **C.M. Bălăeţi**, *Almost starlikeness of complex order* λ *associated with extension operators for biholomorphic mappings*, (trimisă spre publicare).

[12] **C.M. Bălăeţi**, *Sufficient conditions for almost starlikeness of complex order* λ, (trimisă spre publicare).

[13] **C.M. Bălăeţi**, *On a general class of starlike functions of order* α, (trimisă spre publicare).

[14] **C.M. Bălăeţi**, V.O. Nechita, *Loewner chains and almost starlike mappings of complex order* λ, (va apare, Carpathian Journal of Mathematics).

[15] **C.M. Bălăeţi**, V.O. Nechita, *Applications of the Roper-Suffridge extension operator to almost starlike mappings of complex order* λ, (trimisă spre publicare).

[16] L. Bieberbach, *Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln*, Preuss, Akad. Wiss. Sitzungsb., 1916, 940-955.

[17] L. Bieberbach, *Über einige Extremalprobleme im Gebiete der Konformen Abbildung*, Math. Ann., 77(1916), 153-172.

[18] T. Bulboacă, *Differntial subordinations and superordinations. Recent results*, Casa Cărţii de Ştiinţă, Cluj-Napoca, 2005.

[19] C. Carathéodory, *Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene werte nicht annehmen*, Math., Ann., 64(1907), 95-115.

[20] C. Carathéodory, *Über das Schwarzche Lemma bei analytischen Functionen von zwei komplexen Veränderlichen*, Math. Ann., 97(1926), 76-98; Math. Schriften IV, Becksche Verlagsbuchhandlung, München, 1956, 132-159.

[21] H. Cartan, *Les transformations analytiques des domaines cerclés les unes dans les autres*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 190(1930), 718-720.

[22] H. Cartan, *Sur la possibilité d'étendre aux functions de plusieurs variables complexes la théorie des fonctions univalentes*, 129-155. Appendix la P. Montel, *Leçons sur les Fonctions Univalentes ou Multivalentes*, Gauthier-Villars, Paris, 1933.

[23] Gh. Călugăreanu, *Sur la condition nécessaire et suffisante pour l'univalence d'une fonction holomorphe dans un cercle*, C.R. Acad. Sci. Paris, 193(1931), 1150-1153.

[24] A. Cătaş, *A note on a certain superordinations results*, An. Univ. Oradea Fasc. Mat, Tom XIII, 2006, 73-80.

[25] P. Curt, *Capitole Speciale de Teoria Funcţiilor de mai multe Variabile Complexe*, Ed. Albastră, Cluj-Napoca, 2001.

[26] P. Curt, *Spaţii Hardy şi Funcţii Univalente*, Ed. Albastră, Cluj-Napoca, 2002.

[27] P. Curt, G. Kohr, *Subordination chains and Loewner differential equations in several complex variables*, Annales Univ. Mariae Curie-Sklodowska, Sect. A., 57(2003), 35-43.

[28] P. Curt, G. Kohr, *Properties of subordination chains and transition mappings in several complex variables*, Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszow, Matematika, 27(2004), 11-18.

[29] L. De Branges, *A proof of the Bieberbach conjecture*, Acta Math., 154(1985), 137-152.

[30] P.L. Duren, *Univalent Functions*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[31] G. Faber, *Neuer Beweis eines Koebe-Bieberbachschen satzes über conforme Abbildung*, Sitzgsber. Bayer Acad. Wiss. München, 1916, 39-42.

[32] S.X. Feng, *Some classes of holomorphic mappings in several complex variables*, University of Science and Technology of China, Doctor Thesis, 2004.

[33] C.H. FitzGerald, C. Thomas, *Some bounds on convex mappings in several complex variables*, Pacif. J. Math., 165(1994), 295-320.

[34] G.M. Goluzin, *On the majorization principle in function theory*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 42(1935), 647-649 (în limba rusă).

[35] G.M. Goluzin, *Zur Theorie der schlichten konformen Abbildungen*, Mat. Sbornik, N. S., 42(1935), 169-190.

[36] S. Gong, *Convex and Starlike Mappings in Several Complex Variables*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998.

[37] S. Gong, S. Wang, Q. Yu, *Biholomorphic convex mappings of ball in* $\mathbb{C}^n$, Pacif. J. Math., 161(1993), 287-306.

[38] A.W. Goodman, *Univalent functions and optimal control*, Thesis, Stanford University, 1968.

[39] A.W. Goodman, *Univalent Functions*, I-II, Mariner Publ. Comp., Tampa, Florida, 1983.

[40] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, *Parametric representation of univalent mappings in several complex variables*, Canadian J. Math., 54(2002), 324-351.

[41] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, T. Suffridge, *Extension operators for lacally univalent mappings*, Michigan Math. J., 50(2002), 37-55.

[42] I. Graham, G. Kohr, *Univalent mappings associated with the Roper-Suffridge extension operator*, J. Analyse Math., 81(2000), 331-342.

[43] I. Graham, G. Kohr, *An extension theorem and subclasses of univalent mappings in several complex variables*, Complex Variables, 47(2002), 59-72.

[44] I. Graham, G. Kohr, *Geometric Function Theory in One and Higher Dimensions*, Marcel Dekker, Inc., New York Basel, 2003.

[45] I. Graham, G. Kohr, M. Kohr, *Loewner chains and the Roper Suffridge extension operator*, J. Math. Anal. Appl., 247(2000), 448-465.

[46] I. Graham, G. Kohr, M. Kohr, *Loewner chains and parametric representation in several complex variables*, J. Math. Anal. Appl., 281(2003), 425-438.

[47] I. Graham, G. Kohr, J.A. Pfaltzgraff, *Parametric representation and linear functionals associated with extension operators for biholomorphic mappings*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 52(1)(2007), 47-68.

[48] T.H. Gronwall, *Some remarks on conformal representation*, Ann. of Math., (2), 16(1914-1915), 72-76.

[49] K.R. Gurganus, *ϕ-like holomorphic functions in $\mathbb{C}^n$ and Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., 205(1975), 389-406.

[50] D.J. Hallenbeck, T.H. MacGregor, *Linear Problems and Convexity Techniques in Geometric Function Theory*, Pitman Adv. Publ. Program, Boston-London-Melbourn, 1984.

[51] D.J. Hallenbeck, St. Ruscheweyh, *Subordination by convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 52(1975), 191-195.

[52] H. Hamada, G. Kohr, *Subordination chains and the growth theorem of spirallike mappings*, Mathematica (Cluj), 42(65)(2000), 153-161.

[53] P. Hamburg, P.T. Mocanu, N. Negoescu, *Analiză matematică (Funcţii complexe)*, Ed. Did. şi Ped., Bucureşti, 1982.

[54] T. Higuchi, *On the distorsion theorem of holomorphic mappings in several complex variables*, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, A, 8(1964), 99-122.

[55] L. Hörmander, *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, Second Edition, North Holland, Amsterdam, 1973.

[56] I.S. Jack, *Functions starlike and convex of order α*, J. London Math. Soc., 3(1971), 469-474.

[57] K. Kikuchi, *Starlike and convex mappings in several complex variables*, Pacif. J. Math., 44(1973), 569-580.

[58] P. Koebe, *Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven*, Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen Math. Phys., 1907, 191-210.

[59] G. Kohr, *On some sufficient conditions of almost starlikeness of order 1/2 in* $\mathbb{C}^n$, Studia (Univ. Babeş Bolyai), Mathematica, 41, (3)(1996), 51-55.

[60] G. Kohr, *On some best bounds for coefficients of subclasses of biholomorphic mappings in* $\mathbb{C}^n$, Complex Variables, 36(1998), 216-248.

[61] G. Kohr, *Basic Topics in Holomorphic Functions of Several Complex Variables*, Cluj University Press, Cluj-Napoca, 2003.

[62] G. Kohr, P. Liczberski, *Univalent Mappings of Several Complex Variables*, Cluj University Press, Cluj-Napoca, 1998.

[63] G. Kohr, P.T. Mocanu, *Capitole Speciale de Analiză Complexă*, Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 2005.

[64] S.G. Krantz, *Function Theory of Several Complex Variables*, John Wiley, New York, 1982.

[65] E. Kubicka, T. Poreda, *On the parametric representation of starlike maps of the unit ball in* $\mathbb{C}^n$ *into* $\mathbb{C}^n$, Demonstratio Math., 21(1988), 345-355.

[66] P.P. Kufarev, *On one parameter families of analytic functions*, Mat. Sb., 13(55)(1943), 87-118 (in russian).

[67] P. Liczberski, *Jack's lemma for biholomorphic mappings in* $\mathbb{C}^n$, Ann. Univ. Mariae-Curie Sklodowska, 15, 13(sectio A), 1986, 131-139.

[68] T.S. Liu, Q.H. Xu, *Loewner chains associated with the generalized Roper-Suffridge extension operator*, J. Math. Anal. Appl., 322(2006), 107-120.

[69] K. Löwner, *Untersuchungen über die Verzerrung bei konformen Abbidungen des Einheitskreises* $|z| < 1$*, die durch Funktionen mit nichtverschwindender Ableitung geliefert werden*, S.B. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig Berichte, 69(1917), 89-106.

[70] K. Löwner, *Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises*, Math. Ann., 89(1923), 103-121.

[71] T.H. MacGregor, *Functions whose derivative has a positive real part*, Trans. Amer. Math. Soc., 104(1962), 532-537.

[72] T. Matsuno, *Star-like theorems and convex-like theorems in the complex space*, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect. A, 5(1955), 88-95.

[73] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *Second order differential inequalities in the complex plane*, J. Math. Anal. Appl., 65(1978), 289-305.

[74] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *Differential subordinations and univalent functions*, Michig. Math. J., 28(1981), 157-171.

[75] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *Differential Subordinations. Theory and Applications*, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, 2000.

[76] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *Subordinants of differential superordinations*, Complex Variables, 48, 10(2003), 815-826.

[77] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *Briot-Bouquet differential superordination and sandwich theorems*, J. Math. Anal. Appl., 329, 1(2007), 327-335.

[78] P.T. Mocanu, *Une propriété de convexité généralisée dans la théorie de la représentation conforme*, Mathematica(Cluj), 11(34)(1969), 127-133.

[79] P.T. Mocanu, T. Bulboacă, Gr.Şt. Sălăgean, *Teoria Geometrică a Funcţiilor Univalente*, Casa Cărţii de Ştiinţă, Cluj, 1999.

[80] P. Montel, *Leçons sur les Fonctions Univalentes ou Multivalentes*, Gauthier-Villars, Paris, 1933.

[81] Z. Nehari, *Conformal Mappings*, Mc. Grraw-Hill Book Comp., New-York, 1952.

[82] R. Nevanlinna, *Über die konforme Abbildung Sterngebieten*, Översikt av Finska Vet. Soc., Förh. (A), No. 6, 63(1921).

[83] I. Ono, *Analytic vector functions of several complex variables*, J. Math. Soc. Japan, 8(1956), 216-246.

[84] G.I. Oros *On a class of starlike functions of order α*, An. Univ. Oradea, Fasc. Math., X, 5-12, 2002, 61-64.

[85] G.I. Oros *On a class of holomorphic functions defined by Sălăgean differenţial operator*, Complex Variables, 50, 4(2005), 257-264.

[86] G.I. Oros, *A class of holomorphic functions defined using a differential operator*, General Mathematics, 13, 4(2005), 13-18.

[87] Gh. Oros, G.I. Oros, *An application of Briot-Bouquet differential subordinations*, Bul. Acad. Şt. Rep. Moldova. Mat., 1(50), 2006, 101-104.

[88] Gh. Oros, G.I. Oros, *A new class of holomorphic functions defined by Sălăgean differenţial operator*, Libertas Mathematics, XXV(2005), 93-96.

[89] J.A. Pfaltzgraff, *Subordination chains and univalence of holomorphic mappings in $\mathbb{C}^n$*, Math. Ann., 210(1974), 55-68.

[90] J.A. Pfaltzgraff, T.J. Suffridge, *Close-to-starlike holomorphic functions of several variables*, Pacif. J. Math., 57(1975), 271-279.

[91] J.A. Pfaltzgraff, T.J. Suffridge, *An extension theorem and liniar invariant families generated by starlike maps*, Ann. Univ. Mariae Curie Sklodowska, Sect. A, 53(1999), 193-207.

[92] J. Plemelj, *Über den Verzerrungssatz vom P. Koebe*, Ges. Dtsch. Naturforschren Arzte, 85, Versammlung Wien Zeiter teie, Erste Hälfte, 1913.

[93] H. Poincaré, *Les fonctions analytiques de deux variables et la représentation conforme*, Rend. Circ. Mat. Palermo, 23(1907), 185-220.

[94] G. Polya, G. Szegö, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1925.

[95] Ch. Pommerenke, *Univalent Functions*, Vanderhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975.

[96] Ch. Pommerenke, *Über die Subordination analytischer Funktionen*, J. Reine Angew Math., 218(1965), 159-173.

[97] T. Poreda, *On the univalent holomorphic maps of the unit polydisc in $\mathbb{C}^n$ which have parametric representation, I-the geometrical properties*, Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska, Sect A, 41(1978), 105-113.

[98] T. Poreda, *On the univalent holomorphic maps of the unit polydisc in $\mathbb{C}^n$ which have parametric representation, II-necessary and sufficient conditions*, Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska, Sect A, 41(1978), 114-121.

[99] T. Poreda, *On the univalent subordination chains of holomorphic mappings in Banach spaces*, Commentationes Math., 28(1989), 295-304.

[100] M.S. Robertson, *On the theory of univalent functions*, Ann. Math., 37(1936), 374-408.

[101] K. Roper, T.J. Suffridge, *Convex mappings on the unit ball of $\mathbb{C}^n$*, J. Anal. Math., 65(1995), 333-347.

[102] K. Roper, T.J. Suffridge, *Convexity properties of holomorphic mappings in $\mathbb{C}^n$*, Trans. Amer. Math. Soc., 351(1999), 1803-1833.

[103] W. Rudin, *Function Theory in the Unit Ball of $\mathbb{C}^n$*, Springer-Verlag, New-York, 1980.

[104] Gr.Şt., Sălăgean, *Subcasses of univalent functions*, Lecture Notes in Math., Springer Verlag, 1013(1983), 362-372.

[105] Gr.Şt., Sălăgean, *Geometria planului complex*, Ed. Promedia Plus, Cluj, 1997.

[106] F. Shuxia, L. Taishun, *The generalized Roper-Suffridge extension operator*, Acta Mathematica Scientia, 28B, 1(2008), 63-80.

[107] L. Špaček, *Contribution à la theorie des fonctions univalentes*, Časopis Pěst. Mat., 62(1932), 12-19.

[108] S. Stoilow, *Teoria funcţiilor de o variabilă complexă*, vol I, Editura Academiei, 1954.

[109] S. Stoilow, *Teoria funcţiilor de o variabilă complexă*, vol II, Editura Academiei, 1958.

[110] E. Study, *Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie*, 2. Heft, Teubner, Leipzig und Berlin, 1913.

[111] T.J. Suffridge, *Some remarks on convex maps of the unit disk*, Duke Math. J., 37(1970), 775-777.

[112] T.J. Suffridge, *The principle of subordination applied to functions of several variables*, Pacif. J. Math., 33(1970), 241-248.

[113] T.J. Suffridge, *Starlike and convex maps in Banach spaces*, Pacif. J. Math., 46(1973), 575-589.

[114] T.J. Suffridge, *Starlikeness, convexity and other geometric properties of holomorphic maps in higher dimensions*, Lecture Notes in Math., 599, 146-159, Springer-Verlag, New-York, 1976.

[115] Q.H. Xu, T.S. Liu, *Löwner chains and a subclass of biholomorphic mappings*, J. Math. Anal. Appl., 334(2007), 1096-1105.