Universitatea ”Babeş-Bolyai”, Cluj-Napoca
Facultatea de Matematică şi Informatică

Rezumatul tezei de doctorat

Lema Abstractă Gronwall şi Aplicaţii

de

Cecilia-Florina Crăciun

Coordonator ştiinţific
Prof. Dr. Ioan A. Rus

2010

Cuprins

Abstract

În această teză se obţin majoranţi optimali (explicit sau sub formă generică) pentru soluţiile unor inegalităţi integrale ori diferenţiale. Ecuaţiile şi inegalităţile au fost rescrise cu ajutorul unor operatori integrali. Aplicând Lema Abstractă Gronwall acestor operatori se obţin majoranţi optimali. De asemenea, se prezintă câteva aplicaţii ale Lemei Abstracte Gronwall la inegalităţi pseudoparabolice şi inegalităţi hiperbolice de ordinul doi şi trei, precum şi la studiul stabilităţilor Ulam pentru ecuaţii de tip hiperbolic de ordinul doi.

Cuvinte cheie:

Teoria punctului fix, operatori Picard, lema abstractă Gronwall, lema de comparaţie, ecuaţii integrale, inegalităţi integrale, inegalităţi integrale Volterra, inegalităţi integrale Fredholm, operatori triunghiulari, inegalităţi hiperbolice, inegalităţi pseudoparabolice, stabilităţi de tip Ulam.

Acknowledgements

În primul rând doresc să-i mulţumesc conducătorului ştiinţific, domnului Prof. Dr. Ioan A. Rus, care întotdeauna m-a ajutat şi mi-a oferit sprijin şi sugestii nepreţuite. Încrederea dumnealui m-a inspirat chiar şi atunci când am avut îndoieli.

De asemenea, sunt profund îndatorată domnului Prof. Dr. N. Lungu şi domnului Lector Dr. M. A. Şerban pentru colaborarea la articolele noastre şi pentru sfaturile pe care mi le-au dat. Sprijinul dumnealor este apreciat foarte mult.

Mulţumirile mele merg de asemenea către membrii Catedrei de Ecuaţii Diferenţiale, pentru sprijinul lor binevoitor.

Doresc să mulţumesc şi doamnelor bibliotecare care m-au ajutat cu cărţi şi articole, precum şi doamnelor secretare pentru îndrumarea în problemele administrative.

Şi nu în ultimul rând, recunoştinţa mea se îndreaptă către familie şi prieteni. Dragostea, înţelegerea şi încurajările lor m-au ajutat incomensurabil.

Capitolul 1

Introducere

Ecuaţiile integrale reprezintă o parte importantă atât a matematicii pure cât şi a celei aplicate, având aplicaţii în ecuaţiile diferenţiale, mecanica vibraţiilor, inginerie, fizică, analiză numerică şi altele (a se vedea, de exemplu, [66] şi [99]). Începutul teoriei ecuaţiilor integrale poate fi atribuit lui N. H. Abel, care a formulat o ecuaţie integrală în 1812 pe când studia o problemă de mecanică. De atunci, mulţi alţi mari matematicieni incluzându-i pe T. Lalescu (care a scris prima dizertaţie de ecuaţii integrale din lume în 1911, a se vedea [42]), J. Liouville, J. Hadamard, V. Volterra, I. Fredholm, E. Goursat, D. Hilbert, E Picard, H. Poincare au contribuit la dezvoltarea domeniului ecuaţiilor integrale.

Lemele de tip Gronwall joacă un rol important în domeniul ecuaţiilor integrale şi diferenţiale, reprezentând o metodă de demonstrare a existenţei şi unicităţii soluţiilor şi de a obţine diverse estimări ale acestora. Ele pot fi considerate ca un tip de rezultat care identifică *a priori* majoranţi pentru funcţiile care satisfac inegalităţi diferenţiale sau integrale.

În această teză lemele de tip Gronwall sunt utilizate pentru a obţine majoranţi (respectiv minoranţi) ai funcţiilor care satisfac diverse inegalităţi integrale ori diferenţiale, precum şi pentru a-i reprezenta ca puncte fixe ale operatorilor integrali corespunzători.

Într-o lucrare recentă [86], I.A. Rus a formulat zece probleme de interes în teoria lemelor Gronwall. Una din ele este de a găsi exemple de leme de tip Gronwall în care majoranţii să fie puncte fixe ale operatorului corespunzător A (**Problema 5**). O altă problemă este de a afla care dintre aceste leme de tip Gronwall pot fi obţinute ca şi consecinţe ale Lemei Abstracte Gronwall (**Problema 6**). Lema Abstractă Gronwall ne dă cel mai mic majorant dintre toţi majoranţii posibili (a se vedea [84]). Nu există o metodologie generală de a raspunde la aceste întrebări, de aceea ele trebuie analizate pentru fiecare caz în parte. De-a lungul anilor mulţi matematicieni au obţinut astfel de exemple (a se vedea, de exemplu, [8], [22], [25], [55], [57], [83], [84], [86]), iar această lucrare prezintă mai multe exemple de acest tip.

Capitolul al doilea este dedicat notaţiilor, definiţiilor, lemelor şi teoremelor care vor fi folosite pe parcursul tezei.

În capitolul al treilea se studiază câteva consecinţe ale Lemei Abstracte Gronwall în cazul inegalităţilor de tip Volterra şi Fredholm în spaţii Banach şi non-Banach. În general este dificil să se găsească soluţiile exacte ale ecuaţiilor integrale ori majoranţi ai funcţiilor care satisfac inegalităţi integrale; rezultatele din teoria punctului fix şi tehnica operatorilor Picard oferă aparatul matematic necesar pentru a demonstra existenţa soluţiilor ecuaţiilor şi pentru a găsi majoranţi ai soluţiilor inegalităţilor. De asemenea se prezintă exemple de inegalităţi în spaţiile Banach $C([\alpha,\beta],\mathbb{R})$ şi $C([\alpha,\beta],\mathbb{R}^p)$, şi se studiază sistemele infinite de ecuaţii integrale în spaţiul $C([\alpha,\beta],s(\mathbb{R}))$, şi respectiv în spaţiul Banach $C([\alpha,\beta],l^2(\mathbb{R}))$. Rezultatele din acest capitol au fost publicate în [22] şi [25].

În cel de-al patrulea capitol se investighează câteva inegalităţi integrale studiate în [8], [41], [45], [57], pentru care autorii au obţinut prin diverse metode majoranţi ai soluţiilor. Aplicând Lema Abstractă Gronwall identificăm majoranţii optimali: în unele cazuri aceştia coincid cu cei obtinuţi de ei, în altele sunt diferiţi şi îi obţinem noi. Unii majoranţi sunt exprimaţi explicit, alţii doar într-o formă generică. Rezultatele acestui capitol au fost publicate în [21], [22] şi [25].

În ultimul capitol se aplică Lema Abstractă Gronwall la inegalităţi pseudoparabolice şi la inegalităţi hiperbolice de ordinul doi şi trei. Considerarea ecuaţiilor hiperbolice şi pseudoparabolice împreună cu anumite condiţii pe frontieră rezultă în formularea unor probleme Darboux. Se utilizează tehnica operatorilor Picard pentru a demonstra existenţa şi unicitatea soluţiilor acestor probleme Darboux şi se aplică Lema Abstractă Gronwall funcţiilor ce satisfac inegalităţile corespunzătoare. De asemenea, pentru unele cazuri particulare de inegalităţi pseudoparabolice soluţiile problemelor Darboux pot fi reprezentate cu ajutorul functiei Riemann, iar aceste reprezentări sunt prezentate în subsecţiunea 5.1.3. Acest capitol se încheie cu studiul stabilităţilor de tip Ulam pentru ecuaţii de ordinul doi de tip hiperbolic. Rezultatele acestui ultim capitol se regăsesc, în mare, în articolele [23] şi [24].

Capitolul 2

Preliminarii

Scopul acestui capitol este de a prezenta câteva noţiuni şi rezultate care sunt necesare în obţinerea rezultatelor originale din această teză. Ele pot fi găsite în următoarele referinţe bibliografice: [20], [31], [55], [56], [66], [76], [79], [81], [83], [86], [91], [92], [99].

Teoremele metrice de punct fix garantează existenţa şi unicitatea punctelor fixe ale unor operatori bine definiţi în spaţii metrice şi, de obicei, sugerează o metodă efectivă de a găsi aceste puncte fixe. Rezultatele prezentate în această secţiune pot fi găsite în: [12], [26], [37], [39], [74], [78], [81], [82], [84], [85], [91] şi altele.

Considerăm normele Chebyshev şi Bielecki, care sunt metric echivalente:

$$\|x\|_C \; : \; = \max_{t\in[\alpha,\beta]} |x(t)| , \tag{2.0.1}$$

$$\|x\|_\tau \; : \; = \max_{t\in[\alpha,\beta]} (|x(t)| \exp(-\tau(t-\alpha))), \tau \in \mathbb{R}_+^* \tag{2.0.2}$$

În raport cu aceste norme $C([\alpha, \beta], \mathbb{B})$ este un spaţiu Banach.

Metoda standard de a demonstra existenţa şi unicitatea, dependenţa de date şi rezultate de comparaţie pentru soluţiile ecuaţiilor integrale este tehnica operatorilor Picard. Urmând [83] prezentam câteva noţiuni şi rezultate de bază din teoria operatorilor Picard şi slab Picard (a se vedea, de asemenea, [22], [23], [25], [33], [64], [78], [81], [82], [84], [91]).

Lemele Gronwall sunt subiectul acestei teze şi le utilizăm să mărginim o funcţie care satisface o anumită inegalitate diferenţială ori integrală cu soluţia ecuaţiei diferenţiale sau integrale corespunzătoare. Următoarele leme abstracte sunt principalele instrumente în demonstrarea rezultatelor acestei teze.

Lema 2.0.1. *(I.A. Rus [83]) Fie* $(X, \to, \leq)$ *un L-spaţiu ordonat şi* $A : X \to X$ *un operator. Presupunem că:*

(i) A *este operator slab Picard;*

(ii) A *este crescător.*

Atunci:

(a) $x \leq A(x) \;\Rightarrow\; x \leq A^{\infty}(x)$*;*

(b) $x \geq A(x) \;\Rightarrow\; x \geq A^{\infty}(x)$*.*

Lema 2.0.2. *(Lema Abstractă Gronwall, [83]) Fie* $(X, \to, \leq)$ *un L-spaţiu ordonat şi* $A : X \to X$ *un operator. Presupunem că:*

(i) A *este operator Picard* $(F_A = \{x_A^*\})$*;*

(ii) A *este crescător.*

Atunci:

(a) $x \leq A(x) \;\Rightarrow\; x \leq x_A^*$*;*

(b) $x \geq A(x) \;\Rightarrow\; x \geq x_A^*$*.*

Remarca 2.0.1. *Lema Abstractă Gronwall 2.0.2 asigură majoranţi ai soluţiei inegalităţii integrale* $x \leq A(x)$ *în termenii punctului fix al operatorului* A*.*

Remarca 2.0.2. *În condiţiile Lemei Abstracte Gronwall 2.0.2 avem:*

$$\forall y \in (LF)_A : y \leq x_A^* \text{ şi } \forall z \in (UF)_A : x_A^* \leq z.$$

Capitolul 3

Consecinţe ale Lemei Abstracte Gronwall

Operatorii Picard şi lemele de tip Gronwall au un rol semnificativ în teoria calitativă a ecuaţiilor integrale. În acest capitol studiem câteva consecinţe ale Lemei Abstracte Gronwall 2.0.2 în cazul inegalităţilor de tip Volterra şi Fredholm în spaţii Banach. De asemenea, prezentăm exemple de inegalităţi integrale în $C([\alpha,\beta],s(\mathbb{R}))$ şi în spaţiile Banach $C([\alpha,\beta],\mathbb{R})$, $C([\alpha,\beta],\mathbb{R}^p)$, respectiv $C([\alpha,\beta],l^2(\mathbb{R}))$.

Rezultatele originale din acest capitol au fost publicate în [22] şi [25].

3.1 Inegalităţi Integrale Volterra

Ecuaţiile şi inegalităţile Volterra au fost studiate de mulţi ani în matematica aplicată, utilizând atât metode clasice cât şi tehnica punctului fix.

În această secţiune prezentăm un rezultat general pentru operatori Volterra în spaţii Banach, iar mai apoi rezultate pentru cazurile particulare ale spaţiilor Banach $C([\alpha,\beta],\mathbb{R})$, $C([\alpha,\beta],\mathbb{R}^p)$ şi $C([\alpha,\beta],l^2(\mathbb{R}))$, şi, de asemenea, pentru operatori triunghiulari în spaţiul non-Banach $C([\alpha,\beta],s(\mathbb{R}))$. În unele cazuri, punctele fixe ale operatorilor corespunzători pot fi determinate.

3.1.1 Spaţiul $C([\alpha, \beta], \mathbb{B})$

Fie spaţiul Banach ordonat $(\mathbb{B}, +, \mathbb{R}, |\cdot|, \leq)$, funcţionala $K : [\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta] \times \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ şi funcţia $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{B}$.

Considerăm următoarele ecuaţii şi inegalităţi de tip Volterra:

$$x(t) = g(t) + \int_{\alpha}^{t} K(t, s, x(s))ds, \ \forall \ t \in [\alpha, \beta], \tag{3.1.1}$$

$$x(t) \leq g(t) + \int_{\alpha}^{t} K(t, s, x(s))ds, \ \forall \ t \in [\alpha, \beta], \tag{3.1.2}$$

$$x(t) \geq g(t) + \int_{\alpha}^{t} K(t, s, x(s))ds, \ \forall \ t \in [\alpha, \beta]. \tag{3.1.3}$$

Utilizând Lema Abstractă Gronwall 2.0.2 avem următorul rezultat general (a se vedea, de exemplu, [78], [79], [83]):

Teorema 3.1.1. *Presupunem că:*

(i) $K \in C([\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta] \times \mathbb{B}, \mathbb{B})$, $g \in C([\alpha, \beta], \mathbb{B})$;

(ii) există $L_K > 0$ *astfel încât:*

$$|K(t, s, u) - K(t, s, v)| \leq L_K |u - v|,$$

$\forall \ s, t \in [\alpha, \beta]$, $\forall \ u, v \in \mathbb{B}$;

Avem:

(a) ecuaţia (3.1.1) are în $C([\alpha, \beta], \mathbb{B})$ *o soluţie unică* x^*;

(b) operatorul $A : C([\alpha, \beta], \mathbb{B}) \to C([\alpha, \beta], \mathbb{B})$ *definit prin:*

$$A(x)(t) := g(t) + \int_{\alpha}^{t} K(t, s, x(s))ds, \ \forall \ t \in [\alpha, \beta] \tag{3.1.4}$$

este un operator Picard în $\left(C([\alpha, \beta], \mathbb{B}), \overset{unif}{\to}\right)$, *şi* $F_A = \{x^*\}$.

Dacă, în plus, avem ipoteza:

(iii) $K(t, s, \cdot) : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ *crescătoare*, $\forall \ t, s \in [\alpha, \beta]$,

atunci:

(c) dacă $x \in C([\alpha, \beta], \mathbb{B})$ *satisface inegalitatea (3.1.2), atunci* $x(t) \leq x^*(t)$, $\forall \ t \in [\alpha, \beta]$;

(d) dacă $x \in C([\alpha,\beta], \mathbb{B})$ satisface inegalitatea (3.1.3), atunci $x(t) \geq x^*(t)$, $\forall\ t \in [\alpha,\beta]$.

3.1.2 Spaţiul $C([\alpha,\beta], \mathbb{R})$

În această subsecţiune începem prin a considera cazul particular al Teoremei 3.1.1 când $\mathbb{B} := \mathbb{R}$. Pe urmă aplicăm această teoremă în cazul în care funcţionala K este liniară, i.e. $K(t,s,u) = k(t,s)u$, $\forall\ t,s \in [\alpha,\beta]$, şi $u \in \mathbb{R}$. În acest caz soluţia x^* este dată în termenii nucleului rezolvant.

În general este destul de dificil să se găsească o expresie explicită a nucleului rezolvant. Pentru unele cazuri particulare ecuaţia integrală poate fi rezolvată şi, de aceea, o expresie explicită a nucleului rezolvant poate fi determinată. Asemenea exemple sunt reprezentate de Lema Clasică Gronwall şi Teorema lui Filatov (a se vedea [8], [22], [51] şi alţii)

Ca şi în cazul liniar al funcţionalei K, în cel neliniar este dificil să rezolvăm ecuaţia integrală corespunzătoare cu scopul de a mărgini soluţiile inegalităţilor integrale. Există unele leme de tip Gronwall în care punctul fix al operatorului corespunzător poate fi determinat. În ceea ce urmează prezentăm un exemplu de astfel de lemă.

Teorema 3.1.2. *(Inegalităţi de tip Bihari)([22], de asemenea [56], [96]) Presupunem că:*

(i) $c \in \mathbb{R}$, $p \in C([\alpha,\beta], \mathbb{R}_+)$;

(ii) V este o funcţie continuă, pozitivă, crescătoare şi Lipschitz.

În aceste condiţii, avem :

(a) *dacă $x \in C[\alpha,\beta]$ este o soluţie a inegalităţii:*

$$x(t) \leq c + \int_\alpha^t p(s)\ V(x(s))ds,\ \forall\ t \in [\alpha,\beta] \tag{3.1.5}$$

atunci:

$$x(t) \leq x^*(t),\ \forall\ t \in [\alpha,\beta]$$

unde $x^*(t) = F^{-1}(\phi(t) + F(c))$.

(b) *dacă* $x \in C[\alpha, \beta]$ *este o soluţie a inegalităţii:*

$$x(t) \geq c + \int_{\alpha}^{t} p(s)\ V(x(s))ds,\ \forall\ t \in [\alpha, \beta] \tag{3.1.6}$$

atunci:

$$x(t) \geq x^*(t),\ \forall\ t \in [\alpha, \beta]$$

unde $x^*(t) = F^{-1}(\phi(t) + F(c))$.

În acest caz:

$$F(y) = \int_{\alpha}^{y} \frac{dy}{V(y)}, \quad \phi(x) = \int_{\alpha}^{x} p(s)ds,$$

iar F^{-1} *este funcţia inversă a lui* F.

3.1.3 Spaţiul $C\left([\alpha, \beta], \mathbb{R}^p\right)$

În această subsecţiune prezentăm Teorema 3.1.1 în cazul $\mathbb{B} := \mathbb{R}^p$. În acest caz avem un sistem de ecuaţii.

3.1.4 Spaţiile $C([\alpha, \beta], l^2(\mathbb{R}))$ şi $C([\alpha, \beta], s(\mathbb{R}))$

Varianta Teoremei 3.1.1 în cazul particular

$$\mathbb{B} := l^2(\mathbb{R}) = \left\{ (u_n)_{n \in N}, u_n \in \mathbb{R}, \sum_{n \in N} u_n^2 < +\infty \right\}$$

este prezentată la începutul acestei subsecţiuni. În acest caz avem un sistem infinit de ecuaţii.

În ceea ce urmează considerăm cazul în care $x(t) \in s(\mathbb{R})$.

Obţinem un sistem infinit de ecuaţii:

$$\begin{cases} x_0(t) = g_0(t) + \int_{\alpha}^{t} K_0(t, s, x_0(s))ds \\ x_1(t) = g_1(t) + \int_{\alpha}^{t} K_1(t, s, x_0(s), x_1(s))ds \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_p(t) = g_p(t) + \int_{\alpha}^{t} K_p(t, s, x_0(s), x_1(s), ..., x_p(s))ds \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases} \tag{3.1.7}$$

$\forall\ t \in [\alpha, \beta]$, unde $K_n : [\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta] \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$ şi $g : [\alpha, \beta] \to s(\mathbb{R})$.

Considerăm $X_n := C[\alpha, \beta]$, $n \in \mathbb{N}$ şi operatorii

$$A_n : \prod_{i=0}^{n} X_i \to X_n, \text{ definiţi prin:}$$

$$\begin{cases} A_0(x_0)(t) := g_0(t) + \int_\alpha^t K_0(t, s, x_0(s))ds, \\ A_n(x_0, x_1, ..., x_n)(t) := g_n(t) + \int_\alpha^t K_n(t, s, x_0(s), x_1(s), ..., x_n(s))ds. \end{cases} \tag{3.1.8}$$

Notăm $X := \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ şi

$$A : X \to X, \ A = (A_0, A_1, ..., A_p, ...), \tag{3.1.9}$$

unde $A_0, ..., A_p, ...$ sunt daţi de relaţia (3.1.8).

Existenţa şi unicitatea soluţiei sistemului infinit (3.1.7) au fost obţinute de I. A. Rus şi M. A. Şerban în [93]. Adăugând condiţia de monotonie pentru funcţionalele K_n, $n \in \mathbb{N}$, şi aplicând Lema Abstractă Gronwall 2.0.2 obţinem următoarea teoremă:

Teorema 3.1.3. *Presupunem că:*

(i) $g_n \in C[\alpha, \beta]$, $K_n \in C([\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta] \times \mathbb{R}^{n+1})$, $n \in \mathbb{N}$;

(ii) există $L_{K_0} > 0$ *astfel încât:*

$$|K_0(t, s, \xi_1) - K_0(t, s, \xi_2)| \leq L_{K_0} |\xi_1 - \xi_2|, \tag{3.1.10}$$

$\forall\ t, s \in [\alpha, \beta], \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$;

(iii) există $L_{K_n} > 0$ *astfel încât:*

$$|K_n(t, s, u_0, u_1, ..., u_{n-1}, \xi_1) - K_n(t, s, u_0, u_1, ..., u_{n-1}, \xi_2)| \leq L_{K_n} |\xi_1 - \xi_2|, \tag{3.1.11}$$

$\forall\ t, s \in [\alpha, \beta], u_0, u_1, ..., u_{n-1}, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}^*$.

Atunci:

(a) sistemul infinit (3.1.7) are o soluţie unică $x^* \in C([\alpha, \beta], s(\mathbb{R}))$;

(b) operatorul A corespunzător definit prin (3.1.9) este operator Picard în $(C([\alpha, \beta], s(\mathbb{R})), \xrightarrow{t})$.

Dacă, în plus, avem ipoteza:

(iv) $K_n(t, s, \cdot, ..., \cdot) : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ *este crescătoare* $\forall\ t, s \in [\alpha, \beta]$ *şi* $\forall n \in \mathbb{N}$,

atunci:

(c) dacă $x \in C([\alpha, \beta]\,,\ s(\mathbb{R}))$ *satisface inegalitatea (3.1.2) corespunzătoare, atunci* $x(t) \leq x^*(t)$, $\forall\ t \in [\alpha, \beta]$*;*

(d) dacă $x \in C([\alpha, \beta]\,,\ s(\mathbb{R}))$ *satisface inegalitatea (3.1.3) corespunzătoare, atunci* $x(t) \geq x^*(t)$, $\forall\ t \in [\alpha, \beta]$.

3.2 Inegalităţi Integrale Fredholm

Alături de ecuaţiile şi inegalităţile integrale Volterra, inegalităţile integrale Fredholm joacă un rol esenţial în analiza neliniară. Ecuaţiile şi inegalităţile Fredholm au fost studiate de mulţi matematicieni de-a lungul anilor. Câteva tratate de ecuaţii Fredholm au fost scrise de D. Bainov şi P. Simeonov (a se vedea [8]), C. Corduneanu (a se vedea [20]), D.S. Mitrinović, J.E. Pečarić, A.M. Fink (a se vedea [51]). A se vedea de asemenea: S. András ([1], [2]), F. Caliò, E. Marcchetti şi V. Mureşan ([14]), C. Crăciun şi N. Lungu ([22]), V. Mureşan ([52]), B.G. Pachpatte ([56], [55]), I.A. Rus ([76], [78], [81], [84], [86],[85], [83]), N. Taghizadeh and V. Khanbabai ([98]).

În această secţiune prezentăm o lemă de tip Gronwall pentru operatori Fredholm în spaţii Banach, iar, mai apoi, rezultate particulare pentru spaţiile Banach $C([\alpha, \beta], \mathbb{R})$, $C([\alpha, \beta], \mathbb{R}^p)$ şi $C([\alpha, \beta], l^2(\mathbb{R}))$, precum şi pentru operatori triunghiulari în spaţiul non-Banach $C([\alpha, \beta], s(\mathbb{R}))$.

3.2.1 Spaţiul $C([\alpha, \beta]\,, \mathbb{B})$

Fie $(\mathbb{B}, +, \mathbb{R}, |\cdot|\,, \leq)$ un spaţiu Banach ordonat, $H : [\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta] \times \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ o funcţională şi $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{B}$ o funcţie.

Considerăm următoarele ecuaţii şi inegalităţi de tip Fredholm:

$$x(t) = g(t) + \int_{\alpha}^{\beta} H(t,s,x(s))ds,\ \forall\ t \in [\alpha,\beta]\,, \tag{3.2.1}$$

$$x(t) \leq g(t) + \int_{\alpha}^{\beta} H(t,s,x(s))ds,\ \forall\ t \in [\alpha,\beta]\,, \tag{3.2.2}$$

$$x(t) \geq g(t) + \int_{\alpha}^{\beta} H(t,s,x(s))ds,\ \forall\ t \in [\alpha,\beta]\,. \tag{3.2.3}$$

Teorema 3.2.1. *Presupunem că:*

(i) $H \in C([\alpha,\beta] \times [\alpha,\beta] \times \mathbb{B}, \mathbb{B})$, $g \in C([\alpha,\beta]\,, \mathbb{B})$*;*

(ii) există $L_H > 0$ *astfel încât:*

$$|H(t,s,u) - H(t,s,v)| \leq L_H\,|u - v|\,,$$

$\forall\ s,t \in [\alpha,\beta]$, *şi* $u,v \in \mathbb{B}$*;*

(iii) $L_H(\beta - \alpha) < 1$*;*

Atunci:

(a) ecuaţia (3.2.1) are în $C([\alpha,\beta]\,, \mathbb{B})$ *o soluţie unică* x^**;*

(b) operatorul $B : C([\alpha,\beta]\,,\mathbb{B}) \to C([\alpha,\beta]\,,\mathbb{B})$*, definit prin:*

$$B(x)(t) := g(t) + \int_{\alpha}^{\beta} H(t,s,x(s))ds,\ \forall\ t \in [\alpha,\beta] \tag{3.2.4}$$

este operator Picard în $\left(C([\alpha,\beta]\,,\mathbb{B}), \overset{unif}{\to}\right)$*, şi* $F_B = \{x^*\}$.

Dacă, în plus, avem ipoteza:

(iv) $H(t,s,\cdot) : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ *este crescătoare* $\forall\ t,s \in [\alpha,\beta]$*,*

atunci:

(c) dacă $x \in C([\alpha,\beta]\,, \mathbb{B})$ *satisface inegalitatea (3.2.2), atunci:*

$$x(t) \leq x^*(t),\ \forall\ t \in [\alpha,\beta]\,; \tag{3.2.5}$$

(d) dacă $x \in C([a,b]\,, \mathbb{B})$ *satisface inegalitatea (3.2.3), atunci:*

$$x(t) \geq x^*(t),\ \forall\ t \in [\alpha,\beta]\,. \tag{3.2.6}$$

3.2.2 Spaţiul $C([\alpha,\beta],\mathbb{R})$

Începem acest caz considerând forma liniară a funcţionalei H, i.e. $H(t,s,u) := h(t,s)u$, caz pentru care prezentăm un rezultat de tip Gronwall.

Remarca 3.2.1. *Dacă ecuaţia integrală are nucleu degenerat, i.e.* $h(t,s) = \sum_{i=1}^{p} a_i(t)\, b_i(s)$, *unde a şi b sunt funcţii continue pe* $[\alpha,\beta]$, *atunci soluţia ecuaţiei integrale este de fapt soluţia unui sistem algebric şi poate fi găsită explicit.*

3.2.3 Spaţiul $C([\alpha,\beta],\mathbb{R}^p)$

Dacă $\mathbb{B} := \mathbb{R}^p$ ecuaţia (3.2.1) reprezintă, de fapt, un sistem de ecuaţii. Un rezultat de tip Gronwall este prezentat în această subsecţiune.

3.2.4 Spaţiile $C([\alpha,\beta],l^2(\mathbb{R}))$ şi $C([\alpha,\beta],s(\mathbb{R}))$

Prima parte a acestei subsecţiuni constă într-un rezultat de tip Gronwall pentru ecuaţii şi inegalităţi Fredholm în cazul particular $C([\alpha,\beta],l^2(\mathbb{R}))$.

Urmează cazul $C([\alpha,\beta],s(\mathbb{R}))$. Aici avem următorul sistem infinit de ecuaţii integrale:

$$\begin{cases} x_0(t) = g_0(t) + \int_\alpha^\beta H_0(t,s,x_0(s))ds \\ x_1(t) = g_1(t) + \int_\alpha^\beta H_1(t,s,x_0(s),x_1(s))ds \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad\qquad \forall\, t \in [\alpha,\beta] \\ x_p(t) = g_p(t) + \int_\alpha^\beta H_p(t,s,x_0(s),x_1(s),...,x_p(s))ds \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases} \tag{3.2.7}$$

unde $H_n : [\alpha,\beta] \times [\alpha,\beta] \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ şi $g : [\alpha,\beta] \to s(\mathbb{R})$.

Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, considerăm $X_n := C[\alpha,\beta]$ şi operatorii

$$B_n : \prod_{i=0}^{n} X_i \to X_n, \text{definiţi prin:}$$

$$
\begin{cases} B_0(x_0)(t) := g_0(t) + \int_\alpha^\beta H_0(t,s,x_0(s))ds, \\ B_n(x_0,x_1,...,x_n)(t) := g_n(t) + \int_\alpha^\beta H_n(t,s,x_0(s),x_1(s),...,x_n(s))ds. \end{cases} \tag{3.2.8}
$$

Notăm $X := \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ şi

$$
B : X \to X,\ B = (B_0, B_1, ..., B_p, ...), \tag{3.2.9}
$$

unde $B_0, ..., B_p, ...$ sunt daţi de (3.2.8).

Aplicând Teorema 3.2.1 obţinem existenţa majoranţilor funcţiilor care satisfac inegalităţi de tipul (3.2.2) şi (3.2.3) în cazul operatorilor triunghiulari. Aceşti majoranţi sunt chiar punctele fixe ale operatorilor corespunzători.

Teorema 3.2.2. *Presupunem că:*

(i) $g_n \in C[\alpha,\beta],\ H_n \in C([\alpha,\beta]\times[\alpha,\beta]\times\mathbb{R}^{n+1}),\ \forall n\in\mathbb{N}$;

(ii) există $L_{H_0} > 0$ *astfel încât:*

$$
|H_0(t,s,\xi_1) - H_0(t,s,\xi_2)| \le L_{H_0} |\xi_1 - \xi_2|, \tag{3.2.10}
$$

$\forall\ t,s \in [\alpha,\beta], \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$;

(iii) $L_{H_0}(\beta-\alpha) < 1$;

(iv) există $L_{H_n} > 0$ *astfel încât:*

$$
|H_n(t,s,u_0,u_1,...,u_{n-1},\xi_1) - H_n(t,s,u_0,u_1,...,u_{n-1},\xi_2)| \le L_{H_n} |\xi_1 - \xi_2|, \tag{3.2.11}
$$

$\forall\ t,s \in [\alpha,\beta], u_0,u_1,...,u_{n-1},\xi_1,\xi_2 \in \mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}^*$;

(v) $L_{H_n}(\beta-\alpha) < 1,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$;

Avem:

(a) sistemul infinit (3.2.7) are o soluţie unică $x^* \in C([\alpha,\beta], s(\mathbb{R}))$;

(b) operatorul B corespunzător, definit prin (3.2.9) este operatorPicard în $(C([\alpha,\beta], s(\mathbb{R})), \xrightarrow{t})$, *şi* $F_B = \{x^*\}$.

Dacă, în plus, avem ipoteza:

(vi) $H_n(t,s,\cdot,...,\cdot) : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ *este crescătoare* $\forall\ t,s\in[\alpha,\beta]$ *şi* $\forall n\in\mathbb{N}$,

atunci:

(c) dacă $x \in C([\alpha,\beta]\,,\ s(\mathbb{R}))$ satisface inegalitatea (3.1.2) corespunzătoare, atunci $x(t) \leq x^*(t)$, $\forall\ t \in [\alpha,\beta]$;

(d) dacă $x \in C([\alpha,\beta]\,,\ s(\mathbb{R}))$ satisface inegalitatea (3.1.3) corespunzătoare, atunci $x(t) \geq x^*(t)$, $\forall\ t \in [\alpha,\beta]$.

3.3 Inegalităţi Integrale cu Argument Modificat

Inegalităţile integrale cu argument modificat sunt folosite în descrierea multor fenomene în ştiinţă, economie, dinamica populaţiilor, fizică, medicină etc. Ele au fost studiate de mulţi cercetători: D. Bainov şi P. Simeonov [8], T.A. Burton [13], M. Dobriţoiu [27], [28], M. Dobriţoiu, I.A. Rus şi M.A. Şerban [29], D. Guo, V. Lakshmikantham şi X. Liu [33], N. Lungu [46], D.S. Mitrinović, J.E. Pečarić şi A.M. Fink [51], V. Mureşan [53], B.G. Pachpatte [56], R. Precup şi E. Kirr [71] şi alţii.

În această secţiune sunt prezentate rezultate de tip Gronwall în cazul ecuaţiilor şi inegalităţilor cu argument modificat, atât de tip Volterra, cât şi de tip Fredholm.

3.4 Inegalităţi Integrale Multi-dimensionale

Rezultate similare cu cele prezentate în Secţiunile 3.1 şi 3.2 pot fi obţinute şi în cazul inegalităţilor integrale multi-dimensionale (a se vedea, de exemplu, [8], [9], [56]). Aceste inegalităţi pot fi folosite în studiul unor probleme din teoria ecuaţiilor diferenţiale, integrale, ori integro-diferenţiale, în special în studiul comportamentului calitativ al soluţiilor.

3.5 Inegalităţi Integrale Volterra-Fredholm

În această secţiune considerăm următoarele ecuaţii şi inegalităţi integrale neliniare, de tip mixt Volterra-Fredholm:

$$x\,(t) = F\left(t, x(t), \int_{\alpha_1}^{t_1} \ldots \int_{\alpha_m}^{t_m} K(t,s,x(s))ds, \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \ldots \int_{\alpha_m}^{\beta_m} H(t,s,x(s))ds\right), \qquad (3.5.1)$$

$$x\,(t) \leq F\left(t, x(t), \int_{\alpha_1}^{t_1} \ldots \int_{\alpha_m}^{t_m} K(t,s,x(s))ds, \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \ldots \int_{\alpha_m}^{\beta_m} H(t,s,x(s))ds\right), \quad (3.5.2)$$

$$x\,(t) \geq F\left(t, x(t), \int_{\alpha_1}^{t_1} \ldots \int_{\alpha_m}^{t_m} K(t,s,x(s))ds, \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \ldots \int_{\alpha_m}^{\beta_m} H(t,s,x(s))ds\right), \quad (3.5.3)$$

unde $[\alpha_1;\beta_1] \times \ldots \times [\alpha_m;\beta_m]$ este un interval în $\mathbb{R}^m$, $K, H : [\alpha_1;\beta_1] \times \ldots \times [\alpha_m;\beta_m] \times [\alpha_1;\beta_1] \times \ldots \times [\alpha_m;\beta_m] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue şi $F : [\alpha_1;\beta_1] \times \ldots \times [\alpha_m;\beta_m] \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ este o funcţională oarecare. Ecuaţiile integrale de tip mixt Volterra-Fredholm au fost studiate de mulţi autori (a se vedea [2], [55], [63], [94], [95] şi alţii).

Noi demonstrăm existenţa şi unicitatea soluţiei ecuaţiei integrale (3.5.1) utilizând metode standard ca în [2], [14], [22], [47], ecuaţia noastră integrală (3.5.1) fiind mai generală decât cele considerate în lucrările mai sus menţionate. De asemenea, stabilim o lemă de tip Gronwall pentru inegalităţi. Rezultatele acestei secţiuni sunt publicate în [25].

Teorema 3.5.1. *([25]) Presupunem că:*

(i) $K,\ H \in C([\alpha_1,\beta_1] \times \cdots \times [\alpha_m,\beta_m] \times [\alpha_1,\beta_1] \times \cdots \times [\alpha_m,\beta_m] \times \mathbb{R})$;

(ii) $F \in C([\alpha_1,\beta_1] \times \cdots \times [\alpha_m,\beta_m] \times \mathbb{R}^3)$;

(iii) există constantele nenegative a, b, c astfel încât:

$$|F(t,u_1,v_1,w_1) - F(t,u_2,v_2,w_2)| \leq a|u_1 - u_2| + b|v_1 - v_2| + c|w_1 - w_2|,$$

$\forall\ t \in [\alpha_1,\beta_1] \times \cdots \times [\alpha_m,\beta_m], u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2 \in \mathbb{R}$;

(iv) există constantele nenegative L_K şi L_H astfel încât:

$$\begin{aligned} |K(t,s,u) - K(t,s,v)| &\leq L_K|u - v|, \\ |H(t,s,u) - H(t,s,v)| &\leq L_H|u - v|, \end{aligned}$$

$\forall\ t, s \in [\alpha_1,\beta_1] \times \cdots \times [\alpha_m,\beta_m]$ *şi* $\forall u, v \in \mathbb{R}$;

(v) $a + (bL_K + cL_H)(\beta_1 - \alpha_1) \ldots (\beta_m - \alpha_m) < 1$.

Atunci:

(a) ecuaţia (3.5.1) are o soluţie unică $x^* \in C([\alpha_1,\beta_1] \times \cdots \times [\alpha_m,\beta_m])$;

(b) operatorul

$$A : C([\alpha_1,\beta_1] \times \cdots \times [\alpha_m,\beta_m]) \to C([\alpha_1,\beta_1] \times \cdots \times [\alpha_m,\beta_m])$$

definit prin:

$$A(x)(t) = F\left(t, x(t), \int_{\alpha_1}^{t_1} \dots \int_{\alpha_m}^{t_m} K(t,s,x(s))ds, \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \dots \int_{\alpha_m}^{\beta_m} H(t,s,x(s))ds\right) \quad (3.5.4)$$

este operator Picard şi $F_A = \{x^*\}$*;*

Dacă, în plus, avem următoarele ipoteze:

(vi) $K(t,s,\cdot)$, $H(t,s,\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sunt crescătoare* $\forall\ t,s \in [\alpha_1, \beta_1] \times \dots \times [\alpha_m, \beta_m]$*;*

(vii) $F(t,\cdot,\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *este crescătoare,* $\forall\ t \in [\alpha_1, \beta_1] \times \dots \times [\alpha_m, \beta_m]$*,*

atunci:

(c) dacă $x \in C([\alpha_1, \beta_1] \times \dots \times [\alpha_m, \beta_m])$ *satisface inegalitatea (3.5.2), atunci* $x(t) \leq x^*(t)$, $\forall\ t \in [\alpha_1, \beta_1] \times \dots \times [\alpha_m, \beta_m]$*;*

(d) dacă $x \in C([\alpha_1, \beta_1] \times \dots \times [\alpha_m, \beta_m])$ *satisface inegalitatea (3.5.3), atunci* $x(t) \geq x^*(t)$, $\forall\ t \in [\alpha_1, \beta_1] \times \dots \times [\alpha_m, \beta_m]$.

Propoziţia 3.5.1. *Concluziile Teoremei 3.5.1 rămân valabile dacă înlocuim condiţia* (v) *cu*

(v') *există* $\tau > 0$ *astfel încât:*

$$a + \frac{bL_K}{\tau^m} + \frac{cL_H}{\tau^m} \cdot \prod_{i=1}^{m} e^{\tau(\beta_i - \alpha_i)} < 1.$$

În cazul special când F este liniară în raport cu ultimele două variabile obţinem următorul rezultat.

Propoziţia 3.5.2. *Considerăm ecuaţia şi inegalităţile integrale:*

$$x(t) = f(t, x(t)) + \int_{\alpha_1}^{t_1} \dots \int_{\alpha_m}^{t_m} K(t,s,x(s))ds + \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \dots \int_{\alpha_m}^{\beta_m} H(t,s,x(s))ds, \quad (3.5.5)$$

$$x(t) \leq f(t, x(t)) + \int_{\alpha_1}^{t_1} \dots \int_{\alpha_m}^{t_m} K(t,s,x(s))ds + \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \dots \int_{\alpha_m}^{\beta_m} H(t,s,x(s))ds, \quad (3.5.6)$$

$$x(t) \geq f(t, x(t)) + \int_{\alpha_1}^{t_1} \dots \int_{\alpha_m}^{t_m} K(t,s,x(s))ds + \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \dots \int_{\alpha_m}^{\beta_m} H(t,s,x(s))ds. \quad (3.5.7)$$

Presupunem că:

(i) $K,\ H \in C([\alpha_1, \beta_1] \times \dots \times [\alpha_m, \beta_m] \times [\alpha_1, \beta_1] \times \dots \times [\alpha_m, \beta_m] \times \mathbb{R})$*;*

(ii) $f \in C([\alpha_1, \beta_1] \times \cdots \times [\alpha_m, \beta_m] \times \mathbb{R})$*;*

(iii) există $a > 0$ *astfel încât:*

$$|f(t, u_1) - f(t, u_2)| \leq a|u_1 - u_2|,$$

$\forall\ t \in [\alpha_1, \beta_1] \times \cdots \times [\alpha_m, \beta_m]$, $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$*;*

(iv) există constantele nenegative L_K *şi* L_H *astfel încât:*

$$\begin{aligned} |K(t,s,u) - K(t,s,v)| &\leq L_K|u - v|, \\ |H(t,s,u) - H(t,s,v)| &\leq L_H|u - v|, \end{aligned}$$

$\forall\ t, s \in [\alpha, \beta]$ *şi* $\forall\ u, v \in \mathbb{R}$*;*

(v) $a + (L_K + L_H)(\beta_1 - \alpha_1)\ldots(\beta_m - \alpha_m) < 1$ *sau există* $\tau > 0$ *astfel încât:* $a + \frac{L_K}{\tau^m} + \frac{L_H}{\tau^m} \cdot \prod_{i=1}^{m} e^{\tau(\beta_i - \alpha_i)} < 1$.

Atunci:

(a) ecuaţia (3.5.5) are o soluţie unică $x^* \in C([\alpha_1, \beta_1] \times \cdots \times [\alpha_m, \beta_m])$*;*

(b) operatorul $A : C([\alpha_1, \beta_1] \times \cdots \times [\alpha_m, \beta_m]) \to C([\alpha_1, \beta_1] \times \cdots \times [\alpha_m, \beta_m])$ *definit prin:*

$$A(x)(t) = f\left(t, x\left(t\right)\right) + \int_{\alpha_1}^{t_1} \ldots \int_{\alpha_m}^{t_m} K(t, s, x(s))ds + \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \ldots \int_{\alpha_m}^{\beta_m} H(t, s, x(s))ds$$

este operator Picard şi $F_A = \{x^*\}$.

Dacă, în plus, avem următoarele ipoteze:

(vi) $f(t, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *este crescătoare,* $\forall\ t \in [\alpha_1, \beta_1] \times \cdots \times [\alpha_m, \beta_m]$;

(vii) $K(t, s, \cdot)$, $H(t, s, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sunt crescătoare,* $\forall\ t, s \in [\alpha, \beta]$,

atunci:

(c) dacă $x \in C([\alpha_1, \beta_1] \times \cdots \times [\alpha_m, \beta_m])$ *satisface inegalitatea (3.5.6), atunci* $x(t) \leq x^*(t)$, $\forall\ t \in [\alpha_1, \beta_1] \times \cdots \times [\alpha_m, \beta_m]$;

(d) dacă $x \in C([\alpha_1, \beta_1] \times \cdots \times [\alpha_m, \beta_m])$ *satisface inegalitatea (3.5.7), atunci* $x(t) \geq x^*(t)$, $\forall\ t \in [\alpha_1, \beta_1] \times \cdots \times [\alpha_m, \beta_m]$;

Exemplul 3.5.1. *Considerăm problema Darboux:*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 x}{\partial t_1 \partial t_2}(t_1,t_2) & = f\left(t_1,t_2,x\left(t_1,t_2\right)\right), \quad (t_1,t_2)\in[\alpha_1;\beta_1]\times[\alpha_2;\beta_2] \\ x\left(t_1,\alpha_2\right) & = \varphi\left(t_1\right), \qquad\qquad\qquad t_1\in[\alpha_1;\beta_1] \\ x\left(\alpha_1,t_2\right) & = \psi\left(t_2\right), \qquad\qquad\qquad t_2\in[\alpha_2;\beta_2],\ \varphi\left(\alpha_1\right)=\psi\left(\alpha_2\right) \end{cases} \tag{3.5.8}$$

cu următoarele ipoteze:

(i) $f\in C([\alpha_1;\beta_1]\times[\alpha_2;\beta_2]\times\mathbb{R})$, $\varphi\in C\left([\alpha_1;\beta_1]\right)$, $\psi\in C\left([\alpha_2;\beta_2]\right)$*;*

(ii) există $L_f>0$ *astfel încât:*

$$|f(t_1,t_2,u_1)-f(t_1,t_2,u_2)|\le L_f\cdot|u_1-u_2|,$$

$\forall\ (t_1,t_2)\in[\alpha_1;\beta_1]\times[\alpha_2;\beta_2]$, $u_1,u_2\in\mathbb{R}$.

Funcţia $x\in C([\alpha_1,\beta_1]\times[\alpha_2,\beta_2]$ *este soluţie a problemei Darboux (3.5.8) dacă şi numai dacă este soluţie a ecuaţiei integrale:*

$$x\left(t_1,t_2\right)=\varphi\left(t_1\right)+\psi\left(t_2\right)-\varphi\left(\alpha_1\right)+\int_{\alpha_1}^{t_1}\int_{\alpha_2}^{t_2} f\left(\xi_1,\xi_2,x\left(\xi_1,\xi_2\right)\right)d\xi_1 d\xi_2. \tag{3.5.9}$$

Aşadar, aplicăm Teorema 3.5.1 (a) şi (b) în cazul particular $m=2$ *şi*

$$F:[\alpha_1,\beta_1]\times[\alpha_2,\beta_2]\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ \textit{definit prin:}$$

$$F\left(t_1,t_2,u,v,w\right)=\varphi\left(t_1\right)+\psi\left(t_2\right)-\varphi\left(\alpha_1\right)+v.$$

În acest caz avem $a=0$, $b=1$, $c=0$, $L_K=L_f$ *şi* $L_H=0$. *De asemenea, condiţia* (v') *a Propoziţiei 3.5.1 este satisfăcută: există* $\tau>0$ *astfel încât* $\frac{L_f}{\tau^2}<1$ *(de exemplu putem alege* $\tau=L_f+1$*).*

Atunci, problema Darboux (3.5.8) are o soluţie unică $x^*\in C([\alpha_1;\beta_1]\times[\alpha_2;\beta_2])$*, iar operatorul* A *corespunzător definit de membrul drept al relaţiei (3.5.9) este un operator Picard.*

Remarca 3.5.1. *Teorema 3.5.1 rămâne adevărată dacă considerăm tipul mixt Volterra-Fredholm de ecuaţie integrală neliniară (3.5.1) într-un spaţiu Banach general* $\mathbb{B}$ *în locul spaţiului Banach* $\mathbb{R}$*.*

În continuare considerăm un exemplu de sistem infinit de ecuaţii integrale. Aplicăm varianta Teoremei 3.5.1 într-un spaţiu Banach pentru a obţine existenţa şi unicitatea soluţiei.

Exemplul 3.5.2. *Considerăm următorul sistem infinit de ecuaţii integrale:*

$$x_n(t) = f_n(t) + \int_{\alpha_1}^{t_1} \dots \int_{\alpha_m}^{t_m} k(t,s)x_{n+1}(s)ds + \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \dots \int_{\alpha_m}^{\beta_m} h(t,s)x_{n+2}(s)ds, \quad (3.5.10)$$

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, *cu următoarele ipoteze:*

(i) $f_n \in C([\alpha_1, \beta_1] \times \cdots \times [\alpha_m, \beta_m])$, $n \in \mathbb{N}$, $f_n(t) \to 0$, $n \to +\infty$, *pentru fiecare* $t \in [\alpha_1, \beta_1] \times \cdots \times [\alpha_m, \beta_m]$;

(ii) $k,\ h \in C([\alpha_1, \beta_1] \times \cdots \times [\alpha_m, \beta_m] \times [\alpha_1, \beta_1] \times \cdots \times [\alpha_m, \beta_m])$;

(iii) $(m_k + m_h)(\beta_1 - \alpha_1)\dots(\beta_m - \alpha_m) < 1$ *sau există* $\tau > 0$ *astfel încât:* $\frac{m_k}{\tau^m} + \frac{m_h}{\tau^m} \cdot \prod_{i=1}^{m} e^{\tau(\beta_i - \alpha_i)} < 1$, *unde*

$$\begin{aligned} m_k &= \max_{t,s \in [\alpha_1,\beta_1] \times \cdots \times [\alpha_m,\beta_m]} |k(t,s)|, \\ m_h &= \max_{t,s \in [\alpha_1,\beta_1] \times \cdots \times [\alpha_m,\beta_m]} |h(t,s)|. \end{aligned}$$

Fie $(\mathbb{B}, \|\cdot\|)$ *un spaţiu Banach, unde*

$$\mathbb{B} = c_0 = \{\mathbf{u} = (u_0, u_1, \dots, u_n, \dots) \in s(\mathbb{R}) : u_n \to 0\}$$

şi

$$\|\mathbf{u}\| = \max_{n \in \mathbb{N}} |u_n|.$$

Fie $\mathbf{u} = (u_0, u_1, \dots, u_n, \dots) \in \mathbb{B}$. *Notăm*

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= (f_0, f_1, \dots, f_n, \dots), \\ \mathbf{K} &= (K_0, K_1, \dots, K_n, \dots), \\ \mathbf{H} &= (H_0, H_1, \dots, H_n, \dots), \end{aligned}$$

unde

$$\begin{aligned} K_n(t, s, \mathbf{u}) &= k(t,s)u_{n+1}, \\ H_n(t, s, \mathbf{u}) &= h(t,s)u_{n+2}, \end{aligned}$$

$\forall\ t, s \in [\alpha_1, \beta_1] \times \cdots \times [\alpha_m, \beta_m]$. *Din (i) şi (ii) avem că* $\mathbf{f} \in C([\alpha_1, \beta_1] \times \cdots \times [\alpha_m, \beta_m], \mathbb{B})$ *şi* $\mathbf{K}, \mathbf{H} \in C([\alpha_1, \beta_1] \times \cdots \times [\alpha_m, \beta_m] \times [\alpha_1, \beta_1] \times \cdots \times [\alpha_m, \beta_m], \mathbb{B})$. *De asemenea,*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{K}(t, s, \mathbf{u}) - \mathbf{K}(t, s, \mathbf{v})\| &\leq m_k \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|, \\ \|\mathbf{H}(t, s, \mathbf{u}) - \mathbf{H}(t, s, \mathbf{v})\| &\leq m_h \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|, \end{aligned}$$

$\forall\ t, s \in [\alpha_1, \beta_1] \times \cdots \times [\alpha_m, \beta_m]$ *şi* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{B}$. *Condiţiile (i)-(v) din Teorema 3.5.1 (cazul spaţiului Banach general) sunt satisfăcute, de unde obţinem că ecuaţia (3.5.10) are o soluţie unică* $\mathbf{x}^* = (x_0^*, x_1^*, \ldots, x_n^*, \ldots) \in C([\alpha_1, \beta_1] \times \cdots \times [\alpha_m, \beta_m], \mathbb{B})$.

În acest capitol am redus studiul diverselor ecuaţii şi inegalităţi integrale la studiul unor probleme de punct fix. Am studiat existenţa şi unicitatea soluţiilor ecuaţiilor integrale ca puncte fixe ale operatorilor corespunzători. De asemenea, am prezentat câteva rezultate generale de tip Gronwall pentru inegalităţile integrale şi am dat exemple de astfel de rezultate pentru cazuri particulare de spaţii Banach şi non-Banach.

Capitolul 4

Aplicaţii la Rezultate Optimale

În cazul unor operatori A (a se vedea [8], [41], [57]) s-au obţinut limite "a priori" y^* ale soluţiilor inegalităţilor integrale de tipul $x \leq A(x)$:

$$x \leq y^*.$$

Utilizând teoria punctului fix şi Lema Abstractă Gronwall 2.0.2 arătăm că aceşti majoranţi sunt optimali (a se vedea Remark 2.0.2), sau obţinem noi majoranţi (respectiv minoranţi) optimali. Astfel, în aceste cazuri, punctul fix x_A^* al operatorului A este majorant optimal în următorul sens:

$$x \leq x_A^* \text{ şi } \forall y : x \leq y \Rightarrow x_A^* \leq y.$$

Rezultatele acestui capitol au fost publicate în [21], [22] şi [25].

4.1 Rezultate Optimale în Formă Explicită

În această secţiune considerăm câteva inegalităţi integrale de tipul

$$x \leq A(x)$$

pentru care prezentăm expresii explicite ale majoranţilor optimali x_A^*.

În lucrarea [57] B.G. Pachpatte consideră următoarea inegalitate:

$$x(t) \leq f(t) + \int_\alpha^t g(s)x(s)ds + \int_\alpha^\beta h(s)x(s)ds,\ \forall\ t \in [\alpha, \beta]\,. \tag{4.1.1}$$

Considerăm, de asemenea, inegalitatea:

$$x(t) \geq f(t) + \int_{\alpha}^{t} g(s)x(s)ds + \int_{\alpha}^{\beta} h(s)x(s)ds, \ \forall\ t \in [\alpha, \beta]. \tag{4.1.2}$$

Remarca 4.1.1. *Prin metode directe B. G. Pachpatte obţine majoranţi ai funcţiilor ce satisfac inegalitatea (4.1.1). În teorema următoare demonstrăm că majorantul găsit de Pachpatte este punct fix al operatorului corespunzător*

$$A : (C([\alpha, \beta], \mathbb{R}_+), \overset{\|\cdot\|_C}{\to}, \leq) \to (C([\alpha, \beta], \mathbb{R}_+), \overset{\|\cdot\|_C}{\to}, \leq),$$

$$A(x)(t) = f(t) + \int_{\alpha}^{t} g(s)x(s)ds + \int_{\alpha}^{\beta} h(s)x(s)ds, \ \forall\ t \in [\alpha, \beta], \tag{4.1.3}$$

unde $\|\cdot\|_C$ *este norma Chebyshev definită prin (2.0.1), de unde deducem că este optimal. În plus, găsim şi minoranţi optimali pentru funcţiile ce satisfac inegalitatea (4.1.2).*

Teorema 4.1.1. *Presupunem că:*

(i) $f, g, h \in C([\alpha, \beta], \mathbb{R}_+)$;

(ii) f *este continuu diferenţiabilă pe* $[\alpha, \beta]$ *şi* $f(t) \geq 0$, $\forall\ t \in [\alpha, \beta]$;

(iii)

$$(\beta - \alpha)(M_g + M_h) < 1,$$

unde $M_g = \max_{t \in [\alpha, \beta]} |g(t)|$ *şi* $M_h = \max_{t \in [\alpha, \beta]} |h(t)|$;

(iv) $p_1 = \int_{\alpha}^{\beta} h(s) \exp(\int_{\alpha}^{s} g(r)dr)ds < 1.$

Avem:

(a) dacă $x \in C([\alpha, \beta], \mathbb{R}_+)$ *satisface inegalitatea (4.1.1), atunci:*

$$x(t) \leq M_1 \exp(\int_{\alpha}^{t} g(s)ds) + \int_{\alpha}^{t} f'(s) \exp(\int_{s}^{t} g(r)dr)ds, \ \forall\ t \in [\alpha, \beta], \tag{4.1.4}$$

unde

$$M_1 = \frac{1}{1 - p_1} \left[f(\alpha) + \int_{\alpha}^{\beta} h(s)(\int_{\alpha}^{s} f'(\tau) \exp(\int_{\tau}^{s} g(r)dr)d\tau)ds \right];$$

(b) dacă $x \in C([\alpha, \beta], \mathbb{R}_+)$ *satisface inegalitatea (4.1.2), atunci:*

$$x(t) \geq M_1 \exp(\int_{\alpha}^{t} g(s)ds) + \int_{\alpha}^{t} f'(s) \exp(\int_{s}^{t} g(r)dr)ds, \ \forall\ t \in [\alpha, \beta], \tag{4.1.5}$$

unde

$$M_1 = \frac{1}{1-p_1}\left[f(\alpha) + \int_\alpha^\beta h(s)(\int_\alpha^s f'(\tau)\exp(\int_\tau^s g(r)dr)d\tau)ds\right]. \tag{4.1.6}$$

În continuare prezentăm majorantul optimal al soluţiilor inegalităţii considerate de Chandirov (a se vedea [8]). Majorantul obţinut de el nu este punct fix al operatorului A corespunzător.

Teorema 4.1.2. *Presupunem că:*

(i) f, g, h sunt funcţii continue pe $J = [\alpha, \beta]$;

(ii) $g(t) \geq 0, \forall\, t \in J$.

Avem:

(a) dacă $x \in C[\alpha, \beta]$ satisface inegalitatea:

$$x(t) \leq f(t) + \int_\alpha^t [g(s)x(s) + h(s)]\, ds,\ \forall\, t \in J, \tag{4.1.7}$$

atunci:

$$x(t) \leq f(\alpha)\exp(\int_\alpha^t g(s)ds) + \int_\alpha^t [f'(r) + h(r)]\exp(\int_r^t g(s)ds)dr; \tag{4.1.8}$$

(b) dacă $x \in C[\alpha, \beta]$ satisface inegalitatea:

$$x(t) \geq f(t) + \int_\alpha^t [g(s)x(s) + h(s)]\, ds,\ \forall\, t \in J, \tag{4.1.9}$$

atunci:

$$x(t) \geq f(\alpha)\exp(\int_\alpha^t g(s)ds) + \int_\alpha^t [f'(r) + h(r)]\exp(\int_r^t g(s)ds)dr. \tag{4.1.10}$$

Remarca 4.1.2. *Teorema 4.1.2 ne dă majoranţi optimali pentru $x(t)$, deoarece membrul drept al inegalităţii (4.1.8) este unicul punct fix al operatorului A corespunzător.*

Un alt exemplu este inegalitatea integrală de tip Bernoulli. Un majorant al soluţiilor inegalităţii integrale a fost obţinut de N. Lungu (a se vedea [44]). Noi obţinem un rezultat similar prin tehnica operatorilor Picard.

Teorema 4.1.3. *([21]) Presupunem că:*

(i) $x \in C([\alpha, \beta], \mathbb{R}_+),\ f, g \in C[\alpha, \beta]$:

(ii) $f(t) \geq 0,\ g(t) \geq 0,\ \forall\ t \in [\alpha, \beta]$;

(iii) $[(R+c)M_1 + (R+c)^p M_2](\beta - \alpha) \leq R$, *unde* M_1, M_2, R *sunt astfel încât:*

$$|f(t)| \leq M_1, |g(t)| \leq M_2, \forall t \in [\alpha, \beta]$$

şi

$$x \in \overline{B}(c, R) \subset (C([\alpha, \beta], \mathbb{R}_+), \|\cdot\|_\tau) \implies x(t) \in \mathbb{R}_+, \forall t \in [\alpha, \beta], \forall p \in \mathbb{R}^* \backslash \{1\}.$$

Avem:

(a) există o soluţie unică $x^* \in \overline{B}(c, \mathbb{R})$ *a ecuaţiei:*

$$x(t) = c + \int_\alpha^t [f(s)x(s) + g(s)x^p(s)]\, ds,\ \forall\ t \in [\alpha, \beta]; \tag{4.1.11}$$

(b) dacă $x \in \overline{B}(c, \mathbb{R})$ *satisface inegalitatea:*

$$x(t) \leq c + \int_\alpha^t [f(s)x(s) + g(s)x^p(s)]\, ds,\ \forall\ t \in [\alpha, \beta]; \tag{4.1.12}$$

atunci:

$$x(t) \leq \exp(\int_\alpha^t f(s)ds) \left[c^{1-p} + (1-p)\int_\alpha^t g(s) \exp\left[(p-1)\int_\alpha^s f(r)dr\right] ds\right]^{\frac{1}{1-p}}, \tag{4.1.13}$$

$\forall\ t \in [\alpha, \beta]$.

(c) dacă $x \in \overline{B}(c, \mathbb{R})$ *satisface inegalitatea:*

$$x(t) \geq c + \int_\alpha^t [f(s)x(s) + g(s)x^p(s)]\, ds,\ \forall\ t \in [\alpha, \beta]; \tag{4.1.14}$$

atunci:

$$x(t) \geq \exp(\int_\alpha^t f(s)ds) \left[c^{1-p} + (1-p)\int_\alpha^t g(s) \exp\left[(p-1)\int_\alpha^s f(r)dr\right] ds\right]^{\frac{1}{1-p}}, \tag{4.1.15}$$

$\forall\ t \in [\alpha, \beta]$.

4.2 Rezultate Optimale în Formă Generică

În această secţiune avem o inegalitate de tipul $x \leq A(x)$ pentru care majorantul optimal x_A^* nu poate fi exprimat explicit, dar este prezentat într-o formă generică. În unele cazuri particulare există expresii explicite ale lui x_A^* (a se vedea [22]), iar noi prezentăm unele dintre ele.

Teorema 4.2.1. *(Inegalitate de tip Wendroff, [41], a se vedea de asemenea [8], [46], [51], [56]) Presupunem că:*

(i) $\varphi \in C([0,\alpha] \times [0,\beta], \mathbb{R}_+)$, $a \in \mathbb{R}_+$;

(ii) φ *este crescătoare.*

Dacă $x \in C([0,\alpha] \times [0,\beta])$ *este o soluţie a inegalităţii:*

$$x(t_1,t_2) \leq a + \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} \varphi(s,t)x(s,t)dsdt, \quad t_1 \in [0,\alpha],\ t_2 \in [0,\beta], \tag{4.2.1}$$

atunci:

$$x(t_1,t_2) \leq a \exp\left(\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} \varphi(s,t)dsdt\right). \tag{4.2.2}$$

Considerăm $(X, \to, \leq) := C(D, \overset{\|\cdot\|_\tau}{\to}, \leq)$, unde $D = [0,\alpha] \times [0,\beta]$, şi $\|\cdot\|_\tau$ este norma Bielecki în $C(D)$:

$$\|x\|_\tau := \max_D(|x(t_1,t_2)| \exp(-\tau(t_1+t_2))), \quad \tau \in \mathbb{R}_+^*. \tag{4.2.3}$$

Operatorul $A : X \to X$ corespunzător este definit prin:

$$A(x)(t_1,t_2) := a + \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} \varphi(s,t)x(s,t)dsdt, \quad (t_1,t_2) \in D. \tag{4.2.4}$$

Acest operator este un operator Picard crescător, dar funcţia:

$$(t_1,t_2) \mapsto a \exp\left(\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} \varphi(s,t)dsdt\right) \tag{4.2.5}$$

nu este punct fix al operatorului A. Astfel am demonstrat următoarea remarcă:

Remarca 4.2.1. *Membrul drept al relaţiei (4.2.2) nu este punct fix al operatorului A, deci Teorema 4.2.1 nu este o consecinţă a Lemei Abstracte Gronwall 2.0.2.*

Pe de altă parte, Lema Abstractă Gronwall 2.0.2 ne permite să găsim un majorant optimal teoretic, de tipul membrului drept al relaţiei (4.2.2), fără însă să găsim o formă explicită a acestuia.

Teorema 4.2.2. *(a se vedea [22]) Presupunem că:*

(i) $\varphi \in C([0,\alpha] \times [0,\beta], \mathbb{R}_+)$, $a \in \mathbb{R}_+$;

(ii) φ *este crescătoare.*

Dacă $x \in C([0,\alpha] \times [0,\beta])$ *este o soluţie a inegalităţii (4.2.1), atunci* $x(t_1,t_2) \leq x_A^*(t_1,t_2)$, *unde* $x_A^*(t_1,t_2)$ *este unicul punct fix al operatorului* A *corespunzător definit prin (4.2.4).*

În cele ce urmează prezentăm cazuri particulare ale inegalităţii (4.2.1), pentru care deducem majoranţi optimali ai soluţiilor. Unul dintre ele este următorul:

Exemplul 4.2.1. *(Inegalitatea Wendroff (4.2.1) pentru* $\varphi(t_1,t_2) \equiv 1$*, a se vedea [22])*

Fie $a \in \mathbb{R}_+$ *şi* $c \in \mathbb{R}$*. Dacă* $x \in C(D, \mathbb{R}_+)$ *este o soluţie a inegalităţii:*

$$x(t_1,t_2) \leq a + c^2 \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} x(s,t)dsdt, \tag{4.2.6}$$

cu condiţiile:

$$x(t_1,0) = x(0,t_2) = a, \quad t_1 \in [0,\alpha],\ t_2 \in [0,\beta],$$

atunci:

$$x(t_1,t_2) \leq a \exp(c^2 t_1 t_2),\ \forall\ t_1 \in [0,\alpha], t_2 \in [0,\beta]. \tag{4.2.7}$$

În acest caz operatorul corespunzător $A : X \to X$ *este dat de:*

$$A(x)(t_1,t_2) := \alpha + c^2 \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} x(s,t)dsdt, \quad t_1 \in [0,\alpha],\ t_2 \in [0,\beta]. \tag{4.2.8}$$

Acest operator este operator Picard crescător, dar funcţia:

$$(t_1,t_2) \mapsto a \exp(c^2 t_1 t_2)$$

nu este punct fix al operatorului A.

Utilizând Teorema 4.2.2 obţinem:

$$x(t_1,t_2) \leq x_A^*(t_1,t_2), \tag{4.2.9}$$

unde punctul fix $x_A^*(t_1, t_2)$ *este (a se vedea [46], [49]):*

$$x_A^*(t_1, t_2) = a\ J_0(2c\sqrt{t_1 t_2}). \tag{4.2.10}$$

Aici $J_0(2c\sqrt{t_1 t_2})$ *este funcţia Bessel.*

În acest capitol am utilizat Lema Abstractă Gronwall ca să găsim majoranţi optimali ai soluţiilor unor inegalităţi specifice. Pentru câteva soluţii majoranţii au fost găsiţi explicit, în timp ce pentru altele a fost demonstrată doar existenţa acestora. Sunt prezentate şi unele exemple de inegalităţi Wendroff pentru care majoranţii soluţiilor au fost daţi explicit, chiar dacă pentru forma generală a inegalităţilor Wendroff majoranţii nu pot fi găsiţi efectiv.

Capitolul 5

Aplicaţii la Studiul Soluţiilor şi la Stabilitate

În acest capitol prezentăm câteva aplicaţii ale Lemei Abstracte Gronwall la diverse inegalităţi diferenţiale. Aplicăm, de asemenea, o lemă Gronwall specifică la studiul diferitelor tipuri de stabilităţi Ulam pentru ecuaţii hiperbolice de ordinul doi. Rezultatele acestui capitol pot fi găsite în [23] şi [24].

5.1 Aplicaţii la Studiul Soluţiilor unor Inegalităţi

În această secţiune considerăm diferite tipuri de ecuaţii diferenţiale la care adăugăm condiţii pe frontieră. Rezultă astfel probleme Darboux. Demonstrăm existenţa şi unicitatea soluţiilor acestor probleme. Utilizând Lema Abstractă Gronwall demonstrăm de asemenea că soluţiile acestor probleme Darboux sunt majoranţi optimali pentru funcţiile care satisfac inegalităţile diferenţiale corespunzătoare.

5.1.1 Inegalităţi Hiperbolice de Ordinul Doi

Ecuaţiile şi inegalităţile hiperbolice reprezintă un vast domeniu al Ecuaţiilor cu Derivate Parţiale, având multe aplicaţii practice. Ele au fost studiate de mulţi autori (a se vedea

[26], [35], [46], [49], [75] şi altele).

În această subsecţiune studiem comportamentul calitativ al soluţiilor unor ecuaţii hiperbolice de ordinul doi.

Fie $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\overline{D} := [0,\alpha] \times [0,\beta]$ şi $\mathbb{B}$ un spaţiu Banach real sau complex. Considerăm următoarea inegalitate hiperbolică:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t_1 \partial t_2}(t_1,t_2) \leq f(t_1,t_2,x(t_1,t_2),\frac{\partial x}{\partial t_1}(t_1,t_2),\frac{\partial x}{\partial t_2}(t_1,t_2)),\ \forall\ (t_1,t_2) \in \overline{D} \tag{5.1.1}$$

şi problema Darboux:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t_1 \partial t_2}(t_1,t_2) = f(t_1,t_2,x(t_1,t_2),\frac{\partial x}{\partial t_1}(t_1,t_2),\frac{\partial x}{\partial t_2}(t_1,t_2)),\ \forall\ (t_1,t_2) \in \overline{D} \tag{5.1.2}$$

$$\begin{cases} x(t_1,0) = \varphi(t_1),\ \forall\ t_1 \in [0,\alpha]\,; \\ x(0,t_2) = \psi(t_2),\ \forall\ t_2 \in [0,\beta]\,; \\ \varphi(0) = \psi(0), \end{cases} \tag{5.1.3}$$

unde $f : \overline{D} \times \mathbb{B}^3 \to \mathbb{B}$, $\varphi \in C^1([0,\alpha]\,,\mathbb{B})$, $\psi \in C^1([0,\beta]\,,\mathbb{B})$, $x \in C^1(\overline{D},\mathbb{B})$ şi $\frac{\partial^2 x}{\partial t_1 \partial t_2} \in C(\overline{D},\mathbb{B})$.

Demonstrăm existenţa şi unicitatea soluţiei problemei Darboux (5.1.2) + (5.1.3) prin metoda operatorilor Picard şi, de asemenea, dăm un rezultat de tip Gronwall pentru inegalitatea (5.1.1). În cazul $\mathbb{B}$:=$\mathbb{R}$ această inegalitate a fost studiată în [49], [46] ş.a.m.d. Aici prezentăm rezultatul în cazul general al unui spaţiu Banach oarecare.

5.1.2 Inegalităţi Hiperbolice de Ordinul Trei

În această subsecţiune generalizăm rezultatele obţinute în secţiunea precedentă pentru ecuaţii hiperbolice de ordinul doi pentru ecuaţii hiperbolice de ordinul trei.

5.1.3 Inegalităţi Pseudoparabolice

Ecuaţiile şi inegalităţile pseudoparabolice reprezintă un capitol important al Ecuaţiilor cu Derivate Parţiale, cu multe aplicaţii practice în electromagnetism, conducerea căldurii etc (a se vedea [43], [46], [49], [73] etc).

În această subsecţiune considerăm următoarea inegalitate pseudoparabolică:

$$\frac{\partial^3 x}{\partial t_1^2 \partial t_2}(t_1,t_2) \leq F(t_1,t_2,x(t_1,t_2),\frac{\partial x}{\partial t_2}(t_1,t_2),\frac{\partial^2 x}{\partial t_1^2}(t_1,t_2)),\ (t_1,t_2)\in \overline{D}, \tag{5.1.4}$$

şi problema Darboux corespunzătoare:

$$\frac{\partial^3 x}{\partial t_1^2 \partial t_2}(t_1,t_2) = F(t_1,t_2,x(t_1,t_2),\frac{\partial x}{\partial t_2}(t_1,t_2),\frac{\partial^2 x}{\partial t_1^2}(t_1,t_2)),\ (t_1,t_2)\in \overline{D}, \tag{5.1.5}$$

$$\begin{cases} x(t_1,0)=h(t_1),\ \forall\ t_1\in[0,\alpha] \\ x(0,t_2)=g_1(t_2),\ \forall\ t_2\in[0,\beta] \\ \frac{\partial x}{\partial t_1}(0,t_2)=g_2(t_2),\ \forall\ t_2\in[0,\beta]\,, \end{cases} \tag{5.1.6}$$

unde $\overline{D} := [0,\alpha]\times[0,\beta]\,,\ F\in C(\overline{D}\times\mathbb{R}^3,\mathbb{R}),\ h\in C^2\,[0,\alpha]\,,\ g_1,\ g_2\in C^1\,[0,\beta],\ x\in C^1(\overline{D})$, $\frac{\partial^2 x}{\partial t_1^2},\ \frac{\partial^3 x}{\partial t_1^2\partial t_2}\in C(\overline{D}),\ h(0)=h'(0)=g_1(0)=g_2(0)=0.$

Aplicăm tehnica operatorilor Picard ca să demonstrăm existenţa şi unicitatea soluţiei problemei Darboux (5.1.5)+(5.1.6) şi dăm un rezultat de tip Gronwall pentru inegalitatea (5.1.4). Mai mult, utilizăm funcţia Riemann ca să reprezentăm soluţia problemei Darboux (5.1.5)+(5.1.6) în cazul unor ecuaţii pseudoparabolice specifice. Rezultatele sunt prezentate în [23].

Pe parcursul acestei subsecţiuni presupunem că:

$\alpha>0,\ \beta>0$ şi $\overline{D} := [0,\alpha]\times[0,\beta]\,.$

Teorema 5.1.1. *(a se vedea [23]) Presupunem că:*

(i) $F\in C(\overline{D}\times\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$*;*

(ii) există $L_F>0$ *astfel încât:*

$$|F(t_1,t_2,u_1,v_1,w_1)-F(t_1,t_2,u_2,v_2,w_2)| \leq L_F \max(|u_1-u_2|\,,|v_1-v_2|\,,|w_1-w_2|),$$

$\forall\ (t_1,t_2)\in\overline{D}$ *şi* $u_i,v_i,w_i\in\mathbb{R},\ i\in\{1,2\}$*;*

(iii) $h\in C^2\,[0,\alpha]\,,\ g_1,g_2\in C^1\,[0,\beta]\,$*;*

(iv) $F(t_1,t_2,\cdot,\cdot,\cdot):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ *este crescătoare,* $\forall\ (t_1,t_2)\in\overline{D}$*.*

Atunci:

(a) problema Darboux (5.1.5)+(5.1.6) are o soluţie unică $x^*(t_1,t_2)$*;*

(b) dacă $x(t_1,t_2)$ satisface inegalitatea (5.1.4) cu condiţiile pe frontieră (5.1.6), atunci:

$$x(t_1,t_2) \leq x^*(t_1,t_2).$$

În ultima parte a acestei subsecţiuni considerăm câteva exemple de inegalităţi de tipul (5.1.4). Din Teorema 5.1.1 rezultă că orice soluţie a unei astfel de inegalităţi este mărginită de soluţia problemei Darboux corespunzătoare, pe care o rezolvăm explicit în termenii funcţiei Riemann. În acest rezumat prezentăm un astfel de exemplu.

Exemplul 5.1.1. *Considerăm inegalitatea* (5.1.4) *în cazul*
$F = \frac{\partial x}{\partial t_2} - \frac{\partial^2 x}{\partial t_1^2}$ *(a se vedea [23], [19], de asemenea [73]):*

$$\frac{\partial^3 x}{\partial t_1^2 \partial t_2}(t_1,t_2) \leq \frac{\partial x}{\partial t_2}(t_1,t_2) - \frac{\partial^2 x}{\partial t_1^2}(t_1,t_2), \tag{5.1.7}$$

şi problema Darboux corespunzătoare:

$$\frac{\partial^3 x}{\partial t_1^2 \partial t_2}(t_1,t_2) - \frac{\partial x}{\partial t_2}(t_1,t_2) + \frac{\partial^2 x}{\partial t_1^2}(t_1,t_2) = 0, \tag{5.1.8}$$

cu condiţiile pe frontieră (5.1.6).

Cu notaţia

$$(Lx)(t_1,t_2) := \frac{\partial^3 x}{\partial t_1^2 \partial t_2}(t_1,t_2) - \frac{\partial x}{\partial t_2}(t_1,t_2) + \frac{\partial^2 x}{\partial t_1^2}(t_1,t_2)$$

ecuaţia (5.1.8) devine:

$$Lx = 0.$$

Din Teorema 5.1.1 rezultă că problema (5.1.8) + (5.1.6) are o soluţie unică $x^*(t_1,t_2)$, iar dacă $x(t_1,t_2)$ este o soluţie a problemei (5.1.7) + (5.1.6), atunci:

$$x(t_1,t_2) \leq x^*(t_1,t_2). \tag{5.1.9}$$

În acest caz soluţia $x^*(t_1,t_2)$ poate fi reprezentată cu ajutorul funcţiei Riemann $v(t_1,t_2)$, care este soluţie a ecuaţiei adiacente (a se vedea [49], [73], [46]) :

$$(L^*v)(t_1,t_2) := \frac{\partial^3 v}{\partial t_1^2 \partial t_2}(t_1,t_2) - \frac{\partial v}{\partial t_2}(t_1,t_2) - \frac{\partial^2 v}{\partial t_1^2}(t_1,t_2) = 0.$$

Soluţia $x^*(t_1,t_2)$ este:

$$\begin{aligned} x^*(t_1,t_2) &= h(t_1) - \int_0^{t_1} h'(s) v_s(s,0;t_1,t_2)ds \\ &+ \int_0^{t_2} \left[g_2'(t) v_t(0,t;t_1,t_2) - g_1'(t) v_{st}(0,t;t_1,t_2) \right] dt \\ &+ \int_0^{t_2} \left[g_2(t) v_t(0,t;t_1,t_2) - g_1'(t) v_s(0,t;t_1,t_2) \right] dt, \end{aligned}$$

unde $v(t_1,t_2)$ este funcţia Riemann corespunzătoare ecuaţiei $L^*v = 0$.

5.2 Aplicaţii la Stabilităţi de Tip Ulam ale Ecuaţiilor Hiperbolice

În această secţiune aplicăm următoarea lemă de tip Gronwall pentru a obţine rezultate de stabilitate Ulam-Hyers şi stabilitate Ulam-Hyers-Rassias generalizată pentru ecuaţia cu derivate partiale de tip hiperbolic studiată în subsecţiunea 5.1.1 a acestui capitol.

Lema 5.2.1. *(a se vedea [41], also [56]) Presupunem că:*

(i) $x, \varphi, g \in C(\mathbb{R}_+^n, \mathbb{R}_+)$;

(ii) pentru fiecare $t \geq t_0$ avem:

$$x(t) \leq g(t) + \int_{t_0}^{t} \varphi(s) x(s) ds;$$

(iii) $g(t)$ este pozitivă şi crescătoare.

Atunci:

$$x(t) \leq g(t) \exp \int_s^t \varphi(r) dr, \ \forall \ t \geq t_0.$$

Rezultate de stabilităţi Ulam pentru ecuaţii funcţionale sunt bine cunoscute (a se vedea, de exemplu, [15], [34], [38], [67], [68]).

Începem prin a prezenta câteva definiţii şi rezultate de stabilităţi de tip Ulam.

Pe parcursul acestei secţiuni considerăm:

$$\varepsilon > 0, \ \alpha, \beta \in (0, \infty], \ \varphi \in C\left([0,\alpha) \times [0,\beta), \mathbb{R}_+\right),$$

unde $(\mathbb{B}, |\cdot|)$ este un spaţiu Banach real sau complex.

Considerăm următoarea ecuaţie cu derivate parţiale de tip hiperbolic:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t_1 \partial t_2}(t_1,t_2) = f(t_1,t_2,x(t_1,t_2),\frac{\partial x}{\partial t_1}(t_1,t_2),\frac{\partial x}{\partial t_2}(t_1,t_2)), \tag{5.2.1}$$

pentru $0 \le t_1 < \alpha$, $0 \le t_2 < \beta$, unde $f \in C\left([0,\alpha) \times [0,\beta) \times \mathbb{B}^3, \mathbb{B}\right)$.

De asemenea, considerăm următoarele inegalităţi:

$$\left|\frac{\partial^2 y}{\partial t_1 \partial t_2}(t_1,t_2) - f(t_1,t_2,y(t_1,t_2),\frac{\partial y}{\partial t_1}(t_1,t_2),\frac{\partial y}{\partial t_2}(t_1,t_2))\right| \le \varepsilon, \tag{5.2.2}$$

$$\left|\frac{\partial^2 y}{\partial t_1 \partial t_2}(t_1,t_2) - f(t_1,t_2,y(t_1,t_2),\frac{\partial y}{\partial t_1}(t_1,t_2),\frac{\partial y}{\partial t_2}(t_1,t_2))\right| \le \varphi(t_1,t_2), \tag{5.2.3}$$

$$\left|\frac{\partial^2 y}{\partial t_1 \partial t_2}(t_1,t_2) - f(t_1,t_2,y(t_1,t_2),\frac{\partial y}{\partial t_1}(t_1,t_2),\frac{\partial y}{\partial t_2}(t_1,t_2))\right| \le \varepsilon\varphi(t_1,t_2), \tag{5.2.4}$$

$\forall\ t_1 \in [0,\alpha)$, $t_2 \in [0,\beta)$.

Avem nevoie de următoarele definiţii şi rezultate (a se vedea [87], [90] şi [89])

Definiţia 5.2.1. *Spunem că o funcţie x este soluţie a ecuaţiei (5.2.1) dacă $x \in C\left([0,\alpha) \times [0,\beta)\right) \cap C^1\left([0,\alpha) \times [0,\beta)\right)$, $\frac{\partial^2 x}{\partial t_1 \partial t_2} \in C\left([0,\alpha) \times [0,\beta)\right)$ şi x satisface (5.2.1).*

Definiţia 5.2.2. *Spunem că ecuaţia (5.2.1) este Ulam-Hyers stabilă dacă există numerele reale C_f^1, C_f^2 şi $C_f^3 > 0$ astfel încât pentru orice $\varepsilon > 0$ şi pentru orice soluţie y a inegalităţii (5.2.2), există o soluţie x a ecuaţiei (5.2.1) cu:*

$$\begin{cases} |y(t_1,t_2) - x(t_1,t_2)| \le C_f^1\varepsilon,\ \forall\ t_1 \in [0,\alpha),\ \forall\ t_2 \in [0,\beta), \\ \left|\frac{\partial y}{\partial t_1}(t_1,t_2) - \frac{\partial x}{\partial t_1}(t_1,t_2)\right| \le C_f^2\varepsilon,\ \forall\ t_1 \in [0,\alpha),\ \forall\ t_2 \in [0,\beta), \\ \left|\frac{\partial y}{\partial t_2}(t_1,t_2) - \frac{\partial x}{\partial t_2}(t_1,t_2)\right| \le C_f^3\varepsilon,\ \forall\ t_1 \in [0,\alpha),\ \forall\ t_2 \in [0,\beta). \end{cases} \tag{5.2.5}$$

Definiţia 5.2.3. *Spunem că ecuaţia (5.2.1) este Ulam-Hyers-Rassias generalizat stabilă dacă există numerele reale $C_{f,\varphi}^1, C_{f,\varphi}^2$ şi $C_{f,\varphi}^3 > 0$ astfel încât pentru orice $\varepsilon > 0$ şi pentru orice soluţie y a inegalităţii (5.2.3) există o soluţie x a ecuaţiei (5.2.1) cu:*

$$\begin{cases} |y(t_1,t_2) - x(t_1,t_2)| \le C_{f,\varphi}^1\varphi(t_1,t_2),\ \forall\ t_1 \in [0,\alpha),\ \forall\ t_2 \in [0,\beta), \\ \left|\frac{\partial y}{\partial t_1}(t_1,t_2) - \frac{\partial x}{\partial t_1}(t_1,t_2)\right| \le C_{f,\varphi}^2\varphi(t_1,t_2),\ \forall\ t_1 \in [0,\alpha),\ \forall\ t_2 \in [0,\beta), \\ \left|\frac{\partial y}{\partial t_2}(t_1,t_2) - \frac{\partial x}{\partial t_2}(t_1,t_2)\right| \le C_{f,\varphi}^3\varphi(t_1,t_2),\ \forall\ t_1 \in [0,\alpha),\ \forall\ t_2 \in [0,\beta). \end{cases} \tag{5.2.6}$$

Introducem următoarele notaţii:

$$\begin{aligned} x_1(t_1,t_2) &= \frac{\partial x}{\partial t_1}(t_1,t_2),\ x_2(t_1,t_2) = \frac{\partial x}{\partial t_2}(t_1,t_2), \\ y_1(t_1,t_2) &= \frac{\partial y}{\partial t_1}(t_1,t_2),\ y_2(t_1,t_2) = \frac{\partial y}{\partial t_2}(t_1,t_2). \end{aligned}$$

În ceea ce urmează dăm un rezultat de existenţă şi unicitate a soluţiei ecuaţiei (5.2.1) şi, de asemenea, un rezultat de stabilitate Ulam-Hyers pentru aceeaşi ecuaţie în cazul $\alpha < \infty$ şi $\beta < \infty$.

Teorema 5.2.1. *Presupunem că:*

(i) $\alpha < \infty$, $\beta < \infty$;

(ii) $f \in C([0,\alpha] \times [0,\beta] \times \mathbb{B}^3, \mathbb{B})$;

(iii) există $L_f > 0$ *astfel încât:*

$$|f(t_1,t_2,z_1,z_2,z_3) - f(t_1,t_2,t_1,t_2,t_3)| \le L_f \max\{|z_i - t_i|, i = 1,2,3\}, \tag{5.2.7}$$

$\forall\ t_1 \in [0,\alpha]$, $t_2 \in [0,\beta]$ *şi* $z_1, z_2, z_3, t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{B}$.

Atunci:

(a) pentru $\phi \in C^1([0,\alpha],\mathbb{B})$ *şi* $\psi \in C^1([0,\beta],\mathbb{B})$ *ecuaţia (5.2.1) are o soluţie unică care satisface:*

$$x(t_1,0) = \phi(t_1),\ \forall\ t_1 \in [0,\alpha], \tag{5.2.8}$$

şi

$$x(0,t_2) = \psi(t_2),\ \forall\ t_2 \in [0,\beta]; \tag{5.2.9}$$

(b) ecuaţia (5.2.1) este Ulam-Hyers stabilă.

Remarca 5.2.1. *Dacă* $\alpha = \infty$ *sau* $\beta = \infty$*, atunci ecuaţia (5.2.1) nu este Ulam-Hyers stabilă.*

În următoarele considerăm ecuaţia hiperbolică (5.2.1) şi inegalitatea (5.2.3) în cazul $\alpha = \infty$ şi $\beta = \infty$, şi demonstrăm stabilitatea Ulam-Hyers-Rassias generalizată a ecuaţiei (5.2.1).

Teorema 5.2.2. *Presupunem că:*

(i) $f \in C([0,\infty) \times [0,\infty) \times \mathbb{B}^3, \mathbb{B})$*;*

(ii) există $l_f \in C^1([0,\infty) \times [0,\infty), \mathbb{R}_+)$ *astfel încât:*

$$|f(t_1,t_2,z_1,z_2,z_3) - f(t_1,t_2,t_1,t_2,t_3)| \le l_f(t_1,t_2)\max\{|z_i - t_i|\,, i = 1,2,3\}, \tag{5.2.10}$$

$\forall\ t_1, t_2 \in [0,\infty)$;

(iii) există $\lambda_\varphi^1, \lambda_\varphi^2, \lambda_\varphi^3 > 0$ *astfel încât:*

$$\begin{cases} \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} \varphi(s,t)dsdt \le \lambda_\varphi^1 \varphi(t_1,t_2),\ \forall\ t_1,t_2 \in [0,\infty), \\ \int_0^{t_2} \varphi(t_1,t)dt \le \lambda_\varphi^2 \varphi(t_1,t_2),\ \forall\ t_1,t_2 \in [0,\infty), \\ \int_0^{t_1} \varphi(s,t_2)ds \le \lambda_\varphi^3 \varphi(t_1,t_2),\ \forall\ t_1,t_2 \in [0,\infty); \end{cases} \tag{5.2.11}$$

(iv) $\varphi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *este crescătoare.*

Atunci ecuaţia (5.2.1) cu $\alpha = \infty$ *şi* $\beta = \infty$ *este Ulam-Hyers-Rassias generalizat stabilă.*

Bibliografie

[1] S. András, *Fredholm-Volterra equations*, P.U.M.A., **13** (2002), no. 1-2, 21-30.

[2] S. András, *Ecuaţii integrale Fredholm-Volterra*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 2005.

[3] S. András, *Gronwall type inequalities via subconvex sequences*, Seminar on Fixed Point Theory, **3** (2002), 183-188.

[4] M. Angrisani and M. Clavelli, *Synthetic approaches to problems of fixed points in metric spaces*, Ann. Mat. Pura Appl., **170** (1996), 1-12.

[5] J. Appell, A.S. Kalitvin, *Existence results for integral equations: Spectral methods vs. Fixed point theory*, Fixed Point Theory, **7** (2006), no. 2, 219-234.

[6] S. Ashirov, Ya. D. Mamedov, *A Volterra-type integral equation,* UMJ 40, **4** (1988), 510-515.

[7] M. Ashyraliyev, *Generalizations of Gronwall's integral inequality and their discrete analogies*, CWI Netherlands, no. E0520 (2005), 1-27.

[8] D. Bainov, P. Simeonov, *Integral inequalities and applications*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht/Boston/London, no. 57, 1992.

[9] D. Bainov, A. I. Zahariev, A. D. Myshkis, *Asymptotic properties of a class of operator-differential inequalities*, Publ. RIMS Kyoto Univ. 20, **5** (1984), 903-911.

[10] P. R. Beesack, *Comparison theorems and integral inequalities for Volterra integral equations*, Proc.Am.Math.Soc., **20** (1969), 61-66.

[11] R. Bellman, *The stability of soluţions of differential equations*, Duke Math. Journal, **10** (1943), no. 4, 643-647.

[12] C. Bessaga, *On the converse of the Banach fixed point principle*, Colloq.Math., **7** (1959), 41-43.

[13] T.A. Burton, *Volterra integral and differential equations*, Academic Press, New York, 1983.

[14] F. Caliò, E. Marcchetti, V. Mureşan, *On some Volterra-Fredholm integral equations*, Int. J. Pure Appl. Math., **31** (2006), no. 2, 173-184.

[15] L. Cădariu, V. Radu, *The Fixed Points Method for the Stability of Some funcţional Equations*, Carphatian J. Math., **23**(2007), no. 1-2, 63-72.

[16] C.J. Chen, W. S. Cheung, D. Zhao, *Gronwall-Bellman-type integral inequalities and applications to BVPs*, Journal of inequalities and Applications, 2009, 1-15.

[17] Y.J. Cho, S.S. Dragomir, Y.H. Kim, *On some integral inequalities with iterated integrals*, J. Korean Math. Soc., **43** (2006), no. 3, 563-578.

[18] S.C. Chu, F.T. Matcalf, *On Gronwall's inequality*, Proc. Am. Math. Soc., **18** (1967), 439-440.

[19] D.L. Colton, *Pseudoparabolic equations in one space variable*, Journal of Diff. Eq., **12** (1972), 559-565.

[20] C. Corduneanu, *Integral equations and applications*, Cambridge Univ. Press, 1991.

[21] C. Crăciun, *On some Gronwall inequalities*, Seminar on Fixed Point Theory, Cluj-Napoca, **1** (2000), 31-34.

[22] C. Crăciun, N. Lungu, *Abstract and concrete Gronwall lemmas*, Fixed Point Theory, **10** (2009), no. 2, 221-228.

[23] C. Crăciun, N. Lungu, *Pseudoparabolic inequalities* (to appear).

[24] C. Crăciun, N. Lungu, *Ulam-Hyers-Rassias stability of a hyperbolic partial differential equation* (to appear).

[25] C. Crăciun, M.A. Şerban, *A nonlinear integral equation via Picard operators*, Fixed Point Theory (to appear).

[26] G.S. Desző, *Ecuaţii hiperbolice cu argument modificat. Tehnica punctului fix*, Presa Univ. Clujeană, Cluj-Napoca, 2003.

[27] M. Dobriţoiu, *Existence and continuous dependence on data of the soluţion of an integral equation*, Bulletins for applied&computer mathematics, Budapest, BAM-CVI/2005.

[28] M. Dobriţoiu, *Properties of the soluţion of an integral equation with modified argument*, Carpathian Journal of Mathematics, Baia Mare, **23** (2007), no. 1-2, 77-80.

[29] M. Dobriţoiu, I.A. Rus, M.A. Şerban, *An integral equation arising from infectious diseases via Picard operators*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Mathematica, vol LII, **3** (2007), 81-94.

[30] S.S. Dragomir, *On some Gronwall type lemmas*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Mathematica, XXXIII, **4** (1988), 29-36.

[31] M. Fréchet, *Les espaces abstraits*, Gauthier-Villars, Paris, 1928.

[32] H. Gronwall, *Note on the derivative with respect to a parameter of the soluţions of a system of differential equations*, Ann. of Math, **20** (1919), no. 4, 292-296.

[33] D. Guo, V. Lakshmikantham, X. Liu, *Nonlinear integral equations in abstract spaces*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1996.

[34] D.H. Hyers, G. Isac and Th. M. Rassias, *Stability of funcţional Equations in Several Variables*, Birkhäuser, Basel, 1998.

[35] D.V. Ionescu, *Sur une classe d'équations funcţionelles*, Thèse, Paris, 1927.

[36] D.V.Ionescu, *ecuaţii diferenţiale si integrale*, Editura Didactică si Pedagogică, Bucureşti, 1972.

[37] L. Janos, *A converse of Banach's contraction theorem*, Proc. A.M.S., **18** (1967), 287-289.

[38] S.M. Jung, K.S. Lee, *Ulam-Hyers-Rassias stability of linear differential equations of second order*, J. Comput. Math. Optim., **3** (2007), no. 3, 193-200.

[39] W.A. Kirk, B. Sims, *Handbook of metrical fixed point theory*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.

[40] M.A. Krasnoselskii, *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations*, Pergamon Press, Oxford-London-New York-Paris, 1964.

[41] V. Lakshmikantham, S. Leela and A.A. Martynyuk, *Stability analysis of nonlinear systems*, New York, 1989.

[42] T. Lalescu, *Introducere in teoria ecuaţiilor integrale*, Ed. Acad. Bucuresti, 1956 (first edition in 1911).

[43] K.B. Liaskos, I.G. Stratis, A.N. Yannacopoulos, *Pseudoparabolic equations with additive noise and applications*, Math. Methods in the Applied Sciences, **32** (2008), no. 8, 963-985.

[44] N. Lungu, *On some Gronwall-Bihari-type inequalities*, Libertas Mathematica, **20** (2000), 67-70.

[45] N. Lungu, *On some Gronwall-Bihari-Wendorff-type inequalities*, Seminar on Fixed Point Theory, **3** (2002), 249-254.

[46] N. Lungu, *Qualitative problems in the theory of hyperbolic differential equations*, Digital Data, Cluj-Napoca, 2006.

[47] N. Lungu, *On some Volterra integral inequalities*, Fixed Point Theory, **8** (2007), no. 1, 39-45.

[48] N. Lungu, D. Popa, *On some differential inequalities*, Seminar of Fixed Point Theory, **3** (2002), 323-327.

[49] N. Lungu, I.A. Rus, *Hyperbolic differential inequalities*, Libertas Mathematica, **21** (2001), 35-40.

[50] N. Lungu, I.A. Rus, *Gronwall inequalities via Picard operators* (to appear).

[51] D.S. Mitrinović, J.E. Pečarić, A.M. Fink, *Inequalities involving funcţions and their integrals and derivatives,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1991.

[52] V. Mureşan, *A Gronwall type inequality for Fredholm Operators*, Mathematica, Tome 41(64), no. **2** (1999), 227-231.

[53] V. Mureşan, *funcţional-Integral Equations*, Media-Mira, Cluj-Napoca, 2003.

[54] J. Norbury, A.M. Stuart, *Volterra integral equations and a new Gronwall inequality. Part 1: The linear case*, Proc. Royal Soc. Edinburgh, **106A** (1987), 361-373.

[55] B.G. Pachpate, *On the existence and uniqueness of soluţions of Volterra-Fredholm integral equations*, Mathematics Seminar Notes, **10** (1982), 733-742.

[56] B.G. Pachpatte, *Inequalities for differential and integral equations,* Academic Press, New York-London, 1998.

[57] B.G. Pachpatte, *Explicit bounds on Gamidov type integral inequalities*, Tamkang Journal of Mathematics, **37** (2006), no. **1**, 1-9.

[58] B.G. Pachpatte, *Some basic theorems on difference-differencial equations*, Electronic Journal of Differential Equations, no.75 (2008), 1-11.

[59] B.G. Pachpatte, *On certain Volterra integral and integro-differential equations*, Facta Universitas, **23** (2008), 1-12.

[60] E. De Pascale, P.P. Zabreiko, *Fixed point theorems for operators in spaces of continuous funcţions,* Fixed Point Theory, 5 (2004), no. 1, 117-129.

[61] P. Pavel, *Sur un systeme d'equations aux derivees partielles*, Seminar on Differential Equations, Preprint **3** (1989), 121-138.

[62] I.G. Petrovschi, *Lectii de teoria ecuaţiilor integrale*, Ed. Tehnica, 1947.

[63] A. Petruşel, *Fredholm-Volterra integral equations and Maia's theorem,* Univ. Babeş-Bolyai, Preprint **3 (**1988), 79-82.

[64] A. Petruşel, *Multivalued weakly Picard operators and applications*, Scientiae Mathematicae Japonicae, **59** (2004), 167-202.

[65] A. Petruşel, I.A. Rus, *Fixed point theorems in ordered L-spaces*, Proc. Am. Math. Soc., **134** (2005), no.**2**, 411-418.

[66] A.D. Polyanin, A.V. Manzhirov, *Handbook of integral equations*, CRC Press, London, 1998.

[67] D. Popa, *funcţional equations. Set-valued soluţions. Stability*, Technical Univ. Press, Cluj-Napoca, 2006.

[68] D. Popa, *On the Stability of the General Linear Equation*, Result. Math. **53** (2009), 383-389.

[69] D. Popa, N. Lungu, *On an operatorial inequality*, Demonstratio Mathematica, **38** (2005), 667-674.

[70] R. Precup, *ecuaţii integrale neliniare*, UBB Cluj-Napoca, 1993.

[71] R. Precup, E. Kirr, *Analysis of nonlinear integral equation modelling infection diseases*, Proc. of the International Conference, Univ. of West, Timisoara, 1997, 178-195.

[72] R. Precup, *Methods in nonlinear integral equations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 2002.

[73] W. Rundell, M. Stecher, *Remarks concerning the support soluţions of pseudoparabolic equations,* Proc. Amer. Math. Soc., **63** (1977), no.1, 77-81.

[74] I.A. Rus, *Metrical fixed point theorems*, Univ. of Cluj-Napoca, 1979.

[75] I.A. Rus, *On the problem of Darboux-Ionescu*, Babeş-Bolyai Univ., Preprint no. 1, 1981.

[76] I.A. Rus, *Generalized contractions*, Seminar on Fixed Point Theory, 1–130, Preprint, 83-3, Univ. "Babeş-Bolyai", Cluj-Napoca, 1983.

[77] I.A. Rus, *Weakly Picard mappings*, Comment. Math. Caroline, **34** (1993), no. 4, 769-773.

[78] I.A. Rus, *Ecuaţii diferenţiale, ecuaţii integrale şi sisteme dinamice*, Transilvania Press, 1996.

[79] I.A. Rus, *Picard operators and applications*, Seminar on Fixed Point Theory, Cluj-Napoca, preprint **3** (1996).

[80] I.A. Rus, *Who authored the first integral equations book in the world?*, Seminar on Fixed Point Theory Cluj-Napoca, **1** (2000), 81-86.

[81] I.A. Rus, *Generalized contractions and applications*, Cluj University Press, Cluj-Napoca, 2001.

[82] I.A. Rus, *Weakly Picard operators and applications*, Seminar on Fixed Point Theory Cluj-Napoca, **2** (2001), 41-58.

[83] I.A. Rus, *Picard operators and applications*, Scientiae Mathematicae Japonicae, **58** (2003), no. 1, 191-219.

[84] I.A. Rus, *Fixed points, upper and lower fixed points: abstract Gronwall lemmas,* Carpathian J. Math., **20** (2004), no. 1, 125-134.

[85] I.A. Rus, *The theory of a metrical fixed point theorem: theoretical and applicative relevance,* Fixed Point Theory, **9** (2008), 541-559.

[86] I.A. Rus, *Gronwall Lemmas: Ten open problems*, Scientiae Mathematicae Japonicae, **70** (2009), no. 2, 221-228.

[87] I.A. Rus, *Ulam stability of ordinary differential equations*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Mathematica, **54** (2009), no. 4.

[88] I.A. Rus, *Remarks on Ulam stability of operatorulial equations*, Fixed Point Theory, **10** (2009), no. 2, 305-320.

[89] I.A. Rus, *Gronwall lemma approach to the Hyers-Ulam-Rassias stability of an integral equation*, Nonlinear analysis and variational problems, Springer New York, **35** (2010).

[90] I.A. Rus, N. Lungu, *Ulam stability of a nonlinear hyperbolic partial differential equation*, Carphatian J. Math., **24** (2008), no. 3, 403-408.

[91] I.A. Rus, A. Petruşel, M.A. Şerban, *Weakly Picard operators:equivalent definitions, applications and open problems*, Fixed Point Theory, **7** (2006), No.1, 3-22.

[92] I.A. Rus, A. Petruşel, G. Petruşel, *Fixed point theory*, Cluj University Press, 2008.

[93] I.A. Rus, M.A. Şerban, *Operators on infinite dimensional cartesian product,* Analele Univ.Vest Timisoara (to appear).

[94] A. Sîncelean, *On a class of funcţional-integral equations,* Seminar on Fixed Point Theory, Cluj-Napoca, **1** (2000), 87-92.

[95] M.A. Şerban, *Teoria punctului fix pentru operatori definiţi pe produs cartezian*, Presa Univ. Clujeană, Cluj-Napoca, 2002.

[96] V.Ya. Stetsenko, M. Shaban, *On operatorial inequalities analogous to Gronwall-Bihari ones*, D. A. N. Tadj., **29** (1986), 393-398 (in Russian).

[97] N.E. Tatar, *An impulsive nonlinear singular version of the Gronwall-Bihari inequality*, Journal of Inequalities and Applications, 2006, 1-12.

[98] N. Taghizadeh, V. Khanbabai, *On the formalization of the soluţion of Fredholm integral equations with degenerate kernel*, International Mathematical Forum, **3** (2008), no.14, 695-701.

[99] F.G. Tricomi, *Integral equations,* Dover Publications, 1985.

[100] M. Zima, *The abstract Gronwall Lemma for some nonlinear operators*, Demonstratio Mathematica, **XXXI** (1998), no.2, 325-332.

[101] K. Young-Ho, *Explicit bounds on some nonlinear integral inequalities,* J. of Ineq. in Pure and Applied Math., **7** (2006), no. 2, art 48.