UNIVERSITATEA "BABEŞ-BOLYAI" CLUJ-NAPOCA

FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Metode de continuare pentru studiul soluțiilor periodice ale ecuațiilor funcțional-diferențiale neliniare

Teză de doctorat

Conducător ştiințific
Prof. dr. Radu Precup

Doctorand
Vasile Dincuță

2010

Cuprins

Cuvinte Cheie

metode de continuare, solutie periodica, solutie pozitiva, ecuatie neliniara, ecuatii functional-diferentiale, ecuatii operatoriale, Teorema lui Leray-Schauder, Teorema lui Krasnoselskii, ecuatii de punct fix, ecuatii de coincidenta, Functia lui Green

Introducere

Una dintre cele mai utilizate tehnici de investigare a existenţei soluţiilor pentru ecuaţiile neliniare este dată de metodele de continuare. Acestea au la bază teoremele de tip Leray-Schauder, numite şi teoreme de continuare şi reprezintă un instrument deosebit de puternic de studiu al ecuaţiilor operatoriale, în particular al ecuaţiilor funcţional-diferenţiale neliniare. În esenţă, metodele de continuare garantează existenţa unei soluţii pentru o ecuaţie dată plecând de la soluţia unei ecuaţii mai simple. Astfel, dacă Λ şi Δ sunt două mulţimi astfel încât $\Lambda \subseteq \Delta$, şi $F : \Lambda \to \Delta$ este o aplicaţie, pentru a rezolva ecuaţia de punct fix

$$F(x) = x, \tag{*}$$

vom asocia acestei ecuaţii o altă ecuaţie, "mai simplă"

$$G(x) = x. \tag{**}$$

Folosindu-ne de o omotopie, adică de o aplicaţie $H : \Lambda \times [0, 1] \to \Delta$ care face legătura între F şi G prin egalităţile

$$H(\cdot, 0) = G \text{ şi } H(\cdot, 1) = F,$$

teoremele de continuare conţin condiţii prin care se garantează că o soluţie a ecuaţiei mai simple (**) poate fi "continuată" la o soluţie a ecuaţiei iniţiale (*).

Metodele de continuare au fost abordate pentru prima dată de către H. Poincaré [64],[65] la începutul secolului XX pentru a studia existenţa soluţiilor periodice pentru un sistem dinamic şi concomitent de către S. Bernstein[3] pentru a studia existenţa soluţiilor unor ecuaţii diferenţiale de ordinul doi prin tehnica mărginirii "a priori". O formulare abstractă a principiului de continuare a fost dată pentru prima dată de către J. Leray şi J. Schauder[37] în termenii teoriei gradului topologic.

Teorema 1 *[37] Fie $(X, |\cdot|)$ un spaţiu Banach, $U \subset X$ o submulţime mărginită, deschisă, cu $0 \in U$ şi fie $H : \overline{U} \times [0, 1] \to X$ o aplicaţie complet continuă. Presupunem că următoarele condiţii sunt îndeplinite:*

(a) $H(x, \lambda) \neq x$ pentru orice $x \in \partial U$ şi orice $\lambda \in [0, 1]$;

(b) $\nu_{LS}(J - H(\cdot, 0), U, 0) \neq 0$.

Atunci, există cel puţin un $x \in U$ astfel încât $H(x, 1) = x$. Mai mult,

$$\nu_{LS}(J - H(\cdot, 0), U, 0) = \nu_{LS}(J - H(\cdot, 1), U, 0).$$

Aici, am notat cu $J : X \to X$ aplicaţia identică şi prin $\nu_{LS}(F, U, 0)$ înţelegem gradul Leray-Schauder al aplicaţiei F în raport cu mulţimea U şi originea 0.

Ulterior, A. Granas[21], a formulat o versiune fără noţiunea de grad, versiune cunoscută sub numele de Principiul de Transversalitate Topologică. În locul condiţiei (b) se cere în schimb ca $H(\cdot, 0)$ să fie o aplicaţie *esenţială*. Se spune că o aplicaţie $F : \overline{U} \to C$ este esenţială dacă ea nu are puncte fixe pe ∂U şi orice aplicaţie $G : \overline{U} \to C$ complet continuă cu care este egală pe ∂U are cel puţin un punct fix în U.

Teorema 2 *[21] Fie $(X, |\cdot|)$ un spaţiu Banach, $U \subset X$ o submulţime mărginită, deschisă, cu $0 \in U$ şi fie $H : \overline{U} \times [0, 1] \to X$ o aplicaţie complet continuă. Presupunem că următoarele condiţii sunt îndeplinite:*

(a) $H(x, \lambda) \neq x$ pentru orice $x \in \partial U$ şi orice $t \in [0, 1]$;

(b) $H(\cdot, 0)$ este esenţială.

Atunci, există cel puţin un $x \in U$ astfel încât $H(x, 1) = x$. Mai mult, $H(\cdot, 1)$ este de asemenea esenţială.

Principiul lui Leray-Schauder şi Principiul de Transversalitate Topologică sunt două instrumente puternice de lucru în cazul în care se doreşte localizarea soluţiei într-o mulţime convexă, închisă (de obicei o bilă închisă de o rază R dată).

În cazul în care se doreşte o mai bună localizare a soluţiei într-o coroană circulară delimitată de două numere reale $0 < r < R$, sau existenţa mai multor soluţii, se poate utiliza un alt instrument de lucru, Teoremele de tip Krasnoselskii în conuri. Introduse pentru prima dată în anul 1960 de către M. Krasnoselskii[35], aceste rezultate asigură existenţa unei soluţii într-o coroană circulară pentru o clasă largă de ecuaţii neliniare, în condiţiile în care K este un con într-un spaţiu liniar normat iar operatorul implicat $F : K \to K$ este de tip compresiv

$$\begin{cases} ||F(x)|| \geq ||x|| \text{ pentru } ||x|| = r, \\ ||F(x)|| \leq ||x|| \text{ pentru } ||x|| = R; \end{cases}$$

sau de tip expansiv

$$\begin{cases} ||F(x)|| \leq ||x|| \text{ pentru } ||x|| = r, \\ ||F(x)|| \geq ||x|| \text{ pentru } ||x|| = R. \end{cases}$$

După cum se observă mai sus, condiţiile de tip compresiv-expansiv sunt impuse aplicaţiei F doar în punctele de pe frontiera coroanei circulare $K_{r,R}$

în timp ce punctelor din interiorul coroanei li se impune doar să rămână în interiorul conului K prin aplicaţia F.

Aceste rezultate au fost extinse de către R. Precup[66](vezi de asemenea R. Precup[67]) sub forma unei versiuni vectoriale a Teoremei lui Krasnoselskii pentru sisteme de ecuaţii. Aceasta permite ca termenii neliniari ai sistemului să aibă comportări diferite atât pe componente cât şi în raport cu variabilele, independent una de cealaltă.

Tehnica convenţională de aplicare a principiilor de tip Leray-Schauder, de Transversalitate Topologică şi a teoremelor de tip Krasnoselskii pentru a obţine localizarea "a priori" a soluţiilor este de a rescrie problema ca şi o ecuaţie integrală, de obicei folosind o funcţie Green. Deşi funcţiile Green sunt specifice ecuaţiilor de ordinul doi, este posibil să se construiască o astfel de funcţie şi în cazul ecuaţiilor de ordinul întâi de forma

$$x^{'}(t) = a(t)x(t) - f(t).$$

Acest tip de ecuaţii este des întâlnit în literatura de specialitate (a se vedea [2], [7], [8], [19], [24], [25], [30], [31], [32], [34], [38], [39], [43], [44], [45], [49], [50], [51], [52], [53], [63], [76], [77], [79], [80], [81], [82], [85], [87], [89], [91], [90], [92]), diferite forme particulare ale lor modelând fenomenele de dinamica populaţiilor. Cel mai simplu exemplu în acest sens, este dat de ecuaţia logistică

$$x^{'}(t) = r(t)x(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K(t)}\right),$$

ecuaţie ce reprezintă un model comun pentru evoluţia în timp a populaţiilor. Aici

$x(t)$ reprezintă numărul de indivizi din populaţie la momentul t,

$r(t)$ reprezintă rata naşterilor(numărul de nou născuţi) la momentul t,

$K(t)$ reprezintă capacitatea de susţinere a mediului.

Aceeaşi ecuaţie poate fi folosită şi pentru a modela creşterea tumorilor în medicină, evoluţia reţelelor neuronale, evoluţia reacţiilor autocatalitice şi alte fenomene.

În cazul sistemelor de ecuaţii, ecuaţia logistică este implicată în modelul Lotka-Volterra

$$\begin{cases} x^{'}(t) = r_1(t)x(t)\left[1 - \dfrac{x(t)+\alpha_{12}(t)}{K_1(t)}\right] \\ y^{'}(t) = r_2(t)y(t)\left[1 - \dfrac{y(t)+\alpha_{21}(t)}{K_2(t)}\right] \end{cases}.$$

Aici

$x(t), y(t)$ reprezintă numărul de indivizi din cele două populaţii la momentul t,

$r_i(t)$ reprezintă rata de creştere a speciei i la momentul t,

$K_i(t)$ reprezintă capacitatea de susţinere de către mediu a speciei i,

$\alpha_{i,j}$ reprezintă efectul pe care specia j îl are asupra speciei i.

În funcţie de semnul coeficienţilor α_{ij} se disting două situaţii:

$\alpha_{ij} \geq 0$, caz în care spunem că avem un model de competiţie (de tip pradă-prădător),

$\alpha_{i,j} \leq 0$, caz în care spunem că avem un model de convieţuire (mutualism).

Scopul acestei teze este de a studia existenţa soluţiilor periodice pozitive pentru ecuaţii funcţional-diferenţiale neliniare de ordinul unu de forma

$$x^{'}(t) = a(t)x(t) - F(x)(t),$$

şi pentru ecuaţii de ordinul doi de forma

$$x^{''}(t) = a(t)x(t) - F(x)(t);$$

precum şi pentru sistemele de ecuaţii corespunzătoare.

Vom rescrie ecuaţiile, respectiv sistemele, sub forma unor probleme de punct fix sau, alternativ, ca şi probleme de coincidenţă. Acestor probleme le vom aplica teoremele de punct fix ale lui Leray-Schauder şi Krasnoselskii, precum şi variante ale acestor rezultate abstracte pentru ecuaţii de coincidenţă.

Această teză este structurată pe 3 capitole, iar fiecare capitol în parte conţine mai multe secţiuni.

Capitolul 1: Preliminarii.

În acest capitol sunt prezentate cele două rezultate abstracte din teoria punctului fix care sunt folosite în demonstraţiile de pe parcursul lucrării: Principiul lui Leray-Schauder şi Teorema lui Krasnoselskii în conuri, precum şi diferite variante şi extinderi ale acestora.

Capitolul 2: Soluţii periodice pentru ecuaţii funcţional-diferenţiale.

În acest capitol se dezvoltă o teorie unitară asupra problemei existenţei soluţiilor periodice pozitive pentru ecuaţii funcţional-diferenţiale de ordinul întâi.

Pentru început, în prima secţiune sunt prezentate rezultate de existenţă a

soluţiilor pozitive obţinute folosind Principiul lui Leray-Schauder; rezultate preluate din lucrarea [58]. Acestea vor constitui punctul de plecare în dezvoltarea rezultatelor prezentate in secţiunea 3.1
În următoarele două secţiuni este introdusă funcţia lui Green şi se construieşte problema de punct fix echivalentă, pentru ca în secţiunea a treia să se localizeze soluţiile periodice prin intermediul Teoremei lui Krasnoselskii în conuri. De asemenea sunt prezentate mai multe aplicaţii ale rezultatelor obţinute, inclusiv la ecuaţia logistică. Contribuţiile personale în această secţiune sunt date prin 4 leme şi 5 teoreme. Aceste rezultate sunt conţinute în lucrarea V. Dincuţă [14].

În secţiunea 4, este demonstrată o versiune a Teoremei lui Krasnoselskii pentru ecuaţii de coincidenţă, iar în secţiunea următoare se aplică acest rezultat abstract la cazul ecuaţiilor de ordinul întâi studiate în secţiunile anterioare. Se va observa la final, că indiferent de metoda aplicată, rezultatele obţinute sunt asemănătoare. Contribuţiile în aceasta secţiune sunt date în 6 leme şi Teoremele 2.5.1, 2.6.1; rezultatele fiind conţinute în lucrarea V. Dincuţă [11].

Capitolul 3: Soluţii periodice pentru sisteme funcţional-diferenţiale.
În acest capitol se extind rezultatele din capitolul 2 la sisteme de ecuaţii.

Pentru început, este studiată existenţa soluţiilor prin intermediul Principiului lui Leray-Schauder. Rezultatele de aici extind pe cele datorate lui D. O'Regan şi M. Meehan [58]. Construim pentru început un principiu general de existenţă iar mai apoi aplicăm acest principiu la un operator integral cu întârzieri. La final, sunt prezentate mai multe cazuri particulare ale acestui operator, precum şi o aplicaţie la ecuaţii de ordin superior ce se reduc la sisteme de ecuaţii de ordinul întâi. Contribuţiile noastre în această secţiune sunt Teoremele 3.1.1, 3.1.2 şi alte 5 forme ale acestora în diferite cazuri particulare. Aceste rezultate sunt conţinute în lucrarea V. Dincuţă [13].

Secţiunea 2 a acestui capitol tratează sistemele de ecuaţii de ordinul întâi prin intermediul Teoremei vectoriale a lui Krasnoselskii. Rezultatele prezentate le extind în mod natural pe cele obţinute în secţiunea 3 din capitolul 2, permiţând termenilor neliniari să aibă comportări subliniare şi supraliniare diferite în argumente. La final, dăm câteva aplicaţii ale acestor rezultate, inclusiv la sisteme de tip Lotka-Volterra. Contribuţiile noastre în această secţiune sunt date prin 8 leme şi 3 teoreme.

În secţiunea 3 prezentăm rezultate de existenţă pentru sisteme de ecuaţii de ordinul doi obţinute prin intermediul Teoremei vectoriale a lui Krasnoselskii. Pentru început soluţiile se caută într-o coroană circulară dată, pentru ca mai apoi să se construiască un rezultat de existenţă în condiţii asimptotice. Rezultatele din această secţiune le extind pe cele din lucrarea lui D. O'Regan şi H. Wang [61]. Contribuţiile personale în această secţiune sunt date prin 13 leme şi Teoremele 3.3.1, 3.3.2, 3.3.3. Aceste rezultate sunt conţinute în lucrarea V. Dincuţă [16].

În secţiunea 4, este demonstrată o versiune abstractă a Teoremei vectoriale a lui Krasnoselskii pentru sisteme de ecuaţii de coincidenţă, iar în secţiunea următoare se aplică acest rezultat abstract la cazul sistemelor de ecuaţii de ordinul întâi studiate în secţiunile anterioare. Aceste rezultate le extind pe cele din secţiunile 4 şi 5 din capitolul 2, şi se observă din nou, că indiferent că aplicăm Teorema lui Krasnoselskii sau privim problema din perspectiva sistemelor de ecuaţii de coincidenţă, rezultatele obţinute sunt asemănătoare. Contribuţiile noastre în aceste secţiuni sunt date prin 10 leme şi Teoremele 3.4.1, 3.5.1. Aceste rezultate sunt conţinute în lucrarea V. Dincuţă [12].

1 Preliminarii

Acest capitol conţine principalele rezultate abstracte utilizate pe parcursul acestei lucrări în demonstraţii.

2 Soluţii periodice pentru ecuaţii funcţional-diferenţiale

Scopul acestui capitol este de a dezvolta o teorie unitară asupra problemei existenţei soluţiilor periodice pentru ecuaţii funcţional-diferenţiale de forma

$$x^{'}(t) = a(t)x(t) - F(x)(t), \tag{2.1}$$

unde $a \in C_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ este neidentic nulă şi $F : C_T(\mathbb{R}) \to C_T(\mathbb{R})$ este un operator continuu.

2.1 Soluţii periodice via principiul lui Leray-Schauder

Rezultatele din acest paragraf sunt prezentate pe larg în lucrarea lui M. Meehan şi D. O'Regan[58] şi constituie sursa de inspiraţie pentru rezultatele construite în paragraful 3.1.

Considerăm ecuaţia

$$x^{'}(t) = a(t)y(t) + N(y)(t), \text{a.p.t. } t \in [0, T]. \tag{2.2}$$

Printr-o soluţie a acestei ecuaţii vom înţelege o funcţie $y \in AC[0, T]$ cu $y(0) = y(T)$ şi care satisface ecuaţia (2.2) aproape peste tot în $[0, T]$.

Teorema 2.1.1 *[58]] Presupunem că*

$$N : C[0, T] \to L^1[0, T] \textit{ este un operator continuu,} \tag{2.3}$$

$$\begin{cases} \textit{pentru orice constantă } A \geq 0 \textit{ există } h_A \in L^1[0, T] \textit{ astfel încât} \\ \textit{pentru orice } y \in C[0, T] \textit{ cu } ||y||_0 = \sup\limits_{t \in [0,T]} ||y(t)|| \leq A \\ \textit{avem } ||N(y)(t)|| \leq h_A(t) \textit{ a.p.t. } t \in [0, T], \end{cases} \tag{2.4}$$

şi

$$a \in L^1[0,T] \text{ astfel încât } e^{-\int_0^T a(s)ds} \neq 1. \tag{2.5}$$

În plus, presupunem că există o constantă M independentă de λ cu $||y||_0 \neq M$ pentru orice soluţie $y \in AC[0,T]$ a problemei

$$\begin{cases} y'(t) - a(t)y(t) = \lambda N(y)(t) \;\; a.p.t. \;\; t \in [0,T] \\ y(0) = y(T) \end{cases}$$

şi orice $\lambda \in (0,1)$.

Atunci ecuaţia (2.2) are cel puţin o soluţie $y \in AC[0,T]$ astfel încât $||y||_0 \leq M$.

Folosind acest principiu, se obţine următorul rezultat general de existenţă.

Teorema 2.1.2 *[58]] Presupunem că sunt îndeplinite (2.3), (2.4) şi (2.5). În plus, presupunem că sunt satisfăcute următoarele condiţii*

$$\begin{cases} \text{există o funcţie continuă } \psi : [0,\infty) \to (0,\infty) \text{ şi } \phi \in L^1[0,T] \text{ cu} \\ ||N(y)(x)|| \leq \phi(x)\psi(|y|_0) \;\; a.p.t. \;\; x \in [0,T] \text{ şi orice } y \in C[0,T], \end{cases}$$

şi

$$\sup_{c \in (0,\infty)} \frac{c}{\psi(c)} > k_0;$$

unde

$$k_0 = \frac{1}{|1 - b(T)|} \sup_{t \in [0,T]} \left\{ \frac{b(T)}{b(t)} \int_0^t b(s)\phi(s)ds + \frac{1}{b(t)} \int_t^T b(s)\phi(s)ds \right\}$$

şi

$$b(t) = e^{-\int_0^t a(x)dx}.$$

Atunci ecuaţia (2.2) are cel puţin o soluţie în $AC[0,T]$.

În continuare, este dat un rezultat de existenţă a soluţiilor ecuaţiei

$$\begin{cases} y'(t) = N(y)(t) \text{ a.p.t. } t \in [0,T] \\ y(0) = y(T), \end{cases} \tag{2.6}$$

unde operatorul N este dat prin

$$\begin{aligned} N(y)(t) &= r(t) + y(t)g(t, y(t)) + h(t, y(t)) \\ &+ \int_0^t k_1(t, s) f_1(s, y(s)) ds \\ &+ \int_0^T k_2(t, s) f_2(s, y(s)) ds, \text{ a.p.t. } t \in [0, T]. \end{aligned} \tag{2.7}$$

2.2 Funcţia lui Green pentru problema periodică

Deşi, în general, funcţia lui Green este specifică ecuaţiilor diferenţiale de ordinul doi, o asemenea funcţie se poate construi şi în cazul ecuaţiei de ordinul întâi (2.1).

În cele ce urmează, considerăm funcţia lui Green, dată prin relaţia

$$G(t, s) = \frac{e^{-\int_t^s a(\tau) d\tau}}{1 - e^{-\int_0^T a(\tau) d\tau}}.$$

Dacă notăm

$$\delta = e^{-\int_0^T a(\tau) d\tau} < 1,$$

este evident că funcţia lui Green este mărginită şi satisface inegalităţile

$$0 < \frac{\delta}{1 - \delta} \leq G(t, s) \leq \frac{1}{1 - \delta}, \text{ pentru orice } s \in [t, t + T]. \tag{2.8}$$

2.3 Reducerea problemei periodice la o problemă de punct fix

Lema 2.3.1 *O funcţie $x \in C_T(\mathbb{R})$ este soluţie a problemei*

$$\begin{cases} x'(t) = a(t)x(t) - f(t) \\ x(0) = x(T) \end{cases} \tag{2.9}$$

dacă şi numai dacă

$$x(t) = \int_t^{t+T} G(t,s)f(s)ds, \tag{2.10}$$

unde $f \in C_T(\mathbb{R})$ *este o funcţie arbitrară.*

Observaţie 2.3.1 *Folosind lema de mai sus este evident că o funcţie* $x \in C_T(\mathbb{R})$ *este soluţie pentru ecuaţia (2.1) dacă şi numai dacă este soluţie a ecuaţiei integrale*

$$x(t) = \int_t^{t+T} G(t,s)F(x)(s)ds. \tag{2.11}$$

2.4 Localizarea soluţiilor periodice pozitive cu ajutorul teoremei lui Krasnoselskii

În această secţiune vom studia existenţa soluţiilor periodice pozitive, pentru ecuaţia (2.1), ce satisfac condiţia $r \leq ||x|| \leq R$, unde $0 < r < R$ sunt numere reale date. Rezultatul principal al acestui paragraf este următorul.

Teorema 2.4.1 [V. Dincuţă [14]] *Presupunem că pentru două numere* r *şi* R *cu* $0 < r < R$*, este satisfăcută una dintre relaţiile:*

$$\text{(a.1)} \begin{cases} F \text{ este crescătoare,} \\ \max\limits_{t\in[0,T]} F(r)(t) \leq \dfrac{1-\delta}{T} r, \\ \min\limits_{t\in[0,T]} F(\delta R)(t) \geq \dfrac{1-\delta}{\delta T} R; \end{cases}$$

$$\text{(a.2)} \begin{cases} F \text{ este crescătoare,} \\ \min\limits_{t\in[0,T]} F(\delta r)(t) \geq \dfrac{1-\delta}{\delta T} r, \\ \max\limits_{t\in[0,T]} F(R)(t) \leq \dfrac{1-\delta}{T} R; \end{cases}$$

$$\text{(a.3)} \begin{cases} F \text{ este descrescătoare,} \\ \max\limits_{t\in[0,T]} F(\delta r)(t) \leq \dfrac{1-\delta}{T} r, \\ \min\limits_{t\in[0,T]} F(R)(t) \geq \dfrac{1-\delta}{\delta T} R; \end{cases}$$

$$
(a.4)\begin{cases} F \text{ este descrescătoare,} \\ \min\limits_{t\in[0,T]} F(r)(t) \geq \dfrac{1-\delta}{\delta T} r, \\ \max\limits_{t\in[0,T]} F(\delta R)(t) \leq \dfrac{1-\delta}{T} R. \end{cases}
$$

Atunci există cel puţin o soluţie periodică pozitivă x a ecuaţiei (2.1) astfel încât $r \leq ||x|| \leq R$.

În continuare sunt prezentate 4 exemple, printre care se regăsesc şi două aplicaţii la modelul logistic.

Exemplu 2.4.1

Considerăm modelul logistic în forma sa clasică

$$
\begin{cases} x^{'}(t) = a(t)x(t)\left[1 - \dfrac{x(t)}{K(t)}\right] \\ x(0) = x(T) \end{cases} \tag{2.12}
$$

unde a, K sunt funcţii continue pozitive, nenule şi $T > 0$.

Folosind Teorema 2.4.1 se obţine următorul rezultat.

Teorema 2.4.2 *Dacă există două numere r şi R astfel încât*

$$
r \leq \frac{1-\delta}{T \max\limits_{t\in[0,T]} \dfrac{a(t)}{K(t)}} < \frac{1-\delta}{\delta^3 T \min\limits_{t\in[0,T]} \dfrac{a(t)}{K(t)}} \leq R
$$

atunci există o soluţie periodică pozitivă x a problemei (2.12) ce satisface $r \leq ||x|| \leq R$.

Exemplu 2.4.2

Considerăm modelul logistic generalizat pentru o singură specie

$$
\begin{cases} x^{'}(t) = x(t)[a(t) - b(t)x(t) - c(t)x(t-\tau(t))] \\ x(0) = x(T) \end{cases} \tag{2.13}
$$

unde a, b, c, τ sunt funcţii continue pozitive şi $T > 0$.

Folosind Teorema 2.4.1 se obţine următorul rezultat.

Teorema 2.4.3 *Dacă există două numere r şi R astfel încât*

$$r \leq \frac{1-\delta}{T \max\limits_{t\in[0,T]}[b(t)+c(t)]} < \frac{1-\delta}{\delta^3 T \min\limits_{t\in[0,T]}[b(t)+c(t)]} \leq R$$

atunci există o soluţie periodică pozitivă x a problemei (2.13) ce satisface $r \leq ||x|| \leq R$.

2.5 Teorema lui Krasnoselskii pentru ecuaţii de coincidenţă

Pentru început se construieşte o versiune a teoremei lui Krasnoselskii pentru probleme de coincidenţă. Studiem existenţa soluţiilor periodice pozitive, într-un con, pentru ecuaţia

$$Lx = T(x), \tag{2.14}$$

unde L este o aplicaţie liniară iar T este un operator neliniar. Aici $L, T : X \to Y$, unde X este un spaţiu Banach iar Y este un spaţiu normat.

Teorema 2.5.1 [V. Dincuţă [11]] *Fie $K \subset X$ un con, $r, R \in \mathbb{R}_+$, $0 < r < R$, $T : K \to Y$ o aplicaţie complet continuă şi $J : X \to Y$ o aplicaţie liniară astfel încât*

(a) $L + J : X \to Y$ este inversabilă

(b) $(T + J)(K) \subseteq (L + J)(K) := \widetilde{K}$.

Presupunem că una dintre afirmaţiile următoare este satisfăcută:

(c.1) $\begin{cases} Lx - T(x) \notin \widetilde{K} \text{ pentru } ||x|| = r, \\ T(x) - Lx \notin \widetilde{K} \text{ pentru } ||x|| = R; \end{cases}$

(c.2) $\begin{cases} T(x) - Lx \notin \widetilde{K} \text{ pentru } ||x|| = r, \\ Lx - T(x) \notin \widetilde{K} \text{ pentru } ||x|| = R. \end{cases}$

Atunci există $x \in K_{r,R}$ astfel încât $Lx = T(x)$.

2.6 Aplicaţii ale Teoremei lui Krasnoselskii pentru ecuaţii de coincidenţă la problema periodică

În ceea ce urmează vom aplica Teorema 2.5.1 pentru a obţine un rezultat de existenţă a soluţiilor periodice pentru ecuaţia (2.1).

Dacă luăm
$$X = Y = C_T(\mathbb{R}),$$
$$Lx(t) = x(t) - x(0),$$
$$T(x)(t) = \int_0^t [a(s)x(s) - F(x)(s)]ds;$$
atunci ecuaţia (2.1) este echivalentă cu ecuaţia
$$Lx = T(x).$$

Rezultatul principal al acestui paragraf este următorul.

Teorema 2.6.1 [V. Dincuţă [11]] *Presupunem că pentru două numere r şi R cu $0 < r < R$, este satisfăcută una dintre următoarele condiţii:*

$$\text{(a.1)} \begin{cases} F \text{ este crescătoare}, \\ \max\limits_{t\in[0,T]} F(r)(t) < \dfrac{1-\delta}{T} r, \\ \min\limits_{t\in[0,T]} F(\delta R)(t) > \dfrac{1-\delta}{\delta T} R; \end{cases}$$
$$\text{(a.2)} \begin{cases} F \text{ este crescătoare}, \\ \min\limits_{t\in[0,T]} F(\delta r)(t) > \dfrac{1-\delta}{\delta T} r, \\ \max\limits_{t\in[0,T]} F(R)(t) < \dfrac{1-\delta}{T} R; \end{cases}$$
$$\text{(a.3)} \begin{cases} F \text{ este descrescătoare}, \\ \max\limits_{t\in[0,T]} F(\delta r)(t) < \dfrac{1-\delta}{T} r, \\ \min\limits_{t\in[0,T]} F(R)(t) > \dfrac{1-\delta}{\delta T} R; \end{cases}$$
$$\text{(a.4)} \begin{cases} F \text{ este descrescătoare}, \\ \min\limits_{t\in[0,T]} F(r)(t) > \dfrac{1-\delta}{\delta T} r, \\ \max\limits_{t\in[0,T]} F(\delta R)(t) < \dfrac{1-\delta}{T} R. \end{cases}$$

Atunci există cel puţin o soluţie x a ecuaţiei (2.1) astfel încât $r \leq ||x|| \leq R$.

3 Soluţii periodice pentru sisteme funcţional-diferenţiale

3.1 Soluţii periodice via principiul lui Leray-Schauder

În acest paragraf, motivat de capitolul 12 din [58], prezentăm un rezultat de existenţă pentru sistemele de ecuaţii:

$$\begin{cases} y^{'}(t) - A(t)y(t) = Ny(t) \ a.p.t. \ t \in [0,T] \\ y(0) = y(T). \end{cases} \tag{3.1}$$

Aici $N : C([0,T], \mathbb{R}^n) \to C([0,T], \mathbb{R}^n)$, $N = (N_1, N_2, ..., N_n)$ este un operator continuu.

Rezultatele prezentate în continuare extind pe cele din [58] în două direcţii: la cazul sistemelor de ecuaţii, şi la cazul ecuaţiilor cu întârziere. În plus, rezultatele pot fi aplicate şi la ecuaţii de ordin superior, prin reducerea lor la sisteme de ecuaţii de ordinul întâi.

3.1.1 Un principiu general de existenţă

Pentru început prezentăm un principiu general de existenţă a soluţiilor pentru sistemul (3.1) care în particular, pentru $n = 1$, se reduce la Teorema 12.1.1 din [58].

Teorema 3.1.1 [V. Dincuţă [13]] *Presupunem că*

$$N : C([0,T], \mathbb{R}^n) \to L^1([0,T], \mathbb{R}^n) \ \textit{este un operator continuu,} \tag{3.2}$$

$$\begin{cases} \textit{pentru orice constantă } B \geq 0 \textit{ există } h_B \in L^1[0,T] \textit{ astfel încât} \\ \textit{pentru orice } y \in C([0,T], \mathbb{R}^n) \textit{ cu } \|y\|_0 = \sup\limits_{t \in [0,T]} \|y(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq B \\ \textit{avem } \|Ny(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq h_B(t) \textit{ a.p.t. } t \in [0,T], \end{cases} \tag{3.3}$$

şi

$$A \in L^1([0,T], M_{nn}(\mathbb{R})) \ \textit{astfel încât} \ I_n - e^{-\int_0^T A(s)ds} \ \textit{este inversabil.} \tag{3.4}$$

Aici I_n este matricea unitate din $M_{nn}(\mathbb{R})$, şi pentru o matrice $D \in M_{nn}(\mathbb{R})$ prin e^D întelegem suma seriei $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} D^k$.

În plus, presupunem că există o constantă M *independentă de* λ *cu* $||y||_0 \neq M$ *pentru orice soluţie* $y \in AC([0,T],\mathbb{R}^n)$ *a problemei*

$$\begin{cases} y^{'}(t) - A(t)y(t) = \lambda Ny(t) \;\; a.p.t. \;\; t \in [0,T] \\ y(0) = y(T) \end{cases} \tag{3.5}$$

şi orice $\lambda \in (0,1)$.

Atunci sistemul (3.1) are cel puţin o soluţie $y \in AC([0,T],\mathbb{R}^n)$ *astfel încât* $||y||_0 \leq M$.

3.1.2 Existenţa soluţiilor periodice pozitive

Considerăm problema

$$\begin{cases} y^{'}(t) = Ny(t) \text{ a.p.t. } t \in [0,T] \\ y(0) = y(T). \end{cases} \tag{3.6}$$

Vom discuta cazul particular când operatorul N are forma

$$\begin{aligned} Ny(t) \;\; = \;\; & r(t) + g(t, y(t-\theta_1))y(t-\theta_1) + h(t, y(t-\theta_2)) \qquad (3.7) \\ & + \int_0^t k_1(t,s) f_1(s, y(s)) ds + \int_0^T k_2(t,s) f_2(s, y(s)) ds. \end{aligned}$$

.

Teorema 3.1.2 [V. Dincuţă [13]] *Presupunem că sunt satisfăcute condiţiile (3.2) şi (3.3) pentru* N *dat de (3.7).*

În plus, presupunem că:

$$r(t) + h(t,0) \leq 0 \;\; a.p.t. \;\; t \in [0,T]; \tag{3.8}$$

$$\begin{cases} ||h(t,y)||_{\mathbb{R}^n} \leq \Phi_1(t)\, ||y||^{\alpha}_{\mathbb{R}^n} + \Phi_2(t) \;\; a.p.t. \;\; t \in [0,T] \text{şi } y \geq 0, \\ unde \;\; 0 \leq \alpha < 1 \text{şi } \Phi_1, \Phi_2 \in L^1[0,T]; \end{cases} \tag{3.9}$$

$$\begin{cases} \text{există } \beta \in L^1([0,T],\mathbb{R}^n) \text{şi } \tau \in L^1([0,T],\mathbb{R}_+) \text{ cu } \beta(t) \leq g(t,y)y \\ \text{şi } ||g(t,y)y||_{\mathbb{R}^n} \leq \tau(t)\, ||y||_{\mathbb{R}^n} \;\; a.p.t. \;\; t \in [0,T] \text{şi orice } y \geq 0; \\ \text{unde } \tau(t) > 0 \text{ pe o submulţime de măsură pozitivă a lui } [0,T]; \end{cases} \tag{3.10}$$

$$\text{există } \rho \in L^1([0,T],\mathbb{R}^n) \text{ cu } h(t,y) \geq \rho(t) \;\; a.p.t. \;\; t \in [0,T] \text{şi } y \geq 0; \tag{3.11}$$

$$\begin{cases} \int\limits_0^t k_1(t,s)f_1(s,y(s))ds + \int\limits_0^T k_2(t,s)f_2(s,y(s))ds \le 0 \\ a.p.t.\ t \in [0,T] \text{ şi orice } y \in C([0,T],\mathbb{R}^n); \end{cases} \tag{3.12}$$

$$\begin{cases} \text{există } \rho_1 \in L^1[0,T] \text{ şi } \rho_2 \in L^1([0,T],\mathbb{R}^n) \text{ astfel încât} \\ k_1(t,s)f_1(s,y) \ge \rho_1(s)\rho_2(t)\ a.p.t.\ t \in [0,T],\ a.p.t.\ s \in [0,t] \\ \text{şi orice } y \ge 0; \end{cases} \tag{3.13}$$

$$\begin{cases} \text{există } \rho_3 \in L^1[0,T] \text{ şi } \rho_4 \in L^1([0,T],\mathbb{R}^n) \text{ astfel încât} \\ k_2(t,s)f_2(s,y) \ge \rho_3(s)\rho_4(t)\ a.p.t.\ t \in [0,T],\ a.p.t.\ s \in [0,T] \\ \text{şi orice } y \ge 0; \end{cases} \tag{3.14}$$

$$\begin{cases} \left\|\int\limits_0^t k_1(t,s)f_1(s,y(s))ds\right\|_{\mathbb{R}^n} \le \Phi_3(t)\,||y||_0^\gamma + \Phi_4(t) \\ a.p.t.\ t \in [0,T] \text{ şi pentru orice } y \in C([0,T],\mathbb{R}^n_+); \\ \text{unde } \Phi_3,\Phi_4 \in L^1([0,T],\mathbb{R}) \text{ şi } 0 \le \gamma < 1; \end{cases} \tag{3.15}$$

$$\begin{cases} \left\|\int\limits_0^T k_2(t,s)f_2(s,y(s))ds\right\|_{\mathbb{R}^n} \le \Phi_5(t)\,||y||_0^\omega + \Phi_6(t) \\ a.p.t.\ t \in [0,T] \text{ şi pentru orice } y \in C([0,T],\mathbb{R}^n_+); \\ \text{unde } \Phi_5,\Phi_6 \in L^1([0,T],\mathbb{R}) \text{ şi } 0 \le \omega < 1; \end{cases} \tag{3.16}$$

şi

$$\int\limits_0^T [-r(t)]dt < \int\limits_0^T \liminf_{x\to\infty}[f(t,x)x]dt + \int\limits_0^T \liminf_{x\to\infty}[h(t,s)]dt +$$
$$+ \int\limits_0^T \int\limits_0^t \liminf_{x\to\infty}[k_1(t,s)f_1(s,x)]dsdt + \int\limits_0^T \int\limits_0^T \liminf_{x\to\infty}[k_2(t,s)f_2(s,x)]dsdt. \tag{3.17}$$

Atunci sistemul (3.6) are cel puţin o soluţie $y \in AC([0,T],\mathbb{R}^n)$ *astfel încât* $y(x) \ge 0$ *pentru orice* $x \in [0,T]$.

3.2 Teorema lui Krasnoselskii vectorială şi soluţii periodice pentru sisteme de ecuaţii funcţional-diferenţiale

În acest paragraf, inspirat de [61], vom studia existenţa soluţiilor T periodice pozitive pentru sistemul de ecuaţii funcţional-diferenţiale

$$\begin{cases} x'(t) = a_1(t)x(t) - F_1(x,y)(t) \\ y'(t) = a_2(t)y(t) - F_2(x,y)(t) \\ x(0) = x(T) \\ y(0) = y(T). \end{cases} \tag{3.18}$$

Aici $a_1, a_2 \in C_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ şi $F_1, F_2 : C_T^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+) \to C_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ sunt operatori continui.

Pe baza Lemei 2.3.1, acest sistem de ecuaţii este echivalent cu sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} x(t) = N_1(x,y)(t) \\ y(t) = N_2(x,y)(t) \end{cases}$$

unde operatorii $N_1, N_2 : C_T^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+) \to C_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ sunt daţi prin

$$\begin{aligned} N_1(x,y)(t) &= \int_t^{t+T} G_1(t,s)F_1(x,y)(t)ds, \\ N_2(x,y)(t) &= \int_t^{t+T} G_2(t,s)F_2(x,y)(t)ds; \end{aligned}$$

funcţiile lui Green asociate sunt

$$G_i(t,s) = \frac{e^{-\int\limits_t^s a_i(\tau)d\tau}}{1 - e^{-\int\limits_0^T a_i(\tau)d\tau}}, \ \ i = 1,2;$$

iar

$$\delta_i = e^{-\int\limits_0^T a_i(\tau)d\tau}, \ \ i = 1,2.$$

Rezultatul principal al acestui paragraf este următoarea teoremă de existenţă.

Teorema 3.2.1 *Presupunem că sunt date două perechi de numere* (r_1, R_1) *şi* (r_2, R_2) *cu* $0 < r_1 < R_1$ *şi* $0 < r_2 < R_2$*, astfel încât:*

(a) pentru orice $y \in \mathbb{R}_+$ *are loc una dintre următoarele condiţii:*

$$\text{(a.1)} \begin{cases} F_1(\cdot, y) \text{ este crescător}, \\ \max\limits_{t\in[0,T]} F_1(r_1, y)(t) \le \dfrac{1-\delta_1}{T} r_1, \\ \min\limits_{t\in[0,T]} F_1(\delta_1 R_1, y)(t) \ge \dfrac{1-\delta_1}{\delta_1 T} R_1; \end{cases}$$

$$\text{(a.2)} \begin{cases} F_1(\cdot, y) \text{ este crescător}, \\ \min\limits_{t\in[0,T]} F_1(\delta_1 r_1, y)(t) \ge \dfrac{1-\delta_1}{\delta_1 T} r_1, \\ \max\limits_{t\in[0,T]} F_1(R_1, y)(t) \le \dfrac{1-\delta_1}{T} R_1; \end{cases}$$

$$\text{(a.3)} \begin{cases} F_1(\cdot, y) \text{ este descrescător}, \\ \max\limits_{t\in[0,T]} F_1(\delta_1 r_1, y)(t) \le \dfrac{1-\delta_1}{T} r_1, \\ \min\limits_{t\in[0,T]} F_1(R_1, y)(t) \ge \dfrac{1-\delta_1}{\delta_1 T} R_1; \end{cases}$$

$$\text{(a.4)} \begin{cases} F_1(\cdot, y) \text{ este descrescător}, \\ \min\limits_{t\in[0,T]} F_1(r_1, y)(t) \ge \dfrac{1-\delta_1}{\delta_1 T} r_1, \\ \max\limits_{t\in[0,T]} F_1(\delta_1 R_1, y)(t) \le \dfrac{1-\delta_1}{T} R_1; \end{cases}$$

(b) pentru orice $x \in \mathbb{R}_+$ *are loc una dintre următoarele condiţii:*

$$\text{(b.1)} \begin{cases} F_2(x, \cdot) \text{ este crescător}, \\ \max\limits_{t\in[0,T]} F_2(x, r_2)(t) \le \dfrac{1-\delta_2}{T} r_2, \\ \min\limits_{t\in[0,T]} F_2(x, \delta_2 R_2)(t) \ge \dfrac{1-\delta_2}{\delta_2 T} R_2; \end{cases}$$

$$\text{(b.2)} \begin{cases} F_2(x, \cdot) \text{ este crescător}, \\ \min\limits_{t\in[0,T]} F_2(x, \delta_2 r_2)(t) \ge \dfrac{1-\delta_2}{\delta_2 T} r_2, \\ \max\limits_{t\in[0,T]} F_2(x, R_2)(t) \le \dfrac{1-\delta_2}{T} R_2; \end{cases}$$

$$(b.3)\begin{cases} F_2(x,\cdot) \text{ este descrescător}, \\ \max\limits_{t\in[0,T]} F_2(x,\delta_2 r_2)(t) \le \dfrac{1-\delta_2}{T} r_2, \\ \min\limits_{t\in[0,T]} F_2(x,R_2)(t) \ge \dfrac{1-\delta_2}{\delta_2 T} R_2; \end{cases}$$

$$(b.4)\begin{cases} F_2(x,\cdot) \text{ este descrescător}, \\ \min\limits_{t\in[0,T]} F_2(x,r_2)(t) \ge \dfrac{1-\delta_2}{\delta_2 T} r_2, \\ \max\limits_{t\in[0,T]} F_2(x,\delta_2 R_2)(t) \le \dfrac{1-\delta_2}{T} R_2. \end{cases}$$

Atunci există o soluţie (x^*, y^*) a sistemului (3.18) astfel încât $r_1 \le ||x^*|| \le R_1$ şi $r_2 \le ||y^*|| \le R_2$.

Observaţie 3.2.1 *În teorema anterioară sunt posibile nu mai puţin de 16 cazuri pentru funcţiile F_1 şi F_2. Aceasta permite ca cele două neliniarităţi $F_1(x, y)$ şi $F_2(x, y)$ să admită comportări subliniare şi supraliniare în x şi y, independent una de cealaltă.*

În continuare sunt prezentate două exemple, dintre care unul la modelul Lotka-Volterra

$$\begin{cases} x^{'}(t) = a_1(t)x(t)\left[1 - \alpha_{11}\dfrac{x(t)}{K_1(t)} - \alpha_{12}\dfrac{f(y(t))}{K_1(t)}\right] \\ y^{'}(t) = a_2(t)y(t)\left[1 - \alpha_{21}\dfrac{g(x(t))}{K_2(t)} - \alpha_{22}\dfrac{y(t)}{K_2(t)}\right] \\ x(0) = x(T) \\ y(0) = y(T) \end{cases} \tag{3.19}$$

unde a_1, a_2, K_1, K_2 sunt funcţii continue pozitive, nenule, T-periodice şi $T > 0$.

Folosind Teorema 3.2.1 se obţine următorul rezultat.

Teorema 3.2.2 *Presupunem că funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ sunt continue astfel încât*

$$0 < \min_{u\in\mathbb{R}} f(u) < \max_{u\in\mathbb{R}} f(u) < \infty,$$
$$0 < \min_{u\in\mathbb{R}} g(u) < \max_{u\in\mathbb{R}} g(u) < \infty.$$

De asemenea, presupunem că există numerele r_1, r_2, R_1 şi R_2 astfel încât

$$r_1 \le \frac{1}{\alpha_{11}} \left(\frac{1-\delta_1}{T \max\limits_{t\in[0,T]} \frac{a_1(t)}{K_1(t)}} - \alpha_{12} \max_{u\in\mathbb{R}} f(u) \right),$$

$$R_1 \ge \frac{1}{\alpha_{11}\delta_1^2} \left(\frac{1-\delta_1}{\delta_1 T \min\limits_{t\in[0,T]} \frac{a_1(t)}{K_1(t)}} - \alpha_{12} \min_{u\in\mathbb{R}} f(u) \right),$$

$$r_2 \le \frac{1}{\alpha_{22}} \left(\frac{1-\delta_2}{T \max\limits_{t\in[0,T]} \frac{a_2(t)}{K_2(t)}} - \alpha_{21} \max_{u\in\mathbb{R}} g(u) \right),$$

$$R_2 \ge \frac{1}{\alpha_{22}\delta_2^2} \left(\frac{1-\delta_2}{\delta_2 T \min\limits_{t\in[0,T]} \frac{a_2(t)}{K_2(t)}} - \alpha_{21} \min_{u\in\mathbb{R}} g(u) \right).$$

Atunci există o soluţie (x^*, y^*) a sistemului (3.19) ce satisface $r_1 \le ||x^*|| \le R_1$ şi $r_2 \le ||y^*|| \le R_2$.

3.3 Teorema lui Krasnoselskii vectorială şi soluţii periodice pentru sisteme de ecuaţii diferenţiale de ordinul doi

Scopul acestui paragraf este să studieze existenţa soluţiilor pozitive pentru problema periodică

$$\begin{cases} x^{''}(t) + m_1^2 x(t) = \lambda_1 G_1(t) F_1(x,y)(t) \\ y^{''}(t) + m_2^2 y(t) = \lambda_2 G_2(t) F_2(x,y)(t) \\ x(0) = x(2\pi) \\ y(0) = y(2\pi) \\ x^{'}(0) = x^{'}(2\pi) \\ y^{'}(0) = y^{'}(2\pi) \end{cases} \tag{3.20}$$

unde $m_1, m_2 \in (0, \frac{1}{2})$ sunt constante, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ parametrii pozitivi, iar

$$\begin{array}{l} G_i(t) = diag[g_1^i(t), g_2^i(t), ..., g_n^i(t)], \\ F_i(x,y) = [f_1^i(x,y), f_2^i(x,y), ..., f_n^i(x,y)]^T \end{array}, i \in \{1,2\}.$$

Cazul unei singure ecuaţii a fost tratat pe larg în [61], rezultatele noastre fiind inspirate din acest articol, şi se regăsesc în lucrarea [16].
În ceea ce urmează, vom considera că au loc următoarele condiţii:

(H1) $f_j^i : \mathbb{R}_+^{2n} \to [0,\infty)$ este continuă, pentru $j = 1,...,n$ şi $i = 1,2$;

(H2) $g_j^i : [0,2\pi] \to [0,\infty)$ este continuă şi neidentic nulă, pentru $j = 1,...,n$ şi $i = 1,2$.

3.3.1 Soluţii periodice pozitive într-o coroană circulară dată

Considerăm următoarele funcţii Green:

$$G_i(t,s) = \begin{cases} \dfrac{\sin m_i(t-s) + \sin m_i(2\pi - t + s)}{2m_i(1-\cos 2m_i\pi)}, & \textit{dacă } 0 \le s \le t \le 2\pi \\ \dfrac{\sin m_i(s-t) + \sin m_i(2\pi - s + t)}{2m_i(1-\cos 2m_i\pi)}, & \textit{dacă } 0 \le t \le s \le 2\pi \end{cases}, i = 1,2.$$

Notam cu

$$\widetilde{G}_i(x) = \frac{\sin(m_i x) + \sin m_i(2\pi - x)}{2m_i(1-\cos 2m_i\pi)}, x \in [0,2\pi], i = 1,2.$$

şi fie $\sigma_i = \cos m_i\pi, i = 1,2$.

De asemenea, considerăm următoarele notaţii:

$$N_i = \lambda_i \widetilde{G}_i(\pi) \sum_{j=1}^{n} \int_0^{2\pi} g_j^i(s)ds,$$
$$M_i = \lambda_i \sigma_i \widetilde{G}_i(0) \min_{j=\overline{1,n}} \int_0^{2\pi} g_j^i(s)ds,$$

pentru $i = 1,2$.

Rezultatul principal al acestei secţiuni este următorul.

Teorema 3.3.1 [V. Dincuţă [16]] *Fie $0 < r_1 < R_1$ şi $0 < r_2 < R_2$. Presupunem că (H1) şi (H2) sunt satisfăcute şi că are loc una dintre următoarele condiţii:*

$$(H3.1)\begin{cases} \textit{pentru } x,y\in\mathbb{R}^n_+ \textit{ cu } r_2\le|y|\le R_2 \textit{ avem:}\\ (1) f^1_j(x,y)<\dfrac{r_1}{N_1}, j=1,...,n \textit{ dacă } \sigma_1 r_1\le\sum\limits_{k=1}^n x_k\le r_1,\\ (2)\exists j^*\in\{1,...,n\} \textit{ astfel încât } f^1_{j^*}(x,y)>\sigma_1\dfrac{R_1}{M_1} \textit{ dacă } \sigma_1 R_1\le\sum\limits_{k=1}^n x_k\le R_1.\\ \textit{pentru } x,y\in\mathbb{R}^n_+ \textit{ cu } r_1\le|x|\le R_1 \textit{ avem:}\\ (3) f^2_j(x,y)<\dfrac{r_2}{N_2}, j=1,...,n \textit{ dacă } \sigma_2 r_2\le\sum\limits_{k=1}^n y_k\le r_2,\\ (4)\exists j^*\in\{1,...,n\} \textit{ astfel încât } f^2_{j^*}(x,y)>\sigma_2\dfrac{R_2}{M_2} \textit{ dacă } \sigma_2 R_2\le\sum\limits_{k=1}^n y_k\le R_2. \end{cases}$$

$$(H3.2)\begin{cases} \textit{pentru } x,y\in\mathbb{R}^n_+ \textit{ cu } r_2\le|y|\le R_2 \textit{ avem:}\\ (1) f^1_j(x,y)<\dfrac{r_1}{N_1}, j=1,...,n \textit{ dacă } \sigma_1 r_1\le\sum\limits_{k=1}^n x_k\le r_1,\\ (2)\exists j^*\in\{1,...,n\} \textit{ astfel încât } f^1_{j^*}(x,y)>\sigma_1\dfrac{R_1}{M_1} \textit{ dacă } \sigma_1 R_1\le\sum\limits_{k=1}^n x_k\le R_1.\\ \textit{pentru } x,y\in\mathbb{R}^n_+ \textit{ cu } r_1\le|x|\le R_1 \textit{ avem:}\\ (3)\exists j^*\in\{1,...,n\} \textit{ astfel încât } f^2_{j^*}(x,y)>\sigma_2\dfrac{r_2}{M_2} \textit{ dacă } \sigma_2 r_2\le\sum\limits_{k=1}^n y_k\le r_2,\\ (4) f^2_j(x,y)<\dfrac{R_2}{N_2}, j=1,...,n \textit{ dacă } \sigma_2 R_2\le\sum\limits_{k=1}^n y_k\le R_2. \end{cases}$$

$$(H3.3)\begin{cases} \textit{pentru } x,y\in\mathbb{R}^n_+ \textit{ cu } r_2\le|y|\le R_2 \textit{ avem:}\\ (1)\exists j^*\in\{1,...,n\} \textit{ astfel încât } f^1_{j^*}(x,y)>\sigma_1\dfrac{r_1}{M_1} \textit{ dacă } \sigma_1 r_1\le\sum\limits_{k=1}^n x_k\le r_1,\\ (2) f^1_j(x,y)<\dfrac{R_1}{N_1}, j=1,...,n \textit{ dacă } \sigma_1 R_1\le\sum\limits_{k=1}^n x_k\le R_1.\\ \textit{pentru } x,y\in\mathbb{R}^n_+ \textit{ cu } r_1\le|x|\le R_1 \textit{ avem:}\\ (3) f^2_j(x,y)<\dfrac{r_2}{N_2}, j=1,...,n \textit{ dacă } \sigma_2 r_2\le\sum\limits_{k=1}^n y_k\le r_2,\\ (4)\exists j^*\in\{1,...,n\} \textit{ astfel încât } f^2_{j^*}(x,y)>\sigma_2\dfrac{R_2}{M_2} \textit{ dacă } \sigma_2 R_2\le\sum\limits_{k=1}^n y_k\le R_2. \end{cases}$$

$$
(H3.4)\begin{cases}
\textit{pentru } x,y\in\mathbb{R}_+^n \textit{ cu } r_2\le |y|\le R_2 \textit{ avem:}\\
(1)\exists j^*\in\{1,...,n\} \textit{ astfel încât } f_{j^*}^1(x,y)>\sigma_1\dfrac{r_1}{M_1} \textit{ dacă } \sigma_1 r_1\le\sum\limits_{k=1}^n x_k\le r_1,\\
(2) f_j^1(x,y)<\dfrac{R_1}{N_1}, j=1,...,n \textit{ dacă } \sigma_1 R_1\le\sum\limits_{k=1}^n x_k\le R_1.\\
\textit{pentru } x,y\in\mathbb{R}_+^n \textit{ cu } r_1\le |x|\le R_1 \textit{ avem:}\\
(3)\exists j^*\in\{1,...,n\} \textit{ astfel încât } f_{j^*}^2(x,y)>\sigma_2\dfrac{r_2}{M_2} \textit{ dacă } \sigma_2 r_2\le\sum\limits_{k=1}^n y_k\le r_2,\\
(4) f_j^2(x,y)<\dfrac{R_2}{N_2}, j=1,...,n \textit{ dacă } \sigma_2 R_2\le\sum\limits_{k=1}^n y_k\le R_2.
\end{cases}
$$

Atunci exista o soluţie (x^*,y^*) a problemei (3.20) astfel încât $r_1\le ||x^*||\le R_1$ şi $r_2\le ||y^*||\le R_2$.

În continuare este prezentată o aplicaţie la sistemul

$$
\begin{cases}
x''(t)+\dfrac{1}{16}x(t)=tx^{\alpha}(t)h(y(t))\\
y''(t)+\dfrac{1}{9}y(t)=ty^{\beta}(t)k(x(t)).
\end{cases}
\tag{3.21}
$$

Teorema 3.3.2 [V. Dincuţă [16]] *Fie $0<r_1<R_1$, $0<r_2<R_2$ şi presupunem că funcţiile $h,k:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ sunt continue astfel încât*

$$
\begin{aligned}
0<\min_{r_2\le t\le R_2} h(t)<\max_{r_2\le t\le R_2} h(t)<\infty,\\
0<\min_{r_1\le t\le R_1} k(t)<\max_{r_1\le t\le R_1} k(t)<\infty.
\end{aligned}
$$

De asemenea, presupunem că este satisfăcută una dintre următoarele condiţii

$$
(a.1)\begin{cases}
\max\limits_{r_2\le t\le R_2} h(t)\cdot r_1^{\alpha-1}<\dfrac{1}{4\sqrt{2}\pi^2} \textit{ şi } \min\limits_{r_2\le t\le R_2} h(t)\cdot R_1^{\alpha-1}>\dfrac{1}{2\sqrt{2}\pi^2}\cdot\dfrac{1}{\sigma_1^{\alpha-1}},\\
\max\limits_{r_1\le t\le R_1} k(t)\cdot r_2^{\beta-1}<\dfrac{1}{6\sqrt{3}\pi^2} \textit{ şi } \min\limits_{r_1\le t\le R_1} k(t)\cdot R_2^{\beta-1}>\dfrac{2}{\sqrt{3}\pi^2}\cdot\dfrac{1}{\sigma_2^{\beta-1}};
\end{cases}
$$

$$
(a.2)\begin{cases}
\max\limits_{r_2\le t\le R_2} h(t)\cdot r_1^{\alpha-1}<\dfrac{1}{4\sqrt{2}\pi^2} \textit{ şi } \min\limits_{r_2\le t\le R_2} h(t)\cdot R_1^{\alpha-1}>\dfrac{1}{2\sqrt{2}\pi^2}\cdot\dfrac{1}{\sigma_1^{\alpha-1}},\\
\min\limits_{r_1\le t\le R_1} k(t)\cdot r_2^{\beta-1}>\dfrac{2}{\sqrt{3}\pi^2}\cdot\dfrac{1}{\sigma_2^{\beta-1}} \textit{ şi } \max\limits_{r_1\le t\le R_1} k(t)\cdot R_2^{\beta-1}<\dfrac{1}{6\sqrt{3}\pi^2};
\end{cases}
$$

$$
(a.3)\begin{cases}
\min\limits_{r_2\le t\le R_2} h(t)\cdot r_1^{\alpha-1}>\dfrac{1}{2\sqrt{2}\pi^2}\cdot\dfrac{1}{\sigma_1^{\alpha-1}} \textit{ şi } \max\limits_{r_2\le t\le R_2} h(t)\cdot R_1^{\alpha-1}<\dfrac{1}{4\sqrt{2}\pi^2},\\
\max\limits_{r_1\le t\le R_1} k(t)\cdot r_2^{\beta-1}<\dfrac{1}{6\sqrt{3}\pi^2} \textit{ şi } \min\limits_{r_1\le t\le R_1} k(t)\cdot R_2^{\beta-1}>\dfrac{2}{\sqrt{3}\pi^2}\cdot\dfrac{1}{\sigma_2^{\beta-1}};
\end{cases}
$$

$$
(a.4) \begin{cases} \min\limits_{r_2 \le t \le R_2} h(t) \cdot r_1^{\alpha-1} > \dfrac{1}{2\sqrt{2}\pi^2} \cdot \dfrac{1}{\sigma_1^{\alpha-1}} \text{ şi } \max\limits_{r_2 \le t \le R_2} h(t) \cdot R_1^{\alpha-1} < \dfrac{1}{4\sqrt{2}\pi^2}, \\ \min\limits_{r_1 \le t \le R_1} k(t) \cdot r_2^{\beta-1} > \dfrac{2}{\sqrt{3}\pi^2} \cdot \dfrac{1}{\sigma_2^{\beta-1}} \text{ şi } \max\limits_{r_1 \le t \le R_1} k(t) \cdot R_2^{\beta-1} < \dfrac{1}{6\sqrt{3}\pi^2}. \end{cases}
$$

Atunci sistemul (3.21) are o soluţie (x^*, y^*) *astfel încât* $r_1 \le ||x|| \le R_1$ *şi* $r_2 \le ||y|| \le R_2$.

3.3.2 Soluţii pozitive periodice în condiţii asimptotice

În secţiunea anterioară am demonstrat existenţa soluţiilor periodice pozitive într-o coroană circulară dată. În ceea ce urmează vom preciza condiţii suficiente asupra neliniarităţilor $f^1(x,y), f^2(x,y)$ pentru a garanta existenţa unei asemenea coroane circulare.

Pentru $y \in \mathbb{R}_+^n$ şi orice $j = 1, ..., n$ considerăm următoarele notaţii:

$$
\begin{aligned}
&f_{10}^j(y) = \lim_{|x| \to 0} \frac{f_j^1(x,y)}{|x|} \text{ şi } F_{10}(y) = \max_{j=1,\dots,n} f_{10}^j(y), \\
&f_{1\infty}^j(y) = \lim_{|x| \to \infty} \frac{f_j^1(x,y)}{|x|} \text{ şi } F_{1\infty}(y) = \max_{j=1,\dots,n} f_{1\infty}^j(y), \\
&\widehat{f_1^j}(t,y) = \max\{f_j^1(x,y) : x \in \mathbb{R}_+^n \text{ şi } |x| \le t\}, \\
&\widehat{f_{10}^j}(y) = \lim_{t \to 0} \frac{\widehat{f_1^j}(t,y)}{t} \text{ şi } \widehat{f_{1\infty}^j}(y) = \lim_{t \to \infty} \frac{\widehat{f_1^j}(t,y)}{t}.
\end{aligned}
$$

Similar, pentru $x \in \mathbb{R}_+^n$ şi orice $j = 1, ..., n$ considerăm următoarele notaţii:

$$
\begin{aligned}
&f_{20}^j(x) = \lim_{|y| \to 0} \frac{f_j^2(x,y)}{|y|} \text{ şi } F_{20}(x) = \max_{j=1,\dots,n} f_{20}^j(x), \\
&f_{2\infty}^j(x) = \lim_{|y| \to \infty} \frac{f_j^2(x,y)}{|y|} \text{ şi } F_{2\infty}(x) = \max_{j=1,\dots,n} f_{2\infty}^j(x), \\
&\widehat{f_2^j}(x,t) = \max\{f_j^2(x,y) : y \in \mathbb{R}_+^n \text{ şi } |y| \le t\}, \\
&\widehat{f_{20}^j}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{\widehat{f_2^j}(x,t)}{t} \text{ şi } \widehat{f_{2\infty}^j}(x) = \lim_{t \to \infty} \frac{\widehat{f_2^j}(x,t)}{t}.
\end{aligned}
$$

Rezultatul principal al acestui paragraf este următorul.

Teorema 3.3.3 [V. Dincuţă [16]] *Presupunem că (H1) şi (H2) sunt satisfăcute. În plus, presupunem că este îndeplinită una dintre următoarele condiţii:*

$$
(H4.1) \begin{cases} F_{10}(y) = 0 \text{ şi } F_{1\infty}(y) = \infty \text{ pentru } y \in \mathbb{R}_+^n, \\ F_{20}(x) = 0 \text{ şi } F_{2\infty}(x) = \infty \text{ pentru } x \in \mathbb{R}_+^n. \end{cases}
$$

(H4.2) $\begin{cases} F_{10}(y) = 0 \text{ şi } F_{1\infty}(y) = \infty \text{ pentru } y \in \mathbb{R}^n_+, \\ F_{20}(x) = \infty \text{ şi } F_{2\infty}(x) = 0 \text{ pentru } x \in \mathbb{R}^n_+. \end{cases}$

(H4.3) $\begin{cases} F_{10}(y) = \infty \text{ şi } F_{1\infty}(y) = 0 \text{ pentru } y \in \mathbb{R}^n_+, \\ F_{20}(x) = 0 \text{ şi } F_{2\infty}(x) = \infty \text{ pentru } x \in \mathbb{R}^n_+. \end{cases}$

(H4.4) $\begin{cases} F_{10}(y) = \infty \text{ şi } F_{1\infty}(y) = 0 \text{ pentru } y \in \mathbb{R}^n_+, \\ F_{20}(x) = \infty \text{ şi } F_{2\infty}(x) = 0 \text{ pentru } x \in \mathbb{R}^n_+. \end{cases}$

Atunci există $0 < r_1 < R_1$*şi* $0 < r_2 < R_2$ *astfel încât problema (3.20) are o soluţie* $(x^*, y^*) \in K_{r,R}$.

3.4 Teorema lui Krasnoselskii vectorială pentru ecuaţii de coincidenţă

Pentru început vom da versiunea vectorială pentru probleme de coincidenţă a teoremei lui Krasnoselskii în conuri. Studiem existenţa soluţiilor periodice pozitive, pentru sistemul

$$\begin{cases} L_1 x = T_1(x, y) \\ L_2 y = T_2(x, y) \end{cases}, \tag{3.22}$$

unde $L_1, L_2 : X \to Y$ sunt aplicaţii liniare iar $T_1, T_2 : X \times X \to Y$ sunt doi operatori neliniari. Aici X este un spaţiu Banach iar Y este un spaţiu normat.

Teorema 3.4.1 [V. Dincuţă [12]] *Fie* K_1, K_2 *două conuri în* X*;* $(r_i, R_i) \in \mathbb{R}^2_+$ *astfel încât* $0 < r_i < R_i$ *pentru* $i = 1, 2$*;* $T_1, T_2 : K_1 \times K_2 \to Y$ *două aplicaţii complet continue şi* $J_1, J_2 : X \to Y$ *aplicaţii liniare astfel încât*

(a) $L_i + J_i : X \to Y$ *este inversabil pentru* $i = 1, 2$,

(b) $\begin{cases} (L_1 + J_1)^{-1}[T_1(K_1, K_2) + J_1(K_1)] \subset K_1, \\ (L_2 + J_2)^{-1}[T_2(K_1, K_2) + J_2(K_2)] \subset K_2. \end{cases}$

Presupunem, în plus, că una dintre afirmaţiile următoare este satisfăcută:

(c.1) $\begin{cases} L_1 x - T_1(x, y) \notin (L_1 + J_1)(K_1) \text{ pentru } x \in \partial(K_1)_{r_1} \text{ şi } y \in K_2, \\ T_1(x, y) - L_1 x \notin (L_1 + J_1)(K_1) \text{ pentru } x \in \partial(K_1)_{R_1} \text{ şi } y \in K_2, \\ L_2 y - T_2(x, y) \notin (L_2 + J_2)(K_2) \text{ pentru } y \in \partial(K_2)_{r_2} \text{ şi } x \in K_1, \\ T_2(x, y) - L_2 y \notin (L_2 + J_2)(K_2) \text{ pentru } y \in \partial(K_2)_{R_2} \text{ şi } x \in K_1. \end{cases}$

(c.2) $\begin{cases} L_1 x - T_1(x, y) \notin (L_1 + J_1)(K_1) \text{ pentru } x \in \partial(K_1)_{r_1} \text{ şi } y \in K_2, \\ T_1(x, y) - L_1 x \notin (L_1 + J_1)(K_1) \text{ pentru } x \in \partial(K_1)_{R_1} \text{ şi } y \in K_2, \\ T_2(x, y) - L_2 y \notin (L_2 + J_2)(K_2) \text{ pentru } y \in \partial(K_2)_{r_2} \text{ şi } x \in K_1, \\ L_2 y - T_2(x, y) \notin (L_2 + J_2)(K_2) \text{ pentru } y \in \partial(K_2)_{R_2} \text{ şi } x \in K_1. \end{cases}$

$$(c.3)\begin{cases} T_1(x,y) - L_1x \notin (L_1+J_1)(K_1) \text{ pentru } x \in \partial(K_1)_{r_1} \text{ şi } y \in K_2, \\ L_1x - T_1(x,y) \notin (L_1+J_1)(K_1) \text{ pentru } x \in \partial(K_1)_{R_1} \text{ şi } y \in K_2, \\ L_2y - T_2(x,y) \notin (L_2+J_2)(K_2) \text{ pentru } y \in \partial(K_2)_{r_2} \text{ şi } x \in K_1, \\ T_2(x,y) - L_2y \notin (L_2+J_2)(K_2) \text{ pentru } y \in \partial(K_2)_{R_2} \text{ şi } x \in K_1. \end{cases}$$

$$(c.4)\begin{cases} T_1(x,y) - L_1x \notin (L_1+J_1)(K_1) \text{ pentru } x \in \partial(K_1)_{r_1} \text{ şi } y \in K_2, \\ L_1x - T_1(x,y) \notin (L_1+J_1)(K_1) \text{ pentru } x \in \partial(K_1)_{R_1} \text{ şi } y \in K_2, \\ T_2(x,y) - L_2y \notin (L_2+J_2)(K_2) \text{ pentru } y \in \partial(K_2)_{r_2} \text{ şi } x \in K_1, \\ L_2y - T_2(x,y) \notin (L_2+J_2)(K_2) \text{ pentru } y \in \partial(K_2)_{R_2} \text{ şi } x \in K_1. \end{cases}$$

Atunci există $(x^*, y^*) \in K$ soluţie a sistemului (3.22) astfel încât $r_1 \leq ||x^*|| \leq R_1$ şi $r_2 \leq ||y^*|| \leq R_2$.

3.5 Aplicaţii ale Teoremei lui Krasnoselskii vectoriale pentru ecuaţii de coincidenţă la sisteme funcţional-diferenţiale

În ceea ce urmează vom aplica Teorema 3.4.1 pentru a obţine un rezultat de existenţă a soluţiilor periodice pentru problema (3.18).

Într-o manieră similară celei din paragraful 2.6 sistemul (3.18) este echivalent cu sistemul de ecuaţii de coincidenţă:

$$\begin{cases} L_1x = T_1(x,y), \\ L_2y = T_2(x,y). \end{cases}$$

Se obţine următoarea teoremă de existenţă.

Teorema 3.5.1 [V. Dincuţă [12]] *Presupunem că sunt date două perechi de numere (r_1, R_1) şi (r_2, R_2) cu $0 < r_1 < R_1$ şi $0 < r_2 < R_2$, astfel încât:*

(a) pentru orice $y \in \mathbb{R}_+$ are loc una dintre următoarele condiţii:

$$(a.1)\begin{cases} F_1(\cdot, y) \text{ este crescător}, \\ \max\limits_{t\in[0,T]} F_1(r_1, y)(t) < \dfrac{1-\delta_1}{T} r_1, \\ \min\limits_{t\in[0,T]} F_1(\delta_1 R_1, y)(t) > \dfrac{1-\delta_1}{\delta_1 T} R_1; \end{cases}$$

$$(a.2)\begin{cases} F_1(\cdot, y) \text{ este crescător}, \\ \min\limits_{t\in[0,T]} F_1(\delta_1 r_1, y)(t) > \dfrac{1-\delta_1}{\delta_1 T} r_1, \\ \max\limits_{t\in[0,T]} F_1(R_1, y)(t) < \dfrac{1-\delta_1}{T} R_1; \end{cases}$$

$$(a.3)\begin{cases} F_1(\cdot,y) \text{ este descrescător}, \\ \max\limits_{t\in[0,T]} F_1(\delta_1 r_1,y)(t) < \dfrac{1-\delta_1}{T} r_1, \\ \min\limits_{t\in[0,T]} F_1(R_1,y)(t) > \dfrac{1-\delta_1}{\delta_1 T} R_1; \end{cases}$$

$$(a.4)\begin{cases} F_1(\cdot,y) \text{ este descrescător}, \\ \min\limits_{t\in[0,T]} F_1(r_1,y)(t) > \dfrac{1-\delta_1}{\delta_1 T} r_1, \\ \max\limits_{t\in[0,T]} F_1(\delta_1 R_1,y)(t) < \dfrac{1-\delta_1}{T} R_1. \end{cases}$$

(b) pentru orice $x \in \mathbb{R}_+$ are loc una dintre următoarele condiţii:

$$(b.1)\begin{cases} F_2(x,\cdot) \text{ este crescător}, \\ \max\limits_{t\in[0,T]} F_2(x,r_2)(t) < \dfrac{1-\delta_2}{T} r_2, \\ \min\limits_{t\in[0,T]} F_2(x,\delta_2 R_2)(t) > \dfrac{1-\delta_2}{\delta_2 T} R_2; \end{cases}$$

$$(b.2)\begin{cases} F_2(x,\cdot) \text{ este crescător}, \\ \min\limits_{t\in[0,T]} F_2(x,\delta_2 r_2)(t) > \dfrac{1-\delta_2}{\delta_2 T} r_2, \\ \max\limits_{t\in[0,T]} F_2(x,R_2)(t) < \dfrac{1-\delta_2}{T} R_2; \end{cases}$$

$$(b.3)\begin{cases} F_2(x,\cdot) \text{ este descrescător}, \\ \max\limits_{t\in[0,T]} F_2(x,\delta_2 r_2)(t) < \dfrac{1-\delta_2}{T} r_2, \\ \min\limits_{t\in[0,T]} F_2(x,R_2)(t) > \dfrac{1-\delta_2}{\delta_2 T} R_2; \end{cases}$$

$$(b.4)\begin{cases} F_2(x,\cdot) \text{ este descrescător}, \\ \min\limits_{t\in[0,T]} F_2(x,r_2)(t) > \dfrac{1-\delta_2}{\delta_2 T} r_2, \\ \max\limits_{t\in[0,T]} F_2(x,\delta_2 R_2)(t) < \dfrac{1-\delta_2}{T} R_2. \end{cases}$$

Atunci există o soluţie (x^*,y^*) a sistemului (3.18) astfel încât $r_1 \le ||x^*|| \le R_1$ şi $r_2 \le ||y^*|| \le R_2$.

Bibliografie

[1] V. Anisiu, *Topologie şi Teoria Măsurii*, Cluj, 1993.

[2] D. Bai and Y. Xu, *Periodic solutions of first order functional differential equations with periodic deviations*, Computers and Mathematics with Applications, 53 (2007), 1361-1366.

[3] S. Bernstein, *Sur les equations du calcul des variations*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 29 (1912), 431-485.

[4] A. Buică, *Contributions to coincidence degree theory of asymptotically homogeneous operators*, Nonlinear Analysis, 68 (2008), 1603-1610.

[5] A. Capietto, J. Mawhin and F. Zanolin, *A continuation approach to superlinear boundary value problems*, F. Differential Equations, 88 (1990), 347-395.

[6] A. Capietto, J. Mawhin and F. Zanolin, *Continuation theorems for periodic perturbations of autonomous systems*, Trans. Amer. Math. Soc. 329 (1992), 41-72.

[7] F. Chen, X. Xie and J. Shi, *Existence, uniqueness and stability of positive periodic solution for a nonlinear prey-competition model with delays*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 194 (2006), 368-387.

[8] S. Cheng and G. Zhang, *Existence of positive periodic solutions for nonautonomous functional differential equations*, Electron J. Differential Equations, 59 (2001), 1-8.

[9] W. Cheung and J. Ren, *Periodic Solutions for p-Laplacian Duffing Equations with a Deviating Argument*, Journal of Applied Functional Analysis, vol. 3, No. 2, 163-173.

[10] W. Cheung, J. Ren and W. Han, *Positive periodic solution of second-order neutral functional differential equations*, Nonlinear Analysis 71 (2009), 3948-3955.

[11] V. Dincuţă, *A Krasnoselskii type result for coincidences and periodic solutions for functional-differential equations.* (va apărea)

[12] V. Dincuţă, *A vector version of Krasnoselskii fixed point theorem in cones for coincidences and periodic solutions for systems of functional-differential equations*. (va apărea)

[13] V. Dincuţă, *Existence results for system of periodic operator equations*, Fixed Point Theory, Volume 4, No. 1, 2003, 61-77.

[14] V. Dincuţă, *Localization of positive periodic solutions for functional-differential equations*. (va apărea)

[15] V. Dincuţă, *Nonlocal initial value problem for first order differential equations*, ACAM, Volume 13, No. 1, 2004, 79-82.

[16] V. Dincuţă, *Positive periodic solutions for systems of second order differential equations*. (va apărea)

[17] X. Ding and F. Wang, *Positive periodic solution for a semi-ratio-dependent predator-prey system with diffusion and time delays*, Nonlinear Analysis: Real World Applications, 9 (2008), 239-249.

[18] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear Operators*, Vol. 1, Interscience Publ., Wiley, New York, 1958.

[19] H. Fang and Z. Wang, *Existence and global attractivity of positive periodic solutions for delay Lotka-Volterra competition patch systems with stocking*, J. Math. Anal. 293 (2004), 190-209.

[20] R. E. Gaines and J. L. Mawhin, *Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations*, Lecture Notes in Mathematics vol. 568, Springer, Berlin (1977).

[21] A. Granas, *On the Leray-Schauder alternative*, Topological Methods Nonlinear Anal. 2 (1993), 225-231.

[22] A. Granas and J. Dugundji, *Fixed Point Theory*, Springer, New York, 2003.

[23] C. Guo and Y. Xu, *Existence of periodic solutions for a class of second order differential equation with deviating argument*, J. Appl. Math. Comput. (2008) 28, 425433.

[24] X. Han, S. Ji and Z. Ma, *On the existence and multiplicity of positive periodic solutions for first-order vector differential equation*, J. Math. anal. Appl. 329 (2007), 977-986.

[25] F. Han and Q. Wang, *Existence of multiple positive periodic solutions for differential equations with state-dependant delays*, J. Math. Anal. Appl, 259 (2001), 8-17.

[26] F. Han and Q. Wang, *Multiple positive periodic solutions for a class of nonlinear functional differential equations*, Applied Mathematics and Computation, 205 (2008), 383-390.

[27] M. Islam and Y. Raffoul, *Periodic solutions of neutral nonlinear system of differential equations with functional delay*, J. Math. Appl. 331 (2007), 1175-1186.

[28] D. Jiang, J. Chu, D'Oregan and R. Agarwal, *Multiple positive solutions to superlinear periodic boundary value problems with repulsive singular forces*, J. Math. Anal. Appl., 286 (2003), 563-576.

[29] D. Jiang, D. O'Regan and R. P. Agarwal, *Optimal existence theory for single and multiple positive periodic solutions of functional differential equations*, Nonlinear oscillations, Vol. 6, No. 3, 2003.

[30] D. Jiang, J. Wei and B. Jhang, *Positive periodic solutions of functional differential equations and population models*, Electron J. Differential Equations, 71 (2002), 1-13.

[31] S. Kang and S. Cheng, *Existence and Uniqueness of Periodic Solutions of Mixed Monotone Functional Differential Equations*, Abstract and Applied Analysis, vol. 2009, Article ID 162891, 13 pages, 2009.

[32] S. Kang and G. Zhang, *Existence of nontrivial periodic solutions for first order functional differential equations*, Applied Mathematics Letters, 18 (2005), 101-107.

[33] V. Khatskevich, *Sur l'existence des solutions periodiques des equations fonctionnelles du deuxième ordre*, Seminaire de mathématique appliquée et mécanique, Rapport 114 (1978).

[34] I. Kiguradze and B. Puza, *On periodic solutions of nonlinear functional differential equations*, Georgian Mathematical Journal, Vol. 6, No. 1, 1999, 45-64.

[35] M.Krasnoselskii, *Fixed points of cone-compressing and cone-expanding operators*, Soviet. Math. Dokl. 1 (1960), 1285-1288.

[36] M. Krasnoselskii, *Positive solutions of operator equations*, Noordhoff, Groningen, 1964.

[37] J. Leray and J. Schauder, *Topologie et équations fonctionnelles*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 51 (1934), 45-78.

[38] J. Li and C. Du, *Existence of positive periodic solutions for a generalized Nicholson's blowflies model*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 221 (2008), 226-233.

[39] Y. Li, X. Fan and L. Zhao, *Positive periodic solutions of functional differential equations with impulses and a parameter*, Computers and Mathematics with Applications, 56 (2008) 2556-2560.

[40] M. Li, C. Kou and Y. Duan, *The existence of periodic solution of impulsive functional differential equations with infinite delay*, J. Appl. Math. Comput. (2009) 29, 341-348.

[41] F. Li and Z. Liang, *Existence of positive periodic solutions to nonlinear second order differential equations*, Applied Mathematics Letters 18 (2005), 1256-1264.

[42] X. Li, X. Lin, D. Jiang and X. Zhang, *Existence and multiplicity of positive periodic solutions to functional differential equations with impulse effects*, Nonlinear Analysis 62 (2005), 683-701.

[43] J. W. Li and Z. C. Wang, *Existence and global attractivity of positive periodic solutions of a survival model of red blood cells*, Computers and Mathematics with Applications, 50 (2005), 41-47.

[44] X. Li, X. Zhang and D. Jiang, *A new existence theory for positive periodic solutions to functional differential equations with impulse effects*, Computers and Mathematics with Applications, 51 (2006), 1761-1772.

[45] B. Liu, *Positive periodic solution for a nonautonomous delay differential equation*, Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series, Vol. 19, No. 2 (2003), 307-316.

[46] Y. Liu, *Positive solutions of periodic boundary value problems for nonlinear first-order impulsive differential equations*, Nonlinear Analysis 70 (2009), 2106-2122.

[47] Z. Liu, *Existence of periodic solutions to a system with functional response on time scales*, Anal. Theory Appl. Col. 25, No. 4 (2009), 369-380.

[48] J. Liu, Z. Jiang and A. Wu, *The existence of periodic solutions for a class of nonlinear functional differential equations*, Applications of Mathematics, Volume 53, Number 2 / January, 2008, 97-103.

[49] X. Liu and W. Li, *Existence and uniqueness of positive periodic solutions of functional differential equations*, J. Math. Anal. Appl. 293 (2004), 28-39.

[50] G. Liu and J. Yan, *Positive periodic solutions for a neutral differential system with feedback control*, Computers and Mathematics with Applications, 52 (2006), 401-410.

[51] G. Liu, J. Yan and F. Zhang, *Existence and global attractivity of unique positive periodic solution for a model of hematopoiesis*, J. Math. Anal. Appl. 334(2007), 157-171.

[52] X. Liu, G. Zhang and S. Cheng, *Existence of triple positive periodic solutions of a functional differential equation depending on a parameter*, Abstract and Applied Analysis, vol. 2004, no. 10, pp. 897-905, 2004.

[53] A. G. Lomtatidze, R. Hakl and B. Puza, *On the periodic boundary value problem for first-order functional-differential equations*, Differential Equations, Vol. 39, No. 3, 2003, 344-352.

[54] S. Ma, Z. Wang and J. Yu, *The existence of periodic solutions for nonlinear systems of first-order differential equations at resonance*, Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 21, No. 11/November, 2000.

[55] J. Mawhin, *Continuation theorems and periodic solutions of ordinary differential equations*, Topological methods in differential equations and inclusions, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1995, 291-375.

[56] J. Mawhin, *Leray-Schauder continuation theorems in the absence of a priori bounds*, Topological Methods in Nonlinear Analysis, Volume 9, (1997), 179-200.

[57] I. Muntean, *Analiză Funcţională*, Cluj, 1993.

[58] D. O'Regan and M. Meehan, *Existence Theory for Nonlinear Integral and Integrodifferential Equations*, Kluwer, Dordrecht, 1998.

[59] D. O'Regan and R. Precup, *Theorems of Leray-Schauder Type and Applications*, Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 2001.

[60] D. O'Regan and R. Precup, *Compression-expansion fixed point theorem in two norms and applications*, J. Math. Anal. Appl. 309 (2005), 383-391.

[61] D. O'Regan and H. Wang, *Positive periodic solutions of systems of second order ordinary differential equations*, Positivity 10(2006), 285-298.

[62] S. Padhi and S. Srivastava, *Multiple periodic solutions for a nonlinear first order functional differential equations with applications to population dynamics*, Applied Mathematics and Computation 203 (2008), 1-6.

[63] S. Padhi, S. Srivastava and S. Pati, *Positive Periodic Solutions for First Order Functional Differential Equations.* (to appear)

[64] H. Poincaré, *Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps*, Bull. Astronom. 1 (1884), 65-74.

[65] H. Poincaré, *Sur un théorème de géométrie*, Rend. Circ. Mat. Palermo 33 (1912), 357-407.

[66] R. Precup, *A vector version of Krasnoselskii's fixed point theorem in cones and positive periodic solutions of nonlinear systems*, J. Fixed Point Theory Appl. (Birkhauser) 2 (2007), No. 1, 141-151.

[67] R. Precup, *Componentwise compression-expansion conditions for systems of nonlinear operator equations and applications*, International Conference on Boundary Value Problems: Mathematical Models in Engineering, Biology and Medicine. AIP Conference Proceedings, Volume 1124, pp. 284-293 (2009).

[68] R. Precup, *Continuation principles for coincidences*, Mathematica (Cluj) 39 (62), no.1 (1997), 103-110.

[69] R. Precup, *Methods in Nonlinear Integral Equations*, Kluwer, Dordrecht, 2002.

[70] R. Precup, *Periodic solutions for an integral equation from biomathematics via Leray-Schauder principle*, Studia Univ. Babes-Bolyai Math. 39, no. 1 (1994), 47-58.

[71] I. A. Rus, *Principles and Applications of the Fixed Point Theory*, Dacia, Cluj, 1979.

[72] G. Sansone and R. Conti, *Nonlinear Differential Equations*, Pergamon Press, New York, 1964.

[73] S. Sburlan, *Gradul Topologic: lecţii de ecuaţii neliniare*, Ed. Academiei, 1983.

[74] X. H. Tang and Z. Jiang, *Periodic solutions of first-order nonlinear functional differential equations*, Nonlinear Analysis 68 (2008), 845-861.

[75] P. Torres, *Existence of one-signed periodic solutions of some second-order differential equations via a Krasnoselskii fixed point theorem*, J. Differential Equations 190(2003), 643-662.

[76] A. Wan and D. Jiang, *Existence of positive periodic solutions for functional differential equations*, Kyushu J. Math., Vol 56, 2002, 193-202.

[77] A. Wan, D. Jiang and X. Xu, *A new existence theory for positive periodic solutions to functional differential equations*, Computers and Mathematics with Applications 47 (2004), 1257-1262.

[78] G. Wang and J. Yan, *Periodic solutions of the non-autonomous Liénard equations with deviating arguments*, International Mathematical Forum, 1 (2006), no. 19, 897-908.

[79] H. Wang, *Positive periodic solutions of functional differential equations*, J. Differential equations 202 (2004), 354-366.

[80] H. Wang, *On the number of positive solutions of nonlinear systems*, J. Math. Anal. Appl. 281 (2003), 287-306.

[81] X. Wu, J. Li and H. Zhou, *A necessary and sufficient condition for the existence of positive periodic solutions of a model of hematopoiesis*, Computers and Mathematics with Applications, 54 (2007), 840-849.

[82] X. Wu, J. Li and Z. Wang, *Existence of positive periodic solutions for a generalized prey-predator model with harvesting term*, Computers and Mathematics with Applications, 55 (2008), 1895-1905.

[83] Y. Wu, *Existence, nonexistence and multiplicity of periodic solutions for a kind of functional differential equation with parameter* Nonlinear analysis, 70 (2009), 433-443.

[84] H. Wu, Y. Xia and M. Lin, *Existence of positive periodic solution of mutualism system with several delays*, Chaos, Solitons and Fractals 36 (2008), 487-493.

[85] R. Xu, M. A. J. Chaplain and F. A. Davidson, *Periodic solutions of a delayed predator-prey model with stage structure for predator*, Journal of Applied Mathematics, vol. 2004, no. 3, pp. 255-270, 2004.

[86] L. Young and L. Xianrui, *Continuation Theorems for Boundary Value Problems*, J. Math. Anal. Appl., 190 (1995), 32-49.

[87] L. Yuji and G. Weigao, *Positive periodic solutions of nonlinear differential equations*, Appl. Math. J.Chinese Univ. Ser. B, 2003, 18(4), 373-382.

[88] F. Zanolin, *Continuation theorems for the periodic problem via the translation operator*, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, Vol. 54, 1 (1996).

[89] Z. Zeng, L. Bi and M. Fan, *Existence of multiple positive periodic solutions for functional differential equations*, J. Math. Anal. Appl. 325 (2007), 1378-1389.

[90] N. Zhang, B. Dai and Y. Chen, *Positive periodic solutions of nonautonomous functional differential systems*, J. Math. Anal. Appl. 333 (2007), 667-678.

[91] G. Zhang and S. Cheng, *Positive periodic solutions of nonautonomous functional differential equations depending on a parameter*, Abstract and Applied Analysis, vol. 7, no. 5, pp. 279-286, 2002.

[92] X. Zhang, D. Jiang, X. Li and K. Wang, *A new existence theory for single and multiple positive periodic solutions to Volterra integro-differential equations with impulse effects*, Computers and Mathematics with Applications, 51 (2006), 17-32.

[93] L. Zhang and C. Lu, *Periodic solutions for a semi-ratio-dependent predator-prey system with Holling IV functional response*, J. Appl. Math. Comput. (2009).

[94] Z. Zhao, Z. Li and L. Chen, *Existence and global stability of periodic solution for impulsive predator-prey model with diffusion and distributed delay*, J. Appl. Math. Comput. (2009).