Universtitatea Babeş-Bolyai Cluj-Napoca
Facultatea de Matematică şi Informatică

Anca Grad (născută Dumitru)

# Condiţii de optim îmbunătăţite pentru probleme de optimizare scalară, vectorială şi multivocă

Rezumatul tezei de doctorat

Conducător de doctorat:

Prof. univ. dr. Wolfgang W. Breckner

2010

# Cuprins

# Introducere

Teoria optimizării ocupă un loc de seamă printre domeniile de cercetare în matematică, loc datorat în principal nenumăratelor sale aplicaţii în aproape toate domeniile practice. Oportunitatea de a efectua cercetări într-un domeniu atât de atractiv reprezintă un real privilegiu. Această teză conţine rezultatele proprii ale autoarei, obţinute în zece lucrări (trei din reviste cotate ISI, şase din reviste recenzate în baze de date internaţionale şi un articol în curs de publicare), individuale sau în colaborare, şi se referă la diferite probleme de optimizare scalară, vectorială şi multivocă. Întregul conţinut este divizat în patru capitole, a căror descriere este făcută în cele ce urmează.

**Capitolul 1** conţine prezentarea noţiunilor şi rezultatelor luate din literatura de specialitate, care vor fi folosite în demonstraţii. De asemenea, familiarizează cititorii cu notaţiile adoptate. Realizările proprii din acest capitol sunt: Propoziţia 1.1.7, care descrie o nouă relaţie între interiorul cvasi-relativ şi cvasi-interiorul unui con convex, şi Propoziţia 1.1.8, care, relativ la un con convex $C$, asigură strict pozitivitatea în orice punct din cvasi-interiorul lui $C$ a valorilor unei funcţionale liniare continue diferite de 0, luate din conul dual al lui $C$.

**Capitolul 2** se ocupă cu optimizarea scalară. Rezultatele din această parte pot fi considerate ca aparţinând la două mari categorii, cele privind condiţii secvenţiale de optim, şi cele privind condiţii de regularitate de tip interior cvasi-relativ pentru dualitatea tare Lagrange. Contribuţiile proprii relaţionate cu aceste subiecte au fost publicate în Grad A. [60], [62], [64], precum şi în lucrările în colaborare Boţ R. I., Grad A. şi Wanka G. [21], [22].

Pentru început, în Subsecţiunea 2.1.1, analizăm în condiţiile (2.1) următoarea problemă de optimizare convexă scalară cu restricţii exprimate cu ajutorul unui con convex $C$:

$$(P_C) \qquad \inf_{g(x)\in -C} f(x).$$

Pentru o funcţie perturbatoare $\Phi_C$, definită prin (2.2), Lema 2.1.3 relevă anumite proprietăţi, în timp ce Lema 2.1.4 îi caracterizează subdiferenţiala. Primele condiţii secvenţiale de optim relative la $(P_C)$ sunt date în Teorema 2.1.5. Cu ajutorul Lemei 2.1.6 ele sunt ulterior îmbunătăţite, în ceea ce priveşte o mai bună separare a şirurilor (a se vedea Teorema 2.1.7).

Continuăm cu analizarea problemei de optimizare convexă scalară, cu restricţii exprimate cu ajutorul unei mulţimi convexe $M$ şi al unui con convex $C$

$$(P_{CM}) \qquad \inf_{\substack{x\in M\\ g(x)\in -C}} f(x),$$

în ipotezele (2.1) şi (2.9). Primele condiţii secvenţiale de optim pentru $(P_{CM})$ sunt date în Teorema 2.1.9, care foloseşte Lema 2.1.8. În contrast cu Teoremele 4.10 şi 4.11 din Boţ R. I., Csetnek E. R. şi Wanka G. [17], Teorema 2.1.9 are un număr mai mic de şiruri implicate în formularea condiţiilor de optim, în timp ce funcţia $g$ este $C$-epi închisă, nu continuă. Folosind Teorema 2.1.7, obţinem o formulare echivalentă a Teoremei 2.1.9, prezentată în Teorema 2.1.10.

În cadrul Subsecţiunii 2.1.2 ne concentrăm pe problema de optimizare convexă compusă, cu restricţii exprimate cu ajutorul unei mulţimi convexe $M$ şi al unui con convex $C$

$$(P_{CM}^{s\circ f}) \qquad \inf_{\substack{x\in M\\ g(x)\in -C}} (s\circ f)(x),$$

în ipotezele (2.14). Considerăm pentru început cazul în care $f$ este stea $K$-inferior semicontinuă. O funcţie perturbatoare $\Phi_{s\circ f}$, dată prin (2.16), este aleasă şi apoi caracterizată în Lemele 2.1.11 şi 2.1.12. Teoremele 2.1.13 şi 2.1.15 conţin formulări echivalente pentru condiţiile secvenţiale relative la $(P_{CM}^{s\circ f})$. Echivalenţa lor este asigurată de Lema 2.1.14. Cazul în care $K$ este închis şi $f$ este $K$-epi închisă este analizat în Teoremele 2.1.18 şi 2.1.20, care folosesc în demonstraţii Lemele 2.1.16 şi 2.1.17.

Considerând $\operatorname{dom} f = \operatorname{dom} g = X$ şi cerând ca $f$ şi $g$ să fie continue, obţinem în Teorema 2.1.21 condiţii de optim pentru $(P_{CM}^{s\circ f})$ cu un număr redus de şiruri. Acest număr poate fi scăzut şi mai mult prin considerarea lui $g \equiv 0$, caz tratat în Corolarul 2.1.23. Prezentăm în continuare o condiţie secvenţială a multiplicatorilor lui Lagrange (a se vedea Teorema 2.1.24), când $f(x) := x$ pentru orice $x \in X$ şi $K := \{0\}$, care este o îmbunătăţire a unui rezultat dat de Boţ R. I., Csetnek E. R. şi Wanka G. [17, Teorema 4.10]. Mai mult, Teorema 2.1.28, o generalizare secvenţială a binecunoscutei Leme a lui Pshenichnyi-Rockafellar, este o extindere a Corolarului 4.8 din Boţ R. I., Csetnek E. R. şi Wanka G. [17] şi, în consecinţă, o generalizare a Corolarului 3.5 din Jeyakumar V. şi Wu Z. Y. [83].

Exemplul 2.1.27 validează căutarea de condiţii secvenţiale, prezentând o problemă de optimizare pentru care clasicele condiţii Karush-Kuhn-Tucker nu sunt îndeplinite, în timp ce condiţiile secvenţiale din Teorema 2.1.24 se verifică.

Secţiunea 2.2 se ocupă cu condiţii suficiente pentru dualitatea tare relativă la o problemă de optimizare convexă cu restricţii exprimate cu ajutorul unei mulţimi convexe, al unui con convex şi al unei funcţii afine, în spaţii infinit dimensionale, şi duala sa Lagrange. Condiţiile de optim sunt specificate cu ajutorul interiorului cvasi-relativ şi cvasi-interiorului unor mulţimi convexe. Contribuţiile autoarei au fost publicate în Grad A. [64].

Perechea primală-duală investigată este formată din problemele

$$(P_{CMA}) \qquad \inf_{\substack{x\in M\\ g(x)\in -C\\ h(x)=0}} f(x)$$

şi

$$(D_{CMA}^{L}) \qquad \sup_{z^*\in C^+, w^*\in W^*} \inf_{x\in M} \big\{ f(x) + \langle z^*, g(x)\rangle + \langle w^*, h(x)\rangle \big\},$$

în ipotezele (2.34). Teorema 2.2.2 prezintă o afirmaţie de dualitate slabă. În Observaţia 2.2.3 comparăm perechea primală-duală $(P_{CMA}, D_{CMA}^{L})$ considerată mai sus cu perechea analizată de Daniele P. şi Giuffré S. [45, Teorema 3.1], subliniind erorile acestor autori şi argumentând abordarea noastră.

Teorema 2.2.6 este rezultatul principal al Secţiunii 2.2 şi prezintă condiţii suficiente pentru dualitatea tare dintre $(P_{CMA}, D^L_{CMA})$. Versiuni mai tari, dar în acelaşi timp mai uşor de validat în practică ale acestei teoreme se găsesc în Teoremele 2.2.13 şi 2.2.19. Toate rezultatele de dualitate tare din această secţiune, în cazul particular când $(P_{CMA})$ admite soluţii optime, sunt tratate în Corolarele 2.2.7, 2.2.14 şi 2.2.20. Este de remarcat faptul că, condiţiile Corolarului 2.2.20 seamănă cu cele din Daniele P. şi Giuffré S. [45, Teorema 3.1], dar, sunt mai puţin restrictive şi, în acelaşi timp, corecte.

În demonstrarea Teoremei 2.2.6 s-au folosit Lemele 2.2.4 şi 2.2.5 care caracterizează mulţimea $\mathcal{E}$. Propoziţia 2.2.9 dă o formulare echivalentă pentru (2.36), în timp ce Lema 2.2.11 relevă condiţii suficiente care asigură (2.35). Lema 2.2.16 abordează cazul în care mulţimea $M$ este afină, iar Lema 2.2.18 tratează situaţia când funcţia $h$ este continuă.

Teorema 2.2.21 prezintă condiţii necesare şi suficiente de optim cu ajutorul punctelor şa ale funcţiei lui Lagrange asociate cu $(P_{CMA})$. Capitolul 2 se încheie cu o subsecţiune dedicată unei probleme de optimizare în $L^2([0,T],\mathbb{R}^2)$, pentru care aplicăm rezultatul de dualitate tare din Corolarul 2.2.14.

**Capitolul 3** relevă aspecte din optimizarea vectorială privind atât condiţii secvenţiale de optim, cât şi o nouă duală Fenchel. Contribuţiile autoarei cu privire la aceste subiecte au fost publicate în Grad A. [60], [61], [63], [65] şi în articolele în colaborare Boţ R. I., Dumitru (Grad) A. şi Wanka G. [20], Boţ R. I., Grad A. şi Wanka G. [21], [22].

Din câte cunoaştem, condiţii secvenţiale de optim pentru probleme de optimizare vectorială au fost considerate pentru prima dată în literatura de specialitate de Boţ R. I., Grad A. şi Wanka G. [21]. Rezultatele din această lucrare au fost ulterior îmbunătăţite de Boţ R. I., Grad A. şi Wanka G. [22], şi Grad A. [63].

În Secţiunea 3.1 considerăm problema generală de optimizare vectorială cu restricţii exprimate cu ajutorul unei mulţimi convexe $M$ şi al unui con convex $C$

$$(P^v_{CM}) \qquad \operatorname*{v-min}_{\substack{x\in M \\ g(x)\in -C}} f(x),$$

în ipotezele (3.1). Teorema 3.1.7 prezintă condiţii secvenţiale suficiente pentru soluţii $S$-propriu eficiente ale lui $(P^v_{CM})$, atunci când $f$ este stea $K$-inferior semicontinuă, în timp ce Teorema 3.1.8 indică condiţii secvenţiale suficiente pentru soluţii $T$-slab eficiente ale lui $(P^v_{CM})$, atunci când $f$ este $K$-epi închisă.

Admiţând că funcţiile $f$ şi g sunt continue, se stabilesc în Subsecţiunea 3.1.2 condiţii secvenţiale de optim necesare şi suficiente pentru soluţii $S$-propriu eficiente şi $T$-slab eficiente ale lui $(P^v_{CM})$. Se tratează două cazuri particulare semnificative. Scalarizarea liniară este considerată pentru început. Teorema 3.1.9 conţine condiţii secvenţiale de optim necesare şi suficiente pentru soluţii $S_{K^{+0}}$-propriu eficiente ale lui $(P^v_{CM})$. A doua scalarizare abordată le este atribuită lui Gerstewitz C. şi Iwanow [54]. Teorema 3.1.12 prezintă condiţii secvenţiale de optim necesare şi suficiente pentru soluţii $T_{\operatorname{int} K}$-slab eficiente ale lui $(P^v_{CM})$.

Observaţia 3.1.10 şi Exemplul 3.1.11 vin în sprijinul cercetărilor prezentate în Secţiunea 3.1, prezentând un caz paricular de problemă de optimizare vectorială pentru care clasicele condiţii de optim Karush-Kuhn-Tucker nu sunt stisfăcute, în timp ce cele secvenţiale se validează.

Noi descoperiri relaţionate cu probleme duale vectoriale de tip Fenchel se găsesc în Secţiunea 3.2.

Ele au fost publicate în GRAD A. [61]. Problema primală studiată este

$$(P_A^v) \qquad \operatorname*{v-min}_{x\in X}(f+g\circ A)(x),$$

în ipotezele (3.8). Prima problemă duală vectorială de tip Fenchel asociată lui $(P_A^v)$ şi analizată în Subsecţiunea 3.2.1 este

$$(D_A^{v\leq}) \qquad \operatorname*{v-max}_{(y^*,z^*,y)\in\mathcal{A}_{D_A^{v\leq}}} h^{\leq}(y^*,z^*,y).$$

O afirmaţie de dualitate slabă pentru perechea primală-duală $(P_A^v, D_A^{v\leq})$ este dată în Teorema 3.2.3. Demonstraţia teoremei de dualitate tare, i.e. Teorema 3.2.5, se bazează pe impunerea unor condiţii de regularitate care asigură de fapt dualitatea tare pentru problemele scalarizate ataşate perechii $(P_A^v, D_A^{v\leq})$. Facem o trecere în revistă a principalelor condiţii de regularitate apărute în literatura de specialitate cu privire la situaţia studiată. Teorema 3.2.6 ajută la demonstrarea dualităţii inverse din Teorema 3.2.7.

În Subsecţiunea 3.2.2 comparăm $(D_A^{v\leq})$ cu o altă duală vectorială de tip Fenchel asociată lui $(P_A^v)$, a cărei formulare a fost inspirată din BRECKNER W. W. şi KOLUMBÁN I. [36]. Ea este

$$(D_A^{vBK}) \qquad \operatorname*{v-max}_{(y^*,z^*,y)\in\mathcal{A}_{D_A^{vBK}}} h^{BK}(y^*,z^*,y).$$

Din Observaţia 3.2.9 aflăm că $h^{BK}(\mathcal{A}_{D_A^{vBK}}) \subseteq h^{\leq}(\mathcal{A}_{D_A^{v\leq}})$, în timp ce Teorema 3.2.10 afirmă că $\text{v-max}\, h^{BK}(\mathcal{A}_{D_A^{vBK}}) = \text{v-max}\, h^{\leq}(\mathcal{A}_{D_A^{v\leq}})$. Folosind teoremele de dualitate slabă, tare şi inversă, stabilite pentru perechea primală-duală $(P_A^v, D_A^{v\leq})$, putem da acelaşi tip de rezultate pentru perechea primală $(P_A^v, D_A^{vBK})$ (a se vedea Teorema 3.2.12). Atunci când particularizăm spaţiile $X, Y$ şi $Z$, dualele vectoriale de tip Fenchel $(D_A^{v\leq})$ şi $(D_A^{vBK})$ devin clasica duală Fenchel din optimizarea scalară (a se vedea ROCKAFELLAR R. T. [103]).

Pentru cazul când $Y := \mathbb{R}^m$ şi $K := \mathbb{R}^m_+$, introducem pe lângă dualele vectoriale $(D_A^{v\leq})$ şi $(D_A^{vBK})$, una nouă, a cărei formulare a fost inspirată din BOŢ R. I., DUMITRU(GRAD) A. şi WANKA G. [20]. Ea este

$$(D_A^{vBGW}) \qquad \operatorname*{v-max}_{(p,q,\lambda,t)\in\mathcal{A}_{D_A^{vBGW}}} h^{BGW}(p,q,\lambda,t).$$

Sub condiţii de regularitate corespunzătoare, nu numai incluziunea

$$h^{BK}\left(\mathcal{A}_{D_A^{vBK}}\right) \subseteq h^{BGW}\left(\mathcal{A}_{D_A^{vBGW}}\right) \cap \mathbb{R}^m$$

are loc, dar şi

$$h^{BGW}\left(\mathcal{A}_{D_A^{vBGW}}\right) \cap \mathbb{R}^m \subseteq h^{\leq}\left(\mathcal{A}_{D_A^{v\leq}}\right)$$

(a se vedea Propoziţia 3.2.15). După cum se observă din Exemplele 3.2.17 şi 3.2.18, incluziunile de mai sus pot fi stricte. Totuşi, în Teorema 3.2.19 se demonstrează că mulţimile de soluţii optime asociate dualelor $(D_A^{vBGW})$ şi $(D_A^{v\leq})$ coincid, i.e.

$$\text{v-max}\left[h^{BGW}\left(\mathcal{A}_{D_A^{vBGW}}\right) \cap \mathbb{R}^m\right] = \text{v-max}\, h^{\leq}\left(\mathcal{A}_{D_A^{v\leq}}\right).$$

Afirmaţii de dualitate slabă, tare şi inversă, pentru perechea primală-duală $(P_A^v, D_A^{vBGW})$ sunt specificate în Teorema 3.2.21. Folosind Exemplul 3.2.22, ajungem la concluzia că o abordare directă a dualităţii inverse pentru problema $(D_A^{vBGW})$ ar fi mai dificilă, dacă nu s-ar folosi relaţia dintre ea şi $(D_A^{v\leq})$, dată în Teorema 3.2.19.

Secţiunea 3.3 cuprinde rezultate publicate în Boţ R. I., Dumitru (Grad) A. şi Wanka G. [20], şi Grad A. [65]. Ea propune o abordare directă a dualităţii slabe, tari şi inverse, pentru o duală vectorială de tip Fenchel, asemănătoare lui $(D_A^{vBGW})$ din Subsecţiunea 3.2.2, exprimate de această dată într-un context finit dimensional. Pentru început, analizăm în Secţiunea 3.3.1 problema scalară asociată lui $(P_A^{!v})$ şi duala sa Fenchel. Principalele rezultate din această parte sunt Teorema 3.3.4 (dualitate slabă), Teorema 3.3.6 (dualitate tare) şi Teorema 3.3.7 (condiţii de optim). Apoi extindem în Subsecţiunea 3.3.2 rezultatele scalare la cazul vectorial, după definirea unei noi duale vectoriale de tip Fenchel pentru $(P_A^{!v})$ în acest context finit dimensional. Duala este

$$(D_A^{!vBGW}) \qquad \underset{(p,q,\lambda,t)\in\mathcal{A}_{D_A^{!vBGW}}}{\text{v-max}} h^{!BGW}(p,q,\lambda,t).$$

Teorema 3.3.9 ţinteşte dualitatea slabă, în timp ce Teorema 3.3.12 atacă dualitatea tare. Propoziţiile 3.3.15 şi 3.3.16 ajută în demonstarea unei afirmaţii directe de dualitate inversă pentru perechea primală-duală $(P_A^{!v}, D_A^{!vBGW})$ din Teorema 3.3.17.

**Capitolul 4** se adresează unei noi abordări de dualitate în optimizarea multivocă, cu ajutorul cvasi-interiorului unui con convex, conţinând rezultatele autoarei din Grad A. [66].

Secţiunea 4.1 este centrată pe definirea şi specificarea unor proprietăţi pentru două noi relaţii pentru mulţimi. Considerând un con convex punctat $K$, al cărui cvasi-interior este nevid şi care este o submulţime strictă a unui spaţiu local convex separat, introducem prin Definiţia 4.1.3 două noi relaţii $\trianglelefteq^l_{\text{qi}\,K}$ şi $\trianglelefteq^u_{\text{qi}\,K}$. Ele sunt tranzitive. Propoziţia 4.1.5 conţine anumite proprietăti ale noilor relaţii. Definiţia 4.1.7 specifică patru noi noţiuni de eficienţă pentru $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}_0(Y)$. Notaţiile adoptate pentru mulţimile noilor soluţii eficiente sunt

$$\text{l-Min}_{\text{qi}}\,\mathcal{S}, \text{l-Max}_{\text{qi}}\,\mathcal{S}, \text{u-Min}_{\text{qi}}\,\mathcal{S} \text{ şi } \text{u-Max}_{\text{qi}}\,\mathcal{S}.$$

Propoziţia 4.1.10 arată că $\text{l-Min}_{\text{qi}}(-\mathcal{S}) = -\,\text{u-Max}_{\text{qi}}\,\mathcal{S}$.

În Secţiunea 4.2 introducem pentru o funcţie multivocă $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ qi-conjugata şi qi-subdiferenţiala într-un punct $\overline{x} \in X$ cu $F(\overline{x}) \neq \emptyset$. Aceste noţiuni sunt în analogie cu cele scalare.

Secţiunea 4.3 se ocupă cu o abordare prin perturbare a optimizării multivoce. Pentru început, în Subsecţiunea 4.3.1, tratăm cazul fără restricţii. Considerăm problema multivocă

$$(P_{\text{qi}}^{sv}) \qquad \underset{x\in X}{\text{l-Min}_{\text{qi}}}\, F(x),$$

căreia îi ataşam o funcţie perturbatoare $\Phi$. Folosind qi-conjugata a lui $\Phi$, demonstrăm că

$$(D_{\text{qi}}^{sv}) \qquad \underset{T\in\mathcal{L}(W,Y)}{\text{l-Max}_{\text{qi}}} \left[-\Phi^*_{\text{qi}\,K}(0,T)\right]$$

este o duală validă pentru $(P_{\text{qi}}^{sv})$. Teorema de dualitate slabă, i.e. Teorema 4.3.4, este însoţită de Teorema 4.3.5 care conţine condiţii de optim pentru perechea primală-duală $(P_{\text{qi}}^{sv}, D_{\text{qi}}^{sv})$. Mai mult, Teorema 4.3.6 prezintă condiţii de optim pentru duala $(D_{\text{qi}}^{sv})$.

În continuare, în Subsecţiunea 4.3.2, ne concentrăm pe problema multivocă cu restricţii

$$(CP_{\mathrm{qi}}^{sv}) \qquad \underset{G(x)\cap(-C)\neq\emptyset}{\text{l-Min}_{\mathrm{qi}}} F(x),$$

când $Z$ este un spaţiu separat local convex şi $G : X \to \mathcal{P}(Z)$ este o funcţie multivocă proprie. Teorema 4.3.10 conţine un rezultat de dualitate slabă, în timp ce Teoremele 4.3.11 şi 4.3.12 prezintă condiţii de optim.

Prin alegerea, în Subsecţiunea 4.3.3, a unei funcţii perturbatoare de tip Lagrange, putem demonstra o teoremă de dualitate tare, de acelaşi tip Lagrange (a se vedea Teorema 4.3.15). Este de remarcat că acest rezultat generalizează Corolarul 4.7 din Boţ R. I., Csetnek E. R. şi Moldovan A. [16] din cazul scalar.

Capitolul 4 se încheie cu Secţiunea 4.4, care furnizează un exemplu, formulat în spaţiul $\ell^2(\mathbb{R})$, căruia Teorema 4.3.15 de dualitate tare i se poate aplica cu succes.

# Mulţumiri

Începem prin adresarea sincerelor mulţumiri conducătorului nostru de doctorat Prof. univ. dr. Wolfgang W. Breckner de la Facultatea de Matematică şi Informatică a Universităţii Babeş-Bolyai din Cluj-Napoca. Dânsul ne-a oferit privilegiul de a urma studiile de doctorat sub atenta sa supraveghere, propunându-ne un subiect de cercetare atractiv şi actual. De asemenea, îi mulţumim pentru atenta verificare a tuturor rezultatelor ştiinţifice obţinute şi pentru îmbunătăţirile sugerate, astfel încât rezultatul final să fie corect, actual şi unitar.

Multe mulţumiri sunt apoi adresate Prof. univ. dr. Gert Wanka de la Facultatea de Matematică a Universităţii Tehnice din Chemnitz (Germania). Pe parcursul ultimilor 4 ani ne-a oferit burse de cercetare în cadrul departamentului său, unde am beneficiat nu numai de sfaturile sale competente şi de importante resurse bibliografice, dar şi de o perspectivă nouă asupra vieţii academice.

Din punct de vedere profesional îi suntem profund recunoscători lui P. D. Dr. habil. Radu Ioan Boţ de la Facultatea de Matematică a Universităţii Tehnice din Chemnitz (Germania), care ne-a sugerat noi arii de cercetare şi a lucrat împreună cu noi în descoperirea unor rezultate semnificative. Din punct de vedere personal, îi mulţumim lui şi familiei lui pentru prietenie. De asemenea, apreciem în mod deosebit nenumăratele conversaţii cu privire la aspecte tehnice din articolele noastre şi din teza de doctorat, avute cu Dr. Ernö Robert Csetnek de la Facultatea de Matematică a Universităţii Tehnice din Chemnitz (Germania).

Adresăm mulţumiri şi tuturor membrilor fostei Catedre de Analiză şi Optimizare de la Facultatea de Matematică şi Informatică a Universităţii Babeş-Bolyai din Cluj-Napoca.

La final, cel mai special loc de mulţumire este rezervat familiei, adică părinţilor Aurora şi Petru Dumitru, şi şotului Cătălin Grad. Dragostea şi sprijinul lor necondiţionat ne-au asigurat forţa internă necesară concentrării asupra vieţii profesionale.

# Cuvinte cheie

Optimizare sclară, optimizare vectorială, optimizare multivocă, dualitate Lagrange, dualitate Fenchel, condiţii secvenţiale de optim, interioare generalizate ale mulţimilor, condiţii de regularitate.

# Capitolul 1

# Preliminarii

Pentru lecturarea mai facilă a tezei, prezentăm câteva noţiuni, rezultate şi notaţii referitoare la funcţii reale şi vectoriale. De asemenea, mai menţionăm câteva elemente de analiză convexă.

## 1.1 Submulţimi speciale ale unui spaţiu vectorial

Fie $X$ un spaţiu vectorial şi $M \subseteq X$ o mulţime. Reamintim definiţiile pentru: învelitoarea liniară ($\operatorname{lin} M$), învelitoarea afină ($\operatorname{aff} M$), învelitoarea convexă ($\operatorname{co} M$), învelitoarea conică ($\operatorname{cone} M$) şi învelitoarea convexă conică ($\operatorname{cone}\operatorname{co} M$), asociate lui $M$. Menţionăm de asemenea definiţia conului normal asociat lui $M$, notat prin $N_M$, şi definiţiile pentru conul dual al unui con nevid $C \subseteq X$, notat prin $C^+$, şi pentru cvasi-interiorul conului $C$, notat prin $C^{+0}$.

### 1.1.1 Interioare generalizate ale mulţimilor

Fie $X$ un spaţiu vectorial netrivial şi $M \subseteq X$ o mulţime. Reamintim definiţii ale interiorului algebric ($\operatorname{core} M$) al lui $M$ şi nucleului intrinsec ($\operatorname{icr} M$) al lui $M$. Prezentăm anumite proprietăţi ale lor în cazul când $M$ este o mulţime convexă. Pentru cazul în care $X$ este un spaţiu vectorial topologic mai definim interiorul ($\operatorname{int} M$) şi închiderea ($\operatorname{cl} M$) lui $M$.

În ipotezele în care $X$ este un spaţiu vectorial topologic separat (Hausdorff) şi $M \subseteq X$ este o mulţime, menţionăm interiorul cvasi-relativ tare al lui $M$ ($\operatorname{sqri} M$), iar când $M$ este convexă, interiorul cvasi-relativ ($\operatorname{qri} M$) şi cvasi-interiorul ($\operatorname{qi} M$).

Rezultatele autoarei sunt următoarele două.

**Propoziţia 1.1.7** (Grad A. [64]) *Fie $M$ o submulţime convexă a unui spaţiu local convex separat $X$ şi fie $x \in M$. Atunci*

$$x \in \operatorname{qi} M \Longleftrightarrow \begin{cases} 0 \in \operatorname{qi}(M - M) \\ x \in \operatorname{qri} M. \end{cases}$$

**Propoziţia 1.1.8** *Fie $C$ un con convex nevid al unui spaţiu local convex separat $X$. Atunci, pentru orice $x^* \in C^+\backslash\{0\}$ şi orice $x \in \operatorname{qi} C$, următoarea inegalitate este validă:*

$$\langle x^*, x\rangle > 0. \tag{1.1}$$

### 1.1.2 Teoreme de separare

În demonstrarea teoremelor de dualitate tare, teoremele de separare sunt mereu implicate. Menţionăm în această subsecţiune nu numai câteva rezultate binecunoscute din literatura de specialitate (date de Eidelheit M., Tukey J. W.), ci şi câteva teoreme recent publicate (date de Boţ R. I., Csetnek E. R. şi Wanka G. [19], Cammaroto F. şi Di Bella B. [38]), care folosesc noţiunile de interior cvasi-relativ şi cvasi-interior ale unui con convex.

## 1.2 Noţiuni şi rezultate privitoare la funcţii

### 1.2.1 Funcţii reale cu valori extinse

Fie $X$ un spaţiu local convex şi $X^*$ dualul său topologic. Se notează $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Având o mulţime $M \subseteq X$, funcţia sa indicatoare este $\delta_M : X \to \overline{\mathbb{R}}$, iar funcţionala sa suport este $\sigma_M : X^* \to \overline{\mathbb{R}}$.

Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie. Reamintim domeniul $(\operatorname{dom} f)$ şi epigraficul $(\operatorname{epi} f)$ lui $f$. Fiind dat un punct $\overline{x} \in X$, notăm prin $\partial f(\overline{x})$ subdiferenţiala lui $f$ în $\overline{x}$. Funcţia conjugată a lui $f$ în raport cu mulţimea $M \subseteq X$ este $f_M^* : X^* \to \overline{\mathbb{R}}$, iar atunci când $M = X$ descoperim clasica conjugată Fenchel-Moreau a lui $f$, notată prin $f^*$. Aşa-numita inegalitate Fenchel-Young, utilă în aplicaţii, este specificată. Funcţia conjugată $f^{**} : X \to \overline{\mathbb{R}}$ a lui $f^*$ se numeşte biconjugata lui $f$.

Fie $f_1 : X \to \overline{\mathbb{R}}$,..., $f_m : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funcţii proprii, unde $m \in \mathbb{N}$. Convoluţia infimală a lui $f_1, ..., f_m$ este funcţia $f_1 \Box ... \Box f_m : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Precizăm anumite proprietăţi ale ei.

Fie $X$ şi $Y$ spaţii vectorial topologice. Pentru un operator linar continuu $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, operatorul său adjunct este notat prin $T^*$, iar funcţia infimală a unei funcţii $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ prin $T$ este $Tf : Y \to \overline{\mathbb{R}}$.

### 1.2.2 Funcţii vectoriale cu valori extinse

Considerăm un spaţiu local convex $Y$, parţial ordonat de un con convex nevid $C \subseteq Y$. Lui $Y$ îi ataşam un cel mai mare element în raport cu $\leq_C$, care nu aparţine lui $Y$ şi care este notat prin $\infty_Y$. Punem $Y^\bullet := Y \cup \{\infty_Y\}$. Atunci, pentru orice $y \in Y^\bullet$, avem $y \leq_C \infty_Y$. Mai mult, definim pe $Y^\bullet$ următoarele operaţii:

$$y + \infty_Y := \infty_Y, \infty_Y + y := \infty_Y, \lambda \cdot \infty_Y := \infty_Y \text{ şi } \langle y^*, \infty_Y \rangle := +\infty$$

pentru orice $y \in Y$, orice $\lambda \geq 0$ şi orice $y^* \in C^+$.

Având o funcţie $f : X \to Y^\bullet$, reamintim domeniul $(\operatorname{dom} f)$ şi con-epigraficul $(\operatorname{epi}_C f)$ său. Mai mult, reamintim diferite generalizări ale noţiunii de convexitate pentru funcţii vectoriale. O sinteză a principalelor extensii ale semicontinuităţii inferioare (con-inferior semicontinuitate, stea con-inferior semicontinuitate, con-epi închidere) la cazul vectorial încheie acest prim capitol.

# Capitolul 2

# Optimizare scalară

Prezentul capitol conţine numeroase rezultate originale privind condiţii de optim şi dualitate pentru diverse tipuri de probleme de optimizare scalară. Ele au fost publicate de către autoare în lucrările individuale Grad A. [60], [62], [64], şi în lucrările în colaborare Boţ R. I., Grad A. şi Wanka G. [21], [22]. Majoritatea teoremelor şi corolarelor reprezintă generalizări şi/sau îmbunătăţiri ale altor rezultate date de către diverşi autori.

Din punct de vedere istoric, primele realizări majore obţinute în optimizare s-au referit la problemele scalare. Deşi acestea au reprezentat un important subiect de interes pentru comunitatea ştiinţifică de-a lungul deceniilor trecute, această temă încă prezintă provocări, care sunt bazate în principal pe lărgirea mulţimii de probleme pentru care condiţii de optim din ce în ce mai puţin restrictive pot fi aplicate. Numeroase monografii au fost tipărite pe acest subiect începând cu mijlocul secolului trecut. Menţionăm dintre acestea Barbu V. şi Precupanu T. [5], Blaga L. şi Lupşa L. [6], Boţ R. I., Grad S. M. şi Wanka G. [26], Breckner W. W. [33], Rockafellar R. T. [103] şi Zălinescu C. [121].

## 2.1 Condiţii secvenţiale de optim pentru probleme de optimizare convexă cu restriţii exprimate cu mulţimi şi conuri convexe

Această secţiune conţine condiţii secvenţiale de optim pentru diverse tipuri de probleme de optimizare convexă scalară, simple sau compuse, condiţii care, după cunoştinţele noastre, sunt cele mai generale publicate până în acest moment pentru această temă.

Boţ R. I., Csetnek E. R. şi Wanka G. [17], [18], au dat recent condiţii secvenţiale de optim în optimizarea convexă, folosind o abordare cu funcţii perturbatoare, îmbunătăţind rezultate anterioare. Noi extindem rezultatele din aceste lucrări, cât şi din Grad A. [60], pentru probleme de optimizare convexă scalară, cu restricţii exprimate cu mulţimi şi conuri convexe, definite cu ajutorul unor funcţii vectoriale con-epi închise. Mai mult, redescoperim ca şi cazuri particulare câteva rezultate din lucrările mai sus amintite.

Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spaţiu Banach reflexiv şi fie $(X^*, \|\cdot\|_*)$, dualul topologic al acestuia. De asemenea, fie $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir în $X^*$. Folosim notaţia $x_n^* \xrightarrow{\omega^*} 0$ ($x_n^* \xrightarrow{\|\cdot\|_*} 0$) pentru situaţia în care $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ converge către 0 în topologia slabă$^*$(tare).

**Teorema 2.1.1** (BOŢ R. I., CSETNEK E. R., WANKA G. [17]) *Fie $X$ un spaţiu Banach reflexiv, iar $Y$ un spaţiu Banach. Fie de asemenea $\Phi : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie proprie, convexă şi inferior semicontinuă astfel încât $\inf_{x\in X} \Phi(x, 0) < +\infty$, iar $\overline{x} \in \operatorname{dom} \Phi(\cdot, 0)$. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(a) *$\overline{x}$ este un punct de minim al lui $\Phi(\cdot, 0)$ pe $X$.*

(b) *Există două şiruri, $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ în $\operatorname{dom} \Phi$ şi $((x_n^*, y_n^*))_{n\in\mathbb{N}}$ în $X^* \times Y^*$, astfel încât*

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} : (x_n^*, y_n^*) \in \partial\Phi(x_n, y_n); \\ x_n \to \overline{x}, y_n \to 0, x_n^* \to 0, \langle y_n^*, y_n\rangle \to 0, \Phi(x_n, y_n) - \Phi(\overline{x}, 0) \to 0. \end{cases}$$

**Observaţia 2.1.2** Teorema 2.1.1 poate fi de asemenea obţinută din ZĂLINESCU C. [121, Teorema 3.1.6], unde trebuie făcute următoarele particularizări: operatorul liniar continuu $A : X \to X \times Y$ trebuie definit prin $Ax := (x, 0)$, iar funcţia $f$ este definită prin $f := \Phi \circ A$. ∎

### 2.1.1 Probleme de optimizare convexă

Prezentăm în această subsecţiune îmbunătăţiri ale unor rezultate din BOŢ R. I., CSETNEK E. R. şi WANKA G. [18] pentru o clasă generală de probleme de optimizare convexă scalară, având funcţia care defineşte restricţiile con-convexă şi con-epi închisă.

Considerăm problema generală de optimizare convexă scalară cu restricţii exprimate cu ajutorul unui con convex

$$(P_C) \qquad \inf_{g(x)\in -C} f(x),$$

formulată în următoarele ipoteze:

$$(2.1) \qquad \begin{cases} X \text{ este un spaţiu Banach reflexiv}, Z \text{ este un spaţiu Banach;} \\ C \subseteq Z \text{ este un con nevid, închis şi convex;} \\ f : X \to \overline{\mathbb{R}} \text{ e o funcţie proprie, convexă şi inferior semicontinuă;} \\ g : X \to Z^\bullet \text{ este o funcţie proprie, } C\text{-convexă şi } C\text{-epi închisă;} \\ g^{-1}(-C) \cap \operatorname{dom} f \neq \emptyset. \end{cases}$$

Notăm mulţimea soluţiilor admisibile ale lui $(P_C)$ prin

$$\mathcal{A}_{P_C} := g^{-1}(-C) \cap \operatorname{dom} f.$$

Considerăm o funcţie perturbatoare $\Phi_C : X \times X \times Z \to \overline{\mathbb{R}}$, definită prin

$$(2.2) \qquad \Phi_C(x, p, q) := \begin{cases} f(x + p) & \text{dacă } g(x) - q \in -C \\ +\infty & \text{în rest.} \end{cases}$$

**Lema 2.1.3** (GRAD A. [62]) *Fie ipotezele* (2.1) *satisfăcute. Atunci funcţia $\Phi_C$ este proprie, convexă şi inferior semicontinuă. Mai mult, este adevărat că*

$$(2.3) \qquad \operatorname{dom} \Phi_C(\cdot, 0, 0) = \mathcal{A}_{P_C},$$

*şi, în consecinţă, următoarea inegalitate este validă:*

$$(2.4) \qquad \inf_{x\in X} \Phi_C(x, 0, 0) < +\infty.$$

**Lema 2.1.4** (GRAD A. [62]) *Fie ipotezele* (2.1) *satisfăcute. Dacă* $(\overline{x},\overline{p},\overline{q}) \in \operatorname{dom}\Phi_C$, *atunci*

$$\partial\Phi_C(\overline{x},\overline{p},\overline{q}) = \left\{ \begin{array}{r} (x^*,p^*,-q^*) \in X^* \times X^* \times -C^+ : p^* \in \partial f(\overline{x}+\overline{p}), \\ x^* - p^* \in \partial(q^* \circ g)(\overline{x}), \langle q^*, g(\overline{x}) - \overline{q}\rangle = 0 \end{array} \right\}. \tag{2.5}$$

Următoarea teoremă conţine condiţii secvenţiale de optim pentru $(P_C)$.

**Teorema 2.1.5** (GRAD A. [62]) *Fie ipotezele* (2.1) *satisfăcute. Un element* $\overline{x} \in \mathcal{A}_{P_C}$ *este o soluţie optimă a problemei* $(P_C)$ *dacă şi numai dacă există două şiruri,*

$$((x_n,p_n,q_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ în } X \times (\operatorname{dom} f) \times C \text{ şi } ((x_n^*,p_n^*,q_n^*))_{n\in\mathbb{N}} \text{ în } X^* \times X^* \times C^+, \tag{2.6}$$

*astfel încât*

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N} : p_n^* \in \partial f(p_n), x_n^* \in \partial(q_n^* \circ g)(x_n), \langle q_n^*, q_n\rangle = 0; \\ x_n \to \overline{x}, p_n \to \overline{x}, g(x_n) + q_n \to 0, x_n^* + p_n^* \to 0; \\ \langle p_n^*, p_n - x_n\rangle - \langle q_n^*, g(x_n)\rangle \to 0, f(p_n) - f(\overline{x}) \to 0. \end{array} \right. \tag{2.7}$$

**Lema 2.1.6** *Fie ipotezele* (2.1) *satisfăcute, iar* $\overline{x} \in \mathcal{A}_{P_C}$. *Mai mult, fie şirurile* $((x_n,p_n,q_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *în* $X \times (\operatorname{dom} f) \times C$ *şi* $((x_n^*,p_n^*,q_n^*))_{n\in\mathbb{N}}$ *în* $X^* \times X^* \times C^+$ *astfel încât*

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N} : p_n^* \in \partial f(p_n), x_n^* \in \partial(q_n^* \circ g)(x_n); \\ x_n \to \overline{x}, p_n \to \overline{x}, x_n^* + p_n^* \to 0. \end{array} \right.$$

*Dacă şirurile* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *şi* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sunt definite prin*

$$a_n := \langle p_n^*, p_n - x_n\rangle - \langle q_n^*, g(x_n)\rangle, b_n := \langle p_n^*, p_n - \overline{x}\rangle - \langle q_n^*, g(\overline{x})\rangle \text{ şi}$$

$$c_n := -\langle p_n^*, x_n - \overline{x}\rangle - \langle q_n^*, g(x_n) - g(\overline{x})\rangle,$$

*atunci*

$$a_n \to 0 \text{ dacă şi numai dacă } b_n \to 0 \text{ şi } c_n \to 0.$$

Aplicând Lema 2.1.6, obţinem următoarea formulare echivalentă a Teoremei 2.1.5.

**Teorema 2.1.7** *Fie ipotezele* (2.1) *satisfăcute. Un element* $\overline{x} \in \mathcal{A}_{P_C}$ *este o soluţie optimă a problemei* $(P_C)$ *dacă şi numai dacă există două şiruri,*

$$((x_n,p_n,q_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ în } X \times (\operatorname{dom} f) \times C \text{ şi } ((x_n^*,p_n^*,q_n^*))_{n\in\mathbb{N}} \text{ în } X^* \times X^* \times C^+,$$

*astfel încât*

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N} : p_n^* \in \partial f(p_n), x_n^* \in \partial(q_n^* \circ g)(x_n), \langle q_n^*, q_n\rangle = 0; \\ x_n \to \overline{x}, p_n \to \overline{x}, g(x_n) + q_n \to 0, x_n^* + p_n^* \to 0; \\ \langle p_n^*, p_n - \overline{x}\rangle - \langle q_n^*, g(\overline{x})\rangle \to 0, \langle p_n^*, x_n - \overline{x}\rangle + \langle q_n^*, g(x_n) - g(\overline{x})\rangle \to 0; \\ f(p_n) - f(\overline{x}) \to 0. \end{array} \right. \tag{2.8}$$

În continuare analizăm problema de optimizare convexă cu restricţii exprimate cu o mulţime convexă şi un con convex

$$(P_{CM}) \qquad \inf_{\substack{x\in M\\ g(x)\in -C}} f(x).$$

În acest scop, presupunem îndeplinite ipotezele (2.1), cât şi următoarele prezumţii:

$$(2.9) \qquad \begin{cases} M\subseteq X \text{ este o mulţime nevidă, închisă şi convexă;}\\ M\cap(\operatorname{dom} f)\cap g^{-1}(-C)\neq\emptyset. \end{cases}$$

Notăm mulţimea soluţiilor admisibile ale lui $(P_{CM})$ prin

$$\mathcal{A}_{P_{CM}} := M\cap(\operatorname{dom} f)\cap g^{-1}(-C).$$

Problema $(P_{CM})$ poate fi considerată a fi de tip $(P_C)$, după cum se argumentează în cele ce urmează.

Considerăm funcţia $\tilde{f}: X\to\overline{\mathbb{R}}$ definită prin $\tilde{f} := f+\delta_M$, i.e.

$$(2.10) \qquad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dacă } x\in M\\ +\infty & \text{în rest.}\end{cases}$$

**Lema 2.1.8** *Fie ipotezele* (2.1) *şi* (2.9) *satisfăcute. Atunci funcţia* $\tilde{f}$ *este proprie, convexă şi inferior semicontinuă.*

Problema $(P_{CM})$ poate fi rescrisă ca

$$(2.11) \qquad \inf_{g(x)\in -C} \tilde{f}(x).$$

Aplicând Teorema 2.1.5 acestei probleme, obţinem condiţii secvenţiale de optim pentru $(P_{CM})$.

**Teorema 2.1.9** (Grad A. [62]) *Fie ipotezele* (2.1) *şi* (2.9) *satisfăcute. Un element* $\overline{x}\in\mathcal{A}_{P_{CM}}$ *este o soluţie optimă a problemei* $(P_{CM})$ *dacă şi numai dacă există două şiruri,*

$$((x_n,p_n,q_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ în } X\times(\operatorname{dom} f\cap M)\times C \text{ şi } ((x_n^*,p_n^*,q_n^*))_{n\in\mathbb{N}} \text{ în } X^*\times X^*\times C^+,$$

*astfel încât*

$$(2.12) \qquad \begin{cases} \forall n\in\mathbb{N}: p_n^*\in\partial(f+\delta_M)(p_n), x_n^*\in\partial(q_n^*\circ g)(x_n), \langle q_n^*,q_n\rangle = 0;\\ x_n\to\overline{x}, p_n\to\overline{x}, g(x_n)+q_n\to 0, x_n^*+p_n^*\to 0;\\ \langle p_n^*, p_n-x_n\rangle - \langle q_n^*, g(x_n)\rangle\to 0, f(p_n)-f(\overline{x})\to 0. \end{cases}$$

Teorema 2.1.9 are un număr mai mic de şiruri în exprimarea condiţiilor secvenţiale, în contrast cu Teoremele 4.10 şi 4.11 din Boţ R. I., Csetnek E. R. şi Wanka G. [17], în timp ce funcţia $g$ este $C$-epi închisă, nu doar continuă. Dacă considerăm $\operatorname{dom} f = X$ şi funcţiile $f$ şi $g$ continue, atunci sistemul (2.12) ne dă o condiţie secvenţială a multiplicatorilor lui Lagrange pentru $(P_{CM})$. În acest caz particular obţinem o îmbunătăţire a Teoremei 4.1 din Thibault L. [114], după cum reiese din Teorema 2.1.21.

Folosind Teorema 2.1.7 obţinem următoarea formulare echivalentă a Teoremei 2.1.9.

**Teorema 2.1.10** *Fie ipotezele* (2.1) *şi* (2.9) *satisfăcute. Un element* $\overline{x} \in \mathcal{A}_{P_{CM}}$ *este o soluţie optimă a problemei* $(P_{CM})$ *dacă şi numai dacă există două şiruri,*

$$((x_n, p_n, q_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ în } X \times (\operatorname{dom} f \cap M) \times C \text{ şi } ((x_n^*, p_n^*, q_n^*))_{n\in\mathbb{N}} \text{ în } X^* \times X^* \times C^+,$$

*astfel încât*

$$\left\{\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N} : p_n^* \in \partial(f + \delta_M)(p_n), x_n^* \in \partial(q_n^* \circ g)(x_n), \langle q_n^*, q_n\rangle = 0; \\ x_n \to \overline{x}, p_n \to \overline{x}, g(x_n) + q_n \to 0, x_n^* + p_n^* \to 0; \\ \langle p_n^*, p_n - \overline{x}\rangle - \langle q_n^*, g(\overline{x})\rangle \to 0, \langle p_n^*, x_n - \overline{x}\rangle + \langle q_n^*, g(x_n) - g(\overline{x})\rangle \to 0, \\ f(p_n) - f(\overline{x}) \to 0. \end{array}\right. \tag{2.13}$$

### 2.1.2 Probleme de optimizare convexă compusă

În această subsecţiune prezentăm rezultate privind condiţii secvenţiale de optim pentru următoarea problemă de optimizare sclară convexă compusă, cu restricţii exprimate cu o mulţime convexă şi un con convex:

$$(P_{CM}^{s\circ f}) \qquad \inf_{\substack{x\in M,\\ g(x)\in -C}} (s \circ f)(x),$$

considerată sub ipotezele

$$\left\{\begin{array}{l} X \text{ este un spaţiu Banach reflexiv}, Y \text{ şi } Z \text{ sunt spaţii Banach;} \\ K \subseteq Y \text{ şi } C \subseteq Z \text{ sunt conuri nevide şi convexe;} \\ M \subseteq X \text{ este o mulţime nevidă, închisă şi convexă;} \\ f : X \to Y^\bullet \text{ este o funcţie proprie şi } K\text{-convexă;} \\ g : X \to Z^\bullet \text{ este o funcţie proprie şi } C\text{-convexă;} \\ s : Y^\bullet \to \overline{\mathbb{R}} \text{ este o funcţie proprie, convexă, inferior semicontinuă,} \\ \qquad\qquad \text{şi } K\text{-crescătoare cu } s(\infty_Y) = +\infty; \\ \{x \in M \cap (\operatorname{dom} f) \cap g^{-1}(-C) : f(x) \in \operatorname{dom} s\} \neq \emptyset. \end{array}\right. \tag{2.14}$$

Facem următoarea notaţie:

$$\mathcal{A}_{s\circ f} := \{x \in M \cap (\operatorname{dom} f) \cap g^{-1}(-C) : f(x) \in \operatorname{dom} s\}.$$

Este de remarcat că, în ipotezele (2.14), avem $s^*(y^*) = +\infty$ pentru orice $y^* \notin K^+$, deoarece $s$ este o funcţie $K$-crescătoare pe $Y$.

#### Cazul în care $f$ este stea $K$-inferior semicontinuă

Formulăm condiţii secvenţiale de optim pentru $(P_{CM}^{s\circ f})$, presupunând că sunt îndeplinite ipotezele (2.14), cât şi următoarele prezumţii:

$$\left\{\begin{array}{l} f \text{ este stea } K\text{-inferior semicontinuă;} \\ C \text{ este închisă}, g \text{ este } C\text{-epi închisă.} \end{array}\right. \tag{2.15}$$

Considerăm funcţia perturbatoare $\Phi_{s\circ f} : X \times Y \times Z \to \overline{\mathbb{R}}$ definită prin

$$\Phi_{s\circ f}(x,y,z) := \begin{cases} s(f(x)+y) & \text{dacă } x \in M, g(x) - z \in -C \\ +\infty & \text{în rest.} \end{cases} \tag{2.16}$$

**Lema 2.1.11** (Boţ R. I., Grad A., Wanka G. [22]) *Fie ipotezele* (2.14) *şi* (2.15) *satisfăcute. Atunci funcţia* $\Phi_{s\circ f}$ *este proprie, convexă şi inferior semicontinuă. Mai mult, este adevărat că*

$$\operatorname{dom} \Phi_{s\circ f}(\cdot, 0, 0) = \mathcal{A}_{s\circ f}, \tag{2.17}$$

*şi, în consecinţă, următoarea inegalitate este validă:*

$$\inf_{x\in X} \Phi_{s\circ f}(x,0,0) < +\infty. \tag{2.18}$$

**Lema 2.1.12** *Fie ipotezele* (2.14) *şi* (2.15) *satisfăcute. Dacă* $(\overline{x}, \overline{p}, \overline{q}) \in \operatorname{dom} \Phi_{s\circ f}$, *atunci*

$$\partial\Phi_{s\circ f}(\overline{x},\overline{p},\overline{q}) = \left\{ \begin{array}{l} (x^*, p^*, -q^*) \in X^* \times K^+ \times -C^+ : \\ x^* \in \partial\left((p^* \circ f) + (q^* \circ g) + \delta_M\right)(\overline{x}), \\ p^* \in \partial s\left(f(\overline{x}) + \overline{p}\right), \langle q^*, g(\overline{x}) - \overline{q}\rangle = 0 \end{array} \right\}. \tag{2.19}$$

Următoarea teoremă prezintă condiţii secvenţiale de optim pentru $(P^{s\circ f}_{CM})$.

**Teorema 2.1.13** *Fie ipotezele* (2.14) *şi* (2.15) *satisfăcute. Un element* $\overline{x} \in \mathcal{A}_{s\circ f}$ *este o soluţie optimă a problemei* $(P^{s\circ f}_{CM})$ *dacă şi numai dacă există două şiruri,*

$$((x_n, y_n, z_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ în } (M \cap \operatorname{dom} f) \times (\operatorname{dom} s) \times (-C) \text{ şi } ((x_n^*, y_n^*, z_n^*))_{n\in\mathbb{N}} \text{ în } X^* \times K^+ \times C^+,$$

*astfel încât*

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} : x_n^* \in \partial\left((y_n^* \circ f) + (z_n^* \circ g) + \delta_M\right)(x_n), y_n^* \in \partial s(y_n), \langle z_n^*, z_n\rangle = 0; \\ x_n \to \overline{x}, y_n - f(x_n) \to 0, z_n - g(x_n) \to 0, x_n^* \to 0; \\ \langle y_n^*, y_n - f(x_n)\rangle - \langle z_n^*, g(x_n)\rangle \to 0, s(y_n) - s(f(\overline{x})) \to 0. \end{cases} \tag{2.20}$$

**Lema 2.1.14** *Fie ipotezele* (2.14) *şi* (2.15) *satisfăcute, iar* $\overline{x} \in \mathcal{A}_{s\circ f}$. *Considerăm două şiruri,* $((x_n, y_n, z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *în* $(M \cap \operatorname{dom} f) \times (\operatorname{dom} s) \times (-C)$ *şi* $((x_n^*, y_n^*, z_n^*))_{n\in\mathbb{N}}$ *în* $X^* \times K^+ \times C^+$, *astfel încât*

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} : x_n^* \in \partial\left((y_n^* \circ f) + (z_n^* \circ g) + \delta_M\right)(x_n), y_n^* \in \partial s(y_n); \\ x_n \to \overline{x}, x_n^* \to 0, s(y_n) - s(f(\overline{x})) \to 0. \end{cases} \tag{2.21}$$

*Dacă şirurile* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *şi* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sunt definite prin*

$$a_n := \langle y_n^*, y_n - f(x_n)\rangle - \langle z_n^*, g(x_n)\rangle, b_n := \langle y_n^*, y_n - f(\overline{x})\rangle + \langle z_n^*, -g(\overline{x})\rangle, \text{ şi}$$

$$c_n := \langle y_n^*, f(x_n) - f(\overline{x})\rangle + \langle z_n^*, g(x_n) - g(\overline{x})\rangle,$$

*atunci*

$$a_n \to 0 \quad \text{dacă şi numai dacă } b_n \to 0 \text{ şi } c_n \to 0.$$

Folosind Lema 2.1.14, dăm următoarea formulare echivalentă a Teoremei 2.1.13.

**Teorema 2.1.15** *Fie ipotezele* (2.14) *şi* (2.15) *satisfăcute. Un element* $\overline{x} \in \mathcal{A}_{s\circ f}$ *este o soluţie optimă a problemei* $(P_{CM}^{s\circ f})$ *dacă şi numai dacă există două şiruri,*

$$((x_n, y_n, z_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ în } (M \cap \operatorname{dom} f) \times (\operatorname{dom} s) \times (-C) \text{ şi } ((x_n^*, y_n^*, z_n^*))_{n\in\mathbb{N}} \text{ în } X^* \times K^+ \times C^+,$$

*astfel încât*

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} : x_n^* \in \partial\left((y_n^* \circ f) + (z_n^* \circ g) + \delta_M\right)(x_n), y_n^* \in \partial s(y_n), \langle z_n^*, z_n\rangle = 0; \\ x_n \to \overline{x}, y_n - f(x_n) \to 0, z_n - g(x_n) \to 0, x_n^* \to 0; \\ \langle y_n^*, y_n - f(\overline{x})\rangle - \langle z_n^*, g(\overline{x})\rangle \to 0, \\ \langle y_n^*, f(x_n) - f(\overline{x})\rangle + \langle z_n^*, g(x_n) - g(\overline{x})\rangle \to 0, s(y_n) - s(f(\overline{x})) \to 0. \end{cases} \tag{2.22}$$

**Cazul în care $f$ este $K$-epi închisă**

Formulăm condiţii secvenţiale de optim pentru $(P_{CM}^{s\circ f})$, când sunt satisfăcute atât ipotezele (2.14), cât şi următoarele prezumţii:

$$\begin{cases} C \text{ şi } K \text{ sunt închise;} \\ f \text{ este } K\text{-epi închisă;} \\ g \text{ este } C\text{-epi închisă.} \end{cases} \tag{2.23}$$

Folosim următoarea problemă intermediară:

$$(P_{\widetilde{s}}) \qquad \inf_{H(x,y) \leqq_{K\times C}(0,0)} \widetilde{s}(x,y),$$

unde funcţia $\widetilde{s} : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ este definită prin $\widetilde{s}(x,y) := s(y) + \delta_M(x)$ pentru oricare $(x,y) \in X \times Y$. Funcţia $H : X \times Y \to (Y \times Z)^\bullet$, care generează restricţiile lui $(P_{\widetilde{s}})$ este definită prin

$$H(x,y) := (f(x) - y, g(x)) \text{ pentru oricare } (x,y) \in X \times Y.$$

**Lema 2.1.16** (Grad A. [62]) *Fie ipotezele* (2.14) *şi* (2.23) *satisfăcute. Atunci următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

(a) *Funcţia* $\widetilde{s}$ *este proprie, convexă şi inferior semicontinuă.*

(b) *Funcţia* $H$ *este proprie,* $K \times C$*-convexă şi* $K \times C$*-epi închisă.*

(c) $(P_{\widetilde{s}})$ *este o problemă de optimizare de tip* $(P_C)$.

Următoarea lemă precizează o legătură între problemele $(P_{CM}^{s\circ f})$ şi $(P_{\widetilde{s}})$.

**Lema 2.1.17** (Grad A. [62]) *Fie ipotezele* (2.14) *şi* (2.23) *satisfăcute. Atunci următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

(a) *Dacă* $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{dom} \widetilde{s}$ *este o soluţie optimă a lui* $(P_{\widetilde{s}})$, *atunci* $(\overline{x}, f(\overline{x}))$ *este de asemenea o soluţie optimă a lui* $(P_{\widetilde{s}})$.

(b) $\overline{x} \in \mathcal{A}_{s\circ f}$ *este o soluţie optimă a lui* $(P_{CM}^{s\circ f})$ *dacă şi numai dacă* $(\overline{x}, f(\overline{x}))$ *este o soluţie optimă a lui* $(P_{\widetilde{s}})$.

Cu ajutorul Lemei 2.1.17 demonstrăm următorul rezultat, care cuprinde condiţii secvenţiale de optim pentru $(P_{CM}^{s\circ f})$, presupunând că nu numai $g$, dar şi $f$, este o funcţie con-epi închisă.

**Teorema 2.1.18** (Grad A. [62]) *Fie ipotezele* (2.14) *şi* (2.23) *satisfăcute, iar $Y$ fie un spaţiu reflexiv. Un element $\overline{x} \in \mathcal{A}_{s\circ f}$ este soluţie optimă a problemei $(P_{CM}^{s\circ f})$ dacă şi numai dacă există două şiruri,*

$$((x_n, y_n, u_n, v_n, t_n, q_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ în } X \times Y \times M \times (\operatorname{dom} s) \times K \times C$$

*şi*

$$((x_n^*, u_n^*, v_n^*, t_n^*, q_n^*))_{n\in\mathbb{N}} \text{ în } X^* \times X^* \times Y^* \times K^+ \times C^+,$$

*astfel încât*

$$(2.24) \qquad \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} : u_n^* \in N_M(u_n), v_n^* \in \partial s(v_n), x_n^* \in \partial(t_n^* \circ f + q_n^* \circ g)(x_n), \\ \langle t_n^*, t_n\rangle = 0, \langle q_n^*, q_n\rangle = 0; \\ x_n \to \overline{x}, u_n \to \overline{x}, y_n \to f(\overline{x}), v_n \to f(\overline{x}), f(x_n) + t_n \to f(\overline{x}), \\ g(x_n) + q_n \to 0, x_n^* + u_n^* \to 0, -t_n^* + v_n^* \to 0; \\ \langle u_n^*, u_n - x_n\rangle + \langle v_n^*, v_n - y_n\rangle - \langle t_n^*, f(x_n) - y_n\rangle - \langle q_n^*, g(x_n)\rangle \to 0, \\ s(v_n) - s(f(\overline{x})) \to 0. \end{cases}$$

**Observaţia 2.1.19** Sistemul (2.24) conţine de fapt o mulţime de soluţii ale altei probleme de optimizare. Condiţia $u_n^* \in N_M(u_n)$ este echivalentă cu faptul că $u_n$ este soluţia optimă a problemei $\sup_{x\in M}\langle u_n^*, x\rangle$, de aceea $\langle u_n^*, u_n\rangle = \max_{x\in M}\langle u_n^*, x\rangle$. ∎

O versiune îmbunătăţită a Teoremei 2.1.18, din punctul de vedere al şirurilor implicate, se obţine aplicând Teorema 2.1.7.

**Teorema 2.1.20** *Fie ipotezele* (2.14) *şi* (2.23) *satisfăcute, iar $Y$ fie un spaţiu reflexiv. Un element $\overline{x} \in \mathcal{A}_{s\circ f}$ este o soluţie optimă a problemei $(P_{CM}^{s\circ f})$ dacă şi numai dacă există două şiruri,*

$$((x_n, y_n, u_n, v_n, t_n, q_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ în } X \times Y \times M \times (\operatorname{dom} s) \times K \times C$$

*şi*

$$((x_n^*, u_n^*, v_n^*, t_n^*, q_n^*))_{n\in\mathbb{N}} \text{ în } X^* \times X^* \times Y^* \times K^+ \times C^+,$$

*astfel încât*

$$(2.25) \qquad \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} : u_n^* \in N_M(u_n), v_n^* \in \partial s(v_n), x_n^* \in \partial(t_n^* \circ f + q_n^* \circ g)(x_n), \\ \langle t_n^*, t_n\rangle = 0, \langle q_n^*, q_n\rangle = 0; \\ x_n \to \overline{x}, u_n \to \overline{x}, y_n \to f(\overline{x}), v_n \to f(\overline{x}), f(x_n) + t_n \to f(\overline{x}), g(x_n) + q_n \to 0, \\ x_n^* + u_n^* \to 0, -t_n^* + v_n^* \to 0; \\ \langle u_n^*, x_n - \overline{x}\rangle + \langle v_n^*, y_n - f(\overline{x})\rangle + \langle t_n^*, f(x_n) - y_n\rangle + \langle q_n^*, g(x_n) - g(\overline{x})\rangle \to 0, \\ \langle u_n^*, u_n - \overline{x}\rangle + \langle v_n^*, v_n - f(\overline{x})\rangle - \langle q_n^*, g(\overline{x})\rangle \to 0, s(v_n) - s(f(\overline{x})) \to 0. \end{cases}$$

### Cazul în care $f$ şi $g$ sunt continue

Considerăm problema $(P_{CM}^{s\circ f})$ sub ipotezele (2.14), cu următoarele prezumţii suplimentare:

$$(2.26) \qquad \begin{cases} C \text{ este închisă;} \\ \operatorname{dom} f = X \text{ şi } f \text{ este o funcţie continuă;} \\ \operatorname{dom} g = X \text{ şi } g \text{ este o funcţie continuă.} \end{cases}$$

**Teorema 2.1.21** (Boţ R.I., Grad A., Wanka G. [22]) *Fie ipotezele* (2.14) *şi* (2.26) *satisfăcute. Un element* $\overline{x} \in \mathcal{A}_{sof}$ *este o soluţie optimă a problemei* $(P_{CM}^{sof})$ *dacă şi numai dacă există două şiruri,*

$$((x_n, y_n, z_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ în } M \times (\operatorname{dom} s) \times (-C)$$

*şi*

$$((u_n^*, v_n^*, t_n^*, y_n^*, z_n^*))_{n\in\mathbb{N}} \text{ în } X^* \times X^* \times X^* \times K^+ \times C^+,$$

*astfel încât*

$$\text{(2.27)} \qquad \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} : u_n^* \in \partial(y_n^* \circ f)(x_n), v_n^* \in \partial(z_n^* \circ g)(x_n), \\ t_n^* \in N_M(x_n), y_n^* \in \partial s(y_n), \langle z_n^*, z_n\rangle = 0; \\ x_n \to \overline{x}, y_n \to f(\overline{x}), z_n \to g(\overline{x}), u_n^* + v_n^* + t_n^* \to 0; \\ \langle y_n^*, y_n - f(\overline{x})\rangle - \langle z_n^*, g(\overline{x})\rangle \to 0, \\ \langle y_n^*, f(x_n) - f(\overline{x})\rangle + \langle z_n^*, g(x_n) - g(\overline{x})\rangle \to 0, s(y_n) - s(f(\overline{x})) \to 0. \end{cases}$$

**Observaţia 2.1.22** Prezentăm în acest punct rezultatele aferente Teoremei 2.1.20, atunci când se lucrează în ipotezele suplimentare (2.26). Pentru început se remarcă că

$$\partial(t_n^* \circ f + q_n^* \circ g)(x_n) = \partial(t_n^* \circ f)(x_n) + \partial(q_n^* \circ g)(x_n) \text{ pentru oricare } n \in \mathbb{N}.$$

De aceea, sistemul (2.25) poate fi modificat după cum urmează. Fixăm un $n \in \mathbb{N}$ arbitrar. Atunci $x_n^* \in \partial(t_n^* \circ f + q_n^* \circ g)(x_n)$ este echivalent cu existenţa a două funcţionale $a_n^*$ şi $b_n^*$ în $X^*$, astfel încât $x_n^* = a_n^* + b_n^*$, iar $a_n^* \in \partial(t_n^* \circ f)(x_n)$ şi $b_n^* \in \partial(q_n^* \circ g)(x_n)$. Mai mult, din moment ce $x_n \to \overline{x}$, obţinem $f(x_n) \to f(\overline{x})$ şi $g(x_n) \to g(\overline{x})$. De asemenea, $t_n \to 0$ şi $q_n \to -g(\overline{x})$. ∎

**Corolar 2.1.23** (Boţ R.I., Grad A., Wanka G. [22]) *Fie ipotezele* (2.14) *şi* (2.26) *satisfăcute, iar* $g \equiv 0$. *Un element* $\overline{x} \in M$ *este o soluţie optimă a problemei*

$$\text{(2.28)} \qquad \inf_{x\in M} (s \circ f)(x)$$

*dacă şi numai dacă există două şiruri,*

$$((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ în } M \times (\operatorname{dom} s) \text{ şi } ((u_n^*, t_n^*, y_n^*))_{n\in\mathbb{N}} \text{ în } X^* \times X^* \times K^+,$$

*astfel încât*

$$\text{(2.29)} \qquad \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} : u_n^* \in \partial(y_n^* \circ f)(x_n), t_n^* \in N_M(x_n), y_n^* \in \partial s(y_n); \\ x_n \to \overline{x}, y_n \to f(\overline{x}), u_n^* + t_n^* \to 0; \\ \langle y_n^*, y_n - f(\overline{x})\rangle \to 0, \langle y_n^*, f(x_n) - f(\overline{x})\rangle \to 0, s(y_n) - s(f(\overline{x})) \to 0. \end{cases}$$

### 2.1.3 O regulă secvenţială a multiplicatorilor lui Lagrange

Problema compusă $(P_{CM}^{sof})$ poate fi simplificată prin considerarea lui $Y := X$ şi prin înlocuirea lui $f : X \to X$ cu funcţia identică pe $X$, i.e. $f(x) := x$ pentru oricare $x \in X$, iar $K := \{0\}$. Folosind din nou Teorema 2.1.21, introducem condiţii secvenţiale de optim pentru problema convexă cu restricţii exprimate cu o mulţime convexă şi un con convex

$$(P_{soid}) \qquad \inf_{\substack{x\in M \\ g(x)\in -C}} s(x),$$

în următoarele ipoteze:

$$(2.30) \qquad \begin{cases} X \text{ este un spaţiu Banach reflexiv, } Z \text{ este un spaţiu Banach;} \\ C \subseteq Z \text{ este un con nevid, închis şi convex;} \\ M \subseteq X \text{ este o mulţime nevidă, închisă şi convexă;} \\ g : X \to Z \text{ este o funcţie continuă şi } C\text{-convexă;} \\ s : X \to \overline{\mathbb{R}} \text{ este o funcţie proprie, convexă şi inferior semicontinuă;} \\ M \cap g^{-1}(-C) \cap (\operatorname{dom} s) \neq \emptyset. \end{cases}$$

Folosim notaţia $\mathcal{A}_{soid} := M \cap g^{-1}(-C) \cap \operatorname{dom} s$.

În continuare prezentăm o regulă secvenţială a multiplicatorilor lui Lagrange, care este o rafinare a unui rezultat din Boţ R. I., Csetnek E. R. şi Wanka G. [17, Teorema 4.10] şi care se demonstrează cu ajutorul Teoremei 2.1.9.

**Teorema 2.1.24** (Boţ R. I., Grad A., Wanka G. [22]) *Fie ipotezele* (2.30) *satisfăcute. Un element* $\overline{x} \in \mathcal{A}_{soid}$ *este o soluţie optimă a problemei* $(P_{soid})$ *dacă şi numai dacă există două şiruri,*

$$((x_n, y_n, z_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ în } M \times (\operatorname{dom} s) \times (-C) \text{ şi } ((v_n^*, t_n^*, y_n^*, z_n^*))_{n\in\mathbb{N}} \text{ în } X^* \times X^* \times X^* \times C^+,$$

*astfel încât*

$$(2.31) \qquad \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} : v_n^* \in \partial(z_n^* \circ g)(x_n), t_n^* \in N_M(x_n), y_n^* \in \partial s(y_n), \langle z_n^*, z_n\rangle = 0; \\ x_n \to \overline{x}, y_n \to \overline{x}, z_n \to g(\overline{x}), y_n^* + v_n^* + t_n^* \to 0, \langle y_n^*, y_n - \overline{x}\rangle - \langle z_n^*, g(\overline{x})\rangle \to 0, \\ \langle y_n^*, x_n - \overline{x}\rangle + \langle z_n^*, g(x_n) - g(\overline{x})\rangle \to 0, s(y_n) - s(\overline{x}) \to 0. \end{cases}$$

**Observaţia 2.1.25** O teoremă similară poate fi obţinută prin particularizarea Teoremei 2.1.10. ∎

**Observaţia 2.1.26** Conform Rockafellar R. T. [103, Teorema 20], pentru problema scalară de optimizare $(P_{soid})$, condiţiile de optim Karush-Kuhn-Tucker, denumite de acum înainte condiţiile KKT, sunt

$$\overline{x} \in \mathcal{A}_{soid} \text{ este o soluţie a problemei } (P_{soid}) \text{ dacă şi numai dacă } 0 \in \left(s + \delta_{\{u\in M: g(u)\in -C\}}\right)(\overline{x}).$$

Considerând arbitrar $x \in \mathcal{A}_{soid}$, următoarele afimaţii sunt valide:

$$\begin{aligned} \partial\left(s + \delta_{\{u\in M: g(u)\in -C\}}\right)(x) &\supseteq \bigcup_{\substack{z^*\in C^+,\\ (z^*\circ g)(x)=0}} \partial(s + (z^*\circ g) + \delta_M)(x) \\ &\supseteq \partial s(x) + \bigcup_{\substack{z^*\in C^+,\\ (z^*\circ g)(x)=0}} \partial((z^*\circ g) + \delta_M)(x). \end{aligned}$$

Deci, pentru un element $\overline{x} \in \mathcal{A}_{soid}$ astfel încât

$$0 \in \bigcup_{\substack{z^*\in C^+,\\ (z^*\circ g)(\overline{x})=0}} \partial(s + (z^*\circ g) + \delta_M)(\overline{x}) \text{ sau } 0 \in \partial s(\overline{x}) + \bigcup_{\substack{z^*\in C^+,\\ (z^*\circ g)(\overline{x})=0}} \partial((z^*\circ g) + \delta_M)(\overline{x}),$$

rezultă că $\overline{x}$ este soluţie optimă a problemei $(P_{soid})$. ∎

**Exemplul 2.1.27** (Boţ R. I., Grad A., Wanka G. [22]) Considerăm spaţiile $X := \mathbb{R}$, $Z := \mathbb{R}^2$, şi mulţimile $C := \mathbb{R}^2_+$, $M := \mathbb{R}$. Definim funcţiile $s : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ prin

$$s(x) := -\sqrt{x} + \delta_{\mathbb{R}_+}(x) \text{ şi } g(x) := (-1 - x, x) \text{ pentru oricare } x \in \mathbb{R}.$$

Atunci funcţia $s$ este proprie, convexă şi inferior semicontinuă; funcţia $g$ este $\mathbb{R}^2_+$-convexă şi continuă, iar $M \cap g^{-1}(-C) \cap (\operatorname{dom} s) \neq \emptyset$. Elementul $\overline{x} := 0$ este (unica) soluţie optimă a problemei $(P_{s \circ id})$. Din moment ce

$$\bigcup_{\substack{z^* \in C^+, \\ (z^* \circ g)(0) = 0}} \partial(s + (z^* \circ g) + \delta_M)(0) = \partial s(0) + \bigcup_{\substack{z^* \in C^+, \\ (z^* \circ g)(0) = 0}} \partial((z^* \circ g) + \delta_M)(0) = \emptyset,$$

condiţiile clasice de optim KKT nu sunt îndeplinite. Însă, se demonstrează că, condiţiile secvenţiale din (2.31) sunt satisfăcute. ∎

O generalizare a cunoscutei leme a lui Pshenichnyi-Rockafellar poate fi dată considerând în Teorema 2.1.24 doar restricţii geometrice.

**Teorema 2.1.28** (Boţ R. I., Grad A., Wanka G. [22]) *Fie ipotezele* (2.30) *satisfăcute. Un element* $\overline{x} \in \mathcal{A}_{s \circ id}$ *este o soluţie optimă a problemei*

$$\inf_{x \in M} s(x) \tag{2.32}$$

*dacă şi numai dacă există două şiruri,*

$$((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}} \text{ în } M \times (\operatorname{dom} s) \text{ şi } ((t_n^*, y_n^*,))_{n \in \mathbb{N}} \text{ în } X^* \times X^*,$$

*astfel încât*

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} : y_n^* \in \partial s(y_n), t_n^* \in N_M(x_n); \\ x_n \to \overline{x}, y_n \to \overline{x}, y_n^* + t_n^* \to 0; \\ \langle y_n^*, y_n - \overline{x} \rangle \to 0, \langle y_n^*, x_n - \overline{x} \rangle \to 0, s(y_n) - s(\overline{x}) \to 0. \end{cases} \tag{2.33}$$

Teorema 2.1.28 este o rafinare a Corolarului 4.8 din Boţ R. I., Csetnek E. R. şi Wanka G. [17], şi, în consecinţă, o generalizare a Corolarului 3.5 din Jeyakumar V. şi Wu Z. Y. [83].

## 2.2 Condiţii de regularitate de tip interior cvasi-relativ pentru probleme de optimizare convexă

În acestă secţiune prezentăm teoreme de dualitate tare Lagrange pentru probleme de optimizare convexă, cu restricţii geometrice şi afine, atingând două obiective: primul fiind acela de a corecta anumite afirmaţii din lucrarea lui Daniele P. şi Giuffré S. [45], iar al doilea fiind acela de a completa realizările din Boţ R. I., Csetnek E. R. şi Moldovan A. [16]. Rezultatele proprii au fost publicate în lucrarea Grad A. [64].

### 2.2.1 Teoreme tari de dualitate Lagrange

Problema primală considerată este

$$(P_{CMA}) \qquad \inf_{\substack{x\in M\\ g(x)\in -C\\ h(x)=0}} f(x),$$

iar duala sa Lagrange este

$$(D^L_{CMA}) \qquad \sup_{z^*\in C^+, w^*\in W^*} \inf_{x\in M} \left\{ f(x) + \langle z^*, g(x)\rangle + \langle w^*, h(x)\rangle \right\}.$$

Ipotezele generale sunt descrise în cele ce urmează:

$$(2.34) \qquad \begin{cases} X \text{ este un spaţiu vectorial, } Z \text{ şi } W \text{ sunt spaţii local convexe separate;}\\ M \subseteq X \text{ este o mulţime nevidă convexă}, C \subseteq Z \text{ este un con convex;}\\ f: M \to \mathbb{R} \text{ este o funcţie convexă;}\\ g: M \to Z \text{ este o funcţie } C\text{-convexă;}\\ h: X \to W \text{ este o funcţie afină;}\\ \{x \in M : g(x) \in -C, h(x) = 0\} \neq \emptyset. \end{cases}$$

Introducem următoarea notaţie:

$$\mathcal{A}_{CMA} := \{x \in M : g(x) \in -C, h(x) = 0\}.$$

**Observaţia 2.2.1** Folosind ipotezele (2.34), remarcăm că mulţimile

$$g(M) + C, h(M), (g, h)(M) + C \times \{0\} \text{ şi } (f, g, h)(M) + \mathbb{R}_+ \times C \times \{0\}$$

sunt convexe. ■

**Teorema 2.2.2** *Valorile optime $v(P_{CMA})$ şi $v(D^L_{CMA})$ ale problemelor $(P_{CMA})$ şi $(D^L_{CMA})$, satisfac inegalitatea*

$$v(D^L_{CMA}) \leq v(P_{CMA}).$$

**Observaţia 2.2.3** Pentru cazul particular în care spaţiile $X$, $Z$ şi $W$ sunt normate, Daniele P. şi Giuffré S. [45, Teorema 3.1] au stabilit o teoremă de dualitate tare pentru perechea $(P_{CM}, D^L_{CMA})$. După cum au remarcat Boţ R. I., Csetnek E. R. şi Moldovan A. [16], teorema amintită prezintă doua probleme majore:

**Problema 1**: Apare o greşeală în demonstraţie.

**Problema 2**: Aşa-numita **Assumption S** este din start o condiţie necesară şi suficientă pentru dualitatea tare, astfel, celelalte ipoteze ale Teoremei 3.1 sunt de prisos. ■

Dacă $v(P_{CMA}) = -\infty$, atunci avem automat dualitate tare. De aceea, pentru restul secţiunii presupunem că $v(P_{CMA}) \in \mathbb{R}$.

Definim următoarea mulţime:

$$\mathcal{E} := (v(P_{CMA}), 0, 0) - (f, g, h)(M) - \mathbb{R}_+ \times C \times \{0\},$$

unde $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$. Se remarcă faptul că $-\mathcal{E}$ este o mulţime asemănătoare cu extensia conică folosită de Giannessi F. [55] în teoria analizei cu ajutorul spaţiului imagine.

**Lema 2.2.4** *Fie ipotezele* (2.34) *satisfăcute. Atunci următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

(a) $\mathcal{E}$ *este o mulţime convexă.*

(b) $(P_{CMA})$ *are o soluţie optimă dacă şi numai dacă* $(0,0,0) \in \mathcal{E}$.

(c) *Dacă* $(P_{CMA})$ *are o soluţie optimă, atunci* $\operatorname{co}(\mathcal{E} \cup \{(0,0,0)\}) = \operatorname{co}\mathcal{E} = \mathcal{E}$.

**Lema 2.2.5** (Grad A. [64]) *Fie ipotezele* (2.34) *satisfăcute. Atunci următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

(a) *Dacă* $x \in M$ *şi* $c \in C$ *satisfac* $(g(x)+c, h(x)) \in \operatorname{qri}((g,h)(M) + C \times \{0\})$, *atunci*

$$(v(P_{CMA}) - f(x) - t, -g(x) - c, -h(x)) \in \operatorname{qri}\mathcal{E} \text{ pentru orice } t > 0.$$

(b) *Dacă* $(r_0, z_0, w_0) \in \operatorname{qri}\mathcal{E}$, *atunci* $(-z_0, -w_0) \in \operatorname{qri}((g,h)(M) + C \times \{0\})$.

(c) $\operatorname{qri}\mathcal{E} \neq \emptyset$ *dacă şi numai dacă* $\operatorname{qri}((g,h)(M) + C \times \{0\}) \neq \emptyset$.

Principalul rezultat al acestei secţiuni este următoarea **teoremă de dualitate tare** pentru $(P_{CMA})$ şi $(D^L_{CMA})$.

**Teorema 2.2.6** (Grad A. [64]) *Fie ipotezele* (2.34) *satisfăcute. Presupunem de asemenea că*

$$(0,0) \in \operatorname{qi}((g,h)(M) + C \times \{0\}) \tag{2.35}$$

*şi*

$$(0,0,0) \notin \operatorname{qri}\operatorname{co}(\mathcal{E} \cup \{(0,0,0)\}). \tag{2.36}$$

*Atunci între* $(P_{CMA})$ *şi* $(D^L_{CMA})$ *are loc dualitate tare, i.e.* $v(P_{CMA}) = v(D^L_{CMA})$ *şi* $(D^L_{CMA})$ *are o soluţie optimă.*

Când problema primală admite o soluţie optimă, se deduce următorul rezultat.

**Corolar 2.2.7** (Grad A. [64]) *Fie ipotezele* (2.34) *satisfăcute, iar* $\overline{x} \in \mathcal{A}_{CMA}$ *fie o soluţie optimă a problemei* $(P_{CMA})$. *Presupunem de asemenea că condiţia* (2.35) *este satisfăcută şi* $(0,0,0) \notin \operatorname{qri}(\mathcal{E})$. *Atunci următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

(a) $v(P_{CMA}) = v(D^L_{CMA})$ *şi problema* $(D^L_{CMA})$ *are o soluţie optimă.*

(b) *Pentru fiecare soluţie optimă* $(z^*, w^*) \in C^+ \times W^*$ *a lui* $(D^L_{CMA})$, *egalitatea* $\langle z^*, g(\overline{x})\rangle = 0$ *este validă.*

**Observaţia 2.2.8** Subliniem faptul că

$$(0,0,0) \in \operatorname{qri}\mathcal{E} \Longrightarrow (0,0) \in \operatorname{qri}((g,h)(M) + C \times \{0\}),$$

ceea ce reprezintă un caz particular al Lemei 2.2.5 (b), şi că

$$(0,0,0) \in \operatorname{qi}\mathcal{E} \Longrightarrow (0,0) \in \operatorname{qi}((g,h)(M) + C \times \{0\}).$$

Totuşi, este posibil ca $(0,0) \in \operatorname{qi}((g,h)(M) + C \times \{0\})$ şi $(0,0,0) \notin \operatorname{qi}\mathcal{E}$. ∎

Următoarea propoziţie conţine o formulare echivalentă a condiţiei (2.36).

**Propoziţia 2.2.9** (Grad A. [64]) *Fie ipotezele* (2.34) *şi condiţia* (2.35) *satisfăcute. Atunci*

$$(0,0,0) \in \operatorname{qri} \operatorname{co}(\mathcal{E} \cup \{(0,0,0)\}) \textit{ dacă şi numai dacă } (0,0,0) \in \operatorname{qi} \operatorname{co}(\mathcal{E} \cup \{(0,0,0)\}).$$

**Observaţia 2.2.10** Dacă condiţiile (2.34) şi (2.35) sunt satisfăcute, atunci în Teorema 2.2.6 condiţia (2.36) poate fi înlocuită cu formularea echivalentă $(0,0,0) \notin \operatorname{qi} \operatorname{co}(\mathcal{E} \cup \{(0,0,0)\})$, în timp ce condiţia $(0,0,0) \notin \operatorname{qri} \mathcal{E}$ din Corolarul 2.2.7 poate fi înlocuită cu $(0,0,0) \notin \operatorname{qi} \mathcal{E}$. ∎

În continuare oferim condiţii suficiente care asigură (2.35).

**Lema 2.2.11** (Grad A. [64]) *Fie ipotezele* (2.34) *satisfăcute şi fie* $x_0 \in M$ *un element astfel încât*

(2.37) $$g(x_0) \in -\operatorname{qri}(C) \textit{ şi } h(x_0) = 0.$$

*Mai mult, presupunem că*

(2.38) $$0 \in \operatorname{qi}(C - C) \textit{ (sau echivalent } \operatorname{cl}(C - C) = Z\textit{)}$$

*şi*

(2.39) $$0 \in \operatorname{qi}(h(M)).$$

*Atunci* $(0,0) \in \operatorname{qi}((g,h)(M) + C \times \{0\})$.

**Observaţia 2.2.12** Conform Propoziţiei 1.1.7, condiţia $0 \in \operatorname{qi} h(M)$ din Lema 2.2.11 poate fi înlocuită cu $0 \in \operatorname{qri} h(M)$ şi $0 \in \operatorname{qi}(h(M) - h(M))$. ∎

Folosind Lema 2.2.11, deducem din Teorema 2.2.6 şi Corolarul 2.2.7 următoarea teoremă de dualitate tare, şi corolarul corespunzător ei, în ipoteze mai tari. Totuşi, în situaţii practice, aceste ipoteze pot fi verificate mai uşor.

**Teorema 2.2.13** (Grad A. [64]) *Fie ipotezele* (2.34) *satisfăcute. Presupunem că există un* $x_0 \in M$ *astfel încât* (2.37) *este satisfăcută. Mai mult, fie* (2.36), (2.38) *şi* (2.39) *valide. Atunci între* $(P_{CMA})$ *şi* $(D^L_{CMA})$ *are loc dualitate tare, i.e.* $v(P_{CMA}) = v(D^L_{CMA})$ *şi* $(D^L_{CMA})$ *are o soluţie optimă.*

**Corolar 2.2.14** (Grad A. [64]) *Fie ipotezele* (2.34) *satisfăcute, fie* $\overline{x} \in \mathcal{A}_{CMA}$ *o soluţie optimă a problemei* $(P_{CMA})$, *şi fie* $x_0 \in M$ *astfel încât* (2.37) *este satisfăcută. Mai mult, fie* (2.38) *şi* (2.39) *valide, şi fie* $(0,0,0) \notin \operatorname{qri}(\mathcal{E})$. *Atunci următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

(a) $v(P_{CMA}) = v(D^L_{CMA})$ *şi* $(D^L_{CMA})$ *are cel puţin o soluţie optimă.*
(b) *Pentru fiecare soluţie optimă* $(z^*, w^*) \in C^+ \times W^*$ *a lui* $(D^L_{CMA})$, *egalitatea* $\langle z^*, g(\overline{x}) \rangle = 0$ *este validă.*

**Observaţia 2.2.15** Dacă $M$ este o mulţime afină, atunci $h(M)$ este tot afină şi, în consecinţă, rezultă că $h(M) = \operatorname{qri} h(M)$. În această situaţie relaţia (2.39) poate fi modificată în $\operatorname{qi} h(M) \neq \emptyset$.

Pe de altă parte, ipoteza (2.39) poate fi înlocuită cu $0 \in \operatorname{qi}(h(M) - h(M))$. ∎

În următorul rezultat precizăm condiţii suficiente pentru (2.39).

**Lema 2.2.16** (GRAD A. [64]) *Fie ipotezele* (2.34) *satisfăcute şi fie* $M$ *o mulţime afină. Atunci*

$$\operatorname{cl} h(M-M) = W \text{ şi } 0 \in h(M) \tag{2.40}$$

*dacă şi numai dacă* $0 \in \operatorname{qi} h(M)$.

**Observaţia 2.2.17** În ipotezele Lemei 2.2.16 se pot obţine, din Teorema 2.2.13 şi Corolarul 2.2.14, teoreme de dualitate tare corespunzătoare. Acestea vor fi nişte rezultate mai slabe, dar în ipotezele lor particulare, sunt mai uşor verficabile în practică. ∎

**Lema 2.2.18** (GRAD A. [64]) *Fie ipotezele* (2.34) *satisfăcute, fie* $X$ *un spaţiu local convex separat, iar* $h$ *continuă. Dacă există* $x_0 \in \operatorname{qri} M$ *astfel încât* $h(x_0) = 0$ *şi* $\operatorname{cl} h(M-M) = W$, *atunci* $0 \in \operatorname{qi} h(M)$.

**Teorema 2.2.19** (GRAD A. [64]) *Fie ipotezele* (2.34) *satisfăcute, fie* $X$ *un spaţiu local convex separat, iar* $h$ *continuă. Fie* $x_0 \in \operatorname{qri} M$ *astfel încât* (2.37) *este satisfăcută. Mai mult, fie* (2.36) *şi* (2.38) *valide şi* $\operatorname{cl} h(M-M) = W$. *Atunci între* $(P_{CMA})$ *şi* $(D^L_{CMA})$ *are loc dualitate tare, i.e.* $v(P_{CMA}) = v(D^L_{CMA})$ *şi* $(D^L_{CMA})$ *are o soluţie optimă.*

**Corolar 2.2.20** (GRAD A. [64]) *Fie ipotezele Teoremei 2.2.19 satisfăcute şi fie* $\overline{x} \in \mathcal{A}_{CMA}$ *o soluţie optimă a problemei* $(P_{CMA})$. *Atunci următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

(a) $v(P_{CMA}) = v(D^L_{CMA})$ *şi* $(D^L_{CMA})$ *are cel puţin o soluţie.*
(b) *Pentru fiecare soluţie optimă* $(z^*, w^*) \in C^+ \times W^*$ *a lui* $(D^L_{CMA})$, *egalitatea* $\langle z^*, g(\overline{x})\rangle = 0$ *este validă.*

Este de remarcat faptul că condiţiile din Corolarul 2.2.20 sunt similare cu cele din Teorema 3.1 din DANIELE P. şi GIUFFRÉ S. [45], dar rezultatul nostru este mai puţin restrictiv şi în acelaşi timp corect.

### 2.2.2 Puncte şa

Funcţia $L : M \times C^+ \times W^* \to \mathbb{R}$, definită prin

$$L(x, z^*, w^*) := f(x) + \langle z^*, g(x)\rangle + \langle w^*, h(x)\rangle \text{ pentru orice } (x, z^*, w^*) \in M \times C^+ \times W^*,$$

se numeşte **funcţie Lagrange** asociată lui $(P_{CMA})$.

Un element $(\overline{x}, \overline{z}^*, \overline{w}^*) \in M \times C^+ \times W^*$ se numeşte **punct şa** al funcţiei Lagrange asociată lui $(P_{CMA})$ dacă

$$\begin{aligned} f(\overline{x}) + \langle z^*, g(\overline{x})\rangle + \langle w^*, h(\overline{x})\rangle &\le f(\overline{x}) + \langle \overline{z}^*, g(\overline{x})\rangle + \langle \overline{w}^*, h(\overline{x})\rangle \le \\ &\le f(x) + \langle \overline{z}^*, g(x)\rangle + \langle \overline{w}^*, h(x)\rangle \end{aligned}$$

pentru orice $(x, z^*, w^*) \in M \times C^+ \times W^*$.

**Teorema 2.2.21** *Fie ipotezele Teoremei 2.2.6 (sau ale Teoremei 2.2.13, sau respectiv ale Teoremei 2.2.19) satisfăcute, iar* $\overline{x} \in \mathcal{A}_{CMA}$. *Atunci* $\overline{x}$ *este o soluţie optimă a problemi* $(P_{CMA})$ *dacă şi numai dacă există* $(\overline{z}^*, \overline{w}^*) \in C^+ \times W^*$ *astfel încât* $(\overline{x}, \overline{z}^*, \overline{w}^*)$ *este un punct şa al funcţiei Lagrange asociată lui* $(P_{CMA})$ *şi egalitatea* $\langle \overline{z}^*, g(\overline{x})\rangle = 0$ *este validă.*

### 2.2.3 O aplicaţie la o problemă de optimizare în $L^2([0,T],\mathbb{R}^2)$

Teoria dezvoltată în Secţiunea 2.2 are o largă arie de aplicabilitate. Vom prezenta o aplicaţie în spaţiul Banach reflexiv $L^2([0,T],\mathbb{R}^m)$, unde $T > 0$ este o constantă reală şi $m \geq 1$ este un număr natural.

Reamintim că în acest spaţiu se poate considera conul convex

$$C_m := \{w \in L^2([0,T],\mathbb{R}^m) : w(t) \geq 0 \text{ a.p.t. în } [0,T]\},$$

pentru care $\operatorname{int} C_m, \operatorname{core} C_m$ şi $\operatorname{sqri} C_m$ sunt vide, dar

$$\operatorname{qri} C_m = \{w \in L^2([0,T],\mathbb{R}^m) : w(t) > 0 \text{ a.p.t. în } [0,T]\}$$

(vezi Borwein J. M. şi Lewis A. S. [9]). Mai mult, egalitatea $C_m - C_m = L^2([0,T],\mathbb{R}^m)$ este validă, iar conul dual lui $C_m$ este chiar $C_m$.

Pentru o lecturare mai uşoară folosim notaţia $\ll \eta, u \gg_m$ pentru valoarea în $u \in L^2([0,T],\mathbb{R}^m)$ a funcţionalei liniare continue $\eta \in (L^2([0,T],\mathbb{R}^m))^* = L^2([0,T],\mathbb{R}^m)$ , adică

$$\ll \eta, u \gg_m = \int_0^T \langle \eta(t), u(t)\rangle dt = \int_0^T \sum_{i=1}^m \eta_i(t) u_i(t) dt.$$

Ipotezele sub care lucrăm, care sunt o particularizare a ipotezelor generale (2.34), sunt descrise în cele ce urmează:

$$\begin{cases} X = M = W := L^2([0,T],\mathbb{R}^2), Z := L^2([0,T],\mathbb{R}); \\ f : L^2([0,T],\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R} \text{ este definită prin } f(u) := \ll \beta, u_1^2 \gg_1; \\ g : L^2([0,T],\mathbb{R}^2) \to L^2([0,T],\mathbb{R}) \text{ este definită prin } g(u) := u_2; \\ h : L^2([0,T],\mathbb{R}^2) \to L^2([0,T],\mathbb{R}^2) \text{ este definită prin } h(u) := \Phi(u) - \rho; \\ \qquad u = (u_1,u_2) \in L^2([0,T],\mathbb{R}^2), \rho = (-1,1); \\ \beta \in L^2([0,T],\mathbb{R}) \text{ cu } \beta(t) \geq 0 \text{ a.p.t. în } [0,T]; \\ \Phi := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{2.41}$$

Atunci $f$ este o funcţie convexă, $g$ este $C$-convexă, iar $h$ este afină. Introducem următoarea notaţie:

$$\mathcal{A}_{eq} := \Big\{ u \in L^2([0,p],\mathbb{R}^2) : u_2 \in -C_1, \Phi u(t) = \rho(t) \text{ a.p.t în } [0,T] \Big\}.$$

Se arată că între problema primală

$$(P_{eq}) \qquad \min_{u \in \mathcal{A}_{eq}} \ll \beta, u_1^2 \gg_1$$

şi duala sa Lagrange

$$(D^L_{eq}) \qquad \sup_{\substack{z^* \in C_1, \\ w^* \in W^*}} \inf_{u \in L^2([0,T],\mathbb{R}^2)} \left\{ \ll \beta, u_1^2 \gg_1 + \ll z^*, g(u) \gg_1 + \ll w^*, \Phi u - \rho \gg_2 \right\},$$

are loc dualitate tare, aplicând Corolarul 2.2.14. Astfel, $v(P_{eq}) = v(D^L_{eq})$, iar $(D^L_{eq})$ are o soluţie optimă. Mai mult, pentru fiecare soluţie optimă $(\overline{z}^*, \overline{w}^*) \in C_1 \times L^2([0,T],\mathbb{R}^2)$ a lui $(D^L_{eq})$, egalitatea $\ll \overline{z}^*, g(\overline{x}) \gg_1 = 0$ este validă.

# Capitolul 3

# Optimizare vectorială

În acest capitol sunt prezentate rezultate originale privind probleme de optimizare vectorială. Ele au fost publicate în lucrările individuale Grad A. [60], [61], [63], [65], şi în lucrările în colaborare Boţ R. I., Dumitru (Grad) A. şi Wanka G. [20], Boţ R. I., Grad A. şi Wanka G. [21], [22].

## 3.1 Condiţii secvenţiale de optim

Această secţiune conţine condiţii secvenţiale de optim pentru probleme de optimizare vectorială, publicate în Grad A. [63] şi Boţ R. I., Grad A. şi Wanka G. [22].

Considerăm problema generală de optimizare vectorială convexă, cu restricţii exprimate cu ajutorul unei mulţimi convexe şi al unui con convex

$$(P^v_{CM}) \qquad \underset{\substack{x\in M\\ g(x)\in -C}}{\text{v-min}}\, f(x),$$

în următoarele ipoteze:

$$(3.1) \qquad \begin{cases} X \text{ este un spaţiu Banach reflexiv}, Y \text{ şi } Z \text{ sunt spaţii Banach;}\\ K \subseteq Y \text{ este un con nevid, punctat şi convex;}\\ C \subseteq Z \text{ este un con nevid, închis şi convex;}\\ M \subseteq X \text{ este o mulţime nevidă, închisă şi convexă;}\\ f : X \to Y^\bullet \text{ este o funcţie proprie şi } K\text{-convexă;}\\ g : X \to Z^\bullet \text{ este o funcţie proprie, } C\text{-convexă şi } C\text{-epi închisă;}\\ (\operatorname{dom} f) \cap (\operatorname{dom} g) \cap M \cap g^{-1}(-C) \neq \emptyset. \end{cases}$$

Notăm mulţimea soluţiilor admisibile ale lui $(P^v_{CM})$ prin

$$\mathcal{A}_{P^v_{CM}} := (\operatorname{dom} f) \cap (\operatorname{dom} g) \cap M \cap g^{-1}(-C).$$

Pentru problema $(P^v_{CM})$ vom opera cu patru noţiuni de optim.

**Definiţia 3.1.1** (Jahn J. [78]) *Fie ipotezele* (3.1) *satisfăcute. Un element $\overline{x} \in \mathcal{A}_{P^v_{CM}}$ se numeşte* ***soluţie Pareto-eficientă*** *a lui $(P^v_{CM})$ dacă pentru orice $x \in \mathcal{A}_{P^v_{CM}}$ care satisface*

$$f(x) \leq_K f(\overline{x}), \ \textit{egalitatea } f(x) = f(\overline{x}) \textit{ este validă.}$$

Considerăm o mulţime nevidă $S$ de funcţii reale, convexe şi $K$-tare crescătoare pe $Y$, i.e.

$$S \subseteq \{s : Y \to \mathbb{R} : s \text{ este convexă şi } K\text{-tare crescătoare}\}.$$

**Definiţia 3.1.2** (Gerstewitz C. [52], Göpfert A., Gerth C. [56]) *Fie ipotezele* (3.1) *satisfăcute. Un element $\overline{x} \in \mathcal{A}_{P_{CM}^v}$ se numeşte **soluţei** $S$-**propriu eficientă** a lui $(P_{CM}^v)$ dacă există o funcţie $s \in S$ astfel încât*

$$s(f(\overline{x})) \leq s(f(x)) \text{ pentru orice } x \in \mathcal{A}_{P_{CM}^v}.$$

**Observaţia 3.1.3** (a) Orice soluţie $S$-propriu eficientă lui $(P_{CM}^v)$ este şi o soluţie optimă a problemei de optimizare scalară

$$\inf_{\substack{x \in M \\ g(x) \in -C}} (s \circ f)(x),$$

care se dovedeşte a fi chiar problema $(P_{CM}^{s \circ f})$ studiată în Secţiunea 2.1.

(b) Fiecare soluţie $S$-propriu eficientă a lui $(P_{CM}^v)$ este în acelaşi timp şi soluţie Pareto-eficientă a lui $(P_{CM}^v)$. ∎

În cazul în care $\operatorname{int} K \neq \emptyset$, vom folosi următoarele două noţiuni de optim.

**Definiţia 3.1.4** (Jahn J. [78]) *Fie ipotezele* (3.1) *satisfăcute, iar* $\operatorname{int} K \neq \emptyset$. *Un element $\overline{x} \in \mathcal{A}_{P_{CM}^v}$ se numeşte **soluţie slab eficientă** a problemei $(P_{CM}^v)$ dacă nu există nici un $x \in \mathcal{A}_{P_{CM}^v}$ astfel încât*

$$f(x) - f(\overline{x}) \in -\operatorname{int} K.$$

Considerăm o mulţime nevidă $T$ de funcţii reale, convexe şi $K$-strict crescătoare pe $Y$, i.e.

$$T \subseteq \{t : Y \to \mathbb{R} : t \text{ este convexă şi } K\text{-strict crescătoare}\}.$$

**Definiţia 3.1.5** *Fie ipotezele* (3.1) *satisfăcute, iar* $\operatorname{int} K \neq \emptyset$. *Un element $\overline{x} \in \mathcal{A}_{P_{CM}^v}$ se numeşte **soluţie** $T$-**slab eficientă** a problemei $(P_{CM}^v)$ dacă există o funcţie $t \in T$ astfel încât*

$$t(f(\overline{x})) \leq t(f(x)) \text{ pentru orice } x \in \mathcal{A}_{P_{CM}^v}.$$

**Observaţia 3.1.6** (a) Oricare soluţie $T$-slab eficientă a problemei $(P_{CM}^v)$ este şi o soluţie optimă a problemei de optimizare scalară

$$\inf_{\substack{x \in M \\ g(x) \in -C}} (t \circ f)(x),$$

care este de fapt o problemă de tip $(P_{CM}^{s \circ f})$ din Secţiunea 2.1.

(b) Fiecare soluţie $T$-slab eficientă a lui $(P_{CM}^v)$ este în acelaşi timp şi o soluţie slab eficientă a lui $(P_{CM}^v)$. ∎

### 3.1.1 Condiţii suficiente

Folosind anumite rezultate din Secţiunea 2.1, stabilim condiţii secvenţiale suficiente de optim pentru soluţii $S$-propriu eficiente şi $T$-slab eficiente ale problemei $(P_{CM}^v)$.

Analizăm pentru început cazul în care $f$ este stea $K$-inferior semicontinuă.

**Teorema 3.1.7** *Considerăm problema* $(P^v_{CM})$ *şi presupunem că sunt satisfăcute ipotezele* (3.1)*, iar* $f$ *este stea* $K$*-inferior semicontinuă. Mai mult, fie* $\overline{x} \in \mathcal{A}_{P^v_{CM}}$*. Dacă există o funcţie inferior semicontinuă* $s \in S$ *şi două şiruri*

$$((x_n, y_n, z_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ în } (M \cap \operatorname{dom}(f)) \times Y \times -C$$

*şi*

$$((x_n^*, y_n^*, z_n^*))_{n\in\mathbb{N}} \text{ în } X^* \times K^+ \times C^+$$

*astfel încât*

$$(3.2) \qquad \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} : x_n^* \in \partial\left((y_n^* \circ f) + (z_n^* \circ g) + \delta_M\right)(x_n), y_n^* \in \partial s(y_n), \langle z_n^*, z_n\rangle = 0; \\ x_n \to \overline{x}, y_n - f(x_n) \to 0, z_n - g(x_n) \to 0, x_n^* \to 0; \\ \langle y_n^*, y_n - f(\overline{x})\rangle - \langle z_n^*, g(\overline{x})\rangle \to 0, \\ \langle y_n^*, f(x_n) - f(\overline{x})\rangle + \langle z_n^*, g(x_n) - g(\overline{x})\rangle \to 0, s(y_n) - s(f(\overline{x})) \to 0, \end{cases}$$

*atunci* $\overline{x}$ *este o soluţie* $S$*-propriu eficientă a problemei* $(P^v_{CM})$ .

Continuăm cu cazul în care $f$ este $K$-epi închisă.

**Teorema 3.1.8** (Grad A. [63]) *Considerăm problema* $(P^v_{CM})$ *şi presupunem că sunt satisfăcute ipotezele* (3.1)*,* $Y$ *este reflexiv,* $K$ *este închis, iar* $f$ *este* $K$*-epi închisă. Mai mult, fie* $\overline{x} \in \mathcal{A}_{P^v_{CM}}$*. Dacă există o funcţie inferior semicontinuă* $t \in T$ *şi două şiruri*

$$((x_n, y_n, u_n, v_n, t_n, q_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ în } X \times Y \times M \times Y \times K \times C$$

*şi*

$$((x_n^*, u_n^*, v_n^*, t_n^*, q_n^*))_{n\in\mathbb{N}} \text{ în } X^* \times X^* \times Y^* \times K^+ \times C^+$$

*astfel încât*

$$(3.3) \qquad \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} : u_n^* \in N_M(u_n), v_n^* \in \partial t(v_n), x_n^* \in \partial((t_n^* \circ f) + (q_n^* \circ g))(x_n), \\ \langle t_n^*, t_n\rangle = 0, \langle q_n^*, q_n\rangle = 0; \\ x_n \to \overline{x}, u_n \to \overline{x}, y_n \to f(\overline{x}), v_n \to f(\overline{x}), \\ f(x_n) + t_n \to f(\overline{x}), g(x_n) + q_n \to 0, x_n^* + u_n^* \to 0, -t_n^* + v_n^* \to 0; \\ \langle u_n^*, u_n - \overline{x}\rangle + \langle v_n^*, v_n - f(\overline{x})\rangle - \langle q_n^*, g(\overline{x})\rangle \to 0, \\ \langle u_n^*, x_n - \overline{x}\rangle + \langle v_n^*, y_n - f(\overline{x})\rangle + \langle t_n^*, f(x_n) - y_n\rangle + \\ + \langle q_n^*, g(x_n) - g(\overline{x})\rangle \to 0, t(v_n) - t(f(\overline{x})) \to 0, \end{cases}$$

*atunci* $\overline{x}$ *este o soluţie* $T$*-slab eficientă a problemei* $(P^v_{CM})$ .

### 3.1.2 Condiţii necesare şi suficiente

Impunând condiţii suplimentare asupra funcţiilor vectoriale implicate în formularea problemei $(P^v_{CM})$, se pot da condiţii secvenţiale de optim, care să nu fie doar suficiente, ci chiar necesare şi suficiente.

Considerăm problema de optimizare vectorială $(P^v_{CM})$, în ipotezele (3.1), cu următoarele prezumţii suplimentare:

$$(3.4) \qquad \begin{cases} \operatorname{dom} f = \operatorname{dom} g = X; \\ f \text{ şi } g \text{ sunt continue.} \end{cases}$$

### Scalarizarea liniară

Cea mai faimoasă scalarizare din optimizarea vectorială presupune folosirea unor funcţionale liniare $K$-tare crescătoare. Se observă că, pentru oricare $k^* \in K^{+0}$, funcţia $s_{k^*} : Y \to \mathbb{R}$ definită prin

$$s_{k^*}(y) := \langle k^*, y \rangle \text{ pentru orice } y \in Y$$

este continuă, convexă şi $K$-tare crescătoare. Considerând mulţimea

$$S_{K^{+0}} := \{s_{k^*} : k^* \in K^{+0}\},$$

un element $\overline{x} \in \mathcal{A}_{P^v_{CM}}$ este o soluţie $S_{K^{+0}}$**-propriu eficientă** a lui $(P^v_{CM})$ dacă există $\overline{k}^* \in K^{+0}$ astfel încât

$$\langle \overline{k}^*, f(\overline{x}) \rangle \leq \langle \overline{k}^*, f(x) \rangle \text{ pentru orice } x \in \mathcal{A}_{P^v_{CM}}.$$

**Teorema 3.1.9** (Boţ R.I., Grad A., Wanka G. [22]) *Fie ipotezele* (3.1) *şi* (3.4) *satisfăcute. Atunci un element* $\overline{x} \in \mathcal{A}_{P^v_{CM}}$ *este o soluţie* $S_{K^{+0}}$*-propriu eficientă a problemei* $(P^v_{CM})$ *dacă şi numai dacă există o funcţie* $\overline{k}^* \in K^{+0}$ *şi două şiruri*

$$((x_n, z_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ în } M \times (-C) \text{ şi } ((u_n^*, v_n^*, t_n^*, z_n^*))_{n\in\mathbb{N}} \text{ în } X^* \times X^* \times X^* \times C^+$$

*astfel încât*

$$(3.5) \qquad \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} : u_n^* \in \partial(\overline{k}^* \circ f)(x_n), v_n^* \in \partial(z_n^* \circ g)(x_n), t_n^* \in N_M(x_n), \langle z_n^*, z_n \rangle = 0; \\ x_n \to \overline{x}, z_n \to g(\overline{x}), u_n^* + v_n^* + t_n^* \to 0; \\ \langle z_n^*, g(\overline{x}) \rangle \to 0, \langle z_n^*, g(x_n) \rangle \to 0. \end{cases}$$

**Observaţia 3.1.10** (Boţ R. I., Grad A., Wanka G. [22]) Din Observaţia 2.1.26 rezultă că, dacă pentru un $\overline{x} \in \mathcal{A}_{P^v_{CM}}$ fixat, există o funcţie $\overline{k}^* \in K^{+0}$ astfel încât

$$0 \in \bigcup_{\substack{z^* \in C^+, \\ (z^* \circ g)(\overline{x}) = 0}} \partial((\overline{k}^* \circ f) + (z^* \circ g) + \delta_M)(\overline{x})$$

sau

$$0 \in \partial(\overline{k}^* \circ f)(\overline{x}) + \bigcup_{\substack{z^* \in C^+, \\ (z^* \circ g)(\overline{x}) = 0}} \partial((z^* \circ g) + \delta_M)(\overline{x}),$$

atunci $\overline{x}$ este o soluţie $S_{K^{+0}}$-propriu eficientă lui $(P^v_{CM})$. ∎

**Exemplul 3.1.11** (Boţ R. I., Grad A., Wanka G. [22]) Fie spaţiile $X := \mathbb{R}$, $Y := \mathbb{R}^2$, $Z := \mathbb{R}$, şi fie mulţimile $K := \mathbb{R}^2_+$, $C := \mathbb{R}_+$, $M := \mathbb{R}$. Considerăm funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite prin

$$f(x) := (x, x^2) \text{ şi } g(x) := x^2 \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

Atunci $f$ este $\mathbb{R}^2_+$-convexă şi continuă, iar $g$ este $\mathbb{R}_+$-convexă şi continuă. Condiţia $\mathcal{A}_{P^v_{CMA}} \neq \emptyset$ este satisfăcută. Elementul $\overline{x} := 0$ este o soluţie $S_{K^{+0}}$-propriu eficientă a lui $(P^v_{CM})$, dar nu există nici un $k^* \in \operatorname{int} \mathbb{R}^2_+$ astfel încât una din condiţiile de optim din Observaţia 3.1.10 să fie satisfăcute. Totuşi, se poate demonstra că, condiţiile secvenţiale de optim din (3.5) se verifică. ∎

### Scalarizare cu ajutorul mulţimilor

Metode recente de scalarizare sunt bazate pe anumite mulţimi cu proprietăţi speciale. Funcţia de scalarizare pe care o vom folosi le este atribuită lui GERSTEWITZ C. şi IWANOW [54]. Proprietăţile ei au fost investigate în GERTH C. şi WEIDNER P. [51], şi ZĂLINESCU C. [119]. În contextul optimizării vectoriale convexe, ea a fost folosită de către RUBINOV A. [105], şi PASCOLETTI A. şi SERAFINI P. [99].

Considerăm şi următoarele ipoteze:

$$\begin{cases} K \subset Y \text{ este închis;} \\ \operatorname{int} K \neq \emptyset. \end{cases} \tag{3.6}$$

Pentru ficare $\mu \in \operatorname{int} K$ definim funcţia $t_\mu : Y \to \mathbb{R}$ prin

$$t_\mu(y) := \inf\{r \in \mathbb{R} : y \in r\mu - K\} \text{ pentru orice } y \in Y.$$

Din GÖPFERT A., RIAHI H., TAMMER C. şi ZĂLINESCU C. [57, Corollary 2.3.5], se ştie că această funcţie este $K$-strict crescătoare, convexă şi continuă. Putem să considerăm următoarea mulţime:

$$T_{\operatorname{int} K} := \{t_\mu : \mu \in \operatorname{int} K\}.$$

Condiţii secvenţiale de optim necesare şi suficiente pentru soluţii $T_{\operatorname{int} K}$-slab eficiente sunt enunţate în teorema următoare.

**Teorema 3.1.12** (BOŢ R.I., GRAD A., WANKA G. [22]) *Fie ipotezele* (3.1), (3.4) *şi* (3.6) *satisfăcute. Atunci un element $\overline{x} \in \mathcal{A}_{P^v_{CM}}$ este o soluţie $T_{\operatorname{int} K}$-slab eficientă a problemei $(P^v_{CM})$ dacă şi numai dacă există un $\overline{\mu} \in \operatorname{int} K$ şi două şiruri*

$$((x_n, y_n, z_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ în } M \times Y \times -C \text{ şi } ((u_n^*, v_n^*, t_n^*, y_n^*, z_n^*))_{n\in\mathbb{N}} \text{ în } X^* \times X^* \times X^* \times K^+ \times C^+$$

*astfel încât*

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} : u_n^* \in \partial(y_n^* \circ f)(x_n), v_n^* \in \partial(z_n^* \circ g)(x_n), t_n^* \in N_M(x_n), \\ \langle y_n^*, \overline{\mu}\rangle = 1, \sigma_{\{k^*\in K^+ : \langle k^*, \overline{\mu}\rangle = 1\}}(y_n) = \langle y_n^*, y_n\rangle, \langle z_n^*, z_n\rangle = 0; \\ u_n^* + v_n^* + t_n^* \to 0, x_n \to \overline{x}, y_n \to f(\overline{x}), z_n \to g(\overline{x}), \\ \langle y_n^*, y_n - f(\overline{x})\rangle - \langle z_n^*, g(\overline{x})\rangle \to 0, \langle y_n^*, f(x_n) - f(\overline{x})\rangle + \langle z_n^*, g(x_n) - g(\overline{x})\rangle \to 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

## 3.2 Dualitate vectorială de tip Fenchel în spaţii local convexe

Recente realizări privind dualitatea vectorială de tip Fenchel sunt prezentate în această secţiune, rezultate ce au fost publicate în GRAD A. [61]. Este important de menţionat că toate cele trei duale vectoriale de tip Fenchel considerate în această parte a tezei reprezintă extensii naturale ale clasicei duale Fenchel din optimizarea scalară, aşa cum apare ea în ROCKAFELLAR R. T. [103].

### 3.2.1 O duală vectorială generală de tip Fenchel

Problema primală pe care o investigăm este

$$(P_A^v) \qquad \underset{x\in X}{\text{v-min}}(f+g\circ A)(x).$$

Ipotezele în care această problemă este considerată sunt următoarele:

$$(3.8) \qquad \begin{cases} X, Y \text{ şi } Z \text{ sunt spaţii local convexe separate;} \\ K \subseteq Y \text{ este un con netrivial, punctat şi convex;} \\ f : X \to Y^\bullet \text{ şi } g : Z \to Y^\bullet \text{ sunt funcţii proprii şi } K\text{-convexe;} \\ A : X \to Z \text{ este un operator liniar continuu;} \\ \operatorname{dom} f \cap A^{-1}(\operatorname{dom} g) \neq \emptyset. \end{cases}$$

Mulţimea soluţiilor admisibile ale problemei $(P_A^v)$ este notată prin $\mathcal{A}_{P_A^v} := \operatorname{dom} f \cap A^{-1}(\operatorname{dom} g)$.

Relativ la problema $(P_A^v)$ investigăm soluţiile propriu eficiente.

**Definiţia 3.2.1** *Fie ipotezele* (3.8) *satisfăcute. Un element $\overline{x} \in \mathcal{A}_{P_A^v}$ se numeşte* ***soluţie propriu eficientă*** *a problemei $(P_A^v)$ dacă există $y^* \in K^{+0}$ astfel încât*

$$\langle y^*, (f+g\circ A)(\overline{x})\rangle \leq \langle y^*, (f+g\circ A)(x)\rangle \textit{ pentru orice } x \in \mathcal{A}_{P_A^v}.$$

Prima duală vectorială de tip Fenchel asociată cu $(P_A^v)$ şi analizată în această secţiune este următoarea problemă:

$$(D_A^{v\leq}) \qquad \underset{(y^*,z^*,y)\in\mathcal{A}_{D_A^{v\leq}}}{\text{v-max}} h^{\leq}(y^*,z^*,y),$$

unde

$$\mathcal{A}_{D_A^{v\leq}} := \{(y^*,z^*,y) \in K^{+0}\times Z^* \times Y : \langle y^*, y\rangle \leq -(y^*\circ f)^*(-A^*z^*) - (y^*\circ g)^*(z^*)\}.$$

Funcţia de scop $h^{\leq} : \mathcal{A}_{D_A^{v\leq}} \to Y$ este definită prin

$$h^{\leq}(y^*,z^*,y) := y \text{ pentru oricare } (y^*,z^*,y) \in \mathcal{A}_{D_A^{v\leq}}.$$

Relativ la duala vectorială $(D_A^{v\leq})$ investigăm soluţiile Pareto-eficiente.

**Definiţia 3.2.2** *Fie ipotezele* (3.8) *satisfăcute. Un element $(\overline{y}^*, \overline{z}^*, \overline{y}) \in \mathcal{A}_{D_A^{v\leq}}$ se numeşte* ***soluţie Pareto-eficientă*** *a problemei $(D_A^{v\leq})$ dacă, pentru oricare element $(y^*,z^*,y) \in \mathcal{A}_{D_A^{v\leq}}$ care satisface*

$$h^{\leq}(\overline{y}^*, \overline{z}^*, \overline{y}) \leq_K h^{\leq}(y^*,z^*,y),$$

*egalitatea*

$$h^{\leq}(\overline{y}^*, \overline{z}^*, \overline{y}) = h^{\leq}(y^*,z^*,y)$$

*este validă.*

Pornim prin a enunţa teorema de **dualitate slabă** pentru perechea primală-duală $(P_A^v, D_A^{v\leq})$.

**Teorema 3.2.3** (Grad A. [61]) *Nu există nici un $x \in X$ şi nici un $(y^*, z^*, y) \in \mathcal{A}_{D_A^{v\leqq}}$ astfel încât*

$$(f + g \circ A)(x) \leq_K h^{\leqq}(y^*, z^*, y) \text{ şi } (f + g \circ A)(x) \neq h^{\leqq}(y^*, z^*, y).$$

**Observaţia 3.2.4** Pentru a asigura dualitate tare între $(P_A^v)$ şi $(D_A^{v\leqq})$ avem nevoie de o condiţie de regularitate. După cum se va vedea şi din demonstraţia Teoremei 3.2.5, condiţia de regularitate dorită asigură de fapt dualitate tare între problema de optimizare scalară

$$(\overline{y}^* P_A^v) \qquad \inf_{x \in X} \{(\overline{y}^* \circ f)(x) + (\overline{y}^* \circ g)(Ax)\}$$

şi duala ei Fenchel

$$(\overline{y}^* D_A^v) \qquad \sup_{z^* \in Z^*} \{-(\overline{y}^* \circ f)^*(-A^* z^*) - (\overline{y}^* \circ g)^*(z^*)\}$$

pentru oricare $\overline{y}^* \in K^{+0}$. ∎

Prima condiţie de regularitate pe care o menţionăm pentru perechea primală-duală $(\overline{y}^* P_A^v, \overline{y}^* D_A^v)$, condiţie derivată din Ekeland I. şi Temam R. [49], este

$$(RC_A^{v1}) \qquad \exists x_0 \in \operatorname{dom} f \cap A^{-1}(\operatorname{dom} g) \text{ astfel încât } g \text{ este continuă în } A(x_0).$$

În spaţii Fréchet se pot da următoarele condiţii de regularitate pentru $(\overline{y}^* P_A^v, \overline{y}^* D_A^v)$:

$$(RC_A^{v2}) \qquad \begin{cases} X \text{ şi } Z \text{ sunt spaţii Fréchet;} \\ f \text{ şi } g \text{ sunt funcţii stea } K\text{-inferior semicontinue;} \\ 0 \in \operatorname{sqri}(\operatorname{dom} g - A(\operatorname{dom} f)); \end{cases}$$

$$(RC_A^{v2'}) \qquad \begin{cases} X \text{ şi } Z \text{ sunt spaţii Fréchet;} \\ f \text{ şi } g \text{ sunt funcţii stea } K\text{-inferior semicontinue;} \\ 0 \in \operatorname{core}(\operatorname{dom} g - A(\operatorname{dom} f)); \end{cases}$$

$$(RC_A^{v2"}) \qquad \begin{cases} X \text{ şi } Z \text{ sunt spaţii Fréchet;} \\ f \text{ şi } g \text{ sunt funcţii stea } K\text{-inferior semicontinue;} \\ 0 \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} g - A(\operatorname{dom} f)). \end{cases}$$

În spaţii finit dimensionale se poate folosi următoarea condiţie:

$$(RC_A^{v3}) \qquad \begin{cases} \dim(\operatorname{lin}(\operatorname{dom} g - A(\operatorname{dom} f))) < +\infty; \\ \operatorname{ri}(\operatorname{dom} g) \cap \operatorname{ri}(A(\operatorname{dom} f)) \neq \emptyset. \end{cases}$$

Dacă $X := \mathbb{R}^n$ şi $Z := \mathbb{R}^m$, atunci condiţia $(RC^{v3})$ devine

$$(RC_A^{v4}) \qquad \exists x' \in \operatorname{ri}(\operatorname{dom} f) \text{ astfel încât } Ax' \in \operatorname{ri}(\operatorname{dom} g).$$

$(RC_A^{v4})$ este de fapt condiţia clasică de regularitate pentru dualitatea scalară Fenchel din Rockafellar R. T. [103].

Urmează teorema de **dualitate tare** pentru perechea primală-duală $(P_A^v, D_A^{v\leqq})$.

**Teorema 3.2.5** (Grad A. [61], Boţ R. I., Grad S. M., Wanka G. [26]) *Fie ipotezele* (3.8) *şi una din condiţiile de regularitate* $(RC_A^{v1})$ - $(RC_A^{v3})$ *satisfăcute. Dacă* $\overline{x} \in \mathcal{A}_{P_A^v}$ *este o soluţie propriu eficientă a lui* $(P_A^v)$, *atunci există o soluţie eficientă* $(\overline{y}^*, \overline{z}^*, \overline{y}) \in \mathcal{A}_{D_A^{v\leq}}$ *a lui* $(D_A^{v\leq})$ *astfel încât*

$$(f + g \circ A)(\overline{x}) = h^{\leq}(\overline{y}^*, \overline{z}^*, \overline{y}).$$

O teoremă ajutătoare în demonstrarea teoremei de dualitate inversă este menţionată în continuare.

**Teorema 3.2.6** (Grad A. [61], Boţ R. I., Grad S. M., Wanka G. [26]) *Fie ipotezele* (3.8) *şi una din condiţiile de regularitate* $(RC_A^{v1})$ - $(RC_A^{v3})$ *satisfăcute, iar* $\mathcal{A}_{D_A^{v\leq}} \neq \emptyset$. *Atunci următoarea incluziune este validă:*

$$Y \setminus \operatorname{cl}\left\{(f + g \circ A)\left(\mathcal{A}_{P_A^v}\right) + K\right\} \subseteq \operatorname{core} h^{\leq}(\mathcal{A}_{D_A^{v\leq}}).$$

Teorema de **dualitate inversă** pentru perechea primală-duală $(P_A^v, D_A^{v\leq})$ este precizată în cele ce urmează.

**Teorema 3.2.7** (Grad A. [61], Boţ R. I., Grad S. M., Wanka G. [26]) *Fie ipotezle* (3.8) *şi una din condiţiile de regularitate* $(RC_A^{v1})$ - $(RC_A^{v3})$ *satisfăcute. Mai mult, fie* $(f + g \circ A)(\mathcal{A}_{P_A^v}) + K$ *o mulţime închisă. Atunci pentru oricare soluţie eficientă* $(\overline{y}^*, \overline{z}^*, \overline{y}) \in \mathcal{A}_{D_A^{v\leq}}$ *a lui* $(D_A^{v\leq})$ *există o soluţie propriu eficientă* $\overline{x} \in \mathcal{A}_{P_A^v}$ *a lui* $(P_A^v)$ *astfel încât*

$$(f + g \circ A)(\overline{x}) = h^{\leq}(\overline{y}^*, \overline{z}^*, \overline{y}).$$

### 3.2.2 Comparaţii între trei duale vectoriale de tip Fenchel

Dualitatea scalară Fenchel a fost utilizată pentru prima dată în definirea unei duale vectoriale de către Breckner W. W. şi Kolumbán I. [36], într-un cadru foarte general. Inspiraţi de această abordare, putem introduce următoarea duală vectorială asociată lui $(P_A^v)$:

$$(D_A^{vBK}) \qquad \operatorname*{v-max}_{(y^*, z^*, y) \in \mathcal{A}_{D_A^{vBK}}} h^{BK}(y^*, z^*, y),$$

unde

$$\mathcal{A}_{D_A^{vBK}} := \{(y^*, z^*, y) \in K^{+0} \times Z^* \times Y : \langle y^*, y \rangle = -(y^* \circ f)^*(-A^* z^*) - (y^* \circ g)^*(z^*)\}.$$

Funcţia de scop $h^{BK} : \mathcal{A}_{D_A^{vBK}} \to Y$ este definită prin

$$h^{BK}(y^*, z^*, y) := y \text{ pentru orice } (y^*, z^*, y) \in \mathcal{A}_{D_A^{vBK}}.$$

**Definiţia 3.2.8** *Fie ipotezele* (3.8) *satisfăcute. Un element* $(\overline{y}^*, \overline{z}^*, \overline{y}) \in \mathcal{A}_{D_A^{vBK}}$ *este o soluţie* ***Pareto-eficientă*** *a problemei* $(D_A^{vBK})$ *dacă pentru fiecare element* $(y^*, z^*, y) \in \mathcal{A}_{D_A^{vBK}}$ *care satisface inegalitatea*

$$h^{BK}(\overline{y}^*, \overline{z}^*, \overline{y}) \leq_K h^{BK}(y^*, z^*, y),$$

*egalitatea*

$$h^{BK}(\overline{y}^*, \overline{z}^*, \overline{y}) = h^{BK}(y^*, z^*, y)$$

*este validă.*

Notăm prin v-max $h^{BK}(\mathcal{A}_{D_A^{vBK}})$ mulţimea tuturor soluţiilor Pareto-eficiente ale lui $(D_A^{vBK})$.

**Observaţia 3.2.9** Se remarcă uşor din definiţie că incluziunea $h^{BK}(\mathcal{A}_{D_A^{vBK}}) \subseteq h^{\leq}(\mathcal{A}_{D_A^{v\leq}})$ este validă, fără alte ipoteze suplimentare. ∎

**Teorema 3.2.10** (Grad A. [61]) *Fie ipotezele* (3.8) *satisfăcute. Atunci următoarea egalitate este validă:*

$$\text{v-max}\, h^{BK}(\mathcal{A}_{D_A^{vBK}}) = \text{v-max}\, h^{\leq}(\mathcal{A}_{D_A^{v\leq}}).$$

**Observaţia 3.2.11** În demonstrarea Teoremei 3.2.10 nu sunt necesare ipoteze de convexitate. ∎

Folosind teoremele de dualitate slabă, tare şi respectiv inversă, stabilite pentru perechea primală-duală $(P_A^v, D_A^{v\leq})$, pot fi deduse rezultate similare şi pentru perechea primală-duală $(P_A^v, D_A^{vBK})$.

**Teorema 3.2.12** (Grad A. [61]) *Următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

(a) (Dualitate slabă) *Nu există nici un $x \in X$ şi nici un $(y^*, z^*, y) \in \mathcal{A}_{D_A^{vBK}}$ astfel încât*

$$(f + g \circ A)(x) \leq_K h^{BK}(y^*, z^*, y) \text{ şi } (f + g \circ A)(x) \neq h^{BK}(y^*, z^*, y).$$

(b) (Dualitate tare) *Fie ipotezele* (3.8) *şi una din condiţiile de regularitate* $(RC_A^{v1})$ - $(RC_A^{v3})$ *satisfăcute. Dacă $\overline{x} \in \mathcal{A}_{P_A^v}$ este o soluţie propriu eficientă a lui $(P_A^v)$, atunci există o soluţie eficientă $(\overline{y}^*, \overline{z}^*, \overline{y}) \in \mathcal{A}_{D_A^{vBK}}$ a lui $(D_A^{vBK})$ astfel încât*

$$(f + g \circ A)(\overline{x}) = h^{BK}(\overline{y}^*, \overline{z}^*, \overline{y}).$$

(c) (Dualitate inversă) *Fie ipotezele* (3.8) *şi una din condiţiile de regularitate* $(RC_A^{v1})$ - $(RC_A^{v3})$ *satisfăcute. Mai mult, fie $(f + g \circ A)(\mathcal{A}_{P_A^v}) + K$ o mulţime închisă. Atunci pentru fiecare soluţie eficientă $(\overline{y}^*, \overline{z}^*, \overline{y}) \in \mathcal{A}_{D_A^{vBK}}$ a lui $(D_A^{vBK})$ există o soluţie propriu eficientă $\overline{x} \in \mathcal{A}_{P_A^v}$ a lui $(P_A^v)$ astfel încât $(f + g \circ A)(\overline{x}) = h^{BK}(\overline{y}^*, \overline{z}^*, \overline{y})$.*

**Observaţia 3.2.13** Particularizând spaţiile $X, Y$ şi $Z$, dualele vectoriale de tip Fenchel $(D_A^{v\leq})$ şi $(D_A^{vBK})$ se dovedesc a fi duala scalară clasică Fenchel. ∎

### Cazul în care $Y := \mathbb{R}^m$

Vom studia cazul particular în care $Y := \mathbb{R}^m$ şi $K := \mathbb{R}^m_+$. Pe lângă cele două duale vectoriale, $(D_A^{v\leq})$ şi $(D_A^{vBK})$, deja analizate, considerăm o a treia, a cărei formulare a fost inspirată din Boţ R. I., Dumitru (Grad) A. şi Wanka G. [20]. Precizăm totuşi că, în lucrarea anterior amintită, se tratează un caz mai particular, şi anume cel în care $X := \mathbb{R}^n$ şi $Z := \mathbb{R}^k$, în timp ce în această subsecţiune considerăm spaţiile $X$ şi $Z$ local convexe separate.

Problema primală devine

$$(P_A^v) \qquad \underset{x \in X}{\text{v-min}} (f + g \circ A)(x),$$

ea fiind analizată în următoarele ipoteze:

$$(3.9) \qquad \begin{cases} X \text{ şi } Z \text{ sunt spaţii local convexe separate;} \\ f := (f_1, f_2, ... f_m) \text{ şi } g := (g_1, g_2, ..., g_m) \text{ sunt funcţii vectoriale;} \\ \forall i \in \{1, ..., m\} : f_i : X \to \overline{\mathbb{R}} \text{ este o funcţie proprie şi convexă;} \\ \forall i \in \{1, ..., m\} : g_i : Z \to \overline{\mathbb{R}} \text{ este o funcţie proprie şi convexă;} \\ A : X \to Z \text{ este un operator liniar continuu.} \end{cases}$$

De asemenea, considerăm condiţia de regularitate

$$(RC_A^{v_m}) \quad \begin{cases} \exists x' \in \bigcap\limits_{i=1}^{m} \operatorname{dom} f_i \cap A^{-1}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{m} \operatorname{dom} g_i\right) \text{ astfel încât} \\ m-1 \text{ funcţii } f_i, \text{ cu } i \in \{1,...,m\}, \text{ sunt continue în } x'; \\ g_i \text{ este continuă în } Ax' \text{ pentru orice } i \in \{1,...,m\}. \end{cases}$$

Asociem lui $(P_A^v)$ următoare problemă duală:

$$(D_A^{vBGW}) \qquad \underset{(p,q,\lambda,t)\in\mathcal{A}_{D_A^{vBGW}}}{\text{v-max}} h^{BGW}(p,q,\lambda,t),$$

unde

$$\mathcal{A}_{D_A^{vBGW}} := \left\{ \begin{array}{ll} (p,q,\lambda,t): & p := (p_1,...,p_m) \in X^* \times ... \times X^*, \\ & q := (q_1,...,q_m) \in Z^* \times ... \times Z^* \\ & \lambda := (\lambda_1,...,\lambda_m) \in \operatorname{int} \mathbb{R}_+^m, \\ & t := (t_1,...,t_m) \in \mathbb{R}^m, \\ & \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i (p_i + A^* q_i) = 0, \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i t_i = 0 \end{array} \right\}.$$

Funcţia de scop este definită prin

$$h^{BGW}(p,q,\lambda,t) := \left(h_1^{BGW}(p,q,\lambda,t),...,h_m^{BGW}(p,q,\lambda,t)\right) \text{ pentru orice } (p,q,\lambda,t) \in \mathcal{A}_{D_A^{vBGW}},$$

cu

$$h_i^{BGW}(p,q,\lambda,t) := -f_i^*(p_i) - g_i^*(q_i) + t_i \text{ pentru orice } i \in \{1,...,m\}.$$

**Definiţia 3.2.14** *Fie ipotezele (3.9) satisfăcute. Un element* $(\overline{p},\overline{q},\overline{\lambda},\overline{t}) \in \mathcal{A}_{D_A^{vBGW}}$ *se numeşte soluţie* ***Pareto-eficientă*** *a problemei* $(D_A^{vBGW})$ *dacă* $h^{BGW}(\overline{p},\overline{q},\overline{\lambda},\overline{t}) \in \mathbb{R}^m$ *şi pentru orice element* $(p,q,\lambda,t) \in \mathcal{A}_{D_A^{vBGK}}$ *cu* $h^{BGW}(p,q,\lambda,t) \in \mathbb{R}^m$*, care satisface inegalitatea*

$$h^{BGW}(\overline{y}^*,\overline{z}^*,\overline{y}) \leqq_{\mathbb{R}_+^m} h^{BK}(y^*,z^*,y),$$

*egalitatea*

$$h^{BGW}(\overline{y}^*,\overline{z}^*,\overline{y}) = h^{BK}(y^*,z^*,y)$$

*este validă.*

Notăm prin v-max $\left[h^{BGW}(\mathcal{A}_{D_A^{vBK}}) \cap \mathbb{R}^m\right]$ mulţimea soluţiilor Pareto-eficiente ale lui $(D_A^{vBGW})$.

Începem prin a prezenta relaţii între mulţimile imagine ale celor trei probleme $(D_A^{v\leqq})$, $(D_A^{vBK})$ şi $(D_A^{vBGW})$.

**Propoziţia 3.2.15** (Grad A. [61]) *Fie ipotezele (3.9) şi condiţia de regularitate* $(RC_A^{v_m})$ *satisfăcute. Atunci mulţimile imagine ale celor trei duale vectoriale de tip Fenchel* $(D_A^{\leqq})$, $(D_A^{vBK})$ *şi* $(D_A^{vBGW})$ *asociate lui* $(P_A^v)$ *satisfac următoarele incluziuni:*

$$h^{BK}\left(\mathcal{A}_{D_A^{vBK}}\right) \subseteq h^{BGW}\left(\mathcal{A}_{D_A^{vBGW}}\right) \cap \mathbb{R}^m; \tag{3.10}$$

$$h^{BGW}\left(\mathcal{A}_{D_A^{vBGW}}\right) \cap \mathbb{R}^m \subseteq h^{\leqq}\left(\mathcal{A}_{D_A^{v\leqq}}\right). \tag{3.11}$$

**Observaţia 3.2.16** (a) Incluziunile din Propoziţia 3.2.15 sunt în general stricte, i.e. următorul lanţ de inegalităţi fiind valid:

$$h^{BK}\left(\mathcal{A}_{D_A^{vBK}}\right) \underset{\neq}{\subseteq} h^{BGW}\left(\mathcal{A}_{D_A^{vBGW}}\right) \cap \mathbb{R}^m \underset{\neq}{\subseteq} h^{\leq}\left(\mathcal{A}_{D_A^{v\leq}}\right), \tag{3.12}$$

după cum se dovedeşte analizând Exemplele 3.2.17 şi 3.2.18.

(b) Relaţia (3.11) rămâne validă chiar dacă condiţia de regularitate $(RC_A^{v_m})$ nu este satisfăcută, după cum se observă din demonstraţia Propoziţiei 3.2.15. ∎

**Exemplul 3.2.17** (Boţ R. I., Dumitru (Grad) A., Wanka G. [20]) Fie spaţiile $X := \mathbb{R}$, $Z := \mathbb{R}$, fie operatorul liniar continuu $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definit prin $A(x) := x$ pentru orice $x \in X$, iar funţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definite prin

$$f(x) := \left(2x^2 - 1, x^2\right) \quad \text{şi} \quad g(x) := (-2x, -x+1) \ \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

Demonstrăm că

$$h^{BK}\left(\mathcal{A}_{D_A^{vBK}}\right) \subset h^{BGW}\left(\mathcal{A}_{D_A^{vBGW}}\right) \cap \mathbb{R}^m.$$

∎

**Exemplul 3.2.18** (Boţ R. I., Dumitru (Grad) A., Wanka G. [20]) Fie spaţiile $X := \mathbb{R}$, $Z := \mathbb{R}$, fie operatorul liniar continuu $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definit prin $A(x) := x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, iar funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definite prin

$$f(x) := (x-1, -x-1) \quad \text{şi} \ \ g(x) := (x, -x) \ \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

Demonstrăm că

$$h^{BGW}\left(\mathcal{A}_{D_A^{vBGW}}\right) \cap \mathbb{R}^m \subset h^{\leq}\left(\mathcal{A}_{D_A^{v\leq}}\right).$$

∎

Vom demonstra că mulţimile de soluţii optime ale problemelor $(D_A^{vBGW})$ şi $(D_A^{v\leq})$ coincid.

**Teorema 3.2.19** (Grad A. [61]) *Fie ipotezele* (3.9) *şi condiţia de regularitate* $(RC_A^{v_m})$ *satisfăcute. Atunci următoarea egalitate este validă:*

$$\text{v-max}\left[h^{BGW}\left(\mathcal{A}_{D_A^{vBGW}}\right) \cap \mathbb{R}^m\right] = \text{v-max}\, h^{\leq}\left(\mathcal{A}_{D_A^{v\leq}}\right). \tag{3.13}$$

**Observaţia 3.2.20** Fie ipotezele (3.9) şi condiţia de regularitate $(RC_A^{v_m})$ satisfăcute. Subliniem că din Teoremele 3.2.10 şi 3.2.19, împreună cu Exemplele 3.2.18 şi 3.2.17, se obţin următoarele egalităţi între mulţimile de soluţii optime asociate celor trei duale vectoriale de tip Fenchel $(D_A^{\leq})$, $(D_A^{vBK})$ şi $(D_A^{vBGW})$ ale primalei $(P_A^v)$:

$$\text{v-max}\, h^{BK}(\mathcal{A}_{D_A^{vBK}}) = \text{v-max}\left[h^{BGW}\left(\mathcal{A}_{D_A^{vBGW}}\right) \cap \mathbb{R}^m\right] = \text{v-max}\, h^{\leq}\left(\mathcal{A}_{D_A^{v\leq}}\right),$$

chiar dacă

$$h^{BK}\left(\mathcal{A}_{D_A^{vBK}}\right) \underset{\neq}{\subseteq} h^{BGW}\left(\mathcal{A}_{D_A^{vBGW}}\right) \cap \mathbb{R}^m \underset{\neq}{\subseteq} h^{\leq}\left(\mathcal{A}_{D_A^{v\leq}}\right).$$

∎

Folosind teoremele de dualitate slabă, tare şi respectiv inversă stabilite pentru perechea primală-duală $(P_A^v, D_A^{v\leq})$, pot fi deduse rezultate similare şi pentru perechea primală-duală $(P_A^v, D_A^{vBGW})$.

**Teorema 3.2.21** (Grad A. [61]) *Următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

(a) (Dualitate tare) *Nu există nici un* $x \in X$ *şi nici un* $(p, q, \lambda, t) \in \mathcal{A}_{D_A^{vBGW}}$ *cu* $h^{vBGW}(p, q, \lambda, t) \in \mathbb{R}^m$ *astfel încât*

$$(f + g \circ A)(x) \leq_{\mathbb{R}^m_+} h^{BGW}(p, q, \lambda, t) \text{ şi } (f + g \circ A)(x) \neq h^{BGW}(p, q, \lambda, t).$$

(b) (Dualitate tare) *Fie ipotezele* (3.9) *şi condiţia de regularitate* $(RC_A^{v_m})$ *satisfăcute. Dacă* $\overline{x} \in \mathcal{A}_{P_A^v}$ *este o soluţie propriu eficientă a lui* $(P_A^v)$*, atunci există o soluţie Pareto-eficientă* $(\overline{p}, \overline{q}, \overline{\lambda}, \overline{t}) \in \mathcal{A}_{D_A^{vBGW}}$ *a lui* $(D_A^{vBGW})$ *astfel încât*

$$(f + g \circ A)(\overline{x}) = h^{BGW}(\overline{p}, \overline{q}, \overline{\lambda}, \overline{t}).$$

(c) (Dualitate inversă) *Fie ipotezele* (3.9) *şi condiţia de regularitate* $(RC_A^{v_m})$ *satisfăcute. Dacă mulţimea* $(f+g\circ A)(\mathcal{A}_{P_A^v})+K$ *este închisă, atunci pentru orice soluţie eficientă* $(\overline{p}, \overline{q}, \overline{\lambda}, \overline{t}) \in \mathcal{A}_{D_A^{vBGW}}$ *a lui* $(D_A^{vBGW})$ *există o soluţie propriu eficientă* $\overline{x} \in \mathcal{A}_{P_A^v}$ *a lui* $(P_A^v)$ *astfel încât*

$$(f + g \circ A)(\overline{x}) = h^{BGW}(\overline{p}, \overline{q}, \overline{\lambda}, \overline{t}).$$

Următorul exemplu ilustrează o situaţie în care ipotezele Teoremei 3.2.6 nu sunt satisfăcute pentru duala mai particulară $(D_A^{vBGW})$, dar sunt valide în cazul lui $(D_A^{v\leq})$.

**Exemplul 3.2.22** (Grad A. [61]) Fie spaţiile $X := \mathbb{R}$, $Z := \mathbb{R}$ şi $Y := \mathbb{R}^2$, fie operatorul liniar continuu $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definit prin $A(x) := x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, iar funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definite prin

$$f(x) := (-3x + 7, 2x) \text{ şi } g(x) := (3x - 7, -2x) \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

Se demonstrează că

$$\mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{cl}\left((f + g)(\mathbb{R}) + \mathbb{R}^2_+\right) \not\subseteq \mathrm{core}\, h^{BGW}(\mathcal{A}_{D_A^{vBGW}}) \cap \mathbb{R}^2.$$

∎

**Observaţia 3.2.23** Din Exemplul 3.2.22 se ajunge la concluzia că, demonstrarea directă a unei teoreme de dualitate inversă pentru problema $(D_A^{vBGW})$ ar fi mai dificilă. Putem da un rezultat indirect de dualitate inversă, cel din Teorema 3.2.21 (c), doar exploatând legătura cu $(D_A^{v\leq})$ care reiese din Teorema 3.2.19. ∎

## 3.3 O abordare directă a problemei $(D_A^{vBGW})$ în spaţii finit dimensionale

Această secţiune conţine o abordare directă privind dualitatea tare şi inversă pentru o duală vectorială de tip Fenchel asemănătoare cu $(D_A^{vBGW})$ din Secţiunea 3.2, studiată de această dată într-un cadru finit dimensional. Rezultatele originale obţinute au fost publicate în articolul Boţ R. I., Dumitru

(Grad) A. şi Wanka G. [20], iar o demonstraţie directă a teoremei de dualitate inversă a apărut în Grad A. [65]. Precum în cazul local convex, ne vom folosi tot de scalarizare.

Problema primală considerată este

$$(P_A^{!v}) \qquad \operatorname*{v-min}_{x\in\mathbb{R}^n}(f+g\circ A)(x),$$

ea fiind studiată sub următoarele ipoteze:

$$(3.14)\qquad \begin{cases} f:=(f_1,f_2,...f_m),\, g:=(g_1,g_2,...,g_m) \text{ sunt două funcţii vectoriale;}\\ I,J\subseteq\{1,...,m\} \text{ sunt două mulţimi astfel încât}\\ f_i:\mathbb{R}^n\to\overline{\mathbb{R}} \text{ şi } g_j:\mathbb{R}^w\to\overline{\mathbb{R}} \text{ sunt funcţii proprii şi poliedrale}\\ \qquad \text{pentru orice } i\in I \text{ şi pentru orice } j\in J;\\ f_k:\mathbb{R}^n\to\overline{\mathbb{R}} \text{ şi } g_l:\mathbb{R}^w\to\overline{\mathbb{R}} \text{ sunt funcţii proprii şi convexe}\\ \qquad \text{pentru orice } k\in\{1,...,m\}\backslash I \text{ şi pentru orice } l\in\{1,...,m\}\backslash J;\\ A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^w \text{ este un operator liniar continuu.}\end{cases}$$

Vom folosi notaţia

$$\mathcal{A}_{P_A^{!v}}:=\left(\bigcap_{i=1}^m \operatorname{dom} f_i\right)\cap A^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^m \operatorname{dom} g_i\right).$$

Condiţia de regularitate folosită pentru a asigura dualitatea tare atât pentru cazul scalar, cât şi pentru cel vectorial, este

$$(RC_A^{!v}) \qquad \exists\ x'\in\bigcap_{i\in I}\operatorname{dom}(f_i)\quad\cap\bigcap_{k\in\{1,...,m\}\backslash I}\operatorname{ri}(\operatorname{dom}(f_k)) \quad \text{astfel încât}$$

$$Ax'\in\bigcap_{j\in J}\operatorname{dom}(g_j)\quad\cap\bigcap_{l\in\{1,...,m\}\backslash J}\operatorname{ri}(\operatorname{dom}(g_l)).$$

Pe $\mathbb{R}^m$ considerăm ordinea parţială introdusă de $\mathbb{R}^m_+$. În consecinţă, pentru $x,y\in\mathbb{R}^m$, avem

$$x\leq_{\mathbb{R}^m_+} y \quad \text{dacă şi numai dacă} \quad x_i\leq y_i \text{ pentru orice } i\in\{1,...,m\}.$$

**Definiţia 3.3.1** *Fie ipotezele* (3.14) *satisfăcute. Un element* $\overline{x}\in\mathcal{A}_{P_A^{!v}}$ *se numeşte* ***soluţie Pareto-eficientă*** *a problemei* $(P_A^{!v})$ *dacă pentru orice* $x\in\mathcal{A}_{P_A^{!v}}$ *care satisface*

$$(f+g\circ A)(x)\leq_{\mathbb{R}^m_+}(f+g\circ A)(\overline{x}),$$

*egalitatea*

$$(f+g\circ A)(x)=(f+g\circ A)(\overline{x})$$

*este validă.*

**Definiţia 3.3.2** *Fie ipotezele* (3.14) *satisfăcute. Un element* $\overline{x}\in\mathcal{A}_{P_A^{!v}}$ *se numeşte* ***soluţie propriu eficientă*** *a problemei* $(P_A^{!v})$ *dacă există* $\lambda:=(\lambda_1,...,\lambda_m)\in\operatorname{int}(\mathbb{R}^m_+)$ *astfel încât pentru orice* $x\in\mathbb{R}^n$ *următoarea inegalitate este validă:*

$$\sum_{i=1}^m\lambda_i(f_i+g_i\circ A)(\overline{x})\leq\sum_{i=1}^m\lambda_i(f_i+g_i\circ A)(x).$$

**Observaţia 3.3.3** Orice soluţie propriu eficientă este şi o soluţie Pareto-eficientă, dar afirmaţia inversă nu este adevărată în general. ∎

### 3.3.1 Dualitate pentru probleme scalare

Pentru a asocia problemei $(P_A^{!v})$ o duală vectorială în ipotezele (3.14), analizăm pentru început o teorie de dualitate pentru următoarea problemă scalară (motivaţi fiind de definiţia soluţiei propriu eficiente):

$$(\lambda P_A^{!v}) \qquad \inf_{x\in\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^m \lambda_i (f_i + g_i \circ A)(x),$$

unde $\lambda := (\lambda_1, ..., \lambda_m)$ este arbitrar ales în $\operatorname{int} \mathbb{R}_+^m$ .

În concordanţă cu Rockafellar R. T. [103, Corolarul 31.2.1], problema duală clasică Fenchel care se poate asocia cu $(\lambda P_A^{!v})$ este

$$\sup_{q\in\mathbb{R}^w} \left[ -\left( \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i \right)^* (-A^*q) - \left( \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i \right)^* (q) \right].$$

În ceea ce priveşte scopul nostru final, această duală prezintă dezavantajul că funcţiile implicate nu apar separat. De aceea, vom considera ca duală asociată lui $(\lambda P_A^{!v})$ o rafinare a problemei de mai sus, şi anume:

$$(\lambda D_A^{!v}) \qquad \sup_{\substack{p_i\in\mathbb{R}^n, q_i\in\mathbb{R}^w \\ i\in\{1,...m\} \\ \sum_{i=1}^m \lambda_i(p_i + A^*q_i) = 0}} \sum_{i=1}^m \lambda_i \left( -f_i^* (p_i) - g_i^* (q_i) \right).$$

Notăm cu $v\left(\lambda P_A^{!v}\right)$ şi $v\left(\lambda D_A^{!v}\right)$ valorile optime ale problemelor scalare $(\lambda P_A^{!v})$ şi respectiv $(\lambda D_A^{!v})$.

Începem prin a prezenta teorema scalară de **dualitate slabă**.

**Teorema 3.3.4** (Boţ R. I., Dumitru (Grad) A., Wanka G. [20]) *Fie* $\lambda := (\lambda_1, ..., \lambda_m) \in \operatorname{int} \mathbb{R}_+^m$. *Pentru perechea primală-duală* $\left(\lambda P_A^{!v}, \lambda D_A^{!v}\right)$ *următoarea inegalitate este validă:*

$$v\left(\lambda D_A^{!v}\right) \leq v\left(\lambda P_A^{!v}\right).$$

**Observaţia 3.3.5** Se observă că dualitatea slabă poate fi demonstrată şi fără ipotezele de convexitate impuse funcţiilor. Acest avantaj nu se va păstra însă şi pentru cea tare. ∎

Prin impunerea condiţiei de regularitate $(RC_A^{!v})$ putem demonstra următoarea teoremă scalară de **dualitate tare**.

**Teorema 3.3.6** (Boţ R. I., Dumitru (Grad) A., Wanka G. [20]) *Fie ipotezele* (3.14) *şi condiţia de regularitate* $(RC_A^{!v})$ *satisfăcute. Mai mult, fie* $\lambda := (\lambda_1, ..., \lambda_m) \in \operatorname{int} \mathbb{R}_+^m$. *Atunci următoarea egalitate este validă:*

$$v\left(\lambda P_A^{!v}\right) = v\left(\lambda D_A^{!v}\right).$$

*În plus, problema duală* $\left(\lambda D_A^{!v}\right)$ *are o soluţie optimă.*

Următorul rezultat conţine **condiţii de optim** necesare şi suficiente ce pot fi obţinute din Teorema 3.3.6 pentru perechea primală-duală $(\lambda P_A^{!v}, \lambda D_A^{!v})$.

**Teorema 3.3.7** (Boţ R.I., Dumitru (Grad) A., Wanka G. [20]) *Fie ipotezele* (3.14) *şi condiţia de regularitate* $(RC_A^{!v})$ *satisfăcute. Mai mult, fie* $\lambda := (\lambda_1, ..., \lambda_m) \in \operatorname{int} \mathbb{R}_+^m$. *Atunci următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

(a) *Fie* $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ *o soluţie optimă a lui* $\left(\lambda P_A^{!v}\right)$. *Atunci există*

$$\overline{p} := (\overline{p}_1, ..., \overline{p}_m) \in \mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n \text{ şi } \overline{q} := (\overline{q}_1, ..., \overline{q}_m) \in \mathbb{R}^w \times ... \times \mathbb{R}^w$$

*astfel încât* $(\overline{p}, \overline{q})$ *este o soluţie optimă a lui* $\left(\lambda D_A^{!v}\right)$ *şi următoarele egalităţi sunt valide:*

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & f_i(\overline{x}) + f_i^*(\overline{p}_i) = \langle \overline{p}_i, \overline{x} \rangle \text{ pentru orice } i \in \{1, ..., m\}; \\ \text{(ii)} & (g_i \circ A)(\overline{x}) + g_i^*(\overline{q}_i) = \langle (A^* \overline{q}_i), \overline{x} \rangle \text{ pentru orice } i \in \{1, ..., m\}; \\ \text{(iii)} & \sum\limits_{i=1}^m \lambda_i (\overline{p}_i + A^* \overline{q}_i) = 0. \end{array}$$

(b) *Dacă* $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\overline{p} := (\overline{p}_1, ..., \overline{p}_m) \in \mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n$ *şi* $\overline{q} := (\overline{q}_1, ..., \overline{q}_m) \in \mathbb{R}^w \times ... \times \mathbb{R}^w$ *satisfac condiţiile* (i), (ii) *şi* (iii), *atunci* $\overline{x}$ *este o soluţie optimă a lui* $\left(\lambda P_A^{!v}\right)$, $(\overline{p}, \overline{q})$ *este o soluţie optimă lui* $\left(\lambda D_A^{!v}\right)$ *şi* $v(\lambda P_A^{!v}) = v(\lambda D_A^{!v})$.

Condiţiile de optim din Teorema 3.3.7 se vor dovedi importante la demonstrarea teoremei de dualitate vectorială tare, i.e. Teorema 3.3.12.

### 3.3.2 O nouă duală vectorială de tip Fenchel

Folosind rezultatele obţinute în subsecţiunea precedentă, vom formula o nouă duală $(D_A^{!vBGW})$ pentru problema $(P_A^{!v})$, după cum urmează:

$$(D_A^{!vBGW}) \qquad \underset{(p,q,\lambda,t) \in \mathcal{A}_{D_A^{!vBGW}}}{\text{v-max}} h^{!BGW}(p, q, \lambda, t),$$

unde

$$\mathcal{A}_{D_A^{!vBGW}} := \left\{ \begin{array}{ll} (p, q, \lambda, t): & p := (p_1, ..., p_m) \in \mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n, \\ & q := (q_1, ..., q_m) \in \mathbb{R}^w \times ... \times \mathbb{R}^w, \\ & \lambda := (\lambda_1, ..., \lambda_m) \in \operatorname{int} \mathbb{R}_+^m, \\ & t := (t_1, ..., t_m) \in \mathbb{R}^m, \\ & \sum\limits_{i=1}^m \lambda_i (p_i + A^* q_i) = 0, \sum\limits_{i=1}^m \lambda_i t_i = 0 \end{array} \right\}.$$

Funcţia de scop este definită prin

$$h^{!BGW}(p, q, \lambda, t) := \left(h_1^{!BGW}(p, q, \lambda, t), ..., h_m^{!BGW}(p, q, \lambda, t)\right) \text{ pentru orice } (p, q, \lambda, t) \in \mathcal{A}_{D_A^{!vBGW}},$$

cu

$$h_i^{!BGW}(p, q, \lambda, t) := -f_i^*(p_i) - g_i^*(q_i) + t_i \text{ pentru orice } i \in \{1, ..., m\}.$$

Se poate observa cu uşurinţă că $(D_A^{!vBGW})$ este de fapt o particularizare a problemei $(D_A^{vBGW})$, considerată de această dată într-un context finit dimensional.

**Definiţia 3.3.8** *Un element* $\left(\overline{p},\overline{q},\overline{\lambda},\overline{t}\right) \in \mathcal{A}_{D_A^{!vBGW}}$ *se numeşte* ***soluţie Pareto-eficientă*** *a problemei* $\left(D_A^{!vBGW}\right)$ *dacă* $h^{!BGW}\left(\overline{p},\overline{q},\overline{\lambda},\overline{t}\right) \in \mathbb{R}^m$ *şi pentru orice* $(p,q,\lambda,t) \in \mathcal{A}_{D_A^{!vBGW}}$ *care satisface*

$$h^{!BGW}\left(\overline{p},\overline{q},\overline{\lambda},\overline{t}\right) \leqq_{\mathbb{R}^m_+} h^{!BGW}(p,q,\lambda,t),$$

*egalitatea*

$$h^{!BGW}\left(\overline{p},\overline{q},\overline{\lambda},\overline{t}\right) = h^{!BGW}(p,q,\lambda,t)$$

*este validă.*

Notăm prin v-max$[h^{!BGW}(\mathcal{A}_{P_A^{!v}}) \cap \mathbb{R}^m]$ mulţimea soluţiilor Pareto-eficiente ale lui $(D_A^{!vBGW})$.

Prezentăm în continuare teorema de **dualitate slabă** pentru perechea vectorială primală-duală $\left(P_A^{!v}, D_A^{!vBGW}\right)$.

**Teorema 3.3.9** (Boţ R. I., Dumitru (Grad) A., Wanka G. [20]) *Nu există nici un* $x \in \mathbb{R}^n$ *şi nici un* $(p,q,\lambda,t) \in \mathcal{A}_{D_A^{!vBGW}}$ *cu* $h^{!BGW}(p,q,\lambda,t) \in \mathbb{R}^m$ *astfel încât*

$$(f+g\circ A)(x) \leqq_{\mathbb{R}^m_+} h^{!BGW}(p,q,\lambda,t) \text{ şi } (f+g\circ A)(x) \neq h^{!BGW}(p,q,\lambda,t).$$

**Observaţia 3.3.10** Ca şi în cazul scalar, pentru demonstrarea teoremei de dualitate slabă nu s-au folosit nici ipotezele de convexitate asupra funcţiilor şi nici o altă condiţie de regularitate. ∎

**Observaţia 3.3.11** Teorema 3.3.9 poate fi considerată ca un caz particular al Teoremei 3.2.21 (a).∎

Enunţăm acum teorema de **dualitate tare**.

**Teorema 3.3.12** (Boţ R. I., Dumitru (Grad) A., Wanka G. [20]) *Fie ipotezele* (3.14) *şi condiţia de regularitate* $\left(RC_A^{!v}\right)$ *satisfăcute. Mai mult, fie* $\overline{x} \in \mathcal{A}_{P_A^{!v}}$ *o soluţie propriu eficientă a lui* $\left(P_A^{!v}\right)$*. Atunci există o soluţie eficientă* $\left(\overline{p},\overline{q},\overline{\lambda},\overline{t}\right)$ *a lui* $\left(D_A^{!vBGW}\right)$ *astfel încât*

$$h^{!BGW}\left(\overline{p},\overline{q},\overline{\lambda},\overline{t}\right) = (f+g\circ A)(\overline{x}).$$

**Observaţia 3.3.13** Teorema 3.3.12 poate fi considerată ca o particularizare a Teoremei 3.2.21 (b).∎

**Observaţia 3.3.14** În cazul particular când $n=1$ (notăm $f_1$ şi $g_1$ cu $f$ şi respectiv $g$) duala $(D_A^{!vBGW})$ este exact clasica duală Fenchel din Rockafellar R.T. [103] pentru problema primală scalară

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^n}(f+g\circ A)(x).$$

De aici rezultă că $\left(D_A^{!vBGW}\right)$ este o extensie naturală a problemei scalare Fenchel, în cadrul finit dimensional. ∎

### 3.3.3 Dualitate inversă directă

În această subsecţiune prezentăm o demonstraţie directă pentru o teoremă de dualitate inversă relaţionată cu perechea primală-duală $(P_A^{!v}, D_A^{!vBGW})$. Reamintim faptul că $(D_A^{!vBGW})$ este o particularizare a lui $(D_A^{vBGW})$ şi că pentru ultima problemă amintită dualitatea inversă a fost demonstrată indirect, utilizând teorema de dualitate inversă corespunzătoare dualei $(D_A^{v\leqq})$ (vezi Observaţia 3.2.23).

Pornim prin a prezenta două proprietăţi ajutătoare. Fiecărui $\lambda := (\lambda_1, ..., \lambda_m) \in \operatorname{int} \mathbb{R}^m_+$ îi asociem mulţimea

$$\mathcal{A}^{\lambda}_{D_A^{!vBGW}} := \left\{ \begin{array}{ll} (p, q, t): & p := (p_1, ..., p_m) \in \mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n, \\ & q := (q_1, ..., q_m) \in \mathbb{R}^w \times ... \times \mathbb{R}^w, \\ & t := (t_1, ..., t_m) \in \mathbb{R}^m, \\ & \sum_{i=1}^m \lambda_i (p_i + A^* q_i) = 0, \sum_{i=1}^m \lambda_i t_i = 0 \end{array} \right\}.$$

Apoi asociem fiecărui $y \in \mathbb{R}^m$ mulţimea

$$\Lambda(y) := \left\{ \lambda \in \operatorname{int} \mathbb{R}^m_+ : \exists (p, q, t) \in \mathcal{A}^{\lambda}_{D_A^{!vBGW}} \text{ astfel încât } \langle \lambda, y \rangle = \langle \lambda, h^{!BGW}(p, q, \lambda, t) \rangle \right\}.$$

De asemenea, folosim notaţia

$$\Pi := \{ y \in \mathbb{R}^m : \Lambda(y) \neq \emptyset \}.$$

Următorul rezultat evidenţiază o legătură între mulţimea imagine a problemei duale ($D_A^{!vBGW}$) şi mulţimea $\Pi$.

**Propoziţia 3.3.15** (Grad A. [65]) *Fie ipotezele* (3.14) *satisfăcute. Atunci următoarea egalitate este validă:*

$$h^{!BGW}(\mathcal{A}_{D_A^{!vBGW}}) \cap \mathbb{R}^m = \Pi.$$

Propoziţia următoare conţine o caracterizare a elementelor maximale ale lui $\Pi$.

**Propoziţia 3.3.16** (Grad A. [65]) *Fie ipotezele* (3.14) *satisfăcute. Atunci un element $\overline{y} \in \Pi$ este maxim Pareto-eficient pentru mulţimea $\Pi$ dacă şi numai dacă pentru orice $y \in \Pi$ şi orice $\lambda \in \Lambda(y)$ următoarea inegalitate este validă:*

$$\langle \lambda, \overline{y} \rangle \geq \langle \lambda, y \rangle. \tag{3.15}$$

Prezentăm în continuare o teoremă directă de **dualitate inversă** pentru perechea primală-duală $(P_A^{!vBGW}, D_A^{!vBGW})$.

**Teorema 3.3.17** (Grad A. [65]) *Fie ipotezele* (3.14) *şi condiţia de regularitate* $(RC_A^{!v})$ *satisfăcute. Mai mult, presupunem că pentru orice $\lambda := (\lambda_1, ..., \lambda_m) \in \operatorname{int} \mathbb{R}^m_+$ care satisface inegalitatea*

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^m \lambda_i (f + g \circ A)(x) > -\infty,$$

*există un $x_\lambda \in \mathcal{A}_{P_A^{!v}}$ astfel încât*

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i (f + g \circ A)(x_\lambda) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^m \lambda_i (f + g \circ A)(x). \tag{3.16}$$

*Atunci, pentru fiecare soluţie Pareto-eficientă $(\overline{p}, \overline{q}, \overline{\lambda}, \overline{t}) \in \mathcal{A}_{D_A^{!vBGW}}$ a lui $(D_A^{!vBGW})$, următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

(a) $h^{!BGW}(\overline{p}, \overline{q}, \overline{\lambda}, \overline{t}) \in \operatorname{cl} \Big( (f + g \circ A)(\mathcal{A}_{P_A^{!v}}) + \mathbb{R}^m_+ \Big)$;

(b) *Există o soluţie propriu eficientă* $x_{\overline{\lambda}} \in \mathcal{A}_{P_A^{!v}}$ *a lui* $(P_A^{!v})$ *astfel încât*

$$\sum_{i=1}^{m} \overline{\lambda}_i \left[ (f_i + g_i \circ A)(x_{\overline{\lambda}}) - h_i^{!BGW}(\overline{p}, \overline{q}, \overline{\lambda}, \overline{t}) \right] = 0.$$

(c) *Dacă mulţimea* $(f + g \circ A)(\mathbb{R}^n) + \mathbb{R}^m_+$ *este închisă, atunci există o soluţie propriu eficientă* $\overline{x} \in \mathcal{A}_{P_A^{!v}}$ *a lui* $(P_A^{!v})$ *astfel încât*

$$(f + g \circ A)(\overline{x}) = h^{!BGW}(\overline{p}, \overline{q}, \overline{\lambda}, \overline{t}).$$

**Observaţia 3.3.18** Teorema 3.3.17 (c) poate fi considerată o particularizare a Teoremei 3.2.21 (c). Totuşi, în Teorema 3.3.17 (b) dăm un rezultat mai general. ∎

# Capitolul 4

# Optimizare multivocă

Problemele de optimizare multivocă reprezintă cea mai bună alegere atunci când se doreşte modelarea unor situaţii practice. Acest avantaj este însă însoţit de un dezavantaj, şi anume, lipsa unei abordări unitare a noţiunii de soluţie eficientă în sens multivoc. Realizările personale privind această temă au fost cuprinse în articolul Grad A. [66]. Ele sunt mai generale decât cele obţinute de Hernández E. şi Rodríguez-Marin L. [71], deoarece noi folosim noţiunea de cvasi-interior, care este mai generală decât cea de interior, folosită de autorii anterior menţionaţi. Este important de menţionat că în cazul particular al unei probleme scalare cu restricţii vectoriale, noile condiţii multivoce pentru qi-eficienţă coincid cu cele clasice din optimizarea scalară, spre exemplu cele din Boţ R. I., Csetnek E. R. şi Moldovan A. [16].

## 4.1 Două relaţii noi referitoare la mulţimi, definite cu ajutorul cvasi-interiorului

Considerăm următoarele ipoteze:

$$\left\{ \begin{array}{l} Y \text{ este un spaţiu local convex separat;} \\ K \subset Y \text{ este un con convex punctat cu } \operatorname{qi} K \neq \emptyset. \end{array} \right. \tag{4.1}$$

Reamintim notaţia

$$\mathcal{P}_0(Y) := \{A : A \subseteq Y \text{ şi } A \neq \emptyset\}.$$

Începem prin a prezenta nişte relaţii referitoare la mulţimi, definite cu ajutorul unui con convex, introduse de Kuroiwa D. [84].

**Definiţia 4.1.1** (Kuroiwa D. [84]) *Fie ipotezele* (4.1) *satisfăcute, iar $A$ şi $B$ din $\mathcal{P}_0(Y)$. Atunci scriem:*

(a) $A \leq^l B$ *dacă* $B \subseteq A + K$;

(b) $A \leq^u B$ *dacă* $A \subseteq B - K$;

(c) $A \sim^l B$ *dacă* $A \leq^l B$ *şi* $B \leq^l A$.

**Observaţia 4.1.2** KUROIWA D. [84] a demonstrat că $\sim^l$ este o relaţie de echivalenţă pe $\mathcal{P}_0(Y)$. ∎

**Definiţia 4.1.3** (GRAD A. [66]) *Fie ipotezele* (4.1) *satisfăcute, iar* $A$ *şi* $B$ *din* $\mathcal{P}_0(Y)$. *Atunci scriem:*

(a) $A \trianglelefteq^l_{\mathrm{qi}\,K} B$ *dacă* $B \subseteq A + \mathrm{qi}\,K$;

(b) $A \trianglelefteq^u_{\mathrm{qi}\,K} B$ *dacă* $A \subseteq B - \mathrm{qi}\,K$.

**Observaţia 4.1.4** (a) Relaţiile $\trianglelefteq^l_{\mathrm{qi}\,K}$ şi $\trianglelefteq^u_{\mathrm{qi}\,K}$ sunt tranzitive. ∎

**Propoziţia 4.1.5** (GRAD A. [66]) *Fie ipotezele* (4.1) *satisfăcute, iar* $A$ *şi* $B$ *din* $\mathcal{P}_0(Y)$. *Următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

(a) $A \sim^l B$ *dacă şi numai dacă* $A + K = B + K$.

(b) *Dacă* $A \sim^l B$, *atunci* $A + \mathrm{qi}\,K = B + \mathrm{qi}\,K$.

(c) *Dacă* $A \trianglelefteq^l_{\mathrm{qi}\,K} B$ *şi* $B \trianglelefteq^l_{\mathrm{qi}\,K} A$, *atunci* $A \sim^l B$.

(d) *Dacă* $A \trianglelefteq^l_{\mathrm{qi}\,K} B$ *şi* $B \leq^l A$, *atunci* $B \trianglelefteq^l_{\mathrm{qi}\,K} A$.

(e) $A \trianglelefteq^l_{\mathrm{qi}\,K} B$ *dacă şi numai dacă* $-B \trianglelefteq^u_{\mathrm{qi}\,K} -A$.

(f) *Dacă* $A \trianglelefteq^l_{\mathrm{qi}\,K} B$ *şi* $y \in Y$, *atunci* $A + y \trianglelefteq^l_{\mathrm{qi}\,K} B + y$.

(g) *Dacă* $A \sim^l B$ *şi* $y \in Y$, *atunci* $A + y \sim^l B + y$.

**Observaţia 4.1.6** Afirmaţiile (b) şi (c) din Propoziţia 4.1.5 conduc la concluzia că

$$A \trianglelefteq^l_{\mathrm{qi}\,K} B \text{ şi } B \trianglelefteq^l_{\mathrm{qi}\,K} A \Longrightarrow A \sim^l B \Longrightarrow A + \mathrm{qi}\,K = B + \mathrm{qi}\,K.$$

Aceste implicaţii nu pot fi inversate. ∎

Cu ajutorul relaţiilor introduse în Definiţia 4.1.3 definim patru noi noţiuni de eficienţă referitoare la mulţimi.

**Definiţia 4.1.7** (GRAD A. [66]) *Fie ipotezele* (4.1) *satisfăcute, iar* $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}_0(Y)$. *O mulţime* $A \in \mathcal{S}$ *se numeşte:*

(a) *mulţime* l-$\mathrm{Min}_{\mathrm{qi}}$**-eficientă** *a lui* $\mathcal{S}$ *dacă pentru orice mulţime* $B \in \mathcal{S}$, *care satisface*

$$B \trianglelefteq^l_{\mathrm{qi}\,K} A, \text{ relaţia } A \trianglelefteq^l_{\mathrm{qi}\,K} B \text{ este validă.}$$

(b) *mulţime* l-$\mathrm{Max}_{\mathrm{qi}}$**-eficientă** *a lui* $\mathcal{S}$ *dacă pentru orice mulţime* $B \in \mathcal{S}$, *care satisface*

$$A \trianglelefteq^l_{\mathrm{qi}\,K} B, \text{ relaţia } B \trianglelefteq^l_{\mathrm{qi}\,K} A \text{ este validă.}$$

(c) *mulţime* u-$\mathrm{Min}_{\mathrm{qi}}$**-eficientă** *a lui* $\mathcal{S}$ *dacă pentru orice mulţime* $B \in \mathcal{S}$, *care satisface*

$$B \trianglelefteq^u_{\mathrm{qi}\,K} A, \text{ relaţia } A \trianglelefteq^u_{\mathrm{qi}\,K} B \text{ este validă.}$$

(d) *mulţime* u-Max$_{\mathrm{qi}}$**-eficientă** *a lui* $\mathcal{S}$ *dacă pentru orice mulţime* $B \in \mathcal{S}$*, care satisface*

$$A \trianglelefteq^{u}_{\mathrm{qi}\,K} B, \ \textit{relaţia}\ B \trianglelefteq^{u}_{\mathrm{qi}\,K} A \ \textit{este validă.}$$

Mulţimile formate din toate mulţimile l-Min$_{\mathrm{qi}}$-eficiente, l-Max$_{\mathrm{qi}}$-eficiente, u-Min$_{\mathrm{qi}}$-eficiente şi u-Max$_{\mathrm{qi}}$-eficiente ale lui $\mathcal{S}$ se vor nota prin

$$\text{l-Min}_{\mathrm{qi}}\,\mathcal{S}, \text{l-Max}_{\mathrm{qi}}\,\mathcal{S}, \text{u-Min}_{\mathrm{qi}}\,\mathcal{S} \ \text{şi respectiv} \ \text{u-Max}_{\mathrm{qi}}\,\mathcal{S}.$$

**Observaţia 4.1.8** Este de remarcat faptul că noţiunile din Definiţia 4.1.7 sunt mai generale decât noţiunile uilizate de Hernández E. şi Rodríguez-Marin L. în lucrările [70] şi [71]. ∎

**Observaţia 4.1.9** Fie ipotezele (4.1) satisfăcute, iar $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}_0(Y)$. Din Definiţia 4.1.7 şi Propoziţia 4.1.5 (f) rezultă că

$$y + \text{l-Min}_{\mathrm{qi}}\,\mathcal{S} = \text{l-Min}_{\mathrm{qi}}(y + \mathcal{S}) \ \text{pentru orice}\ y \in Y.$$

Egalităţi similare se pot da şi pentru l-Max$_{\mathrm{qi}}\,\mathcal{S}$, u-Min$_{\mathrm{qi}}\,\mathcal{S}$ şi respectiv u-Max$_{\mathrm{qi}}\,\mathcal{S}$. ∎

**Propoziţia 4.1.10** (Grad A. [66]) *Fie ipotezele* (4.1) *satisfăcute, iar* $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}_0(Y)$*. Atunci următoarea egalitate este validă:*

$$\text{l-Min}_{\mathrm{qi}}(-\mathcal{S}) = -\,\text{u-Max}_{\mathrm{qi}}\,\mathcal{S}. \tag{4.2}$$

## 4.2 Funcţii qi-conjugate şi qi-subgradienţi

Considerăm următoarele ipoteze:

$$\begin{cases} X \text{ este un spaţiu vectorial topologic;} \\ Y \text{ este un spaţiu local convex separat;} \\ K \subset Y \text{ este un con convex, punctat, cu}\, \mathrm{qi}\, K \neq \emptyset; \\ F : X \to \mathcal{P}(Y) \text{ este o funcţie multivocă proprie.} \end{cases} \tag{4.3}$$

### 4.2.1 Funcţii multivoce qi-conjugate

**Definiţia 4.2.1** (Grad A. [66]) *Fie ipotezele* (4.3) *satisfăcute. Funcţia* qi**-conjugată** *a lui* $F$ *este funcţia multivocă* $F^*_{\mathrm{qi}\,K} : \mathcal{L}(X,Y) \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(Y))$ *definită prin*

$$F^*_{\mathrm{qi}\,K}(T) := \text{u-Max}_{\mathrm{qi}}\{Tx - F(x) : x \in X\} \ \textit{pentru orice}\ T \in \mathcal{L}(X,Y).$$

**Observaţia 4.2.2** Din Definiţia 4.1.7 (d) şi ipotezele (4.3) rezultă următoarea egalitate:

$$F^*_{\mathrm{qi}\,K}(T) = \text{u-Max}_{\mathrm{qi}}\{Tx - F(x) : x \in \operatorname{dom} F\}.$$

∎

Următorul rezultat poate fi privit ca o extensie a inegalităţii Fenchel-Young în acest caz multivoc.

**Teorema 4.2.3** (Grad A. [66]) *Fie ipotezele* (4.3) *satisfăcute. Fie* $x_0, x_1 \in \operatorname{dom} F$, *iar* $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ *astfel încât*

$$F(x_1) - Tx_1 \in -F^*_{\mathrm{qi}_K}(T). \tag{4.4}$$

*Atunci următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

(a) *Dacă* $F(x_0) - Tx_0 \trianglelefteq^l_{\mathrm{qi}_K} F(x_1) - Tx_1$, *atunci* $F(x_1) - Tx_1 \trianglelefteq^l_{\mathrm{qi}_K} F(x_0) - Tx_0$.

(b) *Dacă* $F(x_0) - Tx_0 \trianglelefteq^l_{\mathrm{qi}_K} F(x_1) - Tx_1$, *atunci* $F(x_1) - Tx_1 \sim^l F(x_0) - Tx_0$.

### 4.2.2 qi-subgradienţi ai funcţiilor multivoce

Cu ajutorul qi-conjugatei extindem noţiunile de subgradient şi subdiferenţială la funcţii multivoce.

**Definiţia 4.2.4** (Grad A. [66]) *Fie ipotezele* (4.3) *satisfăcute şi fie* $\overline{x} \in \operatorname{dom} F$.

(a) *Un operator* $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ *se numeşte* qi-**subgradient** *al funcţiei multivoce* $F$ *în* $\overline{x}$ *dacă*

$$T\overline{x} - F(\overline{x}) \in F^*_{\mathrm{qi}_K}(T).$$

(b) *Mulţimea tuturor* qi-*subgradienţilor asociaţi lui* $F$ *în* $\overline{x}$ *se numeşte* qi-***subdiferenţiala*** *lui* $F$ *în* $\overline{x}$ *şi se notează cu* $\partial_{\mathrm{qi}_K} F(\overline{x})$.

*Prin convenţie, dacă* $\overline{x} \notin \operatorname{dom} F$, *atunci considerăm prin definiţie că* $\partial_{\mathrm{qi}\,K} F(\overline{x}) = \emptyset$.

**Observaţia 4.2.5** Având în vedere Definiţia 4.2.4, condiţia (4.4) din Teorema 4.2.3 este echivalentă cu $T \in \partial_{\mathrm{qi}\,K} F(x_1)$. ∎

Similar cu cazul scalar, am demonstrat următorul rezultat.

**Propoziţia 4.2.6** (Grad A. [66]) *Fie ipotezele* (4.3) *satisfăcute şi fie* $\overline{x} \in \operatorname{dom} F$. *Atunci*

$$F(\overline{x}) \in \text{l-Min}_{\mathrm{qi}}\{F(x) : x \in X\} \text{ dacă şi numai dacă } 0 \in \partial_{\mathrm{qi}_K} F(\overline{x}).$$

## 4.3 O teorie a perturbării pentru optimizarea multivocă bazată pe cvasi-interior

### 4.3.1 Optimizare multivocă fără restricţii

În această secţiune considerăm problema multivocă de optimizare fără restricţii

$$(P^{sv}_{\mathrm{qi}}) \qquad \underset{x \in X}{\text{l-Min}_{\mathrm{qi}}}\, F(x),$$

care va fi studiată în ipotezele (4.3) şi admiţând că:

$$W \text{ este un spaţiu vectorial topologic.} \tag{4.5}$$

**Definiţia 4.3.1** (Grad A. [66]) *Fie ipotezele* (4.3) *satisfăcute. Un element* $\overline{x} \in \operatorname{dom} F$ *este o* ***soluţie*** qi-***eficientă*** *a lui* $(P_{\mathrm{qi}}^{sv})$ *dacă*

$$F(\overline{x}) \in \text{l-Min}_{\mathrm{qi}}\{F(x) : x \in X\} = \text{l-Min}_{\mathrm{qi}}\{F(x) : x \in \operatorname{dom} F\}.$$

Dezvoltăm o teorie generală de dualitate bazată pe o abordare cu perturbări, folosind cvasi-interiorul unui con convex.

**Definiţia 4.3.2** *Fie ipotezele* (4.3) *şi* (4.5) *satisfăcute. O funcţie multivocă* $\Phi : X \times W \to \mathcal{P}(Y)$, *care satisface egalitatea*

$$\Phi(x, 0) = F(x) \textit{ pentru orice } x \in X,$$

*se numeşte* ***funcţie perturbatoare*** *asociată lui* $F$.

Considerăm o funcţie perturbatoare $\Phi$ asociată lui $(P_{\mathrm{qi}}^{sv})$. Atunci qi-conjugata lui $\Phi$ este funcţia multivocă $\Phi^*_{\mathrm{qi}_K} : \mathcal{L}(X, Y) \times \mathcal{L}(W, Y) \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(Y))$ definită prin

$$\Phi^*_{\mathrm{qi}_K}(H, T) := \text{u-Max}_{\mathrm{qi}}\{Hx + Tw - \Phi(x, w) : (x, w) \in X \times W\}$$

pentru orice $(H, T) \in \mathcal{L}(X, Y) \times \mathcal{L}(W, Y)$.

Introducem următoarea nouă duală multivocă asociată problemei $(P_{\mathrm{qi}}^{sv})$:

$$(D_{\mathrm{qi}}^{sv}) \qquad \underset{T \in \mathcal{L}(W,Y)}{\text{l-Max}_{\mathrm{qi}}} \left[-\Phi^*_{\mathrm{qi}\,K}(0, T)\right].$$

Folosim notaţia

$$\mathcal{A}_{D_{\mathrm{qi}}^{sv}} := \left\{(T, x, w) \in \mathcal{L}(W, Y) \times X \times W : (0, T) \in \partial_{\mathrm{qi}_K} \Phi(x, w)\right\}.$$

**Definiţia 4.3.3** (Grad A. [66]) *Fie ipotezele* (4.3) *şi* (4.5) *satisfăcute. Un operator* $\widetilde{T} \in \mathcal{L}(W, Y)$ *se numeşte* **soluţie** qi-**eficientă** *a dualei* $(D_{\mathrm{qi}}^{sv})$ *dacă există un* $(\widetilde{x}, \widetilde{w}) \in \operatorname{dom} \Phi$ *astfel încât*

$$(\widetilde{T}, \widetilde{x}, \widetilde{w}) \in \mathcal{A}_{D_{\mathrm{qi}}^{sv}} \textit{ şi } -\widetilde{T}\widetilde{w} + \Phi(\widetilde{x}, \widetilde{w}) \in \text{l-Max}_{\mathrm{qi}}\{-Tw + \Phi(x, w) : (T, x, w) \in \mathcal{A}_{D_{\mathrm{qi}}^{sv}}\}.$$

Cu ajutorul următoarei **teoreme de dualitate slabă** certificăm faptul că $(D_{\mathrm{qi}}^{sv})$ este de fapt o duală a lui $(P_{\mathrm{qi}}^{sv})$.

**Teorema 4.3.4** (Grad A. [66]) *Fie ipotezele* (4.3) *şi* (4.5) *satisfăcute, fie* $x_0 \in \operatorname{dom} F$, *iar* $(T, x, w) \in \mathcal{A}_{D_{\mathrm{qi}}^{sv}}$. *Atunci următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

(a) *Dacă* $F(x_0) \trianglelefteq^l_{\mathrm{qi}_K} -Tw + \Phi(x, w)$, *atunci* $-Tw + \Phi(x, w) \trianglelefteq^l_{\mathrm{qi}_K} F(x_0)$.

(b) *Dacă* $F(x_0) \trianglelefteq^l_{\mathrm{qi}_K} -Tw + \Phi(x, w)$, *atunci* $-Tw + \Phi(x, w) \sim^l F(x_0)$.

Următorul rezultat conţine **condiţii de optim** pentru perechea primală-duală $(P_{\mathrm{qi}}^{sv}, D_{\mathrm{qi}}^{sv})$.

**Teorema 4.3.5** (Grad A. [66]) *Fie ipotezele* (4.3) *şi* (4.5) *satisfăcute, fie* $\overline{x} \in \operatorname{dom} F$ *şi fie* $(\widetilde{T}, \widetilde{x}, \widetilde{w}) \in \mathcal{A}_{D_{\mathrm{qi}}^{sv}}$ *astfel încât*

$$F(\overline{x}) \trianglelefteq^l_{\mathrm{qi}\,K} -\widetilde{T}\widetilde{w} + \Phi(\widetilde{x}, \widetilde{w}). \tag{4.6}$$

*Atunci următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

(a) $\overline{x}$ *este o soluţie* qi-*eficientă a lui* $(P^{sv}_{\mathrm{qi}})$.

(b) $\widetilde{T}$ *este o soluţie* qi-*eficientă a lui* $(D^{sv}_{\mathrm{qi}})$.

**Condiţii de optim** suplimentare pentru $(D^{sv}_{\mathrm{qi}})$ pot fi găsite în următoarea teoremă.

**Teorema 4.3.6** (GRAD A. [66]) *Fie ipotezele* (4.3) *şi* (4.5) *satisfăcute. Fie* $\overline{x} \in \operatorname{dom} F$. *Dacă există un operator* $\overline{T} \in \mathcal{L}(W,Y)$ *astfel încât* $(\overline{T}, \overline{x}, 0) \in \mathcal{A}_{D^{sv}_{\mathrm{qi}}}$, *atunci* $\overline{T}$ *este o soluţie* qi-*eficientă a lui* $(D^{sv}_{\mathrm{qi}})$.

**Observaţia 4.3.7** Fie ipotezele Teoremei 4.3.6 satisfăcute. Atunci fiecare operator $\widetilde{T} \in \mathcal{L}(W,Y)$, pentru care există un $(\widetilde{x}, \widetilde{w}) \in \operatorname{dom}\Phi$ astfel încât

$$(\widetilde{T}, \widetilde{x}, \widetilde{w}) \in \mathcal{A}_{D^{sv}_{\mathrm{qi}}} \text{ şi } F(\overline{x}) \trianglelefteq^{l}_{\mathrm{qi}\,K} -\widetilde{T}\widetilde{w} + \Phi(\widetilde{x}, \widetilde{w}),$$

este o soluţie qi-eficientă a lui $(D^{sv}_{\mathrm{qi}})$. ∎

## 4.3.2 Optimizare multivocă cu restricţii

Fie problema generală de optimizare multivocă cu restricţii de tip con

$$(CP^{sv}_{\mathrm{qi}}) \qquad \underset{G(x)\cap(-C)\neq\emptyset}{\text{l-Min}_{\mathrm{qi}}} F(x),$$

considerată sub următoarele ipoteze :

$$(4.7) \qquad \begin{cases} X \text{ şi } W \text{ sunt spaţii vectorial topologice;} \\ Y \text{ şi } Z \text{ sunt spaţii local convexe separate;} \\ K \subset Y \text{ este un con convex, punctat, cu } \operatorname{qi} K \neq \emptyset; \\ C \subset Z \text{ este un con nevid, punctat şi convex;} \\ F : X \to \mathcal{P}(Y) \text{ şi } G : X \to \mathcal{P}(Z) \text{ sunt funcţii multivoce proprii;} \\ \{x \in (\operatorname{dom} F) \cap (\operatorname{dom} G) : G(x) \cap (-C) \neq \emptyset\} \neq \emptyset. \end{cases}$$

Vom folosi notaţia

$$\mathcal{A}_{CP^{sv}_{\mathrm{qi}}} := \{x \in (\operatorname{dom} F) \cap (\operatorname{dom} G) : G(x) \cap (-C) \neq \emptyset\}.$$

**Definiţia 4.3.8** *Fie* $D$ *şi* $E$ *spaţii vectoriale, iar* $M \subseteq D$. *Funcţia multivocă* $\Delta^E_M : D \to \mathcal{P}(E)$ *asociată mulţimii* $M$ *relativ la spaţiul* $E$, *se numeşte* ***funcţia indicator*** *şi este definită prin*

$$\Delta^E_M(x) := \begin{cases} \{0\} & \text{dacă } x \in M \\ \emptyset & \text{dacă } x \notin M. \end{cases}$$

Problema multivocă cu restricţii $(CP^{sv}_{\mathrm{qi}})$ poate fi rescrisă ca o problemă fără restricţii, având o funcţie de scop modificată, după cum urmează:

$$\underset{x\in X}{\text{l-Min}_{\mathrm{qi}}} \left[ F(x) + \Delta^Y_{\mathcal{A}_{CP^{sv}_{\mathrm{qi}}}}(x) \right].$$

O **funcţie perturbatoare** asociată lui $F+\Delta^Y_{\mathcal{A}_{CP^{sv}_{\mathrm{qi}}}}$ este o funcţie multivocă $\Phi^{sv}_C : X\times W \to \mathcal{P}(Y)$ astfel încât

$$\Phi^{sv}_C(x,0) = F(x) + \Delta^Y_{\mathcal{A}_{CP^{sv}_{\mathrm{qi}}}}(x) \text{ pentru orice } x\in X.$$

O duală asociată lui $(CP^{sv}_{\mathrm{qi}})$ cu ajutorul funcţiei $\Phi^{sv}_C$ este

$$(CD^{sv}_{\mathrm{qi}}) \qquad \underset{T\in\mathcal{L}(W,Y)}{\text{l-Max}_{\mathrm{qi}}} \left[-(\Phi^{sv}_C)^*_{\mathrm{qi}\,K}(0,T)\right].$$

Vom folosi notaţia

$$\mathcal{A}_{CD^{sv}_{\mathrm{qi}}} := \left\{(T,x,w)\in\mathcal{L}(W,Y)\times X\times W : (0,T)\in\partial_{\mathrm{qi}_K}\Phi^{sv}_C(x,w)\right\}.$$

**Definiţia 4.3.9** (Grad A. [66]) *Fie ipotezele* (4.7) *satisfăcute. Un operator* $\widetilde{T}\in\mathcal{L}(W,Y)$ *se numeşte* **soluţie** qi**-eficientă** *a dualei* $(CD^{sv}_{\mathrm{qi}})$ *dacă există un* $(\widetilde{x},\widetilde{w})\in\operatorname{dom}\Phi^{sv}_C$ *astfel încât*

$$(\widetilde{T},\widetilde{x},\widetilde{w})\in\mathcal{A}_{CD^{sv}_{\mathrm{qi}}} \text{ şi } -\widetilde{T}\widetilde{w}+\Phi^{sv}_C(\widetilde{x},\widetilde{w})\in\text{l-Max}_{\mathrm{qi}}\{-Tw+\Phi^{sv}_C(x,w) : (T,x,w)\in\mathcal{A}_{CD^{sv}_{\mathrm{qi}}}\}.$$

Enunţăm pentru început **teorema de dualitate slabă**.

**Teorema 4.3.10** (Grad A. [66]) *Fie ipotezele* (4.7) *satisfăcute. Fie* $x_0\in\mathcal{A}_{P^{sv}_C}$*, iar* $(T,x,w)\in\mathcal{A}_{CD^{sv}_{\mathrm{qi}}}$*. Atunci următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

(a) *Dacă* $F(x_0)\trianglelefteq^l_{\mathrm{qi}_K} -Tw+\Phi^{sv}_C(x,w)$*, atunci* $-Tw+\Phi^{sv}_C(x,w)\trianglelefteq^l_{\mathrm{qi}_K} F(x_0)$*.*

(b) *Dacă* $F(x_0)\trianglelefteq^l_{\mathrm{qi}_K} -Tw+\Phi^{sv}_C(x,w)$*, atunci* $-Tw+\Phi^{sv}_C(x,w)\sim^l F(x_0)$*.*

Continuăm cu două teoreme ce conţin **condiţii de optim**.

**Teorema 4.3.11** (Grad A. [66]) *Fie ipotezele* (4.7) *satisfăcute. Fie* $\overline{x}\in\mathcal{A}_{CP^{sv}_{\mathrm{qi}}}$*, iar* $(\widetilde{T},\widetilde{x},\widetilde{w})\in\mathcal{A}_{CD^{sv}_{\mathrm{qi}}}$ *fie astfel încât*

$$F(\overline{x})\trianglelefteq^l_{\mathrm{qi}\,K} -\widetilde{T}\widetilde{w}+\Phi^{sv}_C(\widetilde{x},\widetilde{w}). \tag{4.8}$$

*Atunci următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

(a) $\overline{x}$ *este o soluţie* qi*-eficientă a lui* $(CP^{sv}_{\mathrm{qi}})$*.*

(b) $\widetilde{T}$ *este o soluţie* qi*-eficientă a lui* $(CD^{sv}_{\mathrm{qi}})$*.*

**Teorema 4.3.12** (Grad A. [66]) *Fie ipotezele* (4.7) *satisfăcute şi fie* $\overline{x}\in\mathcal{A}_{CP^{sv}_{\mathrm{qi}}}$*. Dacă există un operator* $\overline{T}\in\mathcal{L}(W,Y)$ *astfel încât* $(\overline{T},\overline{x},0)\in\mathcal{A}_{CD^{sv}_{\mathrm{qi}}}$*, atunci* $\overline{T}$ *este o soluţie* qi*-eficientă a lui* $(CD^{sv}_{\mathrm{qi}})$*.*

**Observaţia 4.3.13** Fie ipotezele Teoremei 4.3.12 satisfăcute. Atunci fiecare operator $\widetilde{T}\in\mathcal{L}(W,Y)$, pentru care există un $(\widetilde{x},\widetilde{w})\in\operatorname{dom}\Phi^{sv}_C$ astfel încât

$$(\widetilde{T},\widetilde{x},\widetilde{w})\in\mathcal{A}_{LCD^{sv}_{\mathrm{qi}}} \text{ şi } F(\overline{x})\trianglelefteq^l_{\mathrm{qi}\,K} -\widetilde{T}\widetilde{w}+\Phi^{sv}_C(\widetilde{x},\widetilde{w}),$$

este o soluţie qi-eficientă a lui $(CD^{sv}_{\mathrm{qi}})$. ∎

### 4.3.3 O regulă multivocă a multiplicatorilor lui Lagrange

În această subsecţiune asociem problemei generale de optimizare multivocă cu restricţii de tip con, de forma $(CP^{sv}_{\text{qi}})$, o duală obţinută prin particularizarea unei funcţii perturbatoare după o metodă similară abordării pentru pertubarea Lagrange în optimizarea scalară.

Fie ipotezele (4.7) satisfăcute. Considerăm următoarea funcţie perturbatoare de tip Lagrange $\Phi^{sv}_L : X \times Z \to \mathcal{P}(Y)$ asociată problemei $(CP^{sv}_{\text{qi}})$:

$$\Phi^{sv}_L(x,z) := \begin{cases} F(x) & \text{dacă } x \in X \text{ şi } (G(x)-z)\cap(-C) \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{în rest.} \end{cases}$$

Este de remarcat faptul că

$$\Phi^{sv}_L(x,z) = \begin{cases} F(x) & \text{dacă } x \in (\operatorname{dom} F)\cap(\operatorname{dom} G) \text{ şi } z \in G(x)+C \\ \emptyset & \text{în rest.} \end{cases}$$

Fiind dat un operator $T \in \mathcal{L}(Z,Y)$, qi-conjugata multivocă asociată perturbării de tip Lagrange $\Phi^{sv}_L$ în $(0,T)$ este

$$(\Phi^{sv}_L)^*_{\text{qi}\,K}(0,T) := \text{u-Max}_{\text{qi}}\{Tz - \Phi^{sv}_L(x,z) : (x,z) \in X \times Z\}.$$

Să remarcăm de asemenea că

$$(\Phi^{sv}_L)^*_{\text{qi}\,K}(0,T) = \text{u-Max}_{\text{qi}}\{Tz - F(x) : x \in Z, z \in G(x)+C\}.$$

Lui $(CP^{sv}_{\text{qi}})$ îi ataşăm următoarea duală multivocă de tip Lagrange:

$$(LCD^{sv}_{\text{qi}}) \qquad \underset{T\in\mathcal{L}(Z,Y)}{\text{l-Max}_{\text{qi}}} \left[-\,(\Phi^{sv}_L)^*_{\text{qi}\,K}\right](0,T).$$

Vom folosi notaţia

$$\mathcal{A}_{LCD^{sv}_{\text{qi}}} := \left\{ \begin{array}{rr} (T,x,z): & T \in \mathcal{L}(Z,Y), x \in X, z \in G(x)+C, \\ & (0,T) \in \partial\Phi^{sv}_{L\ \text{qi}\,K}(x,z) \end{array} \right\}.$$

**Definiţia 4.3.14** *Fie ipotezele* (4.7) *satisfăcute. Un operator* $\widetilde{T} \in \mathcal{L}(Z,Y)$ *se numeşte* ***soluţie*** qi-***eficientă*** *a problemei duale* $(LCD^{sv}_{\text{qi}})$ *dacă există un* $(\widetilde{x},\widetilde{z}) \in \operatorname{dom}\Phi^{sv}_L$ *astfel încât*

$$(\widetilde{T},\widetilde{x},\widetilde{z}) \in \mathcal{A}_{LCD^{sv}_{\text{qi}}} \text{ şi } -\widetilde{T}\widetilde{z} + F(\widetilde{x}) \in \text{l-Max}_{\text{qi}}\left\{-Tz + F(x) : (T,x,z) \in \mathcal{A}_{LCD^{sv}_{\text{qi}}}\right\}.$$

În continuare prezentăm o **teoremă de dualitate tare**.

**Teorema 4.3.15** (Grad A. [66]) *Fie ipotezele* (4.7) *satisfăcute. Fie* $(F,G)$ *o funcţie* $K\times C$*-convexă, iar* $\overline{x} \in \mathcal{A}_{CP^{sv}_{\text{qi}}}$ *astfel încât există* $\overline{y} \in F(\overline{x})$ *cu proprietatea*

$$(\overline{y},0) \notin \text{qri}\left[(F,G)(X) + K \times C\right]. \tag{4.9}$$

*Mai mult, fie*

$$0 \in \text{qi}\left[G(X)+C\right]. \tag{4.10}$$

*Atunci există un operator* $\overline{T} \in \mathcal{L}(Z,Y)$ *care este o soluţie* qi-*eficientă a dualei* $(LCD^{sv}_{\text{qi}})$.

**Observaţia 4.3.16** Fie ipotezele Teoremei 4.3.15 satisfăcute. Atunci fiecare operator $\widetilde{T} \in \mathcal{L}(Z, Y)$, pentru care există un $(\widetilde{x}, \widetilde{z}) \in \operatorname{dom} \Phi_L^{sv}$ astfel încât

$$(\widetilde{T}, \widetilde{x}, \widetilde{z}) \in \mathcal{A}_{LCD_{\mathrm{qi}}^{sv}} \text{ şi } -\overline{T}0 + \Phi_L^{sv}(\overline{x}, 0) \trianglelefteq_{\mathrm{qi}\,K}^{l} -\widetilde{T}\widetilde{z} + \Phi_L^{sv}(\widetilde{x}, \widetilde{z}),$$

este o soluţie qi-eficientă a lui $(LCD_{\mathrm{qi}}^{sv})$. ∎

## 4.4 O aplicaţie la o problemă de optimizare multivocă în $\ell^2(\mathbb{R})$

În această ultimă secţiune a tezei prezentăm un exemplu de problemă de optimizare multivocă pentru care ipotezele teoremei de dualitate tare, i.e. Teorema 4.3.15, sunt verificate. Aplicaţia noastră a fost inspirată din Csetnek E. R. [43, Exemplul 2.10] şi este formulată sub următoarele prezumţii, care se dovedesc a fi particularizări ale ipotezelor generale (4.7):

$$\text{(4.11)} \qquad \begin{cases} X := \ell^2(\mathbb{R}), Y := \mathbb{R}, Z := \ell^2(\mathbb{R}), K := \mathbb{R}_+, C := \ell_+^2(\mathbb{R}); \\ F : \ell^2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}) \text{ este definită prin } F(\mu) := \begin{cases} \{\|\mu\|_{\ell^2(\mathbb{R})}\} & \text{dacă } \mu \in \ell_+^2(\mathbb{R}) \\ \emptyset & \text{în rest} \end{cases}; \\ G : \ell^2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\ell^2(\mathbb{R})) \text{ este definită prin } G(\mu) := \begin{cases} \{-\mu\} & \text{dacă } \mu \in \ell_+^2(\mathbb{R}) \\ \emptyset & \text{în rest} \end{cases}. \end{cases}$$

Remarcăm că $(\operatorname{dom} F) \cap (\operatorname{dom} G) = \ell_+^2(\mathbb{R})$, $\mathrm{qi}\, K = \mathrm{qi}\, \mathbb{R}_+$. Deoarece $\mathbb{R}$ este un spaţiu finit dimensional, are loc egalitatea $\mathrm{qi}\, \mathbb{R}_+ = \operatorname{int} \mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$.

Reamintim nişte proprietăţi importante ale mulţimii

$$\ell^2(\mathbb{R}) := \{\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \sum_{x \in \mathbb{R}} |\mu(x)|^2 < +\infty\}.$$

Funcţia $\|\cdot\|_{\ell^2(\mathbb{R})} : \ell^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ defintă prin

$$\|\mu\|_{\ell^2(\mathbb{R})} := \left(\sum_{x \in \mathbb{R}} |\mu(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sup_{F \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}), F \text{ finită}} \sum_{x \in F} |\mu(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \text{ pentru orice } \mu \in \ell^2(\mathbb{R})$$

este o normă pe $\ell^2(\mathbb{R})$, iar spaţiul vectorial $\ell^2(\mathbb{R})$, echipat cu această normă este un spaţiu Banach. Spaţiul dual $(\ell^2(\mathbb{R}))^*$ se identifică cu $\ell^2(\mathbb{R})$. Mai mult, mulţimea

$$\ell_+^2(\mathbb{R}) := \{\mu \in \ell^2(\mathbb{R}) : \mu(x) \geq 0 \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}\}$$

este un con convex punctat, iar din Borwein J. M., Lucet Y. şi Mordukhovich B. [11, Observaţia 2.20] ştim că $\mathrm{qri}\, \ell_+^2(\mathbb{R}) = \emptyset$. De asemenea, este adevărat că

$$\text{(4.12)} \qquad \ell_+^2(\mathbb{R}) - \ell_+^2(\mathbb{R}) = \ell^2(\mathbb{R}).$$

Se observă uşor că $\overline{\mu} := 0 \in \ell^2(\mathbb{R})$ este o soluţie qi-eficientă a problemei de optimizare multivocă

$$(P_{\ell^2(\mathbb{R})}^{sv}) \qquad \underset{\substack{\mu \in \ell_+^2(\mathbb{R}) \\ G(\mu) \cap (-\ell_+^2(\mathbb{R})) \neq \emptyset}}{\text{l-Min}_{\mathrm{qi}}} \left[\|\mu\|_{\ell^2(\mathbb{R})}\right].$$

Asociem lui $(P^{sv}_{\ell^2(\mathbb{R})})$ o duală multivocă de tip Lagrange cu ajutorul unei funcţii perturbatoare $\Phi_{\ell^2(\mathbb{R})} : \ell^2(\mathbb{R}) \times \ell^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definite prin

$$\begin{aligned}\Phi_{\ell^2(\mathbb{R})}(\mu,\zeta) :&= \left\{F(\mu) : \mu \in \ell^2(\mathbb{R}), G(\mu) - \zeta \in -\ell^2_+(\mathbb{R})\right\}\\ &= \left\{\|\mu\|_{\ell^2(\mathbb{R})} : \mu \in \ell^2_+(\mathbb{R}), \zeta \in -\mu + \ell^2_+(\mathbb{R})\right\}\end{aligned}$$

pentru orice $(\mu,\zeta) \in \ell^2(\mathbb{R}) \times \ell^2(\mathbb{R})$.

Funcţia multivocă qi-conjugată asociată lui $\Phi_{\ell^2(\mathbb{R})}$

$$(\Phi_{\ell^2(\mathbb{R})})^*_{\mathrm{qi}\,\mathbb{R}_+} : \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{R}),\mathbb{R}) \times \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{R}),\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$$

este definită prin

$$\begin{aligned}(\Phi_{\ell^2(\mathbb{R})})^*_{\mathrm{qi}\,\mathbb{R}_+}(0,T) :&= \text{u-Max}_{\mathrm{qi}}\{T\zeta - \Phi(\mu,\zeta) : (\mu,\zeta) \in \ell^2(\mathbb{R}) \times \ell^2(\mathbb{R})\}\\ &= \text{u-Max}_{\mathrm{qi}}\{T\zeta - \|\mu\|_{\ell^2(\mathbb{R})} : \mu \in \ell^2_+(\mathbb{R}), \zeta \in -\mu + \ell^2_+(\mathbb{R})\}\end{aligned}$$

pentru orice $T \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{R}),\mathbb{R})$.

O duală multivocă de tip Lagrange asociată lui $(P^{sv}_{\ell^2(\mathbb{R})})$ este

$$(LD^{sv}_{\ell^2(\mathbb{R})}) \qquad \underset{T\in\mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{R}),\mathbb{R})}{\text{l-Max}_{\mathrm{qi}}} \left[-(\Phi_{\ell^2(\mathbb{R})})^*_{\mathrm{qi}\,\mathbb{R}_+}(0,T)\right].$$

Vom folosi notaţia

$$\mathcal{A}_{LD^{sv}_{\ell^2(\mathbb{R})}} := \left\{\begin{array}{r}(T,\mu,\zeta) : T \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{R}),\mathbb{R}), \mu \in \ell^2(\mathbb{R}), \zeta \in \ell^2(\mathbb{R}),\\ T\zeta - \Phi(\mu,\zeta) \in -(\Phi_{\ell^2(\mathbb{R})})^*_{\mathrm{qi}\,\mathbb{R}_+}(0,T)\end{array}\right\}.$$

Se remarcă de asemenea că

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{LD^{sv}_{\ell^2(\mathbb{R})}} &= \left\{\begin{array}{r}(T,\mu,\zeta) : T \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{R}),\mathbb{R}), \mu \in \ell^2_+(\mathbb{R}), \zeta \in -\mu + \ell^2_+(\mathbb{R}),\\ T\zeta - \|\mu\|_{\ell^2(\mathbb{R})} \in -(\Phi_{\ell^2(\mathbb{R})})^*_{\mathrm{qi}\,\mathbb{R}_+}(0,T)\end{array}\right\}\\ &= \left\{\begin{array}{r}(T,\mu,\zeta) : T \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{R}),\mathbb{R}), \mu \in \ell^2_+(\mathbb{R}), \zeta \in -\mu + \ell^2_+(\mathbb{R}),\\ (0,T) \in \partial_{\mathrm{qi}\,\mathbb{R}_+}(\Phi_{\ell^2(\mathbb{R})})(\mu,\zeta)\end{array}\right\}.\end{aligned}$$

Se demonstrează că ipotezele Teoremei 4.3.15 sunt satisfăcute. În consecinţă, există un operator $\overline{T} \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{R}),\mathbb{R})$ care este o soluţie qi-eficientă a lui $(LD^{sv}_{\ell^2(\mathbb{R})})$.

# Bibliografie


[1] Alonso M., Rodríguez-Marin L.: *Set-relations and optimality conditions in set-valued maps*, Nonlinear Anal. **63**, 1167-1179 (2005)

[2] Aubin J. P.: *Optima and Equlibria: An Introduction to Nonlinear Analysis*, 2nd Edition, Springer, Berlin-Heidelberg-New York (2003)

[3] Aubin J. P., Frankowska H.: *Set-Valued Analysis*, Birkhäuser (1990)

[4] Baier J., Jahn J.: *On subdifferentials of set-valued maps*, J. Optim. Theory Appl. **100**, no. 1, 233-240 (1999)

[5] Barbu V., Precupanu T.: *Convexity and Optimization in Banach Spaces*, Ed. Academiei Române, Bucureşti (1986)

[6] Blaga L., Lupşa L.: *Operations Research* (in Romanian), Editura Mega, Editura Argonaut, Cluj-Napoca (2006)

[7] Borwein J. M., Goebel R.: *Notions of relative interior in Banach spaces*, J. Math. Sci. (N.Y.) **115**, no. 4, 2542-2553 (2003)

[8] Borwein J. M., Jeyakumar V., Lewis A. S., Wolkowicz H.: *Constrained Approximation via Convex Programming*, Preprint, University of Waterloo (1988)

[9] Borwein J. M., Lewis A. S.: *Partially finite convex programming, Part I: Quasi relative interiors and duality theory*, Math. Programming **57**, no. 1, Ser. B, 15-48 (1992)

[10] Borwein J. M., Lewis A. S.: *Convex Analysis and Nonlinear Optimization: Theory and Examples*, Second Edition, CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC **3**, Springer, New York (2006)

[11] Borwein J. M., Lucet Y., Mordukhovich B.: *Compactly epi-Lipschitzian convex sets and functions in normed spaces*, J. Convex Anal. **7**, no. 2, 375-393 (2000)

[12] Borwein J. M., Vanderwerff J. D.: *Convex Functions: Constructions, Characterizations and Counterexamples*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **109**, Cambridge University Press, Cambridge (2010)

[13] Boţ R. I.: *Duality and Optimality in Multiobjective Optimization,* Ph.D. Thesis, Chemnitz University of Technology (2003)

[14] Boţ R. I.: *Conjugate Duality in Convex Optimization*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems **637**, Springer, Berlin-Heidelberg (2010)

[15] Boţ R. I., Csetnek E. R.: *Regularity conditions via generalized interiority notions in convex optimization: new achievements and their relation to some classical statements*, to apear in Optimization, arXiv:0906.0453, posted 2 June (2009)

[16] Boţ R. I., Csetnek E. R., Moldovan A.: *Revisiting some duality theorems via the quasirelative interior in convex optimization*, J. Optim. Theory Appl. **139**, no. 1, 67-84 (2008)

[17] Boţ R. I., Csetnek E. R., Wanka G.: *Sequential optimality conditions in convex programming via perturbation approach*, J. Convex Anal. **15**, no. 1, 149-164 (2008)

[18] Boţ R. I., Csetnek E. R., Wanka G.: *Sequential optimality conditions for composed convex optimization problems*, J. Math. Anal. Appl. **342**, no. 2, 1015-1025 (2008)

[19] Boţ R. I., Csetnek E. R., Wanka G.: *Regularity conditions via quasi-relative interior in convex programming*, SIAM J. Optim. **19**, no. 1, 217-233 (2008)

[20] Boţ R. I., Dumitru (Grad) A., Wanka G.: *A new Fenchel dual problem in vector optimization*, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. **119**, no. 2, 251-265 (2009)

[21] Boţ R. I., Grad A., Wanka G.: *Sequential characterization of some efficient solutions in vector optimization*, Faculty of Mathematics, Chemnitz University of Techno- logy, Preprint 22 (2007)

[22] Boţ R. I., Grad A., Wanka G.: *Sequential characterization of solutions in convex composite programming and applications to vector optimization*, J. Ind. Manag. Optim. **4**, no. 4, 767-782 (2008)

[23] Boţ R. I., Grad S. M., Wanka G.: *A general approach for studying duality in multiobjective optimization*, Math. Methods Oper. Rest. **65**, no. 3, 417-444 (2007)

[24] Boţ R. I., Grad S. M., Wanka G.: *New regularity conditions for strong and total Fenchel-Lagrange duality in infinite dimensional spaces*, Nonlinear Anal. **69**, no. 1, 323-336 (2008)

[25] Boţ R. I., Grad S. M., Wanka G.: *On strong and total Lagrange duality for convex optimization problems*, J. Math. Anal. Appl. **337**(2), 1315-1325 (2008)

[26] Boţ R. I., Grad S. M., Wanka G.: *Duality in Vector Optimization*, Springer, Berlin-Heidelberg (2009)

[27] Boţ R. I., Wanka G.: *An analysis of some dual problems in multiobjective optimization (I)*, Optimization **53**, no. 3, 281– 300 (2004)

[28] Boţ R. I., Wanka G.: *An analysis of some dual problems in multiobjective optimization (II)*, Optimization **53**, no. 3, 301–324 (2004)

[29] Boţ R. I., Wanka G.: *An alternative formulation of a closed cone constraint qualification*, Nonlinear Anal. **64**, no. 6, 1367-1381 (2006)

[30] Breckner W. W.: *Dual Optimization Problems in Ordered Topological Vector Spaces* (in Romanian), Academia R.S.R., Filiala din Cluj, Institutul de Calcul (1969)

[31] Breckner W. W.: *Dualität bei Optimierungsaufgaben in halbgeordneten topologischen Vektorräumen (I)*, Rev. Anal. Numér. Théorie Approximation **1**, 5-35 (1972)

[32] Breckner W. W.: *Dualität bei Optimierungsaufgaben in halbgeordneten topologischen Vektorräumen (II)*, Rev. Anal. Numér. Théorie Approximation **2**, 27-35 (1973)

[33] Breckner W. W.: *Operations Research* (in Romanian), Universitatea Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca (1981)

[34] Breckner W. W.: *Functional Analysis* (in Romanian), Cluj University Press, Cluj-Napoca (2009)

[35] Breckner W. W., Kassay G.: *A systematization of convexity concepts for sets and functions*, J. Convex Anal. **4**, no. 1, 109-127 (1997)

[36] Breckner W. W., Kolumbán I.: *Dualität bei Optimierungsaufgaben in topologischen Vektorräumen*, Mathematica (Cluj) **10(33)**, 229-244 (1968)

[37] Breckner W. W., Kolumbán I.: *Konvexe Optimierungsaufgaben in topologischen Vektorräumen*, Math. Scand. **25**, 227-247 (1970)

[38] Cammaroto F., Di Bella B.: *Separation theorem based on the quasi-relative interior and application to duality theory*, J. Optim. Theory Appl. **125**, no. 1, 223-229 (2005)

[39] Cammaroto F., Di Bella B.: *On a separation theorem involving the quasi-relative interior*, Proc. Edinb. Math. Soc.(2) **50**, no. 3, 605-610 (2007)

[40] Chen G. Y., Jahn J.: *Optimality conditions for set-valued optimization problems*, Math. Methods Oper. Res. **48**, no. 2, 187-200 (1998)

[41] Combari C., Laghdir M., Thibault L.: *Sous-différentiels de fonctions convexes composées*, Ann. Sci. Math. Québec **18**, no. 2, 119-148 (1994)

[42] Corley H. W.: *Optimality conditions for maximizations of set-valued functions*, J. Optim. Theory Appl. **58**, no. 1, 1-10 (1988)

[43] Csetnek E. R.: *Overcoming the Failure of the Classical Generalized Interior-point Regularity Conditions in Convex Optimization. Applications of the Duality Theory to Enlargements of Maximal Monotone Operators*, Logos Verlag, Berlin (2010)

[44] Daniele P.: *Lagrange multipliers and infinite-dimensional equilibrium problems*, J. Global Optim. **40**, no. 1-3, 65-70 (2008)

[45] Daniele P., Giuffré S.: *General infinite dimensional duality theory and applications to evolutionary network equilibrium problems*, Optim. Lett. **1**, no. 3, 227-243 (2007)

[46] Daniele P., Giuffré S., Idone G., Maugeri A.: *Infinite dimensional duality and applications*, Math. Ann. **339**, no. 1, 221-239 (2007)

[47] Durea M., Dutta J., Tammer C.: *Bounded sets of Lagrange multipliers for vector optimization problems in infinite dimension*, J. Math. Anal. Appl. **348**, 589-606 (2008)

[48] Durea M., Dutta J., Tammer C.: *Stability properties of KKT points in vector optimization*, Martin Luther University Halle-Wittenberg, Institute of Mathematics, Report No. 18 (2009)

[49] Ekeland I., Temam R.: *Convex Analysis and Variational Problems*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam (1976)

[50] Frenk J. B. G., Kassay G.: *Introduction to Convex and Quasiconvex Analysis*, in Hadjisavvas N., Komlósi S., Schaible S. (Eds.): *Handbook of Generalized Convexity and Monotonicity*, Nonconvex Optimization and its Applications **76**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 3-87 (2005)

[51] Gerth C., Weidner P.: *Nonconvex separation theorems and some applications in vector optimization*, J. Optim. Theory Appl. **67**, 297-320 (1990)

[52] Gerstewitz C.: *Nichtkonvexe Dualität in der Vektoroptimierung*, Wiss. Z. Tech. Hochsch., Leuna-Merseburg **25**, 357-364 (1983)

[53] Gerstewitz C., Göpfert A.: *Zur Dualität in der Vektoroptimierung*, Seminarbericht 39, Sektion Mathematik, Humboldt-Universität Berlin, 67-84 (1981)

[54] Gerstewitz C., Iwanow E.: *Dualität für nichtkonvexe Vektoroptimierungsprobleme*, Wiss. Z. Tech. Hochsch. Ilmenau **2**, 61-81 (1985)

[55] Giannessi F.: *Constrained Optimization and Image Space Analysis, Vol. 1, Separation of Sets and Optimality Conditions*, Mathematical Concepts and Methods in Science and Engineering **49**, Springer, New York (2005)

[56] Göpfert A., Gerth C.: *Über die Skalarisierung und Dualisierung von Vektoroptimierungsproblemen*, Zeitschrift für Analysis und Anwendungen **5**, 377-384 (1986)

[57] Göpfert A., Riahi H., Tammer C., Zălinescu C.: *Variational Methods in Partially Ordered Spaces*, Springer, New York (2003)

[58] Götz A., Jahn J.: *The Lagrange multiplier rule in set-valued optimization*, SIAM J. Optim. **10**, 331-344 (1999)

[59] Gowda M. S., Teboulle M.: *A comparison of constraint qualifications in infinite-dimensional convex programming*, SIAM J. Control Optim. **28**, no. 4, 925-935 (1990)

[60] Grad A.: *Optimality conditions with sequences in basic vector optimization*, in Cobzaş S. (Ed.): *Topics in Mathematics, Computer Science and Philosophy, A Festschrift for Wolfgang W. Breckner on his 65th Anniversary,* Cluj University Press, 123-132 (2008)

[61] Grad A.: *Strong and converse Fenchel duality for vector optimization problems in locally convex spaces*, Studia Univ. Babeş-Bolyai Math. **54**, no. 3, 43-66 (2009)

[62] Grad A.: *Improved sequential optimality conditions for convex optimization problems with cone-epi-closed functions*, Creat. Math. Inform. **18**, no. 1, 26-38 (2009)

[63] Grad A.: *Improved sequential optimality conditions for vector optimization problems with cone-epi-closed functions*, Annals of the "Tiberiu Popoviciu" Seminar of Functional Equations, Approximation and Convexity **7**, 55-72 (2009)

[64] Grad A.: *Quasi-relative interior-type constraint qualifications ensuring strong Lagrange duality for optimization problems with cone and affine constraints*, J. Math. Anal. Appl. **361**, no. 1, 86-95 (2010)

[65] Grad A.: *Converse duality for a new Fenchel dual problem in vector optimization*, Annals of the "Tiberiu Popoviciu" Seminar of Functional Equations, Approximation and Convexity **8**, 27-37 (2010)

[66] Grad A.: *Set-valued duality by means of quasi interior*, (submitted for publication)

[67] Hamel A. H.: *A duality theory for set-valued functions. I: Fenchel conjugation theory*, Set-Valued Anal. **17**, no. 2, 153-182 (2009)

[68] Hamel A. H., Löhne A.: *Minimal element theorems and Ekeland's priciple with set relations*, J. Nonlinear Convex Anal. **7**, no. 1, 19-37 (2006)

[69] Holmes R. B.: *Geometric Functional Analysis*, Springer, Berlin (1975)

[70] Hernández E., Rodríguez-Marin L.: *Nonconvex scalarization in set optimization with set-valued maps*, J. Math. Anal. Appl. **325**, 1-18 (2007)

[71] Hernández E., Rodríguez-Marin L.: *Lagrangian duality in set-valued optimization*, J. Optim. Theory Appl. **134**, 119-134 (2007)

[72] Hernández E., Rodríguez-Marin L.: *Existence theorems for set optimization problems*, Nonlinear Anal. **67**, 1726-1736 (2007)

[73] Hiriart-Urruty J. B., Lemaréchal C: *Convex Analysis and Minimization Algorithms. I: Fundamentals*, Springer, Berlin (1993)

[74] Hiriart-Urruty J. B., Lemaréchal C: *Convex Analysis and Minimization Algorithms. II: Advanced theory and bundle methods*, Springer, Berlin (1993)

[75] Hiriart-Urruty J. B., Lemaréchal C: *Fundamentals of Convex Analysis*, Springer, Berlin (2001)

[76] Jahn J.: *Duality in vector optimization*, Math. Programming **25**, no. 3, 343-353 (1983)

[77] Jahn J.: *Scalarization in vector optimization*, Math. Programming **29**, no. 2, 203-218 (1984)

[78] Jahn J.: *Vector Optimization - Theory, Applications, and Extensions*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York (2004)

[79] Jahn J., Khan A. A.: *Generalized contingent epiderivatives in set-valued optimization: optimality conditions*, Num. Funct. Anal. Optim. **23**, no. 7-8, 807-831 (2002)

[80] Jahn J., Rauh R.: *Contingent epiderivatives and set-valued optimization*, Math. Methods Oper. Res. **46**, no. 2, 193-211 (1997)

[81] Jeyakumar V., Song W., Dinh N., Lee G. M.: *Stable strong duality in convex optimization*, Applied Mathematics Report AMR 05/22. University of New South Wales (2005)

[82] Jeyakumar V., Wolkowicz H.: *Generalizations of Slater's constraint qualification for infinite convex programs*, Math. Programming Ser. B **57**, no. 1, 85-101 (1992)

[83] Jeyakumar V., Wu Z. Y.: *A qualification free sequential Pshenichnyi-Rockafellar lemma and convex semidefinite programming*, J. Convex Anal. **13**, no. 3-4, 773-784 (2006)

[84] Kuroiwa D.: *The natural criteria in set-valued optimization*, RIMS Kokyuroku **1031**, 85-90 (1998)

[85] Kuroiwa D.: *On natural criteria in set-valued optimization*, RIMS Kokyuroku **1048**, 86-92 (1998)

[86] Kuroiwa D.: *Lagrange duality of set-valued optimization with natural criteria*, RIMS Kokyuroku **1068**, 164-170 (1998)

[87] Kuroiwa D.: *On set-valued optimization*, Nonlin. Anlysis **47**, 1395-1400 (2001)

[88] Kuroiwa D.: *Existence of efficient points of set optimization with weighted criteria*, J. Nonlinear Convex Anal. **4**, 117-123 (2003)

[89] Kuroiwa D.: *Existence theorems of set optimization with set-valued maps*, J. Inf. Optim. Sci. **24**, 73-84, (2003)

[90] Kuroiwa D., Tanaka T., Truong X. D. H.: *On cone convexity of set-valued maps*, Nonlinear Anal. **30**, no. 3, 1487-1496 (1997)

[91] Limber M. A., Goodrich R. K.: *Quasi interiors, Lagrange multipliers and $L^p$ spectral estimation with lattice bounds*, J. Optim. Theory Appl. **78**, no. 1, 143-161 (1993)

[92] Löhne A.: *Optimization with set relations*, Ph.D. Thesis, Martin Luther University Halle-Wittenberg, Institute of Mathematics (2005)

[93] Löhne A.: *Optimization with set relations: conjugate duality*, Optimization **54**, no. 3, 265-282 (2005)

[94] Löhne A., Tammer C.: *A new approach to duality in vector optimization*, Optimization **56**, no. 1, 221-239 (2007)

[95] Luc D. T.: *Theory of Vector Optimization*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems **319**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York (1989)

[96] Luc D. T.: *Contingent derivatives of setvalued maps and applications to vector optimization*, Math. Programming **50**, 99-111 (1991)

[97] Malivert C.: *Fenchel duality in vector optimization*, in Oettli W., Pallaschke D. (Eds.): *Advances in Optimization*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems **382**, Springer, Berlin-Heidelberg, 420-438 (1992)

[98] Maugeri A., Raciti F.: *On general infinite dimensional complementarity problems*, Optim. Lett. **2**, no. 1, 71-90 (2008)

[99] Pascoletti A., Serafini P.: *Scalarizing vector optimization problems*, J. Optim. Theory Appl. **42**, no. 4, 499-524 (1984)

[100] Penot J. P., Théra M.: *Semi-continuous mappings in general topology*, Arch. Math. (Basel) **38**, no. 2, 158-166 (1982)

[101] Preda V., Stancu-Minasian I. M., Koller E.: *On optimality and duality for multiobjective programming problems involving generalized d-type-I and related n-set functions*, J. Math. Anal. Appl. **283**, no. 1, 114-128 (2003)

[102] Pshenichnyi B. N.: *Necessary Conditions for an Extremum*, Pure and Applied Mathematics **4**, Marcel Dekker, New York (1971)

[103] Rockafellar R. T.: *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton (1970)

[104] Rockafellar R. T.: *Conjugate Duality and Optimization*, CBMS Reg. Conf. Ser. Math. **16**, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia (1974)

[105] Rubinov A.: *Sublinear operators and their applications*, Russian Mathematical Surveys **32**(4), 115-175 (1977)

[106] Sawaragi Y., Nakayama H., Tanino T.: *Theory of Multiobjective Optimization*, Mathematics in Science and Engineering **176**, Academic Press, Orlando (1985)

[107] Song W.: *Conjugate duality in set-valued vector optimization*, J. Math. Anal. Appl. **216**, no. 1, 265-283 (1997)

[108] Song W.: *A generalization of Fenchel duality in set-valued vector optimization*, Math. Methods Oper. Res. **8**, no. 2, 259-272 (1998)

[109] Song W.: *Duality in Set-Valued Optimization*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) **375**, no. 69 (1998)

[110] Stancu-Minasian I. M.: *Optimality and duality in nonlinear programming involving semilocally B-preinvex and related functions*, Eur. J. Oper. Res. **173**, no. 1, 47-58 (2006)

[111] Tammer C., Göpfert A.: *Theory of vector optimization*, in Ehrgott M., Gandibleux X. (Eds.): *Multiple Criteria Optimization: State of the Art Annoted Bibliographic Surveys*, International Series in Operations Research and Management Science **25**, Kluwer, Boston, 1-70 (2002)

[112] Tanino T.: *Conjugate duality in vector optimization*, J. Math. Anal. Appl. **167**, 84-97 (1992)

[113] Tanino T., Sawaragi Y.: *Conjugate maps and duality in multiobjective optimization*, J. Optim. Theory Appl. **31**, no. 4, 473-499 (1980)

[114] Thibault L.: *Sequential convex subdifferential calculus and sequential Lagrange multipliers*, SIAM J. Control Optim. **35**, no. 4, 1434-1444 (1997)

[115] Wanka G., Boţ R. I.: *On the relations between different dual problems in convex mathematical programming*, in Chamoni P., Leisten R., Martin A., Minnermann J., Stadtler H. (Eds.): *Operations Research Proceedings 2001*, Springer, Berlin, 255-262

[116] Wanka G., Boţ R. I.: *A new duality approach for multiobjective convex optimization problems*, J. Nonlinear Convex Anal. **3**, no. 1, 41-57 (2002)

[117] Weir T., Mond B.: *Generalised convexity and duality in multiple objetive programming*, Bull. Austral. Math. Soc. **39**, no. 2, 287-299 (1989)

[118] Weir T., Mond B.: *Multiple objective programming duality without a constraint qualification*, Utilitas Math. **39**, 41-55 (1991)

[119] Zălinescu C.: *On two notions of proper efficiency*, in Brosowski B., Martensen E. (Eds.): *Optimization in Mathematical Physics.* Methoden und Verfahren der Mathe- matischen Physik **34**, 77-86 (1987)

[120] Zălinescu C.: *A comparison of constraint qualifications in infinite-dimensional convex programming revisited*, J. Aust. Math. Soc. Ser. B **40**, no. 3, 353-378 (1999)

[121] Zălinescu C.: *Convex Analysis in General Vector Spaces*, World Scientific, Singapore (2002)