FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI
CLUJ-NAPOCA, ROMÂNIA

REZUMAT

TEZĂ DE DOCTORAT

CONTRIBUŢII LA

APROXIMAREA FUNCŢIILOR

CONDUCĂTOR ŞTIINŢIFIC,
PROF. UNIV. DR. **IOAN GAVREA**

DOCTORAND,
ADRIAN HOLHOŞ

2010

Cuprins

Cuvinte cheie

Operatori liniari şi pozitivi, ordin de aproximare, modul de continuitate, teoreme de tip Korovkin, spaţii ponderate, funcţii nemărginite, funcţii convexe, aproximare prin funcţii raţionale

Introducere

Teoria aproximării este un domeniu al analizei matematice, care are în centrul preocupărilor sale, aproximarea funcţiilor prin alte funcţii, care sunt mai simple şi mai uşor de calculat. Aşa cum remarca A.F. Timan [136, p. 1], baza teoriei aproximării funcţiilor de variabilă reală este teorema descoperită de K. Weierstrass [154] în 1885, care spune că *orice funcţie $f(x)$ continuă pe intervalul finit $[a,b]$, poate fi aproximată uniform oricât de bine prin polinoame.* În 1912, S.N. Bernstein [21] dă o demonstraţie simplă şi elegantă, teoremei lui Weierstrass, construind un şir de polinoame care converge uniform la funcţia de aproximat. Astfel, au fost introduşi operatorii Bernstein (aplicaţiile care asociază funcţiei de aproximat şirul de polinoame aproximante). Aceşti operatori fac parte din clasa operatorilor liniari şi pozitivi.

Teoria aproximării funcţiilor cu ajutorul operatorilor liniari şi pozitivi ia un mare avânt prin anii '50, când T. Popoviciu [110], H. Bohman [23] şi P.P. Korovkin [90, 91], descoperă, independent, un criteriu simplu şi uşor de aplicat, pentru a arăta că un şir de operatori liniari şi pozitivi converge uniform la funcţia de aproximat: *condiţia necesară şi suficientă pentru convergenţa uniformă a şirului de operatori liniari şi pozitivi A_n către funcţia continuă f pe intervalul compact $[a,b]$ este ca şirul A_nf să conveargă uniform către f pentru doar trei funcţii, $e_k(x) = x^k$, $k = 0,1,2$.* Dacă intervalul de definiţie al funcţiei f este nemărginit (spre exemplu $[0,\infty)$), atunci rezultatul nu mai are loc pentru toate funcţiile continue, ci doar pentru acele funcţii continue, care au limită finită la infinit. În acest caz, cele trei funcţii test, x^k, $k = 0,1,2$ sunt înlocuite cu alte trei funcţii (e^{-kx}, $k = 0,1,2$ sunt un astfel de exemplu).

Pentru a extinde teorema lui Popoviciu-Bohman-Korovkin pentru funcţii continue şi nemărginite, definite pe $C[0,\infty)$, trebuie ca anumite margini să fie impuse funcţiilor considerate, fapt care a fost observat de Z. Ditzian [45]. În 1974, A.D. Gadjiev [60, 61] introduce spaţiul ponderat $C_\rho(I)$, care se defineşte ca fiind mulţimea tuturor funcţiilor continue f pe intervalul $I \subseteq \mathbb{R}$ pentru care există o constantă pozitivă $M > 0$ astfel încât $|f(x)| \leq M \cdot \rho(x)$, pentru orice x din intervalul I, unde ρ este o funcţie continuă, strict pozitivă, dată şi care este numită pondere. Un astfel de spaţiu se dovedeşte a fi un spaţiu Banach, care poate fi înzestrat cu norma

$$\|f\|_\rho = \sup_{x\in I} \frac{|f(x)|}{\rho(x)}.$$

Teorema de tip Korovkin este următoarea: *pentru $\varphi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$, o funcţie strict crescătoare, continuă şi nemărginită, se alege $\rho(x) = 1 + \varphi^2(x)$; se consideră şirul de operatori liniari şi pozitivi $A_n : C_\rho[0,\infty) \to C_\rho[0,\infty)$ cu proprietatea că*

$$\lim_{n\to\infty} \left\|A_n\varphi^i - \varphi^i\right\|_\rho = 0, \quad i = 0,1,2.$$

Atunci

$$\lim_{n\to\infty} \|A_nf - f\|_\rho = 0,$$

pentru toate funcţiile $f \in C_\rho[0,\infty)$, pentru care limita $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\rho(x)}$ există şi este finită.

Rezultatele mai sus amintite sunt rezultate calitative—care ne precizează în ce condiţii aproximarea prin operatori liniari şi pozitivi este posibilă. Acum, având un şir de operatori care aproximează o funcţie dată, se pune problema evaluării erorii comise în aproximare. O astfel de problemă este o problemă cantitativă. *În această teză*, autorul îşi propune un studiu cantitativ al rezultatelor calitative mai sus menţionate. Pentru spaţii de funcţii definite pe un compact, evaluarea restului $A_n f - f$, se face cu ajutorul modulelor de netezime, dintre care cel mai cunoscut este modulul de continuitate de ordinul întâi, care se defineşte prin relaţia

$$\omega\left(f,\delta\right)=\sup\left\{\,|f(t)-f(x)|\ :\ t,x\in[a,b]\ ,\ |t-x|\le\delta\,\right\},\quad \delta\ge 0.$$

Un prim rezultat referitor la estimarea restului în aproximarea cu operatori liniari şi pozitivi, care a fost obţinut cu ajutorul acestui modul este cel al lui Shisha şi Mond [128] din 1968. Evaluarea erorii este următoarea

$$\begin{aligned}|A_n(f,x)-f(x)| &\le |f(x)|\cdot|A_n(1,x)-1| \\ &\quad + (1+A_n(1,x))\cdot\omega\left(f,\sqrt{A_n((t-x)^2,x)}\right).\end{aligned}$$

Pentru a avea rezultate asemănătoare pentru funcţii mărginite definite pe un interval necompact sau pentru funcţii nemărginite, am folosit un modul de continuitate ponderat

$$\omega_\varphi\left(f,\delta\right)=\sup_{\substack{t,x\in I\\|\varphi(t)-\varphi(x)|\le\delta}}|f(t)-f(x)|.$$

Cu ajutorul acestui modul, obţinem estimări ale restului şi caracterizări ale funcţiilor care pot fi uniform aproximate cu ajutorul unui şir dat de operatori liniari şi pozitivi. Rezultatele obţinute sunt împărţite în patru capitole.

În *primul capitol*, care este un capitol introductiv, definim noţiunea de operator liniar şi pozitiv, dăm câteva proprietăţi ale acestora şi menţionăm exemple de astfel de operatori din literatură. În continuare, prezentăm modulele de netezime de ordinul întâi şi doi, obişnuite şi cele ale lui Ditzian şi Totik, şi estimări cunoscute ale restului cu ajutorul acestor module.

În prima secţiune a *capitolului doi*, introducem modulul de continuitate ponderat şi studiem proprietăţile acestuia. Acest modul, care este în strânsă legătură cu modulul obişnuit de continuitate, va juca un rol important în toate estimările restului pe care le vom face, atât cele din capitolul doi, cât şi cele din capitolul trei. În secţiunea doi, dăm rezultate cantitative privind aproximarea funcţiilor mărginite şi continue pe semiaxa pozitivă, care au limită finită la infinit. Atât Teoremele 2.10 şi 2.12, care sunt rezultate generale, cât şi corolarele care urmează, care sunt particularizări ale rezultatului general pentru diferite şiruri de operatori, sunt contribuţii ale autorului. În următoarea secţiune a acestui capitol, pentru a caracteriza care sunt acele funcţii care pot fi aproximate uniform printr-un şir de operatori liniari şi pozitivi, autorul introduce o nouă tehnică de lucru, prin care sunt obţinute şi rezultate cunoscute în literatura de specialitate, cât şi rezultate noi.

Capitolul trei este cel mai amplu. Aici sunt prezentate rezultate privind aproximarea funcţiilor continue şi nemărginite. În primele două secţiuni, sunt amintite rezultate privind aproximarea punctuală şi aproximarea pe submulţimi compacte, iar începând cu secţiunea trei sunt obţinute rezultate globale în cadrul spaţiilor ponderate. Ca şi exemple de spaţii ponderate sunt amintite spaţiile polinomiale şi cele exponenţiale, pentru care există foarte multe rezultate în literatură, pentru diferite şiruri particulare de operatori liniari şi pozitivi. O primă contribuţie a autorului din acest capitol este obţinerea unei versiuni cantitative a teoremei lui Gadjiev. O altă contribuţie, care rezolvă nişte probleme deschise, este extinderea tehnicii, introduse de autor în capitolul doi pentru funcţii mărginite, la acest cadru mai general al spaţiilor ponderate. Aceste rezultate, care apar în subsecţiunea 3.3.3, sunt rezultate care sunt în curs de publicare sau urmează a fi publicate. În ultima parte din acest capitol, sunt prezentate diferite module de continuitate folosite pentru aproximarea pe spaţii ponderate. Dar, în detaliu, este prezentat un modul introdus de autor, cu ajutorul căruia sunt date estimări ale ordinului de aproximare.

În *capitolul patru*, sunt menţionate alte două contribuţii ale autorului, în care se folosesc diferite inegalităţi pentru obţinerea de rezultate pentru operatori liniari. Primul rezultat se referă la aproximarea funcţiilor prin intermediul unor expresii raţionale, care au numărătorul fixat şi care sunt construite prin intermediul operatorilor liniari şi pozitivi. Al doilea rezultat, prezintă condiţii necesare şi suficiente ca o inegalitate pentru o funcţională liniară de tip discret să aibă loc pentru anumite clase de funcţii convexe.

Bibliografia este bogată, cuprinzând 157 de lucrări care sunt citate pe parcursul tezei. Doar şapte dintre ele nu au putut fi consultate de autor. Indexul este de un real folos pentru găsirea rapidă a unor rezultate, iar lista aflată la sfârşitul tezei, cu notaţiile folosite, ne trimite la pagina unde au fost definite aceste simboluri.

În această lucrare sunt prezentate rezultatele originale ale autorului obţinute pe parcursul a patru ani. Ele se regăsesc în special în cele şase articole ale autorului, cinci publicate şi unul în curs de publicare, dar există şi câteva rezultate şi observaţii care apar pentru prima dată în această lucrare.

Capitolul 1

Noţiuni introductive

1.1 Operatori liniari şi pozitivi

1.1.1 Definiţia şi proprietăţile operatorilor liniari şi pozitivi

Fie M o mulţime nevidă şi fie

$$\mathcal{F}(M,\mathbb{R}) = \{\, f\colon M \to \mathbb{R} \,\},$$

spaţiul liniar peste $\mathbb{R}$ al funcţiilor reale definite pe M, înzestrat cu operaţiile obişnuite de adunare a funcţiilor şi de înmulţire cu un scalar.

În continuare, vom nota cu X un subspaţiu liniar al lui $\mathcal{F}(M,\mathbb{R})$ şi cu Y un subspaţiu liniar al lui $\mathcal{F}(N,\mathbb{R})$, pentru M şi N mulţimi nevide. Pentru o funcţie $f \in X$ vom înţelege prin $f \geq 0$ faptul că $f(x) \geq 0$, pentru orice $x \in M$.

Definiţia 1.1. Aplicaţia $A\colon X \to Y$ se numeşte operator. Operatorul A este liniar, dacă

$$A(\alpha f + \beta g) = \alpha A f + \beta A g, \quad \text{pentru orice } f, g \in X,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

şi este pozitiv, dacă

$$Af \geq 0, \quad \text{pentru orice } f \in X \text{ cu proprietatea } f \geq 0.$$

Observaţia 1.2. Fiind dată funcţia $f \in X$, pentru a indica valoarea în punctul x a imaginii prin A a lui f vom folosi una din notaţiile: $Af(x)$, $A(f,x)$ sau $A(f(t),x)$.

Propoziţia 1.3.

(i) Un operator liniar şi pozitiv este monoton.

(ii) Dacă A este un operator liniar şi pozitiv, atunci pentru orice funcţie $f \in X$ are loc inegalitatea $|Af| \leq A(|f|)$.

Propoziţia 1.4 (Inegalitatea lui Hölder pentru operatori liniari şi pozitivi)**.** Pentru operatorul liniar şi pozitiv $A\colon X \to Y$ şi pentru $1 < p, q < \infty$ cu proprietatea $1/p + 1/q = 1$, are loc

$$A(|f \cdot g|) \leq \left(A(|f|^p)\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(A(|g|^q)\right)^{\frac{1}{q}}, \quad \text{pentru orice } f, g \in X.$$

Observaţia 1.5. Ideea de demonstraţie este din articolul [70], idee, care este mai veche (a se vedea referinţele articolului citat). Acest rezultat extinde rezultatul prezentat în articolul [69].

Observaţia 1.6. Un caz particular important este inegalitatea lui Cauchy-Schwarz pentru operatori liniari şi pozitivi, care se obţine din inegalitatea lui Hölder pentru $p = q = 2$, folosind Propoziţia 1.3 (ii):

$$|A(f \cdot g, x)| \leq \sqrt{A(f^2, x)} \cdot \sqrt{A(g^2, x)}.$$

Propoziţia 1.7. Fie $A\colon B(I) \to B(I)$ un operator liniar şi pozitiv. Atunci, A este un operator mărginit şi are norma $\|A\| = \|Ae_0\|$.

1.1.2 Exemple de operatori liniari şi pozitivi

Exemplu 1.8. Pentru un număr întreg $n \geq 1$ şi pentru o funcţie continuă f definită pe $[0,1]$, operatorii Bernstein $B_n : C[0,1] \to C[0,1]$ se definesc prin

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right), \quad x \in [0,1].$$

şi au fost introduşi de S.N. Bernstein [21] în 1912.

Exemplu 1.9. Operatorii Stancu $P_n^{\langle\alpha\rangle} : C[0,1] \to C[0,1]$ definiţi prin

$$P_n^{\langle\alpha\rangle}(f,x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(x+i\alpha)\prod_{j=0}^{n-k-1}(1-x+j\alpha)}{(1+\alpha)(1+2\alpha)\dots(1+(n-1)\alpha)} \cdot f\left(\frac{k}{n}\right), \quad n \geq 1,$$

unde α este un parametru care poate depinde doar de n, au fost introduşi de D.D. Stancu [131] în 1968.

Exemplu 1.10. Fie $0 \leq \alpha \leq \beta$. Pentru $n \geq 1$, relaţia

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(f,x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \cdot f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right),$$

defineşte operatorii Bernstein-Stancu $P_n^{(\alpha,\beta)} : C[0,1] \to C[0,1]$, introduşi de D.D. Stancu [132] în 1969.

Exemplu 1.11. Pentru $n \geq 1$, fie x_n cea mai mare rădăcină a polinomului lui Jacobi $J_n^{(1,0)}$ de grad n relativ la intervalul $[0,1]$ şi

$$P_{2n-1}(x) = \lambda_n \int_0^x \left(\frac{J_n^{(1,0)}(t)}{t-x_n}\right)^2 dt, \quad \text{unde } \lambda_n = \frac{1}{\int_0^1 (1-x)\left(\frac{J_n^{(1,0)}(x)}{x-x_n}\right)^2 dx}.$$

Cu reprezentarea $P_{2n-1}(x) = \sum_{k=0}^{2n-1} a_k x^k$, I. Gavrea [65] introduce operatorii
$H_{2n+1} : C[0,1] \to \Pi_{2n+1}$ definiţi prin

$$H_{2n+1}(f,x) = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{a_k}{k+1} L_{k+2}(f,x),$$

unde operatorii $L_n : C[0,1] \to \Pi_n$ sunt daţi prin

$$L_n(f,x) = f(0)(1-x)^n + f(1)x^n + (n-1)\sum_{k=1}^{n-1} p_{n,k}(x) \int_0^1 p_{n-2,k-1}(t) \cdot f(t)\, dt,$$

unde $p_{n,k}$ sunt polinoamele fundamentale ale lui Bernstein

$$p_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Operatorii H_{2n+1} sunt liniari şi pozitivi, conservă funcţiile afine şi au proprietatea că

$$\begin{aligned} H_{2n+1}(e_2,x) - x^2 &= x(1-x)\left(1 - \int_0^1 x^2 P_{2n-1}(x)\, dx\right) \\ &\leq x(1-x)(1-x_n) \leq \frac{Cx(1-x)}{n^2}. \end{aligned}$$

Dintre alţi operatori definiţi pe un interval compact amintim

Exemplu 1.12. Polinomul interpolator Hermite-Fejér $\mathcal{H}_n(f,x)$ de grad cel mult $2n-1$ este definit prin

$$\mathcal{H}_n(f,x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k,n})(1 - x x_{k,n}) \left(\frac{T_n(x)}{n(x - x_{k,n})} \right)^2,$$

unde $x_{k,n} = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, sunt rădăcinile polinomului $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ al lui Cebâşev, iar $f \in C[-1,1]$. Aceşti operatori au fost introduşi şi studiaţi de Fejér [56] în 1916. Se numesc şi Hermite pentru că verifică condiţiile de interpolare ale lui Hermite [72]

$$\mathcal{H}_n(f, x_{k,n}) = f(x_{k,n}) \text{ şi } \mathcal{H}'_n(f, x_{k,n}) = 0, \quad \text{pentru orice } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Exemplu 1.13. Operatorii $\mathcal{L}_n \colon C[0,1] \to C[0,1]$ definiţi prin

$$\mathcal{L}_n(f,x) = \frac{\int_0^1 (1 - (u-x)^2)^n f(u)\, du}{2\int_0^1 (1-u^2)^n\, du}$$

se numesc operatori Landau şi au fost introduşi de E. Landau [92] în 1908 pentru a da o demonstraţie constructivă teoremei lui Weierstrass.

Pentru un interval I necompact din $\mathbb{R}$ considerăm $\mathcal{D} \subset C(I)$ un subspaţiu al funcţiilor reale, continue, definite pe I. În continuare, dăm câteva exemple de operatori liniari şi pozitivi definiţi pe un astfel de subspaţiu. Spaţiul $\mathcal{D}$ va fi precizat pentru fiecare operator prezentat.

Exemplu 1.14. Pentru $I = [0, \infty)$, operatorii $S_n \colon \mathcal{D} \to C(I)$ definiţi prin

$$S_n(f,x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right), \quad x \in [0,\infty),\ n \geq 1,$$

se numesc operatorii Szász-Mirakjan. Ei au fost introduşi de G. Mirakjan [105] în 1941 (unii autori scriu acest nume: Mirakyan) şi studiaţi de J. Favard [55] în 1944 şi de O. Szász [134] în 1950. Domeniul de definiţie a operatorilor S_n este mulţimea tuturor funcţiilor $f(x) = \mathcal{O}(e^{\alpha x \ln x})$, $\alpha > 0$, acest lucru fiind demonstrat de T. Hermann [71]. În ceea ce priveşte aproximarea uniformă a se vedea Corolarul 2.19 şi Corolarul 3.14 din prezenta lucrare.

Exemplu 1.15. Pentru $I = [0, \infty)$, operatorii $V_n \colon \mathcal{D} \to C(I)$ definiţi prin

$$V_n f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} f\left(\frac{k}{n}\right), \quad x \geq 0,\ n \geq 1,$$

se numesc operatorii Baskakov şi au fost introduşi de V.A. Baskakov [15] în 1957. Domeniul de definiţie $\mathcal{D}$, este mulţimea tuturor funcţiilor f care au creşterea $f(x) = \mathcal{O}(e^{\alpha x})$, $\alpha > 0$, acest lucru fiind demonstrat de T. Hermann [71]. În ceea ce priveşte aproximarea uniformă a se vedea Corolarul 2.21 şi Corolarul 3.17 din prezenta lucrare.

Exemplu 1.16. Pentru $I = [0, 1)$, operatorii $M_n \colon \mathcal{D} \to C(I)$ definiţi prin

$$M_n(f,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^k (1-x)^{n+1} f\left(\frac{k}{n+k}\right), \quad 0 \leq x < 1,$$

se numesc operatorii Meyer-König şi Zeller şi au fost introduşi sub această formă de E.W. Cheney şi A. Sharma [30] în 1964. Iniţial, aceşti operatori introduşi de W. Meyer-König şi K. Zeller [104] în 1960, aveau $f(k/n+1+k)$ în loc de $f(k/n+k)$. Mulţimea $\mathcal{D}$, pentru care s-a demonstrat în [104] convergenţa seriei din definiţia operatorilor, este mulţimea funcţiilor având creşterea $f(x) = \mathcal{O}((1-x)^{-\alpha})$, $\alpha > 0$.

Exemplu 1.17. Pentru $I = [0, \infty)$ şi pentru $n \geq 1$, operatorii $L_n \colon \mathcal{D} \to C(I)$ definiţi prin

$$L_n(f, x) = \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k f\left(\frac{k}{n-k+1}\right)$$

se numesc operatorii Bleimann-Butzer-Hahn. Ei fost introduşi de G. Bleimann, P.L. Butzer şi L. Hahn [22] în 1980 şi studiaţi pentru mulţimea tuturor funcţiilor mărginite şi uniform continue pe $[0, \infty)$.

Exemplu 1.18. Pentru $I = [0, \infty)$, operatorii $C_n \colon \mathcal{D} \to C(I)$ definiţi prin

$$C_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\beta_n\right) \binom{n}{k} \left(\frac{x}{\beta_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{\beta_n}\right)^{n-k},$$

pentru $0 \leq x \leq \beta_n$ şi $C_n f(x) = f(x)$, pentru $x > \beta_n$, unde β_n este un şir de numere pozitive pentru care

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = \infty \;\text{ şi }\; \lim_{n\to\infty} \frac{\beta_n}{n} = 0,$$

se numesc operatorii Bernstein-Chlodovsky şi au fost introduşi de I. Chlodovsky [39] în 1937. În aceeaşi lucrare, autorul demonstrează că $C_n(f, x)$ converge punctual la $f(x)$, dacă

$$\max_{x \in [0, \beta_n]} |f(x)| \cdot e^{-\alpha^2 \frac{n}{\beta_n}} \to 0, \quad n \to \infty,$$

pentru orice valoare $\alpha \neq 0$.

Exemplu 1.19. Pentru $I = \mathbb{R}$, operatorii $W_n \colon \mathcal{D} \to C(I)$ definiţi prin

$$W_n(f, x) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-n\frac{(u-x)^2}{2}} f(u)\, du, \quad x \in (-\infty, \infty),$$

se numesc operatorii Gauss-Weierstrass. În 1885, K. Weierstrass [154] demonstrează că $(W_n(f, x))_n$ converge punctual la $f(x)$, dacă f este continuă şi mărginită pe $\mathbb{R}$. Folosind acest rezultat, el demonstrează Teorema 1.32. În 1944, J. Favard [55] demonstrează convergenţa punctuală pentru mulţimea funcţiilor $f(x) = \mathcal{O}(e^{\alpha x^2})$, $\alpha > 0$.

Exemplu 1.20. Pentru $I = (0, \infty)$, operatorii $P_n \colon \mathcal{D} \to C(I)$ definiţi prin

$$P_n(f, x) = \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{n}{x}\right)^n \int_0^{\infty} e^{-\frac{nu}{x}} u^{n-1} f(u)\, du, \quad x > 0,$$

se numesc operatorii Post-Widder. Ei au fost introduşi de E.L. Post [111] în 1930 şi studiaţi de D.V. Widder [152] în 1934. Ei reprezintă formula de inversiune pentru transformata Laplace (vezi [153], pentru detalii). În [153, p. 283-287] sunt date condiţii pentru convergenţa punctuală şi uniformă a funcţiilor $P_n f$ către f. R.A. Khan [88] şi M.K. Khan, B. Della Vecchia şi A. Fassih [89] îi numesc operatori Gamma.

Exemplu 1.21. Pentru $I = (0, \infty)$, operatorii $G_n \colon \mathcal{D} \to C(I)$ definiţi prin

$$G_n(f, x) = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^{\infty} e^{-xu} u^n f\left(\frac{n}{u}\right) du, \quad x > 0,\ n \geq 1,$$

se numesc operatorii Gamma şi au fost studiaţi de M. Müller şi A. Lupaş [99] în 1967.

Exemplu 1.22. Pentru $I = \mathbb{R}$, operatorii $\mathcal{P}_n \colon \mathcal{D} \to C(I)$ definiţi prin

$$\mathcal{P}_n(f, x) = \frac{n}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-n|u-x|} f(u)\, du$$

se numesc operatorii Picard.

1.2 Aproximarea funcţiilor prin operatori liniari şi pozitivi

1.2.1 Modulul de continuitate

Definiţia 1.23. Fie $f \in C(I)$ o funcţie continuă definită pe un interval $I \subseteq \mathbb{R}$. Funcţia $\omega\colon C(I) \times [0,\infty) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, definită prin:

$$\omega(f,\delta) = \sup \{ |f(t) - f(x)| \ : \ t, x \in I \ , \ |t - x| \leq \delta \}$$

se numeşte *modul de continuitate* al funcţiei f.

Observaţia 1.24. Datorită simetriei, rezultă următoarea egalitate, care poate fi luată ca şi definiţie:

$$\omega(f,\delta) = \sup_{\substack{x, x+h \in I \\ 0 \leq h \leq \delta}} |f(x+h) - f(x)| .$$

Propoziţia 1.25. Modulul de continuitate are următoarele proprietăţi:
1. Pentru $f \in B(I)$, funcţia $\omega(f,\cdot)$ este nenegativă, crescătoare, subaditivă şi mărginită, iar pentru $\delta \geq 0$, funcţia $\omega(\cdot,\delta)$ este o seminormă pe $B(I)$ (subaditivă şi pozitiv omogenă).
2. Funcţia f este uniform continuă pe intervalul I, dacă şi numai dacă

$$\lim_{\delta \searrow 0} \omega(f,\delta) = 0.$$

3. Pentru orice $\delta, \lambda \geq 0$ are loc inegalitatea:

$$\omega(f, \lambda\delta) \leq (1+\lambda) \cdot \omega(f,\delta) .$$

4. Pentru orice $\delta > 0$ avem inegalitatea:

$$|f(y) - f(x)| \leq \left(1 + \frac{|y-x|}{\delta} \right) \cdot \omega(f,\delta) .$$

5. Pentru orice $\delta > 0$ avem inegalitatea:

$$|f(y) - f(x)| \leq \left(1 + \frac{(y-x)^2}{\delta^2} \right) \cdot \omega(f,\delta) .$$

Propoziţia 1.26. Pentru un interval compact I, modulul de continuitate este echivalent cu K-funcţionala

$$K_1(f,t) = \inf_{g' \in C(I)} (\|f - g\| + t\,\|g'\|), \quad t > 0,$$

în sensul că există constantele $C_1, C_2 > 0$ şi $\delta_0 > 0$ astfel încât

$$C_1 \cdot \omega(f,\delta) \leq K_1(f,\delta) \leq C_2 \cdot \omega(f,\delta) , \quad \text{pentru } \delta < \delta_0.$$

Teorema 1.27. *Fie $A\colon C(I) \to B(I)$ un operator liniar şi pozitiv. Atunci (i) dacă $f \in C(I) \cap B(I)$ atunci*

$$\begin{aligned} |A(f,x) - f(x)| &\leq |f(x)| \cdot |A(e_0,x) - 1| \\ &\quad + \left(A(e_0,x) + \frac{A((t-x)^2,x)}{\delta^2} \right) \omega(f,\delta) . \end{aligned}$$

(ii) dacă f este derivabilă pe I şi $f' \in C(I) \cap B(I)$ atunci

$$\begin{aligned} |A(f,x) - f(x)| &\leq |f(x)| \cdot |A(e_0,x) - 1| + |f'(x)| \cdot |A(e_1,x) - xA(e_0,x))| \\ &\quad + \left(\sqrt{A(e_0,x)A((t-x)^2,x)} + \frac{A((t-x)^2,x)}{\delta} \right) \omega(f',\delta) . \end{aligned}$$

Observaţia 1.28. Estimările din Teorema 1.27 au la bază un rezultat stabilit de O. Shisha şi B. Mond [128] în 1968.

Teorema 1.29 (Popoviciu-Bohman-Korovkin)**.** *Fie* $A_n\colon C[a,b]\to C[a,b]$ *un şir de operatori liniari şi pozitivi. Dacă*

$$\lim_{n\to\infty} A_n(e_k,x)=e_k(x),\quad k=0,1,2,$$

au loc uniform pe $[a,b]$*, atunci*

$$\lim_{n\to\infty} A_n(f,x)=f(x),$$

are loc uniform pentru orice funcţie continuă pe intervalul compact $[a,b]$.

Observaţia 1.30. Teorema 1.29 a fost descoperită de H. Bohman [23] în 1952 şi de P.P. Korovkin [90, 91] în 1953. T. Popoviciu [110] a obţinut în 1950 acest rezultat pentru operatori polinomiali. Pentru alte detalii legate de istoricul acestei teoreme, cât şi generalizările acesteia, se poate consulta articolul de sinteză [51], pentru cele 102 referinţe şi monografia [7], pentru noţiunile teoretice şi exemplele date. Acest rezultat demonstrează că o condiţie necesară şi suficientă pentru convergenţa uniformă a unui şir de operatori liniari şi pozitivi A_n către o funcţie continuă f pe un interval compact $[a,b]$ este ca şirul A_nf să conveargă uniform către f pentru doar trei funcţii, $e_k(x)=x^k$, $k=0,1,2$.

Observaţia 1.31. Dacă avem un interval necompact $I\subseteq\mathbb{R}$, iar $\mathcal{D}\subset C(I)$ este un subspaţiu pe care este definit un şir de operatori liniari şi pozitivi $A_n\colon\mathcal{D}\to C(I)$, atunci dacă au loc relaţiile $T(A_n(e_k))\to T(e_k)$, $k=0,1,2$ uniform pe $[a,b]\subset I$, unde $T\colon C(I)\to C[a,b]$ este definit prin $T(f)=f|_{[a,b]}$, atunci conform Teoremei 1.29 va rezulta că

$$\lim_{n\to\infty} A_nf=f,\quad \text{uniform pe } [a,b],$$

pentru orice funcţie $f\in\mathcal{D}$.

Teorema 1.32 (Weierstrass [154])**.** *Fie* $f\in C[a,b]$*. Atunci, pentru orice* $\varepsilon>0$*, există un polinom* $P(x)$ *cu coeficienţi reali, astfel încât*

$$|f(x)-P(x)|<\varepsilon,\quad \textit{pentru orice } x\in[a,b].$$

Teorema 1.33 (Jackson [85])**.** *Fie* $f\in C[a,b]$*. Atunci*

$$\inf_{p\in\Pi_n}\|f-p\|\le C\cdot\omega\left(f,\frac{b-a}{n}\right),$$

unde C *este o constantă independentă de* n *şi* f *şi* Π_n *este mulţimea polinoamelor cu coeficienţi reali cu gradul cel mult* n.

Teorema 1.34. *Fie* $A_n\colon C[a,b]\to\Pi_n$ *un şir de operatori polinomiali, liniari şi pozitivi. Atunci, cel puţin una dintre funcţiile* $e_k=x^k$, $k=0,1,2$ *nu poate fi aproximată prin* A_ne_k *mai bine decât* n^{-2}.

1.2.2 Modulul de netezime de ordinul doi

1.2.3 Modulele de netezime ale lui Ditzian şi Totik

Capitolul 2

Aproximarea uniformă a funcţiilor continue şi mărginite

2.1 Modulul de continuitate ponderat

Definiţia 2.1. Fiind dată o funcţie $\varphi\colon I \to J$, bijectivă, strict monotonă şi continuă, atunci pentru o funcţie mărginită $f \in B(I)$ şi pentru $\delta \geq 0$ definim modulul de continuitate ponderat prin

$$\omega_\varphi (f, \delta) = \sup_{\substack{t,x\in I \\ |\varphi(t)-\varphi(x)|\leq\delta}} |f(t) - f(x)|. \tag{2.1}$$

Observaţia 2.2. Pentru $\varphi(x) = x$ se obţine modulul de continuitate obişnuit. Acest modul ponderat de continuitate din Definiţia 2.1 este un caz particular al unui modul mai general (vezi [68], de exemplu)

$$\omega_d(f, \delta) = \sup \{ |f(t) - f(x)| \,:\, t, x \in X,\ d(t, x) \leq \delta \},$$

unde f este o funcţie mărginită pe X şi (X, d) este un spaţiu metric complet.

Propoziţia 2.3. Are loc următoarea egalitate

$$\omega_\varphi (f, \delta) = \omega \left(f \circ \varphi^{-1}, \delta \right). \tag{2.2}$$

Propoziţia 2.4. Modulul de continuitate ponderat are proprietăţile:

1. Pentru $f \in B(I)$, funcţia $\omega_\varphi (f, \cdot)$ este nenegativă, crescătoare, subaditivă şi mărginită, iar pentru $\delta \geq 0$, funcţia $\omega_\varphi (\cdot, \delta)$ este o seminormă pe $B(I)$ (subaditivă şi pozitiv omogenă).

2. (i) Dacă funcţia $f \circ \varphi^{-1}$ este uniform continuă pe J, atunci pentru orice şir $(\delta_n)_{n\geq1}$ de numere reale convergent la 0, avem $\lim_{n\to\infty} \omega_\varphi (f, \delta_n) = 0$.

(ii) Dacă $(\delta_n)_{n\geq1}$ este un şir de numere reale strict pozitive astfel încât $\lim_{n\to\infty} \omega_\varphi (f, \delta_n) = 0$, atunci funcţia $f \circ \varphi^{-1}$ este uniform continuă pe J.

3. Pentru orice $\delta, \lambda \geq 0$ are loc inegalitatea:

$$\omega_\varphi (f, \lambda\delta) \leq (1 + \lambda) \cdot \omega_\varphi (f, \delta).$$

4. Pentru orice $\delta > 0$ avem inegalitatea:

$$|f(y) - f(x)| \leq \left(1 + \frac{|\varphi(y) - \varphi(x)|}{\delta} \right) \cdot \omega_\varphi (f, \delta).$$

2.2 Aproximarea funcţiilor mărginite şi continue pe semiaxa pozitivă

Observaţia 2.5. Pentru a extinde teorema lui Popoviciu-Bohman-Korovkin la spaţiul $C[0,\infty)$, considerăm pentru început, acele funcţii care sunt continue şi mărginite pe semiaxa $[0,\infty)$. Mai precis, considerăm subspaţiul $C^*[0,\infty)$, definit ca spaţiul tuturor funcţiilor continue care au limită finită la infinit, înzestrat cu norma uniformă $\|f\| = \sup_{x\geq 0}|f(x)|$,

$$C^*[0,\infty) = \left\{ f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ continuă pe } [0,\infty) \text{ şi } \lim_{x\to\infty} f(x) = L \in \mathbb{R} \right\}.$$

În [139] şi [1] apare notaţia $C[0,\infty]$, dar noi preferăm notaţia $C^*[0,\infty)$, care apare în [7], [51] şi [24]. Mai mult, pentru o funcţie $f \in C^*[0,\infty)$ vom nota cu $f(\infty)$ limita $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

Teorema 2.6. *Fie $A_n\colon C^*[0,\infty) \to C^*[0,\infty)$ un şir de operatori liniari şi pozitivi cu proprietatea că următoarele limite*

$$\lim_{n\to\infty} A_n(e^{-kt}, x) = e^{-kx}, \quad k = 0,1,2,$$

au loc uniform pe $[0,\infty)$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} A_n f(x) = f(x),$$

are loc uniform pe $[0,\infty)$, pentru orice funcţie $f \in C^*[0,\infty)$.

Observaţia 2.7. Teorema anterioară apare pentru prima dată în [24], dar demonstraţia ei în forma în care am prezentat-o apare în [7] şi în [51]. Conform unei observaţii din articolul [26], o altă compactificare a semiaxei $[0,\infty)$ ne va da o altă teoremă de tip Korovkin.

Teorema 2.8. *Fie $A_n\colon C^*[0,\infty) \to C^*[0,\infty)$ un şir de operatori liniari şi pozitivi cu proprietatea că limitele*

$$\lim_{n\to\infty} A_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right)^k, x\right) = \left(\frac{x}{1+x}\right)^k, \quad k = 0,1,2,$$

au loc uniform pe $[0,\infty)$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} A_n f(x) = f(x),$$

are loc uniform pe $[0,\infty)$, pentru orice funcţie $f \in C^*[0,\infty)$.

Observaţia 2.9. Condiţia ca limita la infinit a funcţiei f să fie finită este esenţială, după cum arată exemplele care urmează (al doilea exemplu este din [63]). Şirul de operatori liniari şi pozitivi A_n, definiţi prin

$$A_n(f,x) = \begin{cases} f(x) + e^{x-n}[f(x+1) - f(x)], & x \in [0,n] \\ f(x), & x > n, \end{cases}$$

care transformă orice funcţie $f \in C^*[0,\infty)$ într-o funcţie din spaţiul $C^*[0,\infty)$, verifică condiţiile $\sup_{x\geq 0}\left|A_n(e^{-kt},x) - e^{-kx}\right| \to 0$, pentru $k = 0,1,2$. Dar, pentru funcţia $f^*(x) = \cos \pi x$ care este continuă şi mărginită pe $[0,\infty)$, chiar uniform continuă pe semiaxa pozitivă, avem

$$\|A_n f^* - f^*\| = \sup_{x\in[0,n]} \left|2e^{x-n}\cos\pi x\right| = 2.$$

Şirul de operatori liniari şi pozitivi B_n, definit prin

$$B_n(f,x) = \begin{cases} f(x) + \frac{1-\frac{x}{n}}{n+1}\left[\left(x+\frac{3}{2}\right) f\left(x+\frac{1}{2}\right) - (x+1)f(x)\right], & x \in [0,n] \\ f(x), & x > n, \end{cases}$$

verifică condiţiile $\left\|B_n(t^k/(1+t)^k, x) - x^k/(1+x)^k\right\| \to 0$, pentru $k = 0,1,2$ şi $\|B_n f^* - f^*\| \geq 2$.

În continuare, dorim să prezentăm rezultate cantitative, estimând eroarea aproximării, folosind modulul ponderat de continuitate introdus în Definiţia 2.1. Mai precis, să folosim modulele introduse în Holhoş [77]

$$\omega^*(f,\delta) = \sup_{\substack{x,t\geq 0\\ |e^{-x}-e^{-t}|\leq\delta}} |f(x)-f(t)|,$$

şi

$$\omega^\#(f,\delta) = \sup_{\substack{x,t\geq 0\\ \left|\frac{x}{1+x}-\frac{t}{1+t}\right|\leq\delta}} |f(x)-f(t)|,$$

definite pentru orice $\delta \geq 0$ şi orice funcţie $f \in C^*[0,\infty)$.

Teorema 2.10 (Holhoş [77])**.** *Dacă $A_n : C^*[0,\infty) \to C^*[0,\infty)$ este un şir de operatori liniari şi pozitivi cu proprietăţile*

$$\begin{aligned} \|A_n 1 - 1\| &= a_n,\\ \|A_n(e^{-t},x) - e^{-x}\| &= b_n,\\ \left\|A_n(e^{-2t},x) - e^{-2x}\right\| &= c_n, \end{aligned}$$

unde a_n, b_n şi c_n tind la zero când n tinde la infinit, atunci

$$\|A_n f - f\| \leq \|f\| \cdot a_n + (2+a_n)\cdot \omega^*\left(f, \sqrt{a_n + 2b_n + c_n}\right),$$

pentru orice funcţie $f \in C^*[0,\infty)$.

Observaţia 2.11. Un rezultat similar are loc dacă înlocuim funcţiile e^{-t} şi e^{-2t} cu $t/(1+t)$ şi $t^2/(1+t)^2$ şi modulul $\omega^*(f,\delta)$ cu $\omega^\#(f,\delta)$.

Teorema 2.12 (Holhoş [77])**.** *Dacă $A_n : C[0,\infty) \to C[0,\infty)$ este un şir de operatori liniari şi pozitivi care conservă funcţiile constante şi liniare şi*

$$\sup_{x\geq 0} \frac{|A_n(t^2,x) - x^2|}{(1+x)^2} = d_n,$$

este un şir ce tinde la zero când n tinde la infinit, atunci

$$\|A_n f - f\| \leq 2\cdot \omega^\#\left(f, \sqrt{d_n}\right),$$

pentru orice funcţie $f \in C^*[0,\infty)$.

Observaţia 2.13. Pentru că $|e^{-t} - e^{-x}| \leq |t-x|$, pentru orice $t, x \geq 0$, deducem că

$$\omega(f,\delta) \leq \omega^*(f,\delta), \quad \text{pentru orice } \delta \geq 0,$$

şi pentru că $|e^{-t} - e^{-x}| = e^{-\theta}|t-x| \geq e^{-M}|t-x|$, pentru orice $t, x \in [0,M]$, avem

$$\omega^*(f,\delta) \leq \omega(f, e^M\delta) \leq (1+e^M)\cdot\omega(f,\delta).$$

Din inegalitatea $\left|\frac{x}{1+x} - \frac{t}{1+t}\right| \leq |x-t|$, pentru $x, t \geq 0$, deducem

$$\omega(f,\delta) \leq \omega^\#(f,\delta),$$

şi pentru că $\left|\frac{x}{1+x} - \frac{t}{1+t}\right| \geq \frac{|x-t|}{(1+M)^2}$, pentru $x, t \in [0,M]$, obţinem

$$\omega^\#(f,\delta) \leq \omega(f,(1+M)^2\delta) \leq (1+M)^2\cdot\omega(f,\delta),$$

unde $M > 0$, este un întreg.

Aceste relaţii ne arată că nu putem înlocui modulele ponderate din Teoremele 2.10 şi 2.12 cu modulul de continuitate obişnuit fără a ne restrânge la un interval compact $[0,M]$.

Corolarul 2.14. Pentru operatorii Szász-Mirakjan $S_n : C^*[0,\infty) \to C^*[0,\infty)$ definiţi în Exemplul 1.14 şi pentru $f \in C^*[0,\infty)$, avem estimările

$$\|S_n f - f\| \le 2 \cdot \omega^* \left(f, \frac{1}{\sqrt{n}} \right), \quad n \ge 1,$$

şi

$$\|S_n f - f\| \le 2 \cdot \omega^{\#} \left(f, \frac{1}{2\sqrt{n}} \right), \quad n \ge 1.$$

Corolarul 2.15. Pentru operatorii Baskakov $V_n : C^*[0,\infty) \to C^*[0,\infty)$ definiţi în Exemplul 1.15 şi pentru $f \in C^*[0,\infty)$, avem estimările

$$\|V_n f - f\| \le 2 \cdot \omega^* \left(f, \frac{5}{2\sqrt{n}} \right), \quad n \ge 2,$$

şi

$$\|V_n f - f\| \le 2 \cdot \omega^{\#} \left(f, \frac{1}{\sqrt{n}} \right), \quad n \ge 1.$$

Corolarul 2.16. Pentru operatorii Bernstein-Chlodovsky definiţi în Exemplul 1.18 şi pentru o funcţie $f \in C^*[0,\infty)$, avem estimările

$$\|C_n f - f\| \le 2 \cdot \omega^* \left(f, \sqrt{\frac{\beta_n}{n}} \right), \quad n \ge 1,$$

şi

$$\|C_n f - f\| \le 2 \cdot \omega^{\#} \left(f, \sqrt{\frac{\beta_n}{4n}} \right), \quad n \ge 1.$$

Corolarul 2.17. Operatorii $L_n \colon C^*[0,\infty) \to C^*[0,\infty)$ introduşi de Bleimann-Butzer-Hahn (vezi Exemplul 1.17) verifică proprietatea

$$\|L_n f - f\| \le 2 \cdot \omega^{\#} \left(f, \frac{2}{\sqrt{n+1}} \right), \quad n \ge 1, \quad f \in C^*[0,\infty).$$

2.3 Aproximarea uniformă a funcţiilor pe un interval necompact

Teorema şi rezultatele următoare ne descriu acele funcţii care se pot aproxima uniform cu ajutorul unui şir de operatori liniari şi pozitivi daţi. Rezultatele obţinute apar în [76], ele prezentând o altă abordare asupra acestei probleme tratate în articolele [140] şi [40].

Teorema 2.18 (Holhoş [76]). *Fie $A_n \colon C(I) \to C(I)$ un şir de operatori liniari şi pozitivi care conservă funcţiile constante. Atunci, următoarele afirmaţii sunt adevărate:*
a) dacă $\sup_{x \in I} A_n(|\varphi(t) - \varphi(x)|, x) = a_n \to 0$ şi $f \circ \varphi^{-1}$ este uniform continuă pe J, atunci $\|A_n f - f\| \to 0$ şi în plus

$$\|A_n f - f\| \le 2 \cdot \omega_\varphi (f, a_n).$$

b) dacă $\|A_n f - f\| \to 0$ şi $(A_n f) \circ \varphi^{-1}$ este uniform continuă pe J, atunci $f \circ \varphi^{-1}$ este uniform continuă pe J.

Corolarul 2.19. Pentru operatorii Szász-Mirakjan

$$S_n f(x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

avem $\|S_n f - f\| \to 0$ dacă $f(x^2)$ este uniform continuă pe $[0,\infty)$. Dacă f este mărginită şi continuă pe $[0,\infty)$ şi $\|S_n f - f\| \to 0$, atunci $f(x^2)$ este uniform continuă pe $[0,\infty)$ şi avem

$$\|S_n f - f\| \leq 2 \cdot \omega \left(f(t^2), \frac{1}{\sqrt{n}} \right), \quad n \geq 1. \tag{2.3}$$

Observaţia 2.20. Totik [137, 140] demonstrează pentru prima dată faptul că $S_n f$ converge uniform la f pentru $f \in C[0,\infty) \cap B[0,\infty)$, dacă şi numai dacă $f(x^2)$ este uniform continuă pe $[0,\infty)$. Estimarea (2.3) apare pentru prima dată în J. de la Cal şi Cárcamo [40, Theorem 1].

Corolarul 2.21. Pentru operatorii Baskakov

$$V_n f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

avem $\|V_n f - f\| \to 0$, dacă $f(e^x - 1)$ este uniform continuă pe $[0,\infty)$. Dacă f este mărginită şi continuă pe $[0,\infty)$ şi $V_n f$ converge uniform la f pe $[0,\infty)$, atunci $f(e^x - 1)$ este uniform continuă pe $[0,\infty)$. În plus, este adevărată estimarea

$$\|V_n f - f\| \leq 2 \cdot \omega \left(f(e^t - 1), \frac{1}{\sqrt{n-1}} \right), \quad n \geq 2. \tag{2.4}$$

Observaţia 2.22. Totik [138, 140] demonstrează că pentru o funcţie f continuă şi mărginită pe $[0,\infty)$, $V_n f$ converge uniform la f, dacă şi numai dacă $f(e^x)$ este uniform continuă pe $[0,\infty)$. Estimarea (2.4) este similară celei din [40, Theorem 7].

Corolarul 2.23. Operatorii Meyer-König şi Zeller M_n definiţi prin

$$M_n(f,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^k (1-x)^{n+1} f\left(\frac{k}{n+k}\right)$$

au proprietatea că $\|M_n f - f\| \to 0$, pentru acele funcţii f pentru care funcţia $f(1-e^{-x})$ este uniform continuă pe $[0,\infty)$. Dacă f este mărginită şi continuă pe $[0,1)$ şi $M_n f$ converge uniform pe $[0,1)$ la f, atunci $f(1-e^{-x})$ este uniform continuă pe $[0,\infty)$. În plus, avem

$$\|M_n f - f\| \leq 2 \cdot \omega \left(f(1-e^{-t}), \frac{1}{\sqrt{n}} \right), \quad \text{pentru } n \geq 1. \tag{2.5}$$

Observaţia 2.24. În [138] Totik demonstrează că $M_n f$ converge uniform la f, pentru f continuă şi mărginită pe $[0,\infty)$, dacă şi numai dacă $f\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)$ este uniform continuă pe $[0,\infty)$. În [140], el rescrie condiţia, în forma echivalentă a uniform continuităţii funcţiei $f(1-e^{-x})$ pe $[0,\infty)$. Estimarea (2.5) este similară celei din [40, Theorem 8].

Corolarul 2.25. Pentru operatorii Gauss-Weierstrass

$$W_n(f,x) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-n\frac{(u-x)^2}{2}} f(u)\, du,$$

definiţi pentru funcţiile continue pe $\mathbb{R}$, pentru care integrala este finită, avem uniform convergenţa $\|W_n f - f\| \to 0$, dacă f este uniform continuă pe $\mathbb{R}$. Dacă f este mărginită şi continuă pe $\mathbb{R}$ şi $W_n f$ converge uniform la f pe întreaga axă reală, atunci f este uniform continuă pe $\mathbb{R}$. În plus, avem

$$\|W_n f - f\| \leq 2 \cdot \omega \left(f, \frac{1}{\sqrt{n}} \right), \quad \text{pentru } n \geq 1. \tag{2.6}$$

Observaţia 2.26. Afirmaţia că $\|W_n f - f\| \to 0$, dacă f este uniform continuă pe $\mathbb{R}$, a fost demonstrată pentru prima dată de Stancu [133]. Afirmaţia reciprocă, că dacă f este mărginită şi continuă pe $\mathbb{R}$ şi $W_n f$ converge uniform la f pe întreaga axă reală, atunci f este uniform continuă pe $\mathbb{R}$, este demonstrată pentru prima dată în Holhoş [76]. Estimarea (2.6) este similară celei din [133].

Corolarul 2.27. Operatorii Bleimann-Butzer-Hahn L_n au proprietatea că $\|L_n f - f\| \to 0$, pentru acele funcţii f pentru care $f(x^{-2} - 1)$ este uniform continuă pe $(0, 1]$. Dacă f este mărginită şi continuă pe $[0, \infty)$ şi $L_n f$ converge uniform pe $[0, \infty)$ la f, atunci $f(x^{-2} - 1)$ este uniform continuă pe $(0, 1]$. În plus, are loc estimarea

$$\|L_n f - f\| \leq 2 \cdot \omega \left(f(t^{-2} - 1), \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right), \quad \text{pentru } n \geq 1. \tag{2.7}$$

Observaţia 2.28. Funcţia $f(x^{-2} - 1)$ este uniform continuă pe $(0, 1]$ dacă şi numai dacă avem $f \in C^*[0, \infty)$. Afirmaţia că $L_n f$ converge uniform la f, doar dacă $f \in C^*[0, \infty)$, apare pentru prima dată în Totik [139]. Estimarea (2.7) apare pentru prima dată în Holhoş [76].

Capitolul 3

Aproximarea funcţiilor continue şi nemărginite

3.1 Aproximare punctuală

3.2 Aproximare pe submulţimi compacte

3.3 Aproximarea pe spaţii ponderate

3.3.1 Spaţii ponderate: definiţie şi exemple

În secţiunile anterioare, am amintit rezultate privind convergenţa punctuală şi uniformă pe subintervale compacte a unui şir de operatori liniari şi pozitivi spre funcţia nemărginită care se doreşte a fi aproximată. Despre funcţia de aproximat f se presupune că are o anumită creştere, exprimată prin relaţia

$$f(x) = \mathcal{O}(\rho(x)). \tag{3.1}$$

În continuare, dorim să obţinem rezultate globale (care au loc pe întreg domeniul de definiţie al funcţiilor) despre aproximarea funcţiilor nemărginite prin operatori liniari şi pozitivi. Pentru aceasta, în următoarea definiţie, exprimăm într-un mod mai precis relaţia (3.1).

Definiţia 3.1. Pentru intervalul $I \subseteq \mathbb{R}$ numim pondere o funcţie continuă $\rho\colon I \to (0,\infty)$. Numim spaţiu ponderat corespunzător lui ρ, mulţimea $B_\rho(I)$, care reprezintă spaţiul tuturor funcţiilor $f\colon I \to \mathbb{R}$, pentru care există $M > 0$, astfel încât $|f(x)| \leq M \cdot \rho(x)$, pentru orice $x \in I$. Acest spaţiu ponderat poate fi înzestrat cu ρ-norma

$$\|f\|_\rho = \sup_{x\in I} \frac{|f(x)|}{\rho(x)}.$$

Definim de asemenea subspaţiul $C_\rho(I) = C(I) \cap B_\rho(I)$, iar pentru $I = [0,\infty)$

$$C^*_\rho[0,\infty) = \left\{ f \in C_\rho[0,\infty), \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\rho(x)} = K < +\infty \right\}.$$

Ca şi exemple de spaţii ponderate, menţionăm

Exemplu 3.2. Spaţiile ponderate polinomiale $C_N[0,\infty)$ sunt definite cu ajutorul ponderii

$$\rho(x) = 1 + x^N, \quad x \geq 0,\ N > 0.$$

Unii autori folosesc ponderea $w_N(x) = (1+x)^N$. Spaţiul ponderat asociat acestei ponderi este acelaşi cu $C_N[0,\infty)$ cu norme echivalente. Sunt multe persoane care au studiat aproximarea funcţiilor definite pe aceste spaţii prin operatori liniari şi pozitivi, dintre care amintim pe A. Aral [10, 11], F. Altomare [8], A. Attalienti [12], M. Becker [16], J. Bustamante [28], M. Campiti [12], A. Ciupa [34, 35, 36, 38], O. Doğru [49], A. Erençýn [53], A.D. Gadjiev [61], S. Graczyg [123], V. Gupta [11, 151], E. Ibikli [81], N. Ispir [83, 156], A.-J. López-Moreno [97], E. Mangino [8], L. Morales de la Cruz [28], J.M. Quesada [28], L. Rempulska [114, 119, 120, 121, 122, 123, 124], M. Skorupka [114, 119, 121, 122], F. Taşdelen [53], K. Tomczak [124], Z. Walczak [120, 144, 145, 146, 149, 150, 151], I. Yuksel [156].

Exemplu 3.3. Spaţiile ponderate exponenţiale $C_p[0,\infty)$ sunt definite cu ajutorul ponderei

$$\rho(x) = e^{px}, \quad x \geq 0,\ p > 0.$$

Dintre cei care au studiat problema aproximării funcţiilor definite pe spaţiile ponderate exponenţiale cu ajutorul operatorilor liniari şi pozitivi, amintim pe M. Becker [17], A. Ciupa [31, 32, 33, 37], Z. Ditzian [46], M. Leśniewich [93], L. Rempulska [93, 114, 115, 116, 117, 118], M. Skorupka [114, 115, 116], Z. Walczak [117, 118, 147, 148].

Exemplu 3.4. D.-X. Zhou [157] foloseşte ponderea

$$w(x) = x^{-a}(1+x)^b, \quad 1 > a > 0,\ b > 0,$$

pentru a obţine un rezultat similar celui lui Becker [16], pentru operatorii Szász-Mirakjan. În [41, 42], B. Della Vecchia, G. Mastroianni şi J. Szabados au considerat o clasă generală de ponderi care include ponderi de forma

$$w(x) = e^{x^\beta}, \quad x \geq 0,\ \beta > 0.$$

Observaţia 3.5. Spaţiile $B_\rho(I)$, $C_\rho(I)$ şi $C^*_\rho[0,\infty)$ sunt spaţii Banach. Completitudinea acestor spaţii rezultă din completitudinea spaţiilor $B(I)$, $C(I)\cap B(I)$ şi respectiv $C^*[0,\infty)$, pe baza relaţiei care există între ρ-normă şi norma uniformă: $\|f\|_{\rho=} \|f/\rho\|$.

Observaţia 3.6. Fie A un operator liniar şi pozitiv definit pe mulţimea $C_\rho(I)$. Pentru ca operatorul A să aplice funcţiile din $C_\rho(I)$ în $B_\rho(I)$ este necesar şi suficient ca să avem

$$A(\rho, x) \leq M \cdot \rho(x), \text{ pentru orice } x \in I,$$

unde $M > 0$ este un număr independent de x. Această condiţie asigură mărginirea (continuitatea) operatorului A. Norma lui A va fi

$$\|A\|_{C_\rho \to B_\rho} = \|A\rho\|_\rho\,.$$

3.3.2 Teoreme de tip Korovkin

Rezultatul care urmează este prima generalizare a Teoremei 1.29 a lui Popoviciu-Bohman-Korovkin pentru spaţii ponderate. Pentru o teoremă de acest tip în cadrul mai general al spaţiilor ponderate pentru funcţii definite pe un spaţiu local compact Hausdorff se poate consulta [125] şi [7].

Teorema 3.7 (Gadjiev)**.** *Fie $\varphi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ o funcţie strict crescătoare, continuă cu proprietatea că $\lim_{x\to\infty}\varphi(x) = \infty$ şi fie $\rho(x) = 1 + \varphi^2(x)$. Dacă $A_n : C_\rho[0,\infty) \to B_\rho[0,\infty)$ este un şir de operatori liniari şi pozitivi, cu proprietatea că*

$$\lim_{n\to\infty} \left\|A_n\varphi^i - \varphi^i\right\|_\rho = 0, \quad i = 0, 1, 2,$$

atunci, pentru orice $f \in C^*_\rho[0,\infty)$, avem

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n f - f\|_\rho = 0.$$

Observaţia 3.8. Această teoremă a fost enunţată de A.D. Gadjiev [60] în 1974 şi demonstrată în 1976 (vezi [61]), pentru spaţiul ponderat al funcţiilor definite pe $\mathbb{R}$.

În continuare prezentăm o variantă cantitativă a Teoremei 3.7.

Teorema 3.9 (Holhoş [74]). *Fie $\varphi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ o funcţie strict crescătoare, continuă cu proprietatea că $\varphi(0) = 0$ şi $\lim_{x\to\infty}\varphi(x) = \infty$ şi fie ponderea $\rho(x) = 1 + \varphi^2(x)$. Considerăm $A_n : C_\rho[0,\infty) \to B_\rho[0,\infty)$ un şir de operatori liniari şi pozitivi pentru care*

$$\begin{aligned}\|A_n 1 - 1\| &= a_n,\\ \|A_n\varphi - \varphi\|_{\rho^{\frac{1}{2}}} &= b_n,\\ \left\|A_n\varphi^2 - \varphi^2\right\|_\rho &= c_n,\end{aligned}$$

unde $(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1}, (c_n)_{n\geq 1}$ sunt şiruri convergente la 0. Facem notaţia $\delta_n = \sqrt{a_n + 2b_n + c_n}$ şi considerăm η_n un şir de numere reale cu proprietăţile

$$\lim_{n\to\infty}\eta_n = \infty \qquad \text{şi} \qquad \lim_{n\to\infty}\rho^{\frac{1}{2}}(\eta_n)\delta_n = 0.$$

Atunci pentru orice funcţie $f \in C^*_\rho[0,\infty)$ avem estimarea

$$\begin{aligned}\|A_n f - f\|_\rho \leq{}& K_f\cdot(a_n + c_n)\\ &+ \left(\|f\|_\rho + K_f\right)\left[\rho^{\frac{1}{2}}(\eta_n)\delta_n\sqrt{1+a_n} + a_n + \delta_n\sqrt{\delta_n^2 + 4}\right]\\ &+ (2 + a_n)\,\omega_\varphi\left(\frac{f}{\rho}, \rho^{\frac{1}{2}}(\eta_n)\delta_n\right)\\ &+ 2r_n(3 + 2a_n + 2c_n),\end{aligned}$$

unde $K_f = \lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{\rho(x)}$ şi $r_n = \sup_{x\geq\eta_n}\left|\dfrac{f(x)}{\rho(x)} - K_f\right|$.

3.3.3 Aproximare uniformă în spaţii ponderate

În această secţiune, considerăm ca pondere o funcţie crescătoare şi derivabilă $\rho\colon I \to [1,\infty)$, unde $I \subseteq \mathbb{R}$ este un interval necompact şi fie $\varphi\colon I \to J$, $(J \subset \mathbb{R})$, o funcţie derivabilă şi bijectivă cu proprietatea că $\varphi'(x) > 0$, pentru orice $x \in I$. Rezultatele prezentate aici se găsesc în lucrarea [78]. Ele dau răspunsul la două probleme deschise menţionate în articolul de sinteză [27]:

1. Fie $\mathcal{D}$ un subspaţiu liniar al spaţiului $\mathbb{R}^I$ şi fie $A_n\colon \mathcal{D} \to C(I)$ un şir de operatori liniari şi pozitivi. Pentru ce ponderi ρ, A_n aplică $C_\rho[0,\infty)\cap\mathcal{D}$ în $C_\rho[0,\infty)$ cu norme uniform mărginite?
2. Pentru ce funcţii $f \in C_\rho[0,\infty)$ avem $\|A_n - f\|_\rho \to 0$, când $n \to \infty$?

Un rezultat în legătură cu problema 2 este menţionat în lucrarea amintită [27, Theorem 3.8].

Teorema 3.10. *Fie ρ o pondere arbitrară şi fie $G \in C[0,\infty)$ o funcţie cu proprietăţile: (i) G este derivabilă, $G'(x) > 0$ pentru orice $x > 0$ şi G' este o funcţie crescătoare şi continuă pe $(0,\infty)$ şi (ii) există constantele $x_0 > 0$, $h_1 > 0$ şi C astfel încât $G'\circ G^{-1} \in \mathrm{Lip}[x_0,\infty)$ şi pentru orice $x \geq x_0$ şi $h \in (0,h_1)$ avem $G'(x+h) \leq C\cdot G'(x)$. Fie $A_n\colon C_\rho[0,\infty) \to C_\rho[0,\infty)$ un şir de operatori liniari şi pozitivi cu proprietatea*

$$G'\circ G^{-1}\cdot\frac{A_n(f)}{\rho} \in \mathrm{Lip}[x_0,\infty), \quad f \in C_\rho[0,\infty), n \in \mathbb{N}.$$

Dacă pentru o funcţie $f \in C_\rho[0,\infty)$ avem $\lim_{n\to\infty}\|A_n - f\|_\rho = 0$, atunci $(f/\rho)\circ G$ este uniform continuă.

Teorema 3.11 (Holhoş [78]). *Fie $A_n : C_\rho(I) \to C_\rho(I)$ un şir de operatori liniari şi pozitivi care conservă funcţiile constante. Presupunem că sunt verificate condiţiile*

$$\sup_{x\in I} A_n(|\varphi(t) - \varphi(x)|, x) = a_n \to 0, \ \ (n\to\infty) \tag{3.2}$$

$$\sup_{x\in I}\frac{A_n(|\rho(t) - \rho(x)|, x)}{\rho(x)} = b_n \to 0. \ \ (n\to\infty) \tag{3.3}$$

Dacă $A_n(f,x)$ este derivabilă şi există o constantă $K(f,n)$ astfel încât

$$\frac{|(A_nf)'(x)|}{\varphi'(x)} \le K(f,n)\cdot \rho(x), \quad \textit{pentru orice } x\in I, \tag{3.4}$$

şi, ρ şi φ sunt date astfel încât există o constantă $\alpha>0$ cu proprietatea

$$\frac{\rho'(x)}{\varphi'(x)} \le \alpha\cdot \rho(x), \quad \textit{pentru orice } x\in I, \tag{3.5}$$

atunci, următoarele afirmaţii sunt echivalente

(*i*) $\|A_nf-f\|_\rho \to 0$ *as* $n\to\infty$.

(*ii*) $\dfrac{f}{\rho}\circ\varphi^{-1}$ *este uniform continuă pe J.*

În plus, avem estimarea

$$\|A_nf-f\|_\rho \le b_n\cdot\|f\|_\rho + 2\cdot\omega_\varphi\left(\frac{f}{\rho},a_n\right), \quad \textit{pentru orice } n\ge 1. \tag{3.6}$$

Observaţia 3.12. Pentru $\rho(x)=1$, rezultatul Teoremei 3.11 a fost obţinut de Totik [140, 141], de către de la Cal şi Cárcamo [40] şi de Holhoş [76], vezi Teorema 2.18 din această lucrare.

Observaţia 3.13. Pentru operatorii Bleimann-Butzer-Hahn am găsit în Corolarul 2.27 funcţia $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$. Ponderea maximă va fi $\rho(x)=e^{\frac{\alpha}{\sqrt{1+x}}}$ care este o funcţie mărginită pe $[0,\infty)$, ceea ce ne arată că această pondere este echivalentă cu $\rho(x)=1$ şi spaţiul potrivit pentru aproximarea globală a funcţiilor folosind operatorii Bleimann-Butzer-Hahn este $C_\rho[0,\infty)=C^*[0,\infty)$.

Corolarul 3.14. Pentru $\alpha>0$ şi $\rho(x)=e^{\alpha\sqrt{x}}$, operatorii Szász-Mirakjan $S_n\colon C_\rho[0,\infty)\to C_\rho[0,\infty)$ au proprietatea că

$$\|S_nf-f\|_\rho\to 0, \text{ când } n\to\infty$$

dacă şi numai dacă

$$f(x^2)e^{-\alpha x} \text{ este uniform continuă pe } [0,\infty).$$

În plus, pentru orice $f\in C_\rho[0,\infty)$ şi orice $n\ge 1$, avem

$$\|S_nf-f\|_\rho \le \|f\|_\rho\cdot\frac{\alpha C}{\sqrt{n}} + 2\cdot\omega\left(f(t^2)e^{-\alpha t},\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

unde $C=\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{2}\sqrt{\|S_n\rho^2\|_{\rho^2}+2\|S_n\rho\|_\rho+1}<\infty$ este o constantă ce depinde numai de α.

Observaţia 3.15. Rezultatul din Corolarul 3.14 pentru cazul limită, α=0, a fost obţinut în [137], [140], [40] şi [76], vezi Corolarul 2.19 din prezenta lucrare.

Observaţia 3.16. În [16], Becker studiază aproximarea globală a funcţiilor folosind operatorii Szász-Mirakjan pentru ponderea $\rho(x)=1+x^N$, unde $N\in\mathbb{N}$. Becker, Kucharsky şi Nessel [17] studiază aproximarea globală pentru ponderea exponenţială $\rho(x)=e^{\beta x}$. Dar pentru că

$$\sup_{x\ge 0}\frac{S_n(e^{\beta t},x)}{e^{\beta x}} = \sup_{x\ge 0} e^{nx(e^{\frac{\beta}{n}}-1)-\beta x} = +\infty,$$

ei obţin rezultate doar pentru spaţiul $C(\eta)=\cap_{\beta>\eta}C_\beta$, unde C_β este C_ρ pentru $\rho=e^{\beta x}$. Tot acolo se menţionează faptul că pentru orice $f\in C_\beta$ are loc $S_nf\in C_\gamma$, cu $\gamma>\beta$ şi cu $n>\beta/\ln(\gamma/\beta)$. Ditzian [46] dă câteva teoreme inverse pentru spaţiile exponenţiale. În [9], Amanov obţine faptul că

$$\sup_{x\ge 0}\frac{\rho(x+\sqrt{x})}{\rho(x)}<\infty$$

este o condiţie necesară şi suficientă pentru uniform mărginirea normelor operatorilor $S_n\colon C_\rho[0,\infty) \to C_\rho[0,\infty)$. El menţionează că această condiţie implică inegalitatea

$$\rho(x) \le e^{\alpha\sqrt{1+x}}, \quad x \ge 0.$$

De asemenea, el dă o caracterizare a funcţiilor f care pot fi uniform aproximate prin $S_n f$ în norma ρ, folosind un modul ponderat de netezime de ordinul doi.

Corolarul 3.17. Pentru $\alpha > 0$ şi $\rho(x) = (1+x)^\alpha$, operatorii Baskakov $V_n\colon C_\rho[0,\infty) \to C_\rho[0,\infty)$ au proprietatea că

$$\|V_n f - f\|_\rho \to 0, \text{ când } n \to \infty$$

dacă şi numai dacă

$$f(e^x - 1)e^{-\alpha x} \text{ este uniform continuă pe } [0,\infty).$$

În plus, pentru orice $f \in C_\rho[0,\infty)$ şi pentru orice $n \ge 2$, avem

$$\|V_n f - f\|_\rho \le \|f\|_\rho \cdot \frac{\alpha C}{\sqrt{n-1}} + 2 \cdot \omega\left(f(e^t - 1)e^{-\alpha t}, \frac{1}{\sqrt{n-1}}\right),$$

unde $C = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2}\sqrt{\|V_n\rho^2\|_{\rho^2} + 2\|V_n\rho\|_\rho + 1} < \infty$ este o constantă ce depinde numai de α.

Observaţia 3.18. Rezultatul din Corolarul 3.17 pentru cazul limită, α=0, a fost obţinut în [138], [140], [40] şi [76], vezi Corolarul 2.21 din prezenta lucrare.

Observaţia 3.19. După cum este menţionat şi în lucrarea [16], ponderea polinomială este cea mai potrivită pentru obţinerea de estimări globale ale restului în aproximarea funcţiilor continue prin operatorii Baskakov. Motivul este faptul că pentru ponderea exponenţială $\rho(x) = e^{\beta x}$, seria $V_n(\rho, x)$ este convergentă numai pentru $x < (e^{\frac{\beta}{n}} - 1)^{-1}$. Cu toate acestea, Ditzian [46] dă nişte teoreme inverse pentru funcţii cu creştere exponenţială.

Corolarul 3.20. Pentru $\alpha > 0$ şi $\rho(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)^\alpha$ operatorii Meyer-König şi Zeller $M_n\colon C_\rho[0,1) \to C_\rho[0,1)$ au proprietatea că

$$\|M_n f - f\|_\rho \to 0, \text{ când } n \to \infty$$

dacă şi numai dacă

$$f(1 - e^{-x})e^{-\alpha x} \text{ este uniform continuă pe } [0,\infty).$$

În plus, pentru orice funcţie $f \in C_\rho[0,1)$ şi pentru orice $n \ge 3$, avem

$$\|M_n f - f\|_\rho \le \|f\|_\rho \frac{\alpha C}{\sqrt{n}} + 2 \cdot \omega\left(f(1 - e^{-t})e^{-\alpha t}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

unde $C = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2}\sqrt{\|M_n\rho^2\|_{\rho^2} + 2\|M_n\rho\|_\rho + 1} < \infty$ este o constantă ce depinde numai de α.

Observaţia 3.21. Rezultatul Corolarului 3.20 pentru cazul limită, $\alpha = 0$, a fost obţinut în [138], [140], [40] şi [76], vezi Corolarul 2.23 din prezenta lucrare.

Corolarul 3.22. Pentru $\alpha > 0$ şi $\rho(x) = 1 + x^\alpha$, operatorii Post-Widder $P_n\colon C_\rho(0,\infty) \to C_\rho(0,\infty)$ au proprietatea că

$$\|P_n f - f\|_\rho \to 0, \quad \text{când } n \to \infty$$

dacă şi numai dacă

$$f(e^x)e^{-\alpha x} \quad \text{este uniform continuă pe } (0,\infty).$$

În plus, pentru orice funcţie $f \in C_\rho(0,\infty)$ şi orice $n \ge 2$, avem

$$\|P_n f - f\|_\rho \le \|f\|_\rho \frac{\alpha C}{\sqrt{n-1}} + 2 \cdot \omega\left(f(e^t)e^{-\alpha t}, \frac{1}{\sqrt{n-1}}\right),$$

unde $C = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2}\sqrt{\|P_n\rho^2\|_{\rho^2} + 2\|P_n\rho\|_\rho + 1} < \infty$ este o constantă ce depinde numai de α.

Observaţia 3.23. Rezultatul Corolarului 3.22 pentru cazul limită, $\alpha = 0$, a fost obţinut în [141] şi în [40].

Corolarul 3.24. Pentru $\alpha > 0$ şi $\rho(x) = 1+x^\alpha$, operatorii Gamma G_n definiţi pe spaţiul $C_\rho(0,\infty)$, $n \geq [2\alpha]$, au proprietatea că

$$\|G_n f - f\|_\rho \to 0, \quad \text{când } n \to \infty$$

dacă şi numai dacă

$$f(e^x)e^{-\alpha x} \quad \text{este uniform continuă pe } (0,\infty).$$

În plus, pentru orice funcţie $f \in C_\rho(0,\infty)$ şi orice $n \geq [2\alpha]$, avem

$$\|G_n f - f\|_\rho \leq \|f\|_\rho \frac{\alpha C}{\sqrt{n}} + 2 \cdot \omega\left(f(e^t)e^{-\alpha t}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

unde $C = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2}\sqrt{\|G_n\rho^2\|_{\rho^2} + 2\|G_n\rho\|_\rho + 1} < \infty$ este o constantă ce depinde numai de α.

Observaţia 3.25. Rezultatul Corolarului 3.24 pentru cazul limită, $\alpha = 0$, a fost obţinut în [140].

Corolarul 3.26. Pentru $\alpha > 0$ şi pentru $\rho(x) = e^{\alpha x}$ operatorii Gauss-Weierstrass $W_n\colon C_\rho(\mathbb{R}) \to C_\rho(\mathbb{R})$ au proprietatea că

$$\|W_n f - f\|_\rho \to 0, \quad \text{când } n \to \infty,$$

dacă şi numai dacă

$$f(x)e^{-\alpha x} \quad \text{este uniform continuă pe } \mathbb{R}.$$

În plus, pentru orice funcţie $f \in C_\rho(\mathbb{R})$ şi pentru orice $n \geq 1$, avem

$$\|W_n f - f\|_\rho \leq \|f\|_\rho \frac{\alpha C}{\sqrt{n}} + 2 \cdot \omega\left(f(t)e^{-\alpha t}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

unde $C = e^{\frac{\alpha^2}{2}}\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{4}\left(1 + e^{\frac{\alpha^2}{2}}\right)^2}$.

Observaţia 3.27. Rezultatul Corolarului 3.26 pentru cazul limită, $\alpha = 0$, a fost obţinut în [76], vezi Corolarul 2.25 din prezenta lucrare.

Corolarul 3.28. Pentru $\alpha > 0$ şi pentru $\rho(x) = e^{\alpha x}$ operatorii Picard $\mathcal{P}_n\colon C_\rho(\mathbb{R}) \to C_\rho(\mathbb{R})$, $n \geq [2\alpha] + 2$, au proprietatea că

$$\|\mathcal{P}_n f - f\|_\rho \to 0, \quad \text{când } n \to \infty,$$

dacă şi numai dacă

$$f(x)e^{-\alpha x} \quad \text{este uniform continuă pe } \mathbb{R}.$$

În plus, pentru orice funcţie $f \in C_\rho(\mathbb{R})$ şi pentru orice $n \geq [2\alpha] + 2$, avem

$$\|\mathcal{P}_n f - f\|_\rho \leq \|f\|_\rho \frac{\alpha C}{n} + 2 \cdot \omega\left(f(t)e^{-\alpha t}, \frac{\sqrt{2}}{n}\right),$$

unde $C > 0$ este o constantă dependentă de α, dar independentă de n.

3.3.4 Module de continuitate pentru spaţii ponderate

Mulţi autori (vezi Exemplele 3.2 şi 3.3) definesc următorul modul de continuitate pentru aproximarea pe spaţii ponderate:

$$\omega^\rho(f,\delta) = \sup_{0<h\le\delta} \|\Delta_h f\|_\rho, \quad \text{unde } \Delta_h(f,x) = f(x+h) - f(x).$$

Dar acest modul nu satisface unele proprietăţi ale modulelor asociate funcţiilor definite pe o mulţime compactă. De aceea, Lopez-Moreno [97] introduce modulul

$$\Omega(f,\delta) = \sup_{0<h\le\delta}\sup_{x\ge 0} \frac{|f(x+h)-f(x)|}{\rho(x+h)},$$

pentru $\rho(x) = 1 + x^m$ şi $f \in C_\rho[0,\infty)$. Amanov [9] dă o definiţie similară pentru modulele lui Ditzian şi Totik:

$$\omega_1^\varphi(f,\delta)_\rho = \sup_{0<h\le\delta}\sup_{x\ge 0} \frac{|f(x+h\varphi(x))-f(x)|}{\rho(x+h\varphi(x))},$$

unde $\rho\colon [0,\infty) \to [1,\infty)$ este o funcţie crescătoare şi $\varphi(x) = \sqrt{x}$.

În Teorema 3.9 estimarea restului $f(x) - A_n(f,x)$ în ρ-normă, în aproximarea funcţiei f prin $A_n f$, unde $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir de operatori liniari şi pozitivi, se face prin intermediul cantităţilor $\omega_\varphi\left(\frac{f}{\rho},\delta\right)$ şi r_n, unde $\omega_\varphi(\cdot,\cdot)$ este modulul definit în capitolul 2 (vezi Definiţia 2.1), iar $r_n = \sup_{x\ge\eta_n}\left|\frac{f(x)}{\rho(x)} - K_f\right|$ măsoară viteza de convergenţă a limitei $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\rho(x)} = K_f$ cu ajutorul şirului η_n care converge la infinit. Balász şi Szabados [13] introduc modulul

$$\Omega(f,A) = \sup_{x\ge y\ge A} |(f(x) - f(y)|,$$

pe care-l numesc "modulul la infinit", cu scopul de a măsura viteza de convergenţă a limitei $\lim_{x\to\infty} f(x) = L < \infty$. Spre deosebire de r_n, acest modul nu presupune cunoaşterea limitei funcţiei date la infinit.

În Teorema 3.11, care este un rezultat din 2010 (vezi [78]), estimarea restului se face doar cu ajutorul modulului ponderat $\omega_\varphi\left(\frac{f}{\rho},\delta\right)$, fără a fi nevoie de cunoaşterea vitezei de convergenţă a funcţiei f/ρ la infinit.

În [26, 27], Bustamante şi Morales de la Cruz, construiesc module pe spaţiul $C_\rho^*[0,\infty)$ folosind module pe spaţiul $C[0,1]$, prin relaţia

$$\Theta(f,\delta)_\rho = \Theta(\Phi f,\delta),$$

unde Θ este un modul pe $C[0,1]$, iar Φ este un izomorfism $\Phi\colon C_\rho^*[0,\infty) \to C[0,1]$.

În [62], Gadjiev şi Aral introduc următorul modul de continuitate

$$\Omega_\rho(f,\delta) = \sup_{\substack{x,y\ge 0\\ |\rho(x)-\rho(y)|\le\delta}} \frac{|f(x)-f(y)|}{[|\rho(x)-\rho(y)|+1]\rho(x)},$$

unde $\rho \in C^1[0,\infty)$, $\rho(0) = 1$ şi $\inf_{x\ge 0}\rho'(x) > 0$ şi $f \in C_\rho[0,\infty)$. Cu ajutorul acestui modul, se demonstrează următoarea teoremă

Teorema 3.29. *Fie $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de operatori liniari şi pozitivi. Dacă $\|A_n e_0 - 1\|_\rho = \alpha_n$, $\|A_n\rho - \rho\|_\rho = \beta_n$ şi $\left\|A_n\rho^2 - \rho^2\right\|_{\rho^2} = \gamma_n$ şi dacă are loc convergenţa $\alpha_n + 2\beta_n + \gamma_n \to 0$, atunci*

$$\|A_n f - f\|_{\rho^4} \le 16\cdot\Omega_\rho(f,\sqrt{\alpha_n+2\beta_n+\gamma_n}) + \|f\|_\rho\,\alpha_n,$$

pentru orice funcţie $f \in C_\rho^*[0,\infty)$ şi n suficient de mare.

În continuare, introducem un modul asemănător modulului lui Gadjiev şi Aral, cu ajutorul căruia vom obţine estimări mai bune ale restului.

Definiţia 3.30. Fie $\varphi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ o funcţie strict crescătoare, continuă cu proprietatea că $\varphi(0) = 0$ şi $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty$ şi fie $\rho(x) = 1 + \varphi^2(x)$. Pentru o funcţie $f \in C_\rho[0,\infty)$ şi pentru $\delta \geq 0$ introducem următorul modul de continuitate

$$\omega_\varphi^\rho(f,\delta) = \sup_{\substack{t,x\geq 0\\ |\varphi(t)-\varphi(x)|\leq\delta}} \frac{|f(t)-f(x)|}{\rho(t)+\rho(x)}. \tag{3.7}$$

Observaţia 3.31. Dacă $\varphi(x) = x$, atunci $\omega_\varphi^\rho(f,\cdot)$ este echivalent cu $\Omega(f,\cdot)$ definit prin

$$\Omega(f,\delta) = \sup_{x\geq 0,\ |h|\leq\delta} \frac{|f(x+h)-f(x)|}{(1+h^2)(1+x^2)},$$

în sensul că

$$\omega_\varphi^\rho(f,\delta) \leq \Omega(f,\delta) \leq 3\cdot\omega_\varphi^\rho(f,\delta),$$

prima inegalitate fiind adevărată pentru $\delta \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ iar cea de-a doua pentru $\delta \geq 0$.

Propoziţia 3.32. $\lim\limits_{\delta\searrow 0} \omega_\varphi^\rho(f,\delta) = 0$, pentru orice funcţie $f \in C_\rho^*[0,\infty)$.

Propoziţia 3.33. Pentru orice $\delta \geq 0$ şi $\lambda \geq 0$ avem

$$\omega_\varphi^\rho(f,\lambda\delta) \leq (2+\lambda)\cdot\omega_\varphi^\rho(f,\delta).$$

Propoziţia 3.34. Pentru orice funcţie $f \in C_\rho[0,\infty)$, pentru $\delta > 0$ şi pentru orice $x,t \geq 0$

$$|f(t)-f(x)| \leq (\rho(t)+\rho(x))\left(2+\frac{|\varphi(t)-\varphi(x)|}{\delta}\right)\omega_\varphi^\rho(f,\delta).$$

Teorema 3.35 (Holhoş [73])**.** *Fie $A_n : C_\rho[0,\infty) \to B_\rho[0,\infty)$ un şir de operatori liniari şi pozitivi cu proprietatea că*

$$\begin{aligned}
\left\|A_n\varphi^0 - \varphi^0\right\|_{\rho^0} &= a_n,\\
\left\|A_n\varphi - \varphi\right\|_{\rho^{\frac12}} &= b_n,\\
\left\|A_n\varphi^2 - \varphi^2\right\|_{\rho} &= c_n,\\
\left\|A_n\varphi^3 - \varphi^3\right\|_{\rho^{\frac32}} &= d_n,
\end{aligned}$$

unde $(a_n)_{n\geq1}, (b_n)_{n\geq1}, (c_n)_{n\geq1}$ şi $(d_n)_{n\geq1}$ sunt şiruri convergente la 0. Atunci

$$\|A_nf - f\|_{\rho^{\frac32}} \leq (7+4a_n+2c_n)\cdot\omega_\varphi^\rho(f,\delta_n) + \|f\|_\rho\, a_n$$

pentru toate funcţiile $f \in C_\rho[0,\infty)$, unde

$$\delta_n = 2\sqrt{(a_n+2b_n+c_n)(1+a_n)} + a_n + 3b_n + 3c_n + d_n.$$

Capitolul 4

Inegalităţi referitoare la operatori liniari şi aplicaţiile lor

4.1 Aproximarea prin funcţii raţionale cu numărator fixat folosind operatori liniari şi pozitivi

În această secţiune, sunt prezentate două rezultate privind aproximarea funcţiilor prin funcţii raţionale cu numărător fixat: pentru funcţii care păstrează semn constant pe intervalul pe care aproximăm funcţia, numărătorul este constant 1, iar pentru funcţii care îşi schimbă semnul, numărătorul este un polinom care îşi schimbă semnul în aceleaşi puncte ca şi funcţia de aproximat. Rezultatele prezentate (Teorema 4.3 şi Teorema 4.6) sunt rezultate cunoscute (vezi [96], [95], [94], [155]), dar tehnica cu care au fost demonstrate este nouă şi unitară. În articolele menţionate se folosesc operatorii Jackson împreună cu o inegalitate demonstrată cu ajutorul polinoamelor lui Cebâşev. Noi obţinem aceste rezultate cu ajutorul unui şir de operatori liniari şi pozitivi cu proprietăţi "bune". Demonstraţiile Lemelor 4.2, 4.4 şi 4.5 sunt originale.

Fie $A_n\colon C[0,1] \to \Pi_n$ un şir de operatori liniari şi pozitivi, unde Π_n este spaţiul polinoamelor cu gradul cel mult n. Presupunem că A_n verifică proprietăţile:

1. $A_n(e_i, x) = e_i(x), \ \ i = 0, 1,$ unde $e_i(x) = x^i$,
2. $A_n((t-x)^2, x) \le C \cdot \dfrac{\phi^2(x)}{n^2}$, unde $\phi(x) = \sqrt{x(1-x)}$,
3. $\|A_n f - f\| \le C \cdot \omega_1^{\phi}\left(f, \dfrac{1}{n}\right)$,
4. $A_n(f, x) \ge f(x), \ \ 0 < x < 1,$ pentru orice funcţie convexă f pe $(0,1)$,
5. $|A_n(f, x) - f(x)| \le C \cdot \omega_2\left(f, \dfrac{\phi(x)}{n}\right)$,
6. $\|A_n f - f\| \le C \cdot \omega_2^{\phi}\left(f, \dfrac{1}{n}\right)$.

Propoziţia 4.1 (Inegalitatea lui Jensen pentru operatori liniari şi pozitivi)**.** Fie un operator liniar şi pozitiv $A\colon C[0,1] \to C[0,1]$, care conservă funcţiile constante. Atunci, inegalitatea

$$A(f, x) \ge f(A(e_1, x)) \tag{4.1}$$

are loc pentru orice $x \in (0,1)$ şi pentru orice funcţie f convexă pe $(0,1)$.

Un exemplu de şir de operatori care verifică proprietăţile 1-6 este $A_n = H_{2[\frac{n-1}{2}]+1}\colon C[0,1] \to \Pi_n$, $n \ge 3$, unde H_n sunt operatorii lui Gavrea introduşi în Exemplul 1.11.

Lema 4.2. Pentru un şir de operatori A_n cu proprietăţile de mai sus, avem

$$A_n(|f(t)-f(x)|^2,x)\le C\cdot\left[\omega_1^{\phi}\left(f,\frac{1}{n}\right)\right]^2.$$

Teorema 4.3. *Fie $f\in C[0,1]$ o funcţie neconstantă şi nenegativă. Atunci, există un şir de polinoame $p_n\in\Pi_n$ astfel încât*

$$\left\|f-\frac{1}{p_n}\right\|\le C\cdot\omega_1^{\phi}\left(f,\frac{1}{n}\right).$$

Lema 4.4. Pentru orice numere $0<b_1<b_2<\cdots<b_\ell<1$, $\ell\ge 1$, considerăm

$$\rho(x)=(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_\ell).$$

Atunci, există un polinom $S_n\in\Pi_n$ cu proprietatea că pentru orice $x\in[0,1]$ şi orice $n\ge\ell$ avem

$$0\le 1-\frac{|\rho(x)|}{S_n(x)}\le\min\left(1,\frac{C\ell}{n}\sum_{j=1}^{\ell}\frac{\phi(x)}{|x-b_j|}\right).$$

Lema 4.5. Există o constantă $C>0$ astfel încât pentru $t,x\in[0,1]$ şi $f\in C[0,1]$, are loc inegalitatea

$$|f(t)-f(x)|\cdot\min\left(1,\frac{\max(\phi(t),\phi(x))}{n|t-x|}\right)\le C\cdot\omega_1^{\phi}\left(f,\frac{1}{n}\right).$$

Teorema 4.6. *Există o constantă pozitivă C cu proprietatea: dacă funcţia $f\in C[0,1]$ schimbă semnul de exact $\ell\ge 1$ ori în $[0,1]$, să spunem, în punctele $b_1,b_2,\ldots,b_\ell$, atunci pentru orice $n\ge 2\ell$, există un polinom $p_n\in\Pi_n$, având acelaşi semn ca şi f în $(b_\ell,1)$ şi cu proprietatea că pentru orice $x\in[0,1]$ are loc inegalitatea*

$$\left|f(x)-\frac{(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_\ell)}{p_n(x)}\right|\le C\ell^2\omega_1^{\phi}\left(f,\frac{1}{n}\right).$$

4.2 O inegalitate pentru o funcţională liniară de tip discret

În [86], Kuang Jichang demonstrează inegalitatea

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)>\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}f\left(\frac{k}{n+1}\right)>\int_0^1 f(x)dx,$$

unde f este o funcţie strict crescătoare şi convexă (sau concavă) pe $(0,1]$.

Folosind un şir de operatori liniari şi pozitivi de tip Bernstein-Stancu, I. Gavrea [67] obţine inegalitatea

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(x_{k-1,n-1}\right)-\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}f\left(x_{k-1,n}\right)\ge 0, \tag{4.2}$$

pentru o funcţie crescătoare şi convexă f şi pentru punctele $x_{i,n}$, $i=0,1,\ldots,n$ din $[0,1]$, care satisfac proprietăţile

$$0\le x_{0,n}\le x_{1,n}<\cdots<x_{n,n}\le 1$$

$$x_{k-1,n}\le x_{k-1,n-1}\le x_{k,n}$$

$$x_{0,n-1}\ge x_{0,n}\text{ şi } x_{n-1,n-1}\ge x_{n,n}$$

$$(n-k)(x_{k,n-1}-x_{k,n})\ge k(x_{k,n}-x_{k-1,n-1}),$$

pentru $n \geq 1$ şi pentru orice $k = 1, 2, \ldots, n$.

Pentru inegalităţi asemănătoare se poate consulta [3],[67],[109],[112]. În [3], autorii prezintă un istoric al acestor inegalităti şi rezultate recente privitoare la acestea.

În această secţiune, demonstrăm o inegalitate pentru o funcţională liniară şi discretă şi obţinem condiţii necesare şi suficiente referitoare la punctele $x_{i,n}$ astfel încât să aibă loc inegalitatea (4.2). Vom deduce şi o inegalitate referitoare la majorizarea ponderată.

Fie $m \geq 3$ un număr natural şi fie $I_m = \{1, 2, \ldots, m\}$. Considerăm $(z_k)_{k \in I_m}$ un şir strict descrescător de numere reale din $[0, 1]$. Fie A o funcţională liniară

$$A[f] = \sum_{k=1}^{m} a_k f(z_k), \tag{4.3}$$

unde a_k sunt numere reale şi f este o funcţie reală definită pe $[0, 1]$. Dorim să găsim condiţii necesare şi suficiente asupra punctelor z_k, astfel încât

$$A[f] \geq 0, \tag{4.4}$$

este adevărată pentru o clasă de funcţii convexe. Are loc următorul rezultat

Teorema 4.7 (Holhoş [75]). *Considerând relaţiile*

$$A[e_0] = 0 \tag{4.5}$$

$$A[e_1] \geq 0 \tag{4.6}$$

$$A[e_1] \leq 0 \tag{4.7}$$

$$\sum_{i=1}^{k} a_i(z_i - z_{k+1}) \geq 0, \ \textit{pentru orice} \ \ k \in I_{m-2}. \tag{4.8}$$

$$\sum_{i=k}^{m} a_i(z_i - z_{k-1}) \geq 0, \ \textit{pentru orice} \ \ k \in I_m \setminus \{1, 2\}. \tag{4.9}$$

atunci următoarele afirmaţii sunt adevărate
a) (4.4) este adevărată pentru orice funcţie crescătoare şi convexă f dacă şi numai dacă (4.5), (4.6) şi (4.8) sunt adevărate;
b) (4.4) este adevărată pentru orice funcţie descrescătoare şi convexă f dacă şi numai dacă (4.5), (4.7) şi (4.8) sunt adevărate;
c) (4.4) este adevărată pentru orice funcţie convexă f dacă şi numai dacă (4.5), (4.6), (4.7) şi (4.8) sunt adevărate;
d) (4.4) este adevărată pentru orice funcţie crescătoare şi concavă f dacă şi numai dacă (4.5), (4.6) şi (4.9) sunt adevărate;
e) (4.4) este adevărată pentru orice funcţie descrescătoare şi concavă f dacă şi numai dacă (4.5), (4.7) şi (4.9) sunt adevărate;
f) (4.4) este adevărată pentru orice funcţie concavă f dacă şi numai dacă (4.5), (4.6), (4.7) şi (4.9) sunt adevărate;

Observaţia 4.8. În [109], T. Popoviciu demonstrează cazul c) din Teorema 4.7. El generalizează acest rezultat pentru clasa funcţiilor convexe de ordinul n.

Corolarul 4.9. Fie $n \geq 1$ şi fie $(x_i)_{i \in I_n}$ şi $(y_j)_{j \in I_{n+1}}$ două şiruri crescătoare de numere din $[0, 1]$. Fie A funcţionala liniară definită de relaţia

$$A[f] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) - \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} f(y_k).$$

Dacă

$$\begin{aligned}
x_1 &\geq y_1, \\
x_n &\geq y_{n+1}, \\
(n-i)(x_{i+1}-y_{i+1}) &\geq i(y_{i+1}-x_i), \text{ pentru } i \in I_{n-1}, \\
(n+1-i)(x_i-y_i) &\geq i(y_{i+1}-x_i), \text{ pentru } i \in I_n,
\end{aligned}$$

atunci $A[f] \geq 0$, pentru orice funcţie crescătoare $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ şi convexă sau concavă.

Corolarul 4.10. Fie $n \geq 1$ şi fie $(x_i)_{i \in I_n}$ şi $(y_j)_{j \in I_{n+1}}$ două şiruri crescătoare de numere din $[0,1]$, astfel încât $x_k \geq y_k$, pentru orice $k \in I_n$. Fie A funcţionala liniară definită prin

$$A[f] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) - \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} f(y_k).$$

a) Dacă $x_n \geq y_{n+1}$ şi

$$(n-i)(x_{i+1}-y_{i+1}) \geq i(y_{i+1}-x_i), \text{ pentru } i \in I_{n-1},$$

atunci $A[f] \geq 0$, pentru orice funcţie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ crescătoare şi convexă.
b) Dacă

$$(n+1-i)(x_i-y_i) \geq i(y_{i+1}-x_i), \text{ pentru } i \in I_n,$$

atunci $A[f] \geq 0$, pentru orice funcţie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ crescătoare şi concavă.

Corolarul 4.11. Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un şir crescător de numere reale pozitive cu proprietatea că şirul $\left(n\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ este crescător ($\left(n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)-1\right)_{n \in \mathbb{N}}$ este crescător). Atunci

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{a_k}{a_n}\right) \geq \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} f\left(\frac{a_k}{a_{n+1}}\right),$$

pentru orice funcţie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ crescătoare şi convexă (concavă).

Observaţia 4.12. Rezultatul Corolarului 4.11 a fost obţinut pentru prima dată în [113].

Corolarul 4.13. Fie $n \geq 1$ şi fie $(x_i)_{i \in I_n}$ şi $(y_j)_{j \in I_{n+1}}$ două şiruri strict crescătoare de numere din $[0,1]$, cu proprietatea

$$0 \leq y_1 < x_1 < y_2 < \cdots < y_n < x_n \leq y_{n+1} \leq 1. \tag{4.10}$$

Fie A funcţionala liniară definită prin

$$A[f] = \alpha\sum_{k=1}^{n} f(x_k) - \beta\sum_{k=1}^{n+1} f(y_k), \tag{4.11}$$

unde $\alpha, \beta > 0$. Atunci $A[f] \geq 0$, pentru orice funcţie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ crescătoare şi convexă sau concavă, dacă şi numai dacă sunt îndeplinite condiţiile

$$\begin{aligned}
&\alpha = \frac{c}{n} \text{ şi } \beta = \frac{c}{n+1}, \text{ unde } c > 0, \\
&(n+1)(x_1+x_2+\cdots+x_k) - n(y_1+\cdots+y_k) \geq ky_{k+1}, \\
&(n+1)(x_k+\cdots+x_n) - n(y_{k+1}+\cdots+y_{n+1}) \geq (n+1-k)x_k,
\end{aligned}$$

pentru orice $k \in I_n$.

Observaţia 4.14. Fie $n \geq 1$ şi fie $(x_i)_{i \in I_n}$ şi $(y_j)_{j \in I_{n+1}}$ două şiruri strict crescătoare de numere din $[0,1]$, cu proprietatea

$$0 \leq y_1 \leq x_1 < y_2 < \cdots < y_n < x_n \leq y_{n+1} \leq 1.$$

Atunci, condiţiile

$$(n+1)(x_k + \cdots + x_n) - n(y_{k+1} + \cdots + y_{n+1}) \geq (n+1-k)x_k, \ k \in I_n,$$

sunt echivalente cu

$$\sum_{i=k}^{n-1} [(n-i)(x_{i+1} - y_{i+1}) - i(y_{i+1} - x_i)] \geq 0, \ k \in I_{n-1} \ \text{ şi } \ x_n = y_{n+1},$$

şi condiţiile

$$(n+1)(x_1 + x_2 + \cdots + x_k) - n(y_1 + \cdots + y_k) \geq k y_{k+1}, \ k \in I_n$$

sunt echivalente cu

$$\sum_{i=1}^{k} [(n+1-i)(x_i - y_i) - i(y_{i+1} - x_i)] \geq 0, \ k \in I_n.$$

Observaţia 4.15. Folosind rezultatul Corolarului 4.13 împreună cu Observaţia 4.14 deducem rezultatul obţinut în [67], menţionat la începutul acestei secţiuni.

Observaţia 4.16. Dacă $y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_{n+1}$ sunt rădăcinile polinomului P de grad $n+1$ şi $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ sunt rădăcinile derivatei polinomului P, atunci au loc inegalităţile

$$(n+1)(x_1 + x_2 + \cdots + x_k) - n(y_1 + \cdots + y_k) \geq k y_{k+1},$$

pentru orice $k \in I_{n-1}$. Pentru alte detalii a se consulta articolul lui T. Popoviciu [109].

Corolarul 4.17. Fie $n \geq 1$ şi fie t $(x_i)_{i \in I_n}$, $(y_i)_{i \in I_n}$ două şiruri descrescătoare de numere din $[0,1]$ şi $(p_i)_{i \in I_n}$, $(q_i)_{i \in I_n}$ două şiruri de numere reale cu proprietatea că (p_i) majorizează pe (q_i) (adică $p_1 + \cdots + p_k \geq q_1 + \cdots + q_k$ pentru orice $k \in I_{n-1}$ şi $p_1 + \cdots + p_n = q_1 + \cdots + q_n$). Dacă următoarele condiţii sunt satisfăcute

$$\sum_{i=1}^{k} q_i x_i \geq \sum_{i=1}^{k} q_i y_i, \text{pentru orice } k \in I_{n-1},$$
$$\sum_{i=1}^{k} p_i x_i \geq \sum_{i=1}^{k} p_i y_i, \ \text{pentru orice } k \in I_n,$$

şi

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = \sum_{i=1}^{n} q_i y_i,$$

atunci, pentru orice funcţie convexă $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, are loc inegalitatea

$$\sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k) \geq \sum_{k=1}^{n} q_k f(y_k).$$

Corolarul 4.18. Dacă f este convexă pe $[0,1]$, atunci

$$B_n(f,x) \geq B_{n+1}(f,x), \quad \text{pentru orice } x \in [0,1] \text{ şi } n \geq 1.$$

Bibliografie

[1] U. Abel şi M. Ivan, *Some identities for the operator of Bleimann, Butzer and Hahn involving divided differences*, Calcolo, **36** (1999), 143–160.

[2] U. Abel şi M. Ivan, *Best constant for a Bleimann-Butzer-Hahn moment estimation*, East J. Approx., **6** (2000), 349–355.

[3] S. Abramovich, J. Barić, M. Matić, J. Pečarić, *On Van de Lune-Alzer's inequality*, Math. Inequal. Appl. **1** (2007), no. 4, 563–587.

[4] J.A. Adell şi J. de la Cal, *Using stochastic processes for studying Bernstein-type operators*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl., **33** (1993), 125–141.

[5] O. Agratini, *Aproximare prin operatori liniari*, Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 2000.

[6] J.A.H. Alkemade, *The Second Moment for the Meyer-König and Zeller Operators*, J. Approx. Theory, **40** (1984), 261–273.

[7] F. Altomare şi M. Campiti, *Korovkin-Type Approximation Theory and its Applications*, De Gruyter Series Studies in Mathematics, Vol. 17, Walter de Gruyter & Co., Berlin, New York, 1994.

[8] F. Altomare şi E. Mangino, *On a generalization of Baskakov operators*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., **44**, no. 5-6 (1999), 683–705.

[9] N.T. Amanov, *On the weighted approximation by Szász-Mirakjan operators*, Anal. Math., **18** (1992), 167–184.

[10] A. Aral, *A generalization of Szász-Mirakyan operators based on q-integers*, Math. Comput. Modelling, **47** (2008), 1052–1062.

[11] A. Aral şi V. Gupta, *On the Durrmeyer type modification of the q-Baskakov type operators*, Nonlinear Anal., **72** (2010), 1171–1180.

[12] A. Attalienti şi M. Campiti, *Bernstein-type operators on the half line*, Czechoslovak Math. J., **52** (127) (2002), 851–860.

[13] C. Balázs şi J. Szabados, *Approximation by Bernstein type rational functions. II*, Acta Math. Hungar., **40** (3-4) (1982), 331–337.

[14] C. Badea, *K-functionals and Moduli of Smoothness of Functions Defined on Compact Metric Spaces*, Comput. Math. Appl., **30** (1995), 23–31.

[15] V.A. Baskakov, *An example of a sequence of linear positive operators in the space of continuous functions*, Dokl. Akad. Nauk, **113** (1957), 249–251 (în limba rusă).

[16] M. Becker, *Global Approximation Theorems for Szász-Mirakjan and Baskakov Operators in Polynomial Weight Spaces*, Indiana Univ. Math. J., **27**, no. 1 (1978), 127–142.

[17] M. Becker, D. Kucharski şi R.J. Nessel, *Global approximation for the Szasz-Mirakjan operators in exponential weight spaces*, Linear Spaces and Approximation (Proc. Conf. Math. Res. Inst. Oberwolfach, 1977), Internat. Ser. Numer. Math., **40**, 318–333, Birkhäuser Verlag, Basel, 1978.

[18] M. Becker şi R.J. Nessel, *A global approximation theorem for Meyer-König and Zeller operators*, Math. Z., **160** (1978), 195–206.

[19] H. Berens şi G.G. Lorentz, *Inverse Theorems for Bernstein Polynomials*, Indiana Univ. Math. J., **21**, no. 8 (1972), 693–708.

[20] S.N. Bernstein, *Sur l'ordre de la meilleure approximation de fonctions continues par des polynomes de degré donné*, Mem. Cl. Sci. Acad. Roy. Belg., **4** (1912), 1–103.

[21] S.N. Bernstein, *Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul de probabilités*, Commun. Soc. Math. Kharkow (2), **13** (1912-1913), 1–2.

[22] G. Bleimann, P.L. Butzer şi L. Hahn, *A Bernstein-type operator approximating continuous functions on the semi-axis*, Indag. Math., **42** (1980), 255–262.

[23] H. Bohman, *On approximation of continuous and of analytic functions*, Ark. Mat., **2** (1952), 43–56.

[24] B.D. Boyanov şi V.M. Veselinov, *A note on the approximation of functions in an infinite interval by linear positive operators*, Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. de la R.S. de Roumanie, **14** (62), no. 1 (1970), 9–13.

[25] J. Bustamante, *Estimates of positive linear operators in terms of second-order moduli*, J. Math. Anal. Appl., **345** (2008), 203–212.

[26] J. Bustamante şi L. Morales de la Cruz, *Korovkin Type Theorems for Weighted Approximation*, Int. Journal of Math. Analysis, **1**, no. 26 (2007), 1273–1283.

[27] J. Bustamante şi L. Morales de la Cruz, *Positive linear operators and continuous functions on unbounded intervals*, Jaen J. Approx., **1**, no. 2 (2009), 145–173.

[28] J. Bustamante, J.M. Quesada şi L. Morales de la Cruz, *Direct estimate for positive linear operators in polynomial weighted spaces*, J. Approx. Theory, (va apărea).

[29] B.C. Carlson, *The Logarithmic mean*, Amer. Math. Monthly, **79** (1972), 615–618.

[30] E.W. Cheney şi A. Sharma, *Bernstein power series*, Canad. J. Math., **16** (2) (1964), 241–252.

[31] A. Ciupa, *A positive linear operator for approximation in exponential weight spaces*, Mathematical Analysis and Approximation Theory, the 5th Romanian-German Seminar on Approximation Theory and Its Applications, Burg, Sibiu, 2002, 85–96.

[32] A. Ciupa, *Approximation by a Generalized Szasz Type Operator*, J. Comput. Anal. Appl., **5**, no. 4 (2003), 413–424.

[33] A. Ciupa, *A Voronovskaya theorem for a positive linear operator*, Soochow J. Math., **31**, no. 3 (2005), 375–387.

[34] A. Ciupa, *Approximation by Positive Linear Operators in Polynomial Weighted Space*, Automat. Comput. Appl. Math., **15**, no. 1 (2006), 91–96.

[35] A. Ciupa, *On the approximation by an integral type operator in a polynomial weighted space*, din: "Numerical Analysis and Approximation Theory" (Proc. Int. Conf. Cluj-Napoca 2006; ed. O. Agratini şi P. Blaga), 161–170, Casa Cărţii de Ştiinţă, 2006.

[36] A. Ciupa, *Weighted Approximation by Szasz Type Operators*, Proceedings of the eleventh symposium of mathematics and its applications, Timişoara, 2006, 76–82.

[37] A. Ciupa, *Approximation Properties of a Modified Jakimovski-Leviatan Operator*, Automat. Comput. Appl. Math., **17**, no. 3 (2008), 401–408.

[38] A. Ciupa, *Positive Linear Operators for the Approximation in polynomial weighted spaces*, Bull. Allahabad Math. Soc., **24**, part 2 (2009), 233–240.

[39] I. Chlodovsky, *Sur le développement des fonctions définies dans un intervalle infini en séries de polynomes de M. S. Bernstein*, Compos. Math., **4** (1937), 380–393.

[40] J. de la Cal şi J. Cárcamo, *On uniform approximation by some classical Bernstein-type operators*, J. Math. Anal. Appl., **279** (2003), 625–638.

[41] B. Della Vecchia, G. Mastroianni şi J. Szabados, *Weighted approximation of functions by Szász-Mirakyan-type operators*, Acta Math. Hungar., **111** (4) (2006), 325–345.

[42] B. Della Vecchia, G. Mastroianni şi J. Szabados, *A converse result for approximation by weighted Szász-Mirakyan operator*, Acta Math. Hungar., **118** (4) (2008), 319–336.

[43] M.M. Derriennic, *Sur l'approximation des fonctions intégrables sur* $[0,1]$ *par des polynomes de Bernstein modifiés*, J. Approx. Theory, **31** (1981), 325–343.

[44] R.A. DeVore, G.G. Lorentz, *Constructive approximation*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1993.

[45] Z. Ditzian, *Convergence of Sequences of Linear Positive Operators: Remarks and Applications*, J. Approx. Theory, **14** (1975), 296-301.

[46] Z. Ditzian, *On global inverse theorems of Szász and Baskakov operators*, Canad. J. Math., **31**, no. 2 (1979), 255–263.

[47] Z. Ditzian şi V. Totik, *Moduli of smoothness*, Springer-Verlag, New York, 1987.

[48] O. Dŏgru, *On weighted approximation of continuous functions by linear positive operators on infinite intervals*, Mathematica (Cluj), **41(64)**, no. 1 (1999), 39–46.

[49] O. Dŏgru, *Approximation properties of a generalization of positive linear operators*, J. Math. Anal. Appl., **342** (2008), 161–170.

[50] J.L. Durrmeyer, *Une formule d'inversion de la transformée de Laplace: Application à la théorie des moments*, Thése de 3e cycle, Faculté des Sciences de l'Université de Paris, 1967.

[51] S. Eisenberg, *Korovkin's Theorem*, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2), **2** (1979), 13–29.

[52] S. Eisenberg şi B. Wood, *On the Degree of Approximation by Extended Hermite-Fejér Operators*, J. Approx. Theory, **18** (1976), 169–173.

[53] A. Erençýn şi F. Taśdelen, *On a family of linear and positive operators in weighted spaces*, JIPAM J. Inequal. Pure Appl. Math., **8**, issue 2, art. 39 (2007), 6 pp.

[54] S. Ersan şi O. Doğru, *Statistical approximation properties of q-Bleimann, Butzer and Hahn operators*, Math. Comput. Modelling, **49** (2009), 1595-1606.

[55] J. Favard, *Sur les multiplicateurs d'interpolation*, J. Math. Pures Appl., **23** (1944), 219–247.

[56] L. Fejér, *Über Interpolation*, Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen Mathematisch-physikalische Klasse, (1916), 66–91.

[57] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, vol. II, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1966.

[58] M. Felten, *Local and Global Approximation Theorems for Positive Linear Operators*, J. Approx. Theory, **94** (1998), 369–419.

[59] G.M. Fihtenholţ, *Curs de calcul diferenţial şi integral*, vol. II, Editura Tehnică, Bucureşti, 1964.

[60] A.D. Gadjiev, *The convergence problem for a sequence of positive linear operators on unbounded sets, and theorems analogous to that of P.P. Korovkin*, Dokl. Akad. Nauk, **218**, no. 5 (1974), 1001–1004, (în limba rusă), Dokl. Math., **15**, no. 5 (1974), 1433–1436, (în limba engleză).

[61] A.D. Gadjiev, *Theorems of Korovkin type*, Mat. Zametki., **20**, 5 (1976), 781–786, (în limba rusă), Math. Notes, **20**, 5 (1976), 996–998, (în limba engleză).

[62] A.D. Gadjiev şi A. Aral, *The estimates of approximation by using new type of weighted modulus of continuity*, Comput. Math. Appl., **54** (2007), 127–135.

[63] A.D. Gadjiev şi Ö. Çakar, *On uniform approximation by Bleimann, Butzer and Hahn operators on all positive semiaxis*, Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci., **19**, no. 5 (1999), 21–26.

[64] A.D. Gadjiev, R.O. Efendiev şi E. Ibikli, *Generalized Bernstein-Chlodowsky polynomials*, Rocky Mountain J. Math., **28**, no. 4 (1998), 1267–12.

[65] I. Gavrea, *The Approximation of Continuous Functions by Means of Some Linear Positive Operators*, Results Math., **30** (1996), 55–66.

[66] I. Gavrea, H. Gonska, R. Păltănea şi G. Tachev, *General estimates for the Ditzian-Totik modulus*, East J. Approx., **9** (2) (2003), 175–194.

[67] I. Gavrea, *Operators of Bernstein-Stancu type and the monotonicity of some sequences involving convex functions*, International Series of Numerical Mathematics, **157**, 181–192, Birkhäuser, 2008.

[68] H.H. Gonska, *On approximation in spaces of continuous functions*, Bull. Austral. Math. Soc., **28** (1983), 411–432.

[69] H. Gonska, P. Piţul şi I. Raşa, *On Peano's form of the Taylor remainder, Voronovskaja's theorem and the commutator of positive linear operators*, din: "Numerical Analysis and Approximation Theory" (Proc. Int. Conf. Cluj-Napoca 2006; ed. O. Agratini şi P. Blaga), 55–80, Casa Cărţii de Ştiinţă, 2006.

[70] M. Haase, *Convexity Inequalities for Positive Operators*, Positivity, **11** (2007), 57–68.

[71] T. Hermann, *Approximation of unbounded functions on unbounded interval*, Acta Math. Hungar., **29** (3-4) (1977), 393–398.

[72] C. Hermite, *Sur la formule d'interpolation de Lagrange*, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, **84** (1878), 70–79.

[73] A. Holhoş, *Quantitative estimates for positive linear operators in weighted spaces*, Gen. Math., **16**, no. 4 (2008), 99–110.

[74] A. Holhoş, *The rate of convergence of positive linear operators in weighted spaces*, Automat. Comput. Appl. Math., **17**, no. 2 (2008), 239–246.

[75] A. Holhoş, *An inequality for a linear discrete operator involving convex functions*, J. Math. Inequal., **3**, no. 3 (2009), 383–393.

[76] A. Holhoş, *Uniform Approximation by Positive Linear Operators on Noncompact Intervals*, Automat. Comput. Appl. Math., **18**, no. 1 (2009), 121–132.

[77] A. Holhoş, *The rate of approximation of functions in an infinite interval by positive linear operators*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math., **LV**, no. 2 (2010), 133–142.

[78] A. Holhoş, *Uniform weighted approximation by positive linear operators*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math., (va apărea).

[79] L.C. Hsu, *Approximation of non-bounded continuous functions by certain sequences of linear positive operators or polynomials*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math., **21** (1961), 37–43.

[80] L.C. Hsu, *On a kind of extended Fejér-Hermite interpolation polynomials*, Acta Math. Hungar., **15** (1964), 325–328.

[81] E. Ibikli, *Approximation by Bernstein-Chlodowsky polynomials*, Hacet. J. Math. Stat., **32** (2003), 1–5.

[82] M.E.H. Ismail şi C.P. May, *On a Family of Approximation Operators*, J. Math. Anal. Appl., **63** (1978), 446–462.

[83] N. Ispir, *On Modified Baskakov Operators on Weighted Spaces*, Turkish J. Math., **25** (2001), 355–365.

[84] N. Ispir şi Ç. Atakut, *Approximation by modified Szasz-Mirakjan operators on weighted spaces*, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci., **112**, no. 4 (2002), 571–578.

[85] D. Jackson, *Über Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung*, Preisschrift und Dissertation, Univ. Göttingen, 1911.

[86] K. Jichang, *Some extensions and refinements of Minc-Sathre inequality*, Math. Gaz. **83** (1999), 123-127.

[87] L.V. Kantorovich, *Sur certains développements suivant les polynomes de la forme de S. Bernstein*, I, II, C.R. Acad. URSS (1930), 563–568, 595–600.

[88] R.A. Khan, *Some probabilistic methods in the theory of approximation operators*, Acta Math. Hungar., **35** (1-2) (1980), 193–203.

[89] M.K. Khan, B. Della Vecchia şi A. Fassih, *On the Monotonicity of Positive Linear Operators*, J. Approx. Theory, **92** (1998), 22–37.

[90] P.P. Korovkin, *On the convergence of linear positive operators in the space of continuous functions*, Dokl. Akad. Nauk, **90** (1953), 961–964 (în limba rusă).

[91] P.P. Korovkin, *Linear Operators and Approximation Theory*, Hindustan Publishing Corp., Delhi, 1960.

[92] E. Landau, *Über die Approximation einer stetigen Funktion durch eine ganze rationale Funktion*, Rend. Circ. Mat. Palermo, **25** (1908), 337–345.

[93] M. Leśniewich şi L. Rempulska, *Approximation by some operators of the Szász-Mirakjan type in exponential weight spaces*, Glas. Mat. Ser. III, **32**(52) (1997), 57–69.

[94] D. Leviatan and D.S. Lubinsky, *Degree of approximation by rational functions with prescribed numerator degree*, Canad. J. Math., **46**, no. 3 (1994), 619–633.

[95] D. Leviatan, A.L. Levin and E.B Saff, *On Approximation in the L^p-Norm by Reciprocals of Polynomials*, J. Approx. Theory, **57**, no. 3 (1989), 322–331.

[96] A.L. Levin and E.B. Saff, *Degree of approximation of real functions by reciprocals of real and complex polynomials*, SIAM J. Math. Anal., **19**, no. 1 (1988), 233–245.

[97] A.-J. López-Moreno, *Weighted simultaneous approximation with Baskakov type operators*, Acta Math. Hungar., **104**(1-2) (2004), 143–151.

[98] A. Lupaş, *Some properties of the linear positive operators (I)*, Mathematica (Cluj), **9 (32)**, no. 1 (1967), 77–83.

[99] A. Lupaş şi M. Müller, *Approximationseigenschaften der Gammaoperatoren*, Math. Z., **98** (1967), 208–226.

[100] A. Lupaş, *Die Folge der Betaoperatoren*, Dissertation, Universität Stuttgart, 1972.

[101] M.J. Marsden, *An Identity for Spline Functions with Applications to Variation-Diminishing Spline Approximation*, J. Approx. Theory, **3** (1970), 7–49.

[102] M.J. Marsden şi I.J. Schoenberg, *On variation diminishing spline approximation methods*, Mathematica (Cluj), **31** (1966), 61–82.

[103] C.P. May, *Saturation and inverse theorems for combinations of a class of exponential-type operators*, Canad. J. Math, **28** (1976), 1224–1250.

[104] W. Meyer-König şi K. Zeller, *Bernsteinsche Potenzreihen*, Studia Math., **19** (1960), 89–94.

[105] G. Mirakjan, *Approximation des fonctions continues au moyen de polynomes de la forme* $e^{-nx}\sum_{k=0}^{m} C_{k,n}x^k$, Dokl. Akad. Nauk, **31** (1941), 201–205 (în limba rusă).

[106] D.S. Mitrinović, *Analytic Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

[107] R. Păltănea, *Approximation theory using positive linear operators*, Birkhäuser, Boston, 2004.

[108] T. Popoviciu, *Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur*, Mathematica (Cluj), **10** (1935), 49–54.

[109] T. Popoviciu, *Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur(III)*, Mathematica(Cluj), **16** (1940), 74–86.

[110] T. Popoviciu, *Asupra demonstraţiei teoremei lui Weierstrass cu ajutorul polinoamelor de interpolare*, în Lucrările Sesiunii Generale Ştiinţifice din 2-12 iunie 1950, 1664–1667, Editura Academiei Republicii Populare Române, Bucureşti, 1951.

[111] E.L. Post, *Generalized differentiation*, Trans. Amer. Math. Soc., **32** (1930), 723–781.

[112] F. Qi, *Generalizations of Alzer's and Kuang's inequality*, Tamkang J. Math. **31**, 3 (2000), 223–227. RGMIA Res. Rep. Coll. **2**, 6 (1999), Art. 12, 891–895.

[113] F. Qi şi B.-N. Guo, *Monotonicity of sequences involving convex function and sequence*, Math. Inequal. Appl. **9** (2006), no. 2, 247–254.

[114] L. Rempulska şi M. Skorupka, *The Bernstein inequality for some operators of Szász-Mirakjan type*, Note Mat., **14**, no. 2 (1994), 277–290.

[115] L. Rempulska şi M. Skorupka, *Approximation theorems for some operators of the Szasz-Mirakjan type in exponential weight spaces*, Univ. Beograd. Publ. Elektroteh. Fak. Ser. Mat., **7** (1996), 36–44.

[116] L. Rempulska şi M. Skorupka, *The Voronovskaya theorem for some linear positive operators in exponential weight spaces*, Publ. Mat., **41** (1997), 519–526.

[117] L. Rempulska şi Z. Walczak, *Approximation properties of certain modified Szasz-Mirakyan operators*, Mathematiche (Catania), **55**, Fasc. I (2000), 121–132.

[118] L Rempulska şi Z. Walczak, *On some properties of Szasz-Mirakyan operators in Hölder spaces*, Turkish J. Math., **27** (2003), 435–446.

[119] L. Rempulska şi M. Skorupka, *On strong approximation of functions by certain linear operators*, Math. J. Okayama Univ., **46** (2004), 153–161.

[120] L. Rempulska şi Z. Walczak, *Approximation by some operators of Szasz-Mirakyan type*, Anal. Theory Appl., **20**, no. 1 (2004), 1–15.

[121] L. Rempulska şi M. Skorupka, *On strong approximation of functions of one and two variables by certain operators*, Fasc. Math., **35** (2005), 115–133.

[122] L. Rempulska şi M. Skorupka, *Approximation by generalized MKZ-operators in polynomial weighted spaces*, Anal. Theory Appl., **23**, no. 1 (2007), 64–75.

[123] L. Rempulska şi S. Graczyk, *Approximation by modified Szász-Mirakyan operators*, JIPAM J. Inequal. Pure Appl. Math., **10**, issue 3, art. 61 (2009), 8 pp.

[124] L. Rempulska şi K. Tomczak, *On some properties of the Picard operators*, Arch. Math. (Brno), **45** (2009), 125–135.

[125] W. Roth, *A Korovkin type theorem for weighted spaces of continuous functions*, Bull. Austral. Math. Soc., **55** (1997), 239–248.

[126] I.J. Schoenberg, *On variation diminishing approximation methods*, în "On Numerical Approximation", MRC Symposium (R.E. Langer, ed.), 249–274, Univ. of Wisconsin Press, Madison, 1959.

[127] S.-Y. Shaw şi C.-C. Yeh, *Rates for Approximation of Unbounded Functions by Positive Linear Operators*, J. Approx. Theory, **57** (1989), 278–292.

[128] O. Shisha şi B. Mond, *The Degree of Convergence of Sequences of Linear Positive Operators*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, **60** (1968), 1196–1200.

[129] P.C. Sikkema, *Der Wert einiger Konstanten in der Theorie der Approximation mit Bernstein-Polynomen*, Numer. Math., **3** (1961), 107–116.

[130] D.D. Stancu, *On the Monotonicity of the Sequence Formed by the First Order Derivatives o the Bernstein Polynomials*, Math. Z., **98** (1967), 46–51.

[131] D.D Stancu, *Approximation of functions by a new class of linear polynomial operators*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., **13** (1968), 1173–1194.

[132] D.D. Stancu, *Asupra unei generalizări a polinoamelor lui Bernstein*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math., **14** (1969), 31–45.

[133] D.D. Stancu, *Use of probabilistic methods in the theory of uniform approximation of continuous functions*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., **14** (1969), 673–691.

[134] O. Szász, *Generalization of S. Bernstein's Polynomials to the Infinite Interval*, Journal of Research of the National Bureau of Standards, **45** (1950), 239–245.

[135] W.B. Temple, *Stieltjes integral representation of convex functions*, Duke Math. J., **21** (1954), 527–531.

[136] A.F. Timan, *Theory of Approximation of Functions of a Real Variable*, Pergamon Press, Oxford-London-New York-Paris, 1963.

[137] V. Totik, *Uniform approximation by Szász-Mirakjan type operators*, Acta Math. Hungar., **41**(3-4) (1983), 291–307.

[138] V. Totik, *Uniform approximation by Baskakov and Meyer-König and Zeller operators*, Period. Math. Hungar., **14**(3-4) (1983), 209–228.

[139] V. Totik, *Uniform approximation by Bernstein-type operators*, Indag. Math., **46** (1984), 87–93.

[140] V. Totik, *Uniform approximation by positive operators on infinite intervals*, Anal. Math., **10** (1984), 163–182.

[141] V. Totik, *Uniform Approximation by Exponential-Type Operators*, J. Math. Anal. Appl., **132** (1988), 238–246.

[142] V. Totik, *Approximation by Bernstein Polynomials*, Amer. J. Math., **116** (1994), 995–1018.

[143] M.S. Vyazovskaya şi N.S. Pupashenko, *On the Normalizing Multiplier of the Generalized Jackson Kernel*, Mat. Zametki., **80**, 1 (2006), 20–28, (în limba rusă), Math. Notes, **80**, 1 (2006), 19–26, (în limba engleză).

[144] Z. Walczak, *On approximation by modified Szasz-Mirakjan operators*, Glas. Mat. Ser. III, **37**(57) (2002), 303–319.

[145] Z. Walczak, *On certain modified Szasz-Mirakyan operators in polynomial weighted spaces*, Note Mat., **22**, no. 1 (2003), 17–25.

[146] Z. Walczak, *On certain positive linear operators in polynomial weight spaces*, Acta Math. Hungar., **101**(3) (2003), 179–191.

[147] Z. Walczak, *On modified Szasz-Mirakyan operators*, Novi Sad J. Math., **33**, no. 1 (2003), 93–107.

[148] Z. Walczak, *On the convergence of the modified Szasz-Mirakyan operators*, Yokohama Math. J., **51** (2004), 11–18.

[149] Z. Walczak, *Error estimates and the Voronovskaja theorem for modified Szász-Mirakyan operators*, Math. Slovaca, **55**, no. 4 (2005), 465–476.

[150] Z. Walczak, *Convergence of Szász-Mirakyan type operators*, Rev. Anal. Numér. Théor. Approx., **36**, no. 1 (2007), 107–113.

[151] Z. Walczak şi V. Gupta, *A note on the convergence of Baskakov type operators*, Appl. Math. Comput., **202** (2008), 370–375.

[152] D.V. Widder, *The inversion of the Laplace integral and the related moment problem*, Trans. Amer. Math. Soc., **36** (1934), 107–200.

[153] D.V. Widder, *The Laplace transform*, Princeton University Press, Princeton, 1946.

[154] K. Weierstrass, *Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen*, Sitzungsber. Akad. Berlin (1885), 633–639, 789–805.

[155] D. Yu and S. Zhou, *An inequality for polynomials with positive coefficients and applications in rational approximation*, J. Math. Ineq., **2**, no. 4 (2008), 575–585.

[156] I. Yuksel şi N. Ispir, *Weighted approximation by a certain family of summation integral-type operators*, Comput. Math. Appl., **52** (2006), 1463–1470.

[157] D.-X. Zhou, *Weighted Approximation by Szász-Mirakjan Operators*, J. Approx. Theory, **76** (1994), 393–402.