Universitatea "Babeş-Bolyai", Cluj-Napoca

Facultatea de Matematică şi Informatică

Tania Angelica Lazăr

TEOREME DE PUNCT FIX PENTRU OPERATORI CE NU INVARIAZĂ DOMENIUL DE DEFINIŢIE ŞI APLICAŢII

Coordonator ştiinţific
Prof. Dr. Adrian Petruşel

Cluj-Napoca, 2010

Cuprins

Cuvinte cheie: operator univoc, operator multivoc, punct fix, punct fix strict, spaţiu metric, dependenţa de date, problemă bine pusă, mulţime înzestrata cu două metrici, operatori ce nu invariază domeniul de definiţie.

Introducere

Teoria punctului fix pentru operatori univoci şi multivoci este un domeniu al analizei neliniare cu o dezvoltare impetuoasă în ultimele decenii. Stau mărturie numeroasele monografii, proceedinguri şi articole ştiinţifice apăute în aceşti ani. Tematica acestei teze se încadrează, de asemenea, în acest important domeniu de cercetare. Mai precis, teza de doctorat abordează studiul teoriei punctului fix pentru contracţii generalizate de tip univoc şi multivoc ce nu invariază domeniul de definiţie. Astfel sunt studiate existenţa, unicitatea, dependenţa de date, precum şi alte proprietăţi ale punctelor fixe penru contracţii generalizate definite pe bile din spaţii metrice complete. Sunt enunţate o serie de teoreme locale de punct fix iar ca şi consecinţe ale acestora sunt stabilite teoreme ale operatorilor deschişi, teoreme de invarianţă a domeniului şi teoreme de continuare. Cazul spaţiilor înzestrate cu două metrici este considerat în ultimul capitol al tezei.

Studiul teoriei punctului fix pentru operatori ce acţionează de la o submulţime a spaţiului la spaţiul întreg este extrem de prezent în literatura de specialitate a secolului XX. Pornind de la lucrările lui Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz şi Sperner (asupra operatorilor de tip K^2M) ca şi de la contribuţiile lui Borsuk (privind operatorii continui şi anti-podali), studiul teoriei punctului fix pentru operatori $f : Y \subset X \to X$ se concretizează şi capătă mai multă consistenţă prin contribuţiile lui Leray-Schauder, Rothe, Granas, Krasnoselskii, K. Fan, Browder, R.F. Brown, etc. din anii 1940-1960. Rezultatele principale se referă la teoreme locale de punct fix, principii de continuare şi transversalitate topologică precum şi la teoremele de retracţie. Ulterior, rezultate importante, pe cazul teoriei metrice şi cazul teoriei topologice a puntului fix pentru operatori univoci şi multivoci au avut M. Frigon, A.

Granas (prin teoreme de continuare) S. Reich (cazul contracţiilor slab interioare), I.A. Rus (prin teoria structurilor de punct fix, bazată pe principii de retracţie), R. Precup (prin teoreme generale de continuare), R. Precup şi D. O'Regan (teoreme de tip Leray-Schauder), K. Deimling (cazul contracţiilor relativ la măsuri de necompactitate şi cazul operatorilor condensatori), etc. (a se vedea I.A. Rus, A. Petruşel, G. Petruşel [131])

Lucrarea de faţă este structurată pe patru capitole, precedate de o listă a simbolurilor şi urmate de lista bibliografică a publicaţiilor.

Primul capitol, intitulat **Preliminarii**, are scopul de a aminti unele noţiuni şi rezultate de bază necesare în prezentarea capitolelor următoare ale acestei teze de doctorat. În redactarea acestui capitol am utilizat următoarele surse bibliografice: J.-P. Aubin, H. Frankowska [8], K. Deimling [36], J. Dugundji, A. Granas [49], S. Hu, N. S. Papageorgiou [54], W.A. Kirk, B. Sims [59], A. Petruşel [90], I.A. Rus [125], [121].

In capitolul al doilea, intitulat **Teoria teoremei metrice de punct fix a lui Reich** vom considera, în prima parte, unele rezultate de bază din teoria punctului fix pentru operatori univoci de tip Ćirić-Reich-Rus, rezultate relativ la care vom prezenta o nouă metodă de demonstrare, utilizând tehnica introd usă de R.S. Palais pentru cazul contracţiilor. În a doua parte, vom prezenta rezultate care se constituie într-o teorie a teoremei metrice de punct fix pentru operatori multivoci a lui Reich. Rezultate proprii ale autorului sunt următoarele:

- în paragraful 2.1 rezultatele proprii sunt: Lema 2.1.1, Lema 2.1.2, Lema 2.1.3 şi Teorema 2.1.2 (aceste rezultate prezintă o nouă metodă de demonstrare a teoremei de punct fix pentru operatori univoci de tip Reich, metodă care induce şi aproximarea punctului fix cu regula de oprire a calculului iteraţiilor operatorului), Lema 2.1.4, Lema 2.1.5 şi Teorema 2.1.3 (unde metoda mai sus menţionată se aplică pentru cazul φ-contracţiilor). Rezultatele din acest paragraf extind la cazul operatorilor de tip Ćirić-Reich-Rus şi la cazul φ-contracţiilor, rezultate de dată recentă demonstrate de R.S. Palais [82] în cazul contracţiilor univoce. Aceste rezultate au fost prezentate la International Conference on Sciences (Oradea 12-14 noiembrie 2009) şi au fost publicate în lucrarea **T.A. Lazăr** [67];

• în paragraful 2.2 noţiunile şi rezultatele proprii sunt: Definiţia 2.2.2, Definiţia 2.2.3, Definiţia 2.2.4., Definiţia 2.2.5, Teorema 2.2.2- Teorema 2.2.5. Noţiunile introduse prezintă câteva clase abstracte de operatori multivoci, iar rezultatele obţinute sunt atât exemplificări ale noţiunilor anterioare, cât şi prezentarea teoriei teoremei metrice de punct fix pentru operatori multivoci de tip Reich, multivoci ce satisfac aceste condiţii. Noţiunile şi rezultatele prezentate, completează şi extind noţiuni şi rezultate similare din lucrările A. Petruşel, I.A. Rus [94], [100], A. Petruşel, T.A. Lazăr [99], I.A. Rus, A. Petruşel, A. Sîntămărian [132] şi J. Andres, J. Fišer [6]. Conţinutul acestui paragraf a fost prezentat la conferinţa internaţională The 11th Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing (SYNASC09) (26-29 septembrie 2009, Timişoara) şi va apare în volumul acestei conferinţe [99], precum şi într-o lucrare trimisă spre publicare **T.A. Lazăr**, G. Petruşel [68].

Al treilea capitol al lucrării este intitulat **Teoreme de punct fix pentru operatori ce nu invariază domeniul de definiţie şi aplicaţii** şi are ca scop dezvoltarea teoriei punctului fix pentru contracţii generalizate univoce şi multivoce, definite pe bile din spaţii metrice şi care în general nu invariază domeniul de definiţie. Apoi, ca şi aplicaţii ale teoremelor de mai sus, sunt prezentate teoreme de dependenţă de date, teoreme de invarianţă a domeniului şi noi principii ale operatorilor deschişi. Acestea au fost publicate în lucrarea **T.A. Lazăr**, A. Petruşel şi N. Shazhad, [65]. Rezultatele proprii ale autorului din acest capitol sunt:

• pentru cazul operatorilor univoci: Observaţia 3.1.1, Observaţia 3.1.2, Teorema 3.1.4, Teorema 3.1.5, Teorema 3.1.6, Corolar 3.1.1, Teorema 3.1.7, Teorema 3.1.8, Teorema 3.1.9, Teorema 3.1.10;

• pentru cazul operatorilor multivoci: Teorema 3.2.4, Teorema 3.2.5, Lema 3.2.1, Teorema 3.2.6, Corolarul 3.2.1, Corolarul 3.2.2, Teorema 3.2.7, Observaţia

3.2.2, Teorema 3.2.8.

Rezultatele acestui capitol completează, extind şi generalizează teoreme de punct fix pentru operatori non-self şi aplicaţii ale acestora în rezultate de dependenţă continuă de date, teoreme de invarianţa domeniului şi teoreme de omotopie date de Agarwal-O'Regan-Precup [5], Andres-Górniewicz [7], L. Górniewicz [48], V. Berinde [14], [15], Bollenbacher-Hicks [19], Caristi [23], Browder [20], Chiş-Novac, Precup, I.A. Rus [29], R. Precup [103], [104], [104], Granas-Dugundji [37], [49], Frigon-Granas [44], Hegedüs [50], Hegedüs-Szilágyi [51], Jachymski-Jóźwik [58], Park-Kim [85], Reich [115], I.A. Rus [122], I.A. Rus-S. Mureşan [129], I.A. Rus-A. Petruşel, M.A. Şerban [133], A. petruşel [87], M.Păcurar-I.A.Rus [86], Ts.Tsacev-V.G.Angelov [141], Walter [143], Węgrzyk [144], Ciric-Ume-Khan-Pathak [33], Ciric [32], Hicks-Saliga [53], Radovanović [114], Aamri-Chaira [1], Aubin-Siegel [9], Castañeda [24], Hicks-Rhoades [52], Hicks-Saliga [53], Jachymski [57], [56], Maciejewski [70], A. Petruşel, A. Sîntămărian [93], A. Petruşel [91].

Ultimul capitol şi anume **Teoreme de punct fix pe mulţimi înzestrate cu două metrici,** prezintă o teorie a punctului fix pentru operatori univoci şi multivoci definiţi pe spaţii înzestrate cu două metrici. Sunt enunţate şi demonstrate teoreme locale de punct fix pentru operatori univoci (φ-contracţie, operatori Caristi-Browder, contracţie pe grafic) şi multivoci (φ-contracţie, contracţie generalizată de tip ĆiriĆ). Sunt de asemenea precizate condiţiile în care problema de punct fix este bine-pusă, iar ca şi aplicaţii, este enunţată o teoremă de omotopie pentru contracţii multivoce generalizate de tip Ćirić. Mai precis, rezultatele autorului sunt:

• pentru cazul operatorilor univoci: Teorema 4.1.1, Teorema 4.1.2, Teorema 4.1.3, Teorema 4.1.4, Teorema 4.1.5, şi Teorema 4.1.6;

• pentru cazul operatorilor multivoci: Teorema 4.2.1, Teorema 4.2.2, Teorema 4.2.3, Teorema 4.2.4, Teorema 4.2.5, Teorema 4.2.6, Teorema 4.2.7, Teorema 4.2.8, Corolarul 4.2.1., Observaţiile 4.2.1 şi 4.2.2.

Rezultatele prezentate în acest capitol au apărut în lucrările: **T.A. Lazăr**, Fixed points for non-self nonlinear contractions and non-self Caristi type operators, Creative Math.& Inf. 17 (2008), No. 3, 446-451; **T.A. Lazăr**, D. O'Regan, A. Petruşel, Fixed points and homotopy results for Ciric-type multivalued operators on a set with two metrics, Bull. Korean Math. Soc. 45 (2008), No. 1, 6773; **T.A. Lazăr**, V.L. Lazăr, Fixed points for non-self multivalued operators on a set with two metrics, JP Journal of Fixed Point Theory and Applications 4 (2009), No. 3, 183-191. Ele extind şi generalizează unele teoreme de acest tip date de Agarwal-O'Regan [3], R.P. Agarwal, J.H. Dshalalow, D. O'Regan [4], Bucur-Guran [21], Bylka-Rzepecki [22], Chifu-Petrusel [27], [28], Ćirić [31], Feng-Liu [39], Frigon [43], Frigon-Granas [44], Matkowski [72], A.S. Mureşan [77], O'Regan-Precup [80], A. Petruşel-I.A. Rus [95], [96], Reich [117], I.A. Rus [126], [127], [120], B.Rzepecki [134], S.P.Singh [136], [137].

În final, doresc să aduc calde mulţumiri conducătorului meu ştiinţific, prof. univ. dr. Adrian Petruşel, pentru îndrumarea atentă şi încurajarea permanentă de care m-am bucurat pe parcursul stagiul meu de doctorat, membrilor Catedrei de Ecuaţii Diferenţiale, precum şi tuturor colaboratorilor seminarului de cercetare al Catedrei de Ecuaţii Diferenţiale, pentru ajutorul şi colaborarea pe care mi le-au oferit. De la toţi în ansamblu şi de la fiecare în parte am învăţat foarte mult. Formarea mea ca profesor şi cercetător s-a făcut la Facultatea de Matematică şi Informatică din Universitatea "Babeş-Bolyai" Cluj-Napoca. Tuturor dascălilor mei le mulţumesc încă o dată.

Cluj-Napoca, februarie 2010 Drd. Tania Angelica Lazăr

0.1 Lista simbolurilor

A.

Fie X o mulţime nevidă. şi $f : X \to X$ un operator.

$\mathcal{P}(X) := \{Y|Y \subseteq X\}$ mulţimea submulţimilor lui X

$P(X) := \{Y \subseteq X|Y \neq \emptyset\}$ mulţimea submulţimilor nevide a lui X

$1_X : X \to X, 1_X(x) = x$ operatorul identitate

$I(f) := \{A \in P(X)|f(A) \subset A\}$ mulţimea submulţimilor invariante

$Fix(f) := \{x \in X|x = f(x)\}$ mulţimea punctelor fixe a lui f

$f^0 = 1_X, \cdots f^{n+1} = f \circ f^n$, $n \in \mathbb{N}$ iteratele lui f

$O(x; f) := \{x, f(x), \cdots, f^n(x), \cdots\}$ orbita lui f relativ la x

$O(x, y; f) := O(x; f) \cup O(y; f)$

Dacă Y este o altă mulţime nevidă atunci

$$\mathbf{M}(X, Y) := \{f : X \to Y| \text{ f este un operator } \} \text{ şi}$$

$$\mathbf{M}(Y) := \mathbf{M}(Y, Y).$$

B.

Fie (X, d) un spaţiu metric.

$\widetilde{B}(x, R) := \{y \in X|d(x, y) \leq R\}$ bila închisă de centru $x \in X$ şi rază $R > 0$

$B(x, R) := \{y \in X|d(x, y) < R\}$ bila deschisă de centru $x \in X$ şi rază $R > 0$

$diam(A) := \sup\{d(a, b)|a, b \in A\} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$,unde A este o submulţime a lui X

$P_b(X) := \{Y \in P(X) | \delta(Y) < +\infty\}$

$P_{op}(X) := \{Y \in P(X) | Y \text{ este deschisă}\}$

$P_{cl}(X) := \{Y \in P(X) | Y = \overline{Y}\}$

$P_{cp}(X) := \{Y \in P(X) | Y \text{ este o mulţime compactă }\}$

$D_d : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$

$$D_d(A, B) = \begin{cases} \inf\{d(a, b) |\ a \in A,\ b \in B\}, & \text{dacă } A \neq \emptyset \neq B \\ 0, & \text{dacă } A = \emptyset = B \\ +\infty, & \text{dacă } A = \emptyset \neq B \text{ sau } A \neq \emptyset = B. \end{cases}$$

În particular, $D_d(x_0, B) = D_d(\{x_0\}, B)$ (unde $x_0 \in X$).

$\delta_d : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$,

$$\delta_d(A, B) = \begin{cases} \sup\{d(a, b) |\ a \in A,\ b \in B\}, & \text{dacă } A \neq \emptyset \neq B \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

$\rho_d : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$,

$$\rho_d(A, B) = \begin{cases} \sup\{D_d(a, B) |\ a \in A\}, & \text{dacă } A \neq \emptyset \neq B \\ 0, & \text{dacă } A = \emptyset \\ +\infty, & \text{dacă } B = \emptyset \neq A \end{cases}$$

$H_d : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$,

$$H_d(A, B) = \begin{cases} \max\{\rho_d(A, B), \rho_d(B, A)\}, & \text{dacă } A \neq \emptyset \neq B \\ 0, & \text{dacă } A = \emptyset = B \\ +\infty, & \text{dacă } A = \emptyset \neq B \text{ sau } A \neq \emptyset = B. \end{cases}$$

se numeşte funcţionala generalizată Pompeiu-Hausdorff.

C.

Fie X un spaţiu Banach.

$P_{cv}(X) := \{Y \in P(X) | Y \text{ este o mulţime convexă }\}$

$P_{cp,cv}(X) := \{Y \in P(X) | Y \text{ este o mulţime compactă şi convexă }\}$

$\|A\| := H(A, \{0\}),\ A \in P_{b,cl}(X).$

D.

Fie (X, d) un spaţiu metric, $Y \in P(X)$ şi $\varepsilon > 0$. Atunci:

$V^0(Y, \varepsilon) := \{x \in X | \inf_{y \in Y} d(x, y) < \varepsilon\}$

$V(Y, \varepsilon) := \{x \in X | \inf_{y \in Y} d(x, y) \leq \varepsilon\}$

Dacă X, Z sunt mulţimi nevide, atunci simbolul

$$T : X \multimap Z \text{ sau } T : X \to \mathcal{P}(Z)$$

notează un operator multivoc de la X la Z.

$DomT := \{x \in X | \ T(x) \neq \emptyset\}$

$T(Y) := \bigcup_{x \in Y} T(x)$, pentru $Y \in P(X)$

$I(T) := \{A \in P(X) | T(A) \subset A\}$

$I_b(T) := \{Y \in I(T) | \delta(Y) < +\infty\}$

$I_{b,cl}(T) := \{Y \in I(T) | \delta(Y) < +\infty, Y = \overline{Y}\}$

$I_{cp}(T) := \{Y \in I(T) | Y \text{ este compactă }\}$

$T^{-1}(z) := \{x \in X | \ z \in T(x)\}$

$GrafT := \{(x, z) \in X \times Z | \ z \in T(x)\}$

$T^{-}(W) := \{x \in X | \ T(x) \cap W \neq \emptyset\}$, pentru $W \in P(Z)$

$T^{+}(W) := \{x \in DomT | \ T(x) \subset W\}$, pentru $W \in P(Z)$

$T^{+}(\emptyset) = \emptyset,\ T^{-}(\emptyset) = \emptyset.$

Şirul aproximaţiilor succesive corespunzător lui T ce porneşte din $x \in X$ este şirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$, definit de

$$x_0 = x, \text{ şi } x_{n+1} \in T(x_n), \text{ pentru } n \in \mathbb{N}.$$

Dacă $T : X \to P(X)$ este un operator multivoc atunci pentru $x \in X$ avem iteratele operatorului T:

$$T^0(x) = x, T^1(x) = T(x), \cdots, T^{n+1}(x) = T(T^n(x)).$$

De asemenea, un element $x \in X$ se numeşte punct fix (respectiv punct fix strict) pentru T dacă

$$x \in T(x) \text{ (respectiv } \{x\} = T(x)).$$

Notăm cu $Fix(T)$ (respectiv cu $SFix(T)$) mulţimea punctelor fixe (respectiv ale punctelor fixe stricte) ale operatorului multivoc T, i. e.

$Fix(T) := \{x \in X | x \in T(x)\}$ mulţimea punctelor fixe a lui T

$SFix(T) := \{x \in X | \{x\} = T(x)\}$mulţimea punctelor fixe stricte a lui T.

Dacă X, Y sunt două mulţimi nevide, atunci notăm

$$\mathbf{M}^0(X, Y) := \{T \mid T : X \to \mathcal{P}(Y)\} \text{ şi}$$

$$\mathbf{M}^0(Y) := \mathbf{M}^0(Y, Y).$$

Capitolul 1

Preliminarii

Vom aminti în acest capitol unele noţiuni şi rezultate de bază necesare în prezentarea capitolelor următoare ale acestei teze de doctorat. În redactarea acestui capitol am utilizat următoarele surse bibliografice: J.-P. Aubin, H. Frankowska [8], K. Deimling [36], J. Dugundji, A. Granas [49], S. Hu, N. S. Papageorgiou [54], W.A. Kirk, B. Sims [59], A. Petruşel [90], I. A. Rus [125], [121].

1.1 Clase de operatori univoci.

1.2 Clase de operatori multivoci

Capitolul 2

Teoria teoremei metrice de punct fix a lui Reich

Vom considera, în prima parte a acestui capitol, unele rezultate de bază din teoria punctului fix pentru operatori univoci de tip Reich, rezultate relativ la care vom prezenta o nouă metodă de demonstrare, utilizând tehnica introdusă de R.S. Palais pentru cazul contracţiilor. In a doua parte a capitolului, vom prezenta rezultate care se constituie într-o teorie a teoremei metrice de punct fix pentru operatori multivoci a lui Reich.

2.1 Aproximarea punctului fix pentru clase de contracţii generalizate

Într-o lucrare recentă a lui R.S. Palais a fost dată o altă demonstraţie a principiului de contracţie a lui Banach. Rezultatul este însoţit de o regulă de oprire a şirului aproximaţiilor succesive. Acestă demonstraţie se bazează pe o formă a noţiunii de a-contracţie a unui operator $f : X \to X$ şi anume

$$d(x_1, x_2) \le \tfrac{1}{1-a}[d(x_1, f(x_1)) + d(x_2, f(x_2))], \text{ oricare ar fi } x_1, x_2 \in X.$$

Teorema 2.1.1 *(Banach, Caccioppoli, R.S. Palais [82]) Fie (X,d) un spaţiu metric complet şi operatorul $f : X \to X$ o a-contracţie. Atunci operatorul f are un unic punct fix $x^* \in X$ şi pentru orice x din X, şirul aproximaţiilor succesive $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge către x^* când $n \to +\infty$. Mai mult, avem:*

i) $d(f^n(x), x^*) \leq \frac{a^n}{1-a} d(x, f(x))$, *pentru toţi* $x \in X$;

ii) (R.S. Palais [82])(regula de oprire) pentru orice $x \in X$ şi pentru orice $\epsilon > 0$ avem $d(f^n(x), x^*) < \epsilon$, pentru fiecare $n > \frac{log(\epsilon)+log(1-a)-log(d(x,f(x)))}{log(a)}$.

În ceea ce urmează, prezentăm extinderea acestui rezultat la cazul operatorilor de tip Reich, precum şi în cazul φ-contracţiilor. Rezultatele de mai jos au apărut în lucrarea T.A. Lazăr [67].

Definiţia 2.1.1 *Operatorul $f : X \to X$ se numeşte* **operator de tip Ćirić-Reich-Rus** *sau (a,b,c)-contracţie de tip Ćirić-Reich-Rus, dacă $\exists a,b,c \in \mathbb{R}_+$ cu $a+b+c < 1$ a.î.*

$$d(f(x_1), f(x_2)) \leq ad(x_1, x_2) + bd(x_1, f(x_1)) + cd(x_2, f(x_2)),\ \forall\ x_1, x_2 \in X.$$

Folosind condiţia de tip Reich, obţinem inegalitatea centrală a acestui paragraf:

$$d(x_1, x_2) \leq \frac{1}{1-a}[(1+b)d(x_1, f(x_1)) + (1+c)d(x_2, f(x_2))]. \qquad (2.1.3)$$

Lema 2.1.1 *(S. Reich [116], I.A. Rus [121], L. Ćirić [30], T.A. Lazăr [67]) Fie (X,d) un spaţiu metric şi $f : X \to X$ un op. de tip Reich. Atunci şirul iteratelor succesive $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir Cauchy, $\forall x \in X$.*

Lema 2.1.2 *(S. Reich [116], I.A. Rus [121], L. Ćirić [30], T.A. Lazăr [67]) Fie (X,d) un spaţiu metric şi $f : X \to X$ un op. de tip Reich. Atunci $card(Fix(f)) \leq 1$.*

De fapt, mai general avem următorul rezultat abstract.

Fie (X,d) un spaţiu metric şi $f : X \to X$. Atunci f se numeşte operator Picard dacă $Fix(f) = \{x^*\}$ şi şirul $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ al aproximaţiilor succesive pentru f pornind din orice element $x \in X$ este convergent la x^*. Mai mult, f se numeşte operator c-Picard dacă $c > 0$, f este un operator Picard şi are loc relaţia

$$d(x, x^*) \leq c\ d(x, f(x)), \text{ oricare ar fi } x \in X.$$

Lema 2.1.3 *(T.A. Lazăr [67]) Fie (X, d) un spaţiu metric şi $f : X \to X$ un operator c-Picard. Atunci $d(x_1, x_2) \leq c[d(x_1, f(x_1)) + d(x_2, f(x_2))]$, $\forall x_1, x_2 \in X$.*

Folosind rezultatele anterioare avem:

Teorema 2.1.2 *(S. Reich [116], I.A. Rus [121], L. Ćirić [30], T.A. Lazăr [67]) Dacă (X, d) este un spaţiu metric complet şi $f : X \to X$ un op. de tip Reich, atunci operatorul f are un punct fix unic $x^* \in X$ şi $\forall x \in X$, şirul aproximaţiilor succesive $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge către x^*. Mai mult, avem că:*

i) $d(f^n(x), x^*) \leq \frac{1+b}{1-a}\alpha^n d(x, f(x))$, $\forall x \in X$.

ii) (regula de oprire) $\forall x \in X$ şi fiecare $\epsilon > 0$, obţinem că $d(f^n(x), x^*) < \epsilon$,

$$\text{pentru orice } n > \left[\frac{log\epsilon + log(1-a) - log(1+b) - logd(x, f(x))}{log(a+b) - log(1-c)}\right] + 1.$$

Considerăm în continuare cazul φ-contracţiilor pentru care s-au obţinut o serie de rezultate.

În acest sens amintim câteva noţiuni:

Definiţia 2.1.2 *Fucţia $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ se numeşte funcţie de comparaţie dacă φ este crescătoare şi pentru $t > 0$, $\varphi^n(t) \to 0$ când $n \to \infty$. În consecinţă, pentru orice $t > 0$ avem că $\varphi(0) = 0$ şi $\varphi(t) < t$.*

Exemplul 2.1.1 *Un exemplu de funcţie de comparaţie este $\varphi(t) = at$ (cu $a \in [0, 1[$), $\varphi(t) = \frac{t}{1+t}$ şi $\varphi(t) = log(1 + t)$, pentru $t \in \mathbb{R}_+$.*

Definiţia 2.1.3 *Fie (X, d) un spaţiu metric. Atunci, $f : X \to X$ se numeşte φ-contracţie, dacă φ este funcţie de comparaţie şi*

$$d(f(x_1), f(x_2)) \leq \varphi(d(x_1, x_2)), \forall\ x_1, x_2 \in X.$$

pentru care se obţine relaţia:

$$d(x_1, x_2) \leq \psi^{-1}(d(x_1, f(x_1)) + d(x_2, f(x_2))) \qquad (2.1.5)$$

unde $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\psi(t) := t - \varphi(t)$ este o funcţie strict crescătoare şi surjectivă.

Folosind acestă relaţie putem demonstra următoarele leme:

Lema 2.1.4 *(J. Matkowski [72], I.A. Rus [124], T.A. Lazăr [67]) Fie (X, d) un spaţiu metric şi fie $f : X \to X$ o φ-contracţie. Atunci, $card(Fix(f)) \leq 1$.*

Lema 2.1.5 *(J. Matkowski [72], I.A. Rus [124], T.A. Lazăr [67]) Fie (X, d) un spaţiu metric şi fie $f : X \to X$ o φ-contracţie. Presupunem că $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\psi(t) = t - \varphi(t)$ este un operator continuu, strict crescător şi surjectiv. Atunci $\forall\ x \in X$, şirul aproximaţiilor succesive $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir Cauchy.*

Rezultatul de bază privind cazul φ-contracţiilor este următoarea teoremă (a se vedea pentru rezultate de acest fel şi lucrările: J. Matkowski [72], I.A. Rus [124] şi J. Jachymski, I. Jóźwik [58]).

Teorema 2.1.3 *(J. Matkowski [72], I.A. Rus [124], T.A. Lazăr [67]) Fie (X, d) un spaţiu metric complet, $f : X \to X$ o φ-contracţie şi dacă funcţia $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\psi(t) = t - \varphi(t)$ este continuă, strict crescătoare şi surjectivă, atunci f are un punct fix unic $x^* \in X$ şi pentru $\forall\ x \in X$ şirul $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge către x^*. Mai mult, avem că*

$$d(f^n(x), x^*) \leq \psi^{-1}(\varphi^n(d(x, f(x)))), \quad \textit{pentru fiecare } x \in X.$$

cu **Regula de oprire:** Pentru $x \in X$ luat arbitrar, considerăm $n \in \mathbb{N}^*$ ce satisface relaţia $\varphi^n(d(x, f(x))) < \psi(\epsilon)$. Atunci, $\forall \epsilon > 0$ avem că $d(f^n(x), x^*) < \epsilon$.

2.2 Teoria teoremei de punct fix a lui Reich

Pentru început reamintim conceptul de operator Picard multivoc dat de A. Petruşel şi I.A. Rus în [94].

Definiţia 2.2.1 *(A. Petruşel, I.A. Rus în [94]) Fie* (X, d) *un spaţiu metric şi* $T : X \to P(X)$. *Spunem că* T *se numeşte* **operator Picard multivoc(operator PM)** *dacă:*

(i) $SFix(T) = Fix(T) = \{x^*\}$

(ii) $T^n(x) \stackrel{H_d}{\to} \{x^*\}$, *când* $n \to \infty$, $\forall\ x \in X$.

Condiţii suficiente pentru ca un operator $T : X \to P_{cl}(X)$ sau $T : X \to P_{b,cl}(X)$ să fie un operator PM sunt date în lucrarea A. Petruşel, I.A. Rus [94].

Să introducem în cele ce urmează, câteva noi clase abstracte de operatori multivoci, pentru care vom prezenta mai apoi câteva exemplificări. Noţiunile şi rezultatele de mai jos au apărut în lucrarea A. Petruşel, T.A. Lazăr [99] şi în lucrarea T.A. Lazăr, G. Petruşel [68]

Definiţia 2.2.2 *(A. Petruşel, T.A. Lazăr [99]) Fie* (X, d) *un spaţiu metric şi un operator* $T : X \to P(X)$. *Spunem că operatorul* T *satisface* **proprietatea (PM2)** *dacă:*

(i) $SFix(T) = Fix(T) = \{x^*\}$

(ii) pentru $\forall\ x \in X$ *şi* $\forall\ y \in T(x)$, $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *al aproximaţiilor succesive ale lui* T *ce porneşte din* $x_0 := x$ *şi* $x_1 := y$ *a.î.* $x_n \stackrel{d}{\to} x^*$, *când* $n \to \infty$.

Definiţia 2.2.3 *(A. Petruşel, T.A. Lazăr [99]) Fie* (X, d) *un spaţiu metric şi un operator* $T : X \to P(X)$. *Prin definiţie,* T *satisface* **proprietatea (PM3)** *dacă există* $x^* \in Fix(T)$ *a.î.* $T^n(x) \stackrel{H_d}{\to} \{x^*\}$, *când* $n \to \infty$, $\forall\ x \in X$.

Definiţia 2.2.4 *(A. Petruşel, T.A. Lazăr în [99]) Fie* (X, d) *un spaţiu metric şi un operator* $T : X \to P(X)$. *Prin definiţie,* T *satisface* **proprietatea (PM4)** *dacă* $\exists\ x^* \in Fix(T)$ *şi* $\exists\ x_0 \in X$ *a.î.* $T^n(x_0) \stackrel{H_d}{\to} \{x^*\}$, *când* $n \to \infty$.

Definiţia 2.2.5 *(A. Petruşel, T.A. Lazăr [99]) Fie* (X, d) *un spaţiu metric şi un operator* $T : X \to P(X)$. *Prin definiţie,* T *satisface* **proprietatea (PM5)** *dacă* $\exists\ x^* \in Fix(T)$ *a.î. pentru fiecare* $x \in X$ *şi fiecare* $y \in T(x)$ $\exists\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *şirul aproximaţiilor succesive a lui* T, *care porneşte din* $x_0 := x$ *şi* $x_1 := y$ *a.î.* $x_n \stackrel{d}{\to} x^*$, *când* $n \to \infty$.

O altă noţiune în strânsă legătură cu cele enunţate mai sus, este cea de operator slab Picard, dată de I.A. Rus, A. Petruşel şi A. Sîntămărian în [132].

Definiţia 2.2.6 *(I.A. Rus-A. Petruşel-A. Sîntămărian [132]) Fie* (X, d) *un spaţiu metric. Atunci* $T : X \to P(X)$ *se numeşte* **operator multivoc slab Picard (operator MWP)** *dacă pentru* $\forall x \in X$ *şi* $\forall y \in T(x)$ $\exists$ *şirul* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *din* X *a.î.:*

i) $x_0 = x,\ x_1 = y$;

ii) $x_{n+1} \in T(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

iii) şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*este convergent şi limita lui este un punct fix al lui* T.

Definiţia 2.2.7 *Fie* (X, d) *un spaţiu metric şi* $T : X \to P(X)$ *un operator MWP. Atunci definim operatorul multivoc* $T^\infty : GrafT \to P(Fix(T))$ *prin formula* $T^\infty(x, y) = \{\ z \in Fix(T) \mid$ *ca şir al aproximaţiilor succesive ale lui* T, *care pornesc din punctul* (x, y) *şi converg către* $z\ \}$.

Definiţia 2.2.8 *Fie* (X, d) *un spaţiu metric şi* $T : X \to P(X)$ *un operator MWP. Atunci spunem că* T *este un operator multivoc c-slab Picard (pe scurt operator c-MWP) dacă şi numai dacă există selecţia* t^∞ *sau* T^∞ *a.î.* $d(x, t^\infty(x, y)) \le c\ d(x, y)$, $\forall\ (x, y) \in GrafT$.

În lucrarea [91] sunt prezentate şi alte rezultate asupra operatorilor multivoci slab Picard.

Pornind de la aceste concepte, avem următoarele rezultate pentru cazul operatorilor multivoci de tip Reich.

Amintim o teoremă de punct fix pentru operatori univoci de tip Ćirić-Reich-Rus, pe care o utilizăm în demonstraţia rezultatului principal al secţiunii.

Teorema 2.2.1 *(S. Reich [116], I.A. Rus [121], L. Ćirić [30]) Fie* (X,d) *un spaţiu metric complet şi* $f : X \to X$ *o* (a,b,c)*-contracţie de tip Reich, adică* $\exists\ a,b,c \in \mathbb{R}_+$ *cu* $a+b+c<1$ *a.î.*

$$d(f(x),f(y)) \leq ad(x,y) + bd(x,f(x)) + cd(y,f(y)), \forall x,y \in X.$$

Atunci f *este un operator Picard, adică avem:*

(i) $Fix(f) = \{x^*\}$*;*

(ii) $\forall\ x \in X$ *şirul* $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge la* x^* *în spaţiul* (X,d)*.*

Rezultatul principal cu privire la teoria punctului fix pentru operatori de tip Reich este următoarea teoremă.

Teorema 2.2.2 *(S. Reich [115], T.A. Lazăr, G. Petruşel [68]) Fie* (X,d) *un spaţiu metric complet şi* $T : X \to P_{cl}(X)$ *o* (a,b,c)*-contracţie multivocă de tip Reich, adică* $\exists\ a,b,c \in \mathbb{R}_+$ *cu* $a+b+c<1$ *a.î.*

$$H_d(T(x),T(y)) \leq ad(x,y) + bD_d(x,T(x)) + cD_d(y,T(y)), \forall x,y \in X.$$

Notăm $\alpha := \frac{a+b}{1-c}$*. Atunci avem:*

(i) $Fix(T) \neq \emptyset$*;*

(ii) T *este un operator multivoc* $\frac{1}{1-\alpha}$*-slab Picard;*

(iii) Fie $S : X \to P_{cl}(X)$ *o* (a,b,c)*-contracţie multivocă de tip Reich şi* $\eta > 0$ *a.î.* $H_d(S(x),T(x)) \leq \eta$, $\forall x \in X$*. Atunci*

$$H_d(Fix(S),Fix(T)) \leq \frac{\eta}{1-\alpha};$$

(iv) Fie $T_n : X \to P_{cl}(X)$, $n \in \mathbb{N}$ *un şir de* (a,b,c)*-contracţii multivoce de tip Reich, a.î.* $T_n(x) \overset{H_d}{\to} T(x)$ *prin convergenţă uniformă în raport cu* x*, când* $n \longrightarrow +\infty$, $\forall x \in X$*. Atunci,* $Fix(T_n) \overset{H_d}{\to} Fix(T)$ *când* $n \to +\infty$*.*

Dacă în plus $T(x) \in P_{cp}(X)$, $\forall\ x \in X$, *atunci au loc şi următoarele:*

*(v) (***stabilitatea Ulam-Hyers a incluziunii** $x \in T(x)$*) Fie* $\epsilon > 0$ *şi* $x \in X$ *a.î.* $D_d(x, T(x)) \leq \epsilon$. *Atunci* $\exists\ x^* \in Fix(T)$ *a.î.* $d(x, x^*) \leq \frac{\epsilon}{1-\alpha}$;

(vi) $\hat{T} : (P_{cp}(X), H_d) \to (P_{cp}(X), H_d)$, $\hat{T}(Y) := \bigcup\limits_{x \in Y} T(x)$ *este o* (a, b, c)*-contracţie de tip Reich şi atunci* $Fix(\hat{T}) = \{A_T^*\}$;

(vii) $T^n(x) \xrightarrow{H_d} A_T^*$ *când* $n \to +\infty$, $\forall\ x \in X$;

(viii) $Fix(T) \subset A_T^*$ *şi* $Fix(T)$ *este compactă;*

(ix) $A_T^* = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}^*} T^n(x)$, $\forall\ x \in Fix(T)$.

Un al doilea rezultat pentru (a, b, c)-contracţii multivoce de tip Reich este următoarea teoremă, obţinută în cazul $SFix(T) \neq \emptyset$:

Teorema 2.2.3 *(T.A. Lazăr, G. Petruşel [68]) Fie* (X, d) *un spaţiu metric complet şi* $T : X \to P_{cl}(X)$ *o* (a, b, c)*-contracţie multivocă de tip Reich cu* $SFix(T) \neq \emptyset$. *Atunci au loc următoarele relaţii:*

(x) $Fix(T) = SFix(T) = \{x^*\}$;

*(xi) (***Problema de punct fix este bine pusă în raport cu** D_d*) Dacă* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ *a.î.* $D_d(x_n, T(x_n)) \to 0$ *când* $n \to \infty$, *atunci* $x_n \xrightarrow{d} x^*$ *când* $n \to \infty$;

*(xii) (***Problema de punct fix este bine pusă în raport cu** H_d*) Dacă* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ *a.î.* $H_d(x_n, T(x_n)) \to 0$ *când* $n \to \infty$, *atunci* $x_n \xrightarrow{d} x^*$ *când* $n \to \infty$.

Tot un rezultat pentru operatori multivoci de tip Reich este şi următoarea teoremă:

Teorema 2.2.4 *(T.A. Lazăr, G. Petruşel [68]) Fie* (X, d) *un spaţiu metric complet şi* $T : X \to P_{cp}(X)$ *o* (a, b, c)*-contracţie multivocă de tip Reich a.î.* $T(Fix(T)) = Fix(T)$. *Atunci au loc:*

(xiii) $T^n(x) \xrightarrow{H_d} Fix(T)$ *când* $n \to +\infty$, $\forall\ x \in X$;

(xiv) $T(x) = Fix(T)$, *oricare ar fi* $x \in Fix(T)$;

(xv) Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ *este un şir a.î.* $x_n \xrightarrow{d} x^* \in Fix(T)$ *când* $n \to \infty$ *şi* T *este un operator* H_d*-continuu, atunci* $T(x_n) \xrightarrow{H_d} Fix(T)$ *când* $n \to +\infty$.

În cazul spaţiilor metrice compacte, avem următorul rezultat:

Teorema 2.2.5 *(T.A. Lazăr, G. Petruşel [68]) Fie* (X, d) *un spaţiu metric compact şi* $T : X \to P_{cl}(X)$ *o* (a, b, c)*-contracţie multivocă de tip Reich,* H_d*-continuă. Atunci*

(xvi) Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un şir din* X *a.î.* $D_d(x_n, T(x_n)) \to 0$ *când* $n \to \infty$, *atunci există un subşir* $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ *al şirului* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_{n_i} \xrightarrow{d} x^* \in Fix(T)$ *când* $i \to \infty$ *(***Problema de punct fix este bine pusă în raport cu** D_d **în sens generalizat***).*

Observaţia 2.2.1 *Rezultatele anterioare conduc, pentru cazul particular* $b = c = 0$ *, la teoreme demonstrate în articolele: A. Petruşel, I.A. Rus [100] şi A. Petruşel, T.A. Lazăr [99]*

Observaţia 2.2.2 *În obţinerea acestor rezultatele au mai fost studiate şi următoarele lucrări: Ayerbe-Benavides-Acedo [10], M.F. Barnsley [11], [12], K. Border [18], Chang-Yen [25], Y.-Q. Chen [26], Espinola-Petruşel [38], Fraser-Nadler jr. [40], M. Fréchet [41], Glăvan-Guţu [46], Gobel-Kirk [47], Lasota-Myjak [60], Latif-Beg [61], J.T. Markin [71], Moţ-A.Petruşel-G.Petruşel [75], Petruşel-Rus [92], I.A. Rus [123], J.Saint-Raymond [135], N.S. Papageorgiou [83], L. Pasicki [84], A. Muntean [76], A. Sîntămărian [138], Taradaf-Yuan [140], H-K. Xu [145], Yamaguti-Hata-Kigani [146].*

Capitolul 3

Teoreme de punct fix pentru operatori ce nu invariază domeniul de definiţie şi aplicaţii

Scopul acestui capitol este de a dezvolta teoria punctului fix pentru contracţii generalizate univoce şi multivoce, definite pe bile din spaţii metrice, şi care în general nu invariază domeniul de definiţie. Astfel, în acest capitol sunt prezentate teoreme de dependenţă de date, teoreme de invarianţă a domeniului şi noi principii ale operatorilor deschişi. Acestea au fost publicate în lucrarea [65], i.e., **T.A. Lazăr**, A. Petruşel, N. Shahzad: Fixed points for non-self operators and domain invariance theorems, Nonlinear Analysis 70 (2009) 117-125.

3.1 Teoreme de punct fix pentru operatori univoci ce nu invariază domeniul de definiţie şi aplicaţii

Următorul rezultat local de punct fix se obţine ca şi consecinţă a principiului de punct fix a lui Banach-Caccioppoli.

Teorema 3.1.1 *(Granas-Dugundji [49], pp. 11) Fie (X, d) un spaţiu metric com-*

plet, $x_0 \in X$ şi $r > 0$. Dacă $f : B(x_0; r) \to X$ este a-contracţie şi $d(x_0, f(x_0)) < (1-a)r$, atunci funcţia f are un punct fix unic.

De remarcat este că dacă $f : \widetilde{B}(x_0; r) \to X$ este o a-contracţie, a.î. $d(x_0, f(x_0)) \leq (1-a)r$, atunci $\widetilde{B}(x_0; r) \in I(f)$ şi rezultă din nou concluzia că f are un punct fix unic în bila închisă $\widetilde{B}(x_0; r)$.

Definiţia 3.1.1 *Fie E un spaţiu Banach şi $Y \subset E$. Fiind dat un operator $f : Y \to E$, operatorul $g : Y \to E$ definit prin relaţia $g(x) := x - f(x)$ se numeşte câmp asociat cu funcţia f.*

Definiţia 3.1.2 *Un operator $f : Y \to E$ se numeşte deschis, dacă pentru orice submulţime U a lui Y, mulţimea $f(U)$ este de asemenea deschisă în E.*

Ca o consecinţă a teoremei anterioare, avem principiul de invarianţă a domeniului de definiţie pentru câmpuri de tip contracţii.

Teorema 3.1.2 *(vezi Granas-Dugundji [49], pp. 11) Fie E un spaţiu Banach şi Y o submulţime deschisă a lui E. Considerăm $f : U \to E$ o a-contracţie. Fie $g : U \to E$, $g(x) := x - f(x)$, câmpul asociat. Atunci:*

(a) $g : U \to E$ este un operator deschis;

(b) $g : U \to g(U)$ este omeomorfism. În particular, dacă $f : E \to E$, atunci câmpul asociat g este un omeomorfism de la mulţimea E la ea însăşi.

În ceea ce urmează vom prezenta generalizări ale rezultatelor anterioare pentru diverse clase de contracţii generalizate.

Următorul rezultat este cunoscut în literatură ca teorema lui J. Matkowski şi I.A. Rus.

Teorema 3.1.3 *(J. Matkowski [72], I. A. Rus [124]) Fie (X, d) un spaţiu metric complet şi $f : X \to X$ o φ-contracţie.*

Atunci

$$Fix(f) = \{x^*\} \text{ şi } f^n(x_0) \to x^* \text{ când } n \to \infty, \forall\ x_0 \in X.$$

Folosind conceptul de φ-contracţie definită pe bila deschisă, vom obţine mai întâi o teoremă de punct fix pentru un astfel de operator. De asemenea, ca o consecinţă a acestui rezultat, vom obţine o teoremă de invarianţă a câmpurilor φ-contractive. Pentru unele rezultate similare a se vedea Agarwal-O'Regan-Shahzad [2].

Teorema 3.1.4 *(T.A. Lazăr, A. Petruşel şi N. Shazhad [65]) Fie (X, d) un spaţiu metric complet, cu $x_0 \in X$ şi $r > 0$. Fie $f : \widetilde{B}(x_0; r) \to X$ o φ-contracţie a.î. $d(x_0, f(x_0)) < r - \varphi(r)$. Atunci*

$$Fix(f) \cap B(x_0; r) = \{x^*\}.$$

Teorema 3.1.5 *(T.A. Lazăr, A. Petruşel şi N. Shazhad [65]) Fie E un spaţiu Banach şi $U \in P_{op}(E)$. Presupunem că $f : U \to E$ este φ-contracţie. Fie $g : U \to E$ o aplicaţie asociată lui f.*
Atunci:

(a) $g : U \to E$ este un operator deschis;

(b) $g : U \to g(U)$ este omeomorfism. În particular, dacă $f : E \to E$, atunci asociata g este un omeomorfism de la spaţiul E la el însuşi.

Observaţia 3.1.1 *(T.A. Lazăr, A. Petruşel şi N. Shazhad [65])*

a) Dacă luăm $\varphi(t) = at$, pentru $\forall\ t \in \mathbb{R}_+$ (unde $a \in [0, 1[$) atunci teorema anterioară devine Teorema 3.1.2.
Alte exemple ce pot fi luate în calcul ar fi dacă vom considera: $\varphi(t) = \frac{t}{1+t}$ sau $\varphi(t) = \ln(1 + t)$, cu $t \in \mathbb{R}_+$.

b) Teorema 3.1.5 este o extindere a T.2.1 a lui Dugundji-Granas din lucrarea [37], unde în plus s-a impus continuitatea aplicaţiei φ.

c) Teorema 3.1.5 se poate compara cu T.10 a lui Jachymski-Jóźwik din lucrarea [58], unde spaţiul E nu e nevoie să fie complet, mulţimea U nu e nevoie să fie deschisă, însă funcţia $\psi(t) := t - \varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ este crescătoare.

Prezentăm acum câteva rezultate de dependenţă continuă de date pentru φ-contracţii ce nu invariază domeniul de definiţie. Rezultatele prezentate mai jos sunt exemplificări ale unor rezultate mai generale (dar apărute ulterior) în A. Chis-Novac, R. Precup, I.A. Rus [29].

Teorema 3.1.6 *(T.A. Lazăr, A. Petruşel şi N. Shazhad [65]) Fie (X, d) un spaţiu metric complet, cu $x_0 \in X$ şi $r > 0$. Fie $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ a.î. funcţia $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ definită prin $\psi(t) = t - \varphi(t)$, este strict crescătoare şi surjectivă. Fie $f, g : \widetilde{B}(x_0; r) \to X$. Presupunem că:*

i) $d(x_0, f(x_0)) < r - \varphi(r)$;

ii) operatorul f este φ-contracţie (x_f^* reprezentând unicul punct fix, conform T.3.1.4);

iii) există $x_g^* \in Fix(g)$;

iv) $d(f(x), g(x)) \leq \eta$, $\forall\ x \in \widetilde{B}(x_0; r)$.

Atunci avem $d(x_f^*, x_g^*) \leq \psi^{-1}(\eta)$. Mai mult $\psi^{-1}(\eta) \to 0$ când $\eta \to 0$.

Observaţia 3.1.2 *(T.A. Lazăr, A. Petruşel şi N. Shazhad [65]) În particular, dacă φ este o funcţie de comparaţie continuă şi $\lim\limits_{t\to+\infty} \psi(t) = +\infty$, atunci ψ este o bijecţie de la $\mathbb{R}_+$ la $\mathbb{R}_+$.*

Teorema 3.1.7 *(T.A. Lazăr, A. Petruşel şi N. Shazhad [65]) Fie (X, d) un spaţiu metric complet, $x_0 \in X$ şi $r > 0$. Fie $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ a.î. funcţia $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, definită prin $\psi(t) = t - \varphi(t)$, este crescătoare. Fie funcţiile $f, f_n : \widetilde{B}(x_0; r) \to X$, $n \in \mathbb{N}$ a.î. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniform către f, când $n \to +\infty$.*

Presupunem că:

i) $d(x_0, f(x_0)) < r - \varphi(r)$;

ii) f este φ-contracţie;

iii) $Fix(f_n) \neq \emptyset$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Atunci, pentru $x_n \in Fix(f_n)$, $n \in \mathbb{N}$ avem $x_n \to x^*$, când $n \to +\infty$ (unde $\{x^*\} = B(x_0; r) \cap Fix(f)$).

În cele ce urmează am luat în calcul operatori de tip Caristi. Rezultatul obţinut porneşte de la o versiune a teoremei lui Caristi, dată de Bollenbacher şi Hicks în [19].

Teorema 3.1.8 *(T.A. Lazăr, A. Petruşel şi N. Shazhad [65]) Fie (X, d) un spaţiu metric complet, cu $x_0 \in X$ şi $r > 0$. Fie $\varphi : X \to \mathbb{R}_+$ o funcţională, a.î. $\varphi(x_0) < r$. Consider $f : B(x_0; r) \to X$ a.î. $d(x, f(x)) \leq \varphi(x) - \varphi(f(x)), \forall\ x \in B(x_0; r) \cap O_f(x_0)$. Dacă f este un operator cu grafic închis, sau funcţia $x \mapsto d(x, f(x))$, $x \in B(x_0; r)$ este s.c.i., atunci $Fix(f) \neq \emptyset$.*

Corolar 3.1.1 *(T.A. Lazăr, A. Petruşel şi N. Shazhad [65]) Fie (X, d) un spaţiu metric complet, cu $f : X \to X$, $x_0 \in X$ şi $r > 0$. Presupunem că $\exists\ a \in]0, 1[$ a.î. $d(f(x), f^2(x)) \leq a \cdot d(x, f(x)), \forall x \in B(x_0; r) \cap O_f(x_0)$ şi $d(x_0, f(x_0)) < (1 - a)r$.*

Dacă $Graff$ este o mulţime închisă în $X \times X$ sau funcţia $x \mapsto d(x, f(x))$, $x \in B(x_0; r)$ este s.c.i., atunci $Fix(f) \neq \emptyset$.

O altă consecinţă a teoremei lui Caristi pentru operatori definiţi pe bilă este rezultatul ce urmează.

Teorema 3.1.9 *(T.A. Lazăr, A. Petruşel şi N. Shazhad [65]) Fie (X, d) un spaţiu metric complet şi $f : X \to X$ un operator cu orbita mărginită. Presupunem că $\exists\ a \in [0, 1[$ a.î. $diam O_f(f(x)) \leq a \cdot diam O_f(x), \forall x \in X$. Dacă $Graff$ este o mulţime închisă în $X \times X$, sau funcţia $x \mapsto diam O_f(x)$ este s.c.i., atunci avem că $Fix(f) \neq \emptyset$.*

Un nou rezultat local este următoarea teoremă:

Teorema 3.1.10 *(T.A. Lazăr, A. Petruşel şi N. Shazhad [65]) Fie* (X, d) *un spaţiu metric complet, cu* $x_0 \in X$ *şi* $r > 0$*. Fie* $f : X \to X$ *un operator cu orbita mărginită. Presupunem că* $\exists\ a \in [0, 1[$ *a.î.* $diamO_f(f(x)) \leq a \cdot diamO_f(x), \forall x \in B(x_0; r) \cap O_f(x_0)$ *şi* $diamO_f(x_0) < (1 - a)r$*. Dacă* $Graff$ *este o mulţime închisă în* $X \times X$*, sau funcţia* $x \mapsto diamO_f(x)$*,* $x \in B(x_0; r)$ *este s.c.i., atunci* $Fix(f) \neq \emptyset$*.*

3.2 Teoreme de punct fix pentru operatori multivoci ce nu invariază domeniul de definiţie şi aplicaţii

Rezultatul ce urmează a fost demonstrat de către M. Frigon şi A. Granas în lucrarea [44] (precum şi în [7]).

Teorema 3.2.1 *(Frigon-Granas [44]) Fie (X, d) un spaţiu metric complet, $x_0 \in X$ şi $r > 0$. Fie $F : B(x_0; r) \to P_{cl}(X)$ o a-contracţie multivocă ce satisface relaţia $D_d(x_0, F(x_0)) < (1-a)r$. Atunci $Fix(F) \neq \emptyset$.*

Observaţia 3.2.1 *Dacă în T. precedentă se înlocuieşte condiţia $D_d(x_0, F(x_0)) < (1-a)r$ cu una mai restrictivă: $\delta(x_0, F(x_0)) < (1-a)r$, atunci obţinem că operatorul F invariază bila închisă $\tilde{B}(x_0; s)$ şi existenţa punctului fix rezultă direct din teorema Covitz-Nadler [34].*

Fie X un spaţiu Banach, $U \in P_{op}(X)$ şi $F : U \to P(X)$ un operator multivoc. Atunci notăm cu G câmpul multivoc asociat cu F, adică $G : U \to P(X)$, dat prin relaţia $G(x) = x - F(x)$.

Un principiu pentru operatori deschişi dat în cazul a-contracţiilor multivoce este următoarea teoremă (a se vedea în lucrarea [7]):

Teorema 3.2.2 *(Andres-Gorniewicz [7]) Fie X un spaţiu Banach, $x_0 \in X$ şi $r > 0$. Fie $F : B(x_0, r) \to P_{b,cl}(X)$ o a-contracţie multivocă, $G : B(x_0, r) \to P_{b,cl}(X)$ câmpul multivoc asociat cu F.*
Atunci $G(B(x_0, r))$ este o submulţime deschisă a lui X.

Scopul acestui paragraf este de a generaliza teoremele T.3.2.1 şi T.3.2.2 pentru cazul unor contracţii multivoce generalizate.

Rezultatul următor este cunoscut în literatură ca teorema lui Węgrzyk's ([144]).

Teorema 3.2.3 *Fie* (X, d) *un spaţiu metric complet şi* $F : X \to P_{cl}(X)$ *o* φ-*contracţie multivocă, unde* $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *este o funcţie de comparaţie strictă. Atunci* $Fix(F) \neq \emptyset$ *şi* $\forall\ x_0 \in X$ *există un şir al aproximaţiilor succesive al lui* F *ce porneşte din punctul* x_0 *şi care converge către un punct fix al operatorului multivoc* F.

Un rezultat local pentru φ-contracţii s-a obţinut prin teorema următoare:

Teorema 3.2.4 *(T.A. Lazăr, A. Petruşel şi N. Shazhad în [65]) Fie* (X, d) *un spaţiu metric complet,* $x_0 \in X$ *şi* $r > 0$. *Fie* $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *o funcţie de comparaţie strictă a.î. funcţia* $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\psi(t) := t - \varphi(t)$ *este strict crescătoare, continuă în* r *şi* $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi^n(\psi(s)) \leq \varphi(s)$, $\forall\ s \in]0, r[$. *Fie* $F : B(x_0; r) \to P_{cl}(X)$ *o* φ-*contracţie multivocă a.î.* $D(x_0, F(x_0)) < r - \varphi(r)$. *Atunci* $Fix(F) \neq \emptyset$.

Un rezultat similar este şi următoarea teoremă.

Teorema 3.2.5 *(T.A. Lazăr, A. Petruşel şi N. Shazhad [65]) Fie* (X, d) *un spaţiu metric complet,* $x_0 \in X$ *şi* $r > 0$. *Fie* $F : \widetilde{B}(x_0; r) \to P_{cl}(X)$ *o* φ-*contracţie multivocă a.î.* $\delta(x_0, F(x_0)) < r - \varphi(r)$. *Atunci* $Fix(F) \cap B(x_0; r) \neq \emptyset$.

Un rezultat auxiliar este:

Lema 3.2.1 *(T.A. Lazăr, A. Petruşel şi N. Shazhad [65]) Fie* X *spaţiu normat. Atunci pt.* $\forall\ x, y \in X$ *şi* $\forall\ A \in P_{cl}(X)$ *avem relaţia:* $D(x, A + y) = D(y, x - A)$.

Folosind T.3.2.4 putem demonstra următorul rezultat asupra operatorilor multivoci deschişi.

Teorema 3.2.6 *(T.A. Lazăr, A. Petruşel şi N. Shazhad [65]) Fie* X *un spaţiu Banach şi* $U \in P_{op}(X)$. *Fie* $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *o funcţie de comparaţie strictă a.î. funcţia* $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\psi(t) := t - \varphi(t)$ *este strict crescătoare şi continuuă pe* $\mathbb{R}_+$.

Presupunem că $\exists r_0 > 0$ *a.î.* $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi^n(\psi(s)) \le \varphi(s)$, $\forall s \in]0, r_0[$. *Fie* $F : U \to P_{cl}(X)$ φ*-contracţie multivocă.*

Atunci, câmpul multivoc G *asociat lui* F *este deschis.*

Luând în considerare faptul că o φ-contracţie multivocă este s.c.i. şi deoarece imaginea unei mulţimi conexe este conexă, avem următorul corolar:

Corolar 3.2.1 *(T.A. Lazăr, A. Petruşel şi N. Shazhad [65]) Fie* X *un spaţiu Banach şi un domeniu* $U \in P(X)$ *(adică o submulţime deschisă şi conexă a lui* X*). Fie* $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *o funcţie de comparaţie strictă a.î. funcţia* $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\psi(t) := t - \varphi(t)$ *este strict crescătoare şi continuă pe* $\mathbb{R}_+$*. Presupunem că* $\exists\, r_0 > 0$ *a.î.* $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi^n(\psi(s)) \le \varphi(s), \forall\, s \in]0, r_0[$*. Fie* $F : U \to P_{cl}(X)$ *o* φ*-contracţie multivocă. Fie* G *un câmp multivoc asociat cu* F*. Atunci* $G(U)$ *este de asemenea un domeniu.*

Folosind acelaşi principiu de demonstraţie şi teorema lui Węgrzyk's, obţinem rezultatul următor (vezi [122]):

Corolar 3.2.2 *(T.A. Lazăr, A. Petruşel şi N. Shazhad [65]) Fie* X *un spaţiu Banach şi* $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *o funcţie de comparaţie strictă. Fie* $F : X \to P_{cl}(X)$ *o* φ*-contracţie multivocă. Atunci, câmpul multivoc* G *asociat aplicaţiei* F *este surjectiv.*

În cele ce urmează vom lua în considerare cazul operatorilor multivoci de tip Meir-Keeler.

Teorema 3.2.7 *(T.A. Lazăr, A. Petruşel şi N. Shazhad [65]) Fie* (X, d) *un spaţiu metic,* $x_0 \in X$ *şi* $r > 0$*. Fie* $F : X \to P_{cp}(X)$ *un operator multivoc de tip Meir-Keeler. Presupunem că* $\delta(x_0, F(x_0)) \le \eta(r)$ *unde cu* $\eta(r)$ *s-a notat numărul pozitiv corespunzător lui* $r > 0$ *dat în Def.1.2.8 punctul 9). Atunci:*

(i) $B(x_0, r + \eta(r)) \in I(F)$*;*

(ii) Dacă (X, d) *este complet, atunci* $\exists\, x^* \in Fix(F) \cap \widetilde{B}(x_0, r + \eta(r))$*.*

Observaţia 3.2.2 *(T.A. Lazăr, A. Petruşel şi N. Shazhad [65]) Dacă op. F, din teorema anterioară, este univoc, atunci se obţine un rezultat dat de Park şi Kim în [85].*

Vom stabili un rezultat de punct fix pentru operatori multivoci de tip Caristi definiţi pe o bilă.

Teorema 3.2.8 *(T.A. Lazăr, A. Petruşel şi N. Shazhad [65]) Fie (X, d) un spaţiu metric complet, $x_0 \in X$ şi $r > 0$. Fie $\varphi : X \to \mathbb{R}_+$ o funcţie a.î. $\varphi(x_0) < r$. Considerăm $F : B(x_0; r) \to P_{cl}(X)$ a.î. $\forall\ x \in B(x_0; r)$, $\exists\ y \in F(x)$ a.î. $d(x, y) \leq \varphi(x) - \varphi(y)$. Dacă $GrafF$ este o submulţime închisă în $X \times X$, atunci $Fix(F) \neq \emptyset$.*

Observaţia 3.2.3 *Rezultate din acest capitol completează şi generalizează unele teoreme din lucrările J. Andres-L. Górniewicz [7], J.P. Aubin-J. Siegel [9], M. Frigon-A. Granas [44], M. Maciejewski [70], A. Petruşel [89], [88], [93], I.A. Rus [119].*

Capitolul 4

Teoreme de punct fix pe mulţimi înzestrate cu două metrici

Scopul acestui capitol este de a prezenta o teorie a punctului fix pentru operatori univoci şi multivoci definiţi pe spaţii înzestrate cu două metrici.

4.1 Teoreme de punct fix pentru operatori univoci

Începem acest paragraf prin prezentarea noţiunii de problemă de punct fix bine pusă pentru operatori univoci.

Definiţia 4.1.1 *(Reich-Zaslawski, I.A. Rus [127]) Fie* (X, d) *un spaţiu metric,* $Y \subseteq X$ *şi* $f : Y \to X$. *Spunem că problema de punct fix este bine pusă pentru* f *relativ la* d *, dacă* $Fix(f) = x^*$ *şi oricare ar fi un şir* $(x_n)_{n\in(N)}$ *din* Y *a.î.* $d(x_n, f(x_n)) \to 0$ *când* $n \to \infty$, *rezultă că şirul* $x_n \xrightarrow{d} x^*$ *când* $n \to \infty$.

Primul rezultat al acestui paragraf este o extensie a teoremei Matkowski-Rus (3.1.3), extensie ce tratează cazul în care mulţimea X este înzestrată cu două metrici.

Teorema 4.1.1 *(T.A. Lazăr [63]) Fie $X \neq \emptyset$ şi d, d' două metrici definite pe X. Presupunem că:*

i) (X, d) este un spaţiu metric complet;

ii) există $c > 0$ a.î. $d(x, y) \leq cd'(x, y)$, oricare ar fi $x, y \in X$.

Fie $f : X \to X$ o φ-contracţie în raport cu d' şi presupunem că $f : (X, d) \to (X, d)$ este continuă. Atunci

A) $Fix(f) = \{x^*\}$.

B) Dacă în plus, funcţia $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\psi(t) := t - \varphi(t)$ este continuă, strict crescătoare şi surjectivă, atunci problema de punct fix pentru f este bine pusă în raport cu metrica d'.

Un rezultat local de acest tip este:

Teorema 4.1.2 *(T.A. Lazăr [63]) Fie $X \neq \emptyset$ şi d, d' două metrici definite pe X. Presupunem că:*

i) (X, d) este un spaţiu metric complet,

ii) $\exists c > 0$ a.î. $d(x, y) \leq cd'(x, y)$, $\forall\ x, y \in X$.

Fie $x_0 \in X, r > 0$ şi $f : \bar{B}^d_{d'}(x_0; r) \to X$ o φ-contracţie în raport cu metrica d'. Presupunem că $d'(x_0, f(x_0)) < r - \varphi(r)$ şi $f : (X, d) \to (X, d)$ este continuă. Atunci:

A) $Fix(f) \cap \bar{B}^d_{d'}(x_0, r) = \{x^*\}$.

B) Dacă în plus, funcţia $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\psi(t) := t - \varphi(t)$ este continuă, strict crescătoare şi surjectivă atunci problema de punct fix pentru f este bine pusă în raport cu metrica d'.

În continuare vom lua în considerare cazul operatorilor de tip Caristi.

Teorema 4.1.3 *(T.A. Lazăr [63]) Fie $X \neq \emptyset$ şi d, d' două metrici definite pe X. Presupunem că:*

i) (X, d) *este un spaţiu metric complet;*

ii) $\exists c > 0$ *a.î.* $d(x, y) \leq cd'(x, y)$, $\forall\ x, y \in X$.

Fie $x_0 \in X, r > 0$ *şi* $\varphi : X \to \mathbb{R}_+$ *o funcţie a.î.* $\varphi(x_0) < r$. *Considerăm* $f : \bar{B}^d_{d'}(x_0; r) \to X$ *a.î.* $d'(x, f(x)) \leq \varphi(x) - \varphi(f(x))$, $\forall\ x \in \bar{B}^d_{d'}(x_0; r)$. *Dacă* $Graff$ *este o mulţime închisă în* $X \times X$ *în raport cu metrica* d *sau dacă funcţia* $x \mapsto d(x, f(x))$, $x \in \bar{B}^d_{d'}(x_0; r)$ *este s.c.i., atunci* $Fix(f) \neq \emptyset$.

Următoarele trei rezultate sunt aplicaţii ale teoremei locale de tip Caristi demonstrată mai sus.

Teorema 4.1.4 *(T.A. Lazăr [63]) Fie* $X \neq \emptyset$ *şi* d, d' *două metrici definite pe* X. *Presupunem că:*

i) (X, d) *este un spaţiu metric complet;*

ii) $\exists\ c > 0$ *a.î.* $d(x, y) \leq cd'(x, y)$, $\forall\ x, y \in X$;

Fie $f : X \to X$, *un operator şi fie* $x_0 \in X$. *Presupunem că* $\exists\ a \in]0, 1[$ *a.î.:*

a) $d'(f(x), f^2(x)) \leq a \cdot d'(x, f(x)), \forall\ x \in \bar{B}^d_{d'}(x_0; r)$

b) $d'(x_0, f(x_0)) < (1 - a)r$.

Dacă $Graff$ *este o mulţime închisă în* $X \times X$ *în raport cu metrica* d *sau dacă funcţia* $x \mapsto d(x, f(x))$, $x \in \bar{B}^d_{d'}(x_0; r)$ *este s.c.i., atunci* $Fix(f) \neq \emptyset$.

O altă consecinţă a teoremei Caristi pentru operatorii definiţi pe o bilă va fi studiată în cele ce urmează.

Teorema 4.1.5 *(T.A. Lazăr [63]) Fie* $X \neq \emptyset$ *şi* d, d' *două metrici definite pe* X. *Presupunem că:*

i) (X, d) *este un spaţiu metric complet;*

ii) $\exists\ c > 0$ *a.î.* $d(x, y) \leq cd'(x, y)$, $\forall\ x, y \in X$.

Fie $f : X \to X$ *un operator cu orbitele mărginite. Presupunem că* $\exists\ a \in [0,1[$ *a.î.* $diamO_f^{d'}(f(x)) \leq a \cdot diamO_f^{d'}(x)$, $\forall x \in X$. *Dacă* $Graff$ *este o mulţime închisă în* $X \times X$ *în raport cu metrica* d *sau dacă funcţionala* $x \mapsto diamO_f^{d}(x)$ *este s.c.i., atunci* $Fix(f) \neq \emptyset$.

Următorul rezultat este de asemenea unul local:

Teorema 4.1.6 *(T.A. Lazăr [63]) Fie* $X \neq \emptyset$ *şi* d, d' *două metrici definite pe* X. *Presupunem că:*

i) (X, d) *este un spaţiu metric complet;*

ii) $\exists\ c > 0$ *a.î.* $d(x,y) \leq cd'(x,y)$, $\forall x, y \in X$.

Fie $x_0 \in X$ *şi* $r > 0$, $f : X \to X$ *un operator cu orbitele mărginite. Presupunem că* $\exists\ a \in [0,1[$ *a.î.* $diamO_f^{d'}(f(x)) \leq a \cdot diamO_f^{d'}(x)$, , $\forall\ x \in \bar{B}_{d'}^{d}(x_0; r) \cap O_f(x_0)$ *şi* $diamO_f^{d'}(x_0) < (1-a)r$. *Dacă* $Graff$ *este o mulţime închisă în* $X \times X$ *în raport cu metrica* d *sau dacă funcţionala* $x \mapsto diamO_f^{d}(x)$, $x \in \bar{B}_{d'}^{d}(x_0; r)$ *este s.c.i., atunci* $Fix(f) \neq \emptyset$.

4.2 Teoreme de punct fix pentru operatori multivoci

4.2.1 Cazul operatorilor de tip φ-contracţie

Pornind de la cunoscutul rezultat al lui Węgrzyk ([144]), Teorema 3.2.3, s-a obţinut următorul rezultat local, pe o mulţime înzestrată cu două metrici.

Teorema 4.2.1 *(T.A. Lazăr şi V.L. Lazăr [66]) Fie $X \neq \emptyset$ şi d, d' două metrici definite pe X. Fie $x_0 \in X$, şi $r > 0$. Presupunem că au loc următoarele condiţii:*

i) (X, d) este un spaţiu metric complet;

ii) $\exists\ c > 0$ a.î. $d(x, y) \leq cd'(x, y)$, $\forall\ x, y \in X$;

iii) $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ o funcţie de comparaţie strictă a.î. funcţia $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\psi(t) := t - \varphi(t)$ este strict crescătoare şi continuă cu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \varphi^n(\psi(r)) \leq \varphi(r)$. Fie $F : \bar{B}^d_{d'}(x_0; r) \to P_{cl}(X)$ o φ-contracţie multivocă a.î. $D_{d'}(x_0, F(x_0)) < r - \varphi(r)$.

Presupunem că operatorul $F : \bar{B}^d_{d'}(x_0; r) \to P((X, d))$ are graficul o mulţime închisă în $X \times X$. Atunci $Fix(F) \neq \emptyset$.

Ca şi consecinţă avem următorul rezultat pe o bilă deschisă.

Teorema 4.2.2 *(T.A. Lazăr şi V.L. Lazăr [66]) Fie $X \neq \emptyset$ şi d, d' două metrici pe X, $x_0 \in X$,$r > 0$. Presupunem că:*

i) (X, d) spaţiu metric complet;

ii) $\exists\ c > 0$ a.î. $d(x, y) \leq cd'(x, y)$, $\forall x, y \in X$;

*iii) $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ o funcţie de comparaţie strictă a.î. funcţia $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\psi(t) := t - \varphi(t)$ este strict crescătoare şi continuă în r,
cu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \varphi^n(\psi(s)) \leq \varphi(s)$, $\forall s \in]0, r[$.*

*Fie $F : B_{d'}(x_0; r) \to P_{cl}(X)$ o φ-contracţie multivocă în raport cu metrica d' a.î. $D_{d'}(x_0, F(x_0)) < r - \varphi(r)$.
Atunci $Fix(F) \neq \emptyset$.*

Folosind acestă teoremă, putem obţine un principiu pentru operatori deschişi definiţi pe spaţii Banach.

Teorema 4.2.3 *(T.A. Lazăr şi V.L. Lazăr [66]) Fie X un spaţiu Banach, $\|\cdot\|, \|\cdot\|'$ două norme definite pe X. Notăm d, d' metricile induse de normele $\|\cdot\|, \|\cdot\|'$. Fie U o mulţime deschisă în raport cu norma $\|\cdot\|'$ şi fie $F : U \to P_{cl}(X)$ un operator multivoc. Presupunem că:*

i) $\exists\ c > 0$ a.î. $d(x, y) \leq cd'(x, y)$, $\forall\ x, y \in X$;

ii) $F : U \to P_{cl}(X)$ este o φ-contracţie multivocă în raport u norma $\|\cdot\|$, adică avem

$$H_{d'}(F(x_1), F(x_2)) \leq \varphi(\|x_1 - x_2\|'), \forall\ x_1, x_2 \in U.$$

iii) $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ este o funcţie de comparaţie strictă, a.î. funcţia $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\psi(t) := t - \varphi(t)$ este strict crescătoare şi continuă pe $\mathbb{R}_+$ şi există $r_0 > 0$ a.î. $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi^n(\psi(s)) \leq \varphi(s)$, $\forall\ s \in]0, r_0[$.

Atunci, câmpul multivoc $G : U \to P(X)$, $G(x) = x - F(x)$ este un operator deschis.

Vom stabili în cele ce urmează, un rezultat de punct fix pentru operatori multivoci de tip Caristi, definiţi pe o bilă înzestrată cu două metrici.

Teorema 4.2.4 *(T.A. Lazăr şi V.L. Lazăr [66]) Fie $X \neq \emptyset$ şi d, d' două metrici definite pe X, iar $x_0 \in X$ şi $r > 0$. Presupunem că*

i) (X, d) este un spaţiu metric complet;

ii) $\exists\ c > 0$ a.î. $d(x, y) \leq cd'(x, y)$, $\forall\ x, y \in X$;

Fie $\varphi : X \to \mathbb{R}_+$ o funcţie ce satisface relaţia $\varphi(x_0) < r$. Considerăm $F : \bar{B}^d_{d'}(x_0; r) \to P_{cl}(X)$ un operator multivoc ce satisface condiţia: $\forall\ x \in \bar{B}^d_{d'}(x_0; r)$, $\exists y \in F(x)$ a.î. $d'(x, y) \leq \varphi(x) - \varphi(y)$.

Dacă $GrafF$ este o mulţime închisă în $X \times X$ în raport cu metrica d, atunci $Fix(F) \neq \emptyset$.

4.2.2 Cazul operatorilor de tip Ćirić

Fie (X, d) un spaţiu metric şi $T : X \to P_{cl}(X)$ un operator multivoc. Pentru $x, y \in X$, vom nota

$$M_d^T(x,y) := \max\{d(x,y), D_d(x,T(x)), D_d(y,T(y)), \frac{1}{2}[D_d(x,T(y)) + D_d(y,T(x))]\}.$$

Următorul rezultat este o variantă uşor modificată a teoremei lui Ćirić [31].

Teorema 4.2.5 *Fie (X, d) un spaţiu metric complet şi $T : X \to P_{cl}(X)$ un operator multivoc ce satisface următoarea condiţie:*

$$\exists\ \alpha \in [0,1[\ \textit{a.î.}\ H_d(T(x),T(y)) \leq \alpha \cdot M_d^T(x,y), \forall x, y \in X.$$

Atunci $Fix(T) \neq \emptyset$ şi pentru $\forall\ x \in X$ şi $\forall\ y \in T(x)$ există un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a.î.:

(1) $x_0 = x,\ x_1 = y$;

(2) $x_{n+1} \in T(x_n),\ n \in \mathbb{N}$;

(3) $x_n \xrightarrow{d} x^* \in T(x^*)$, când $n \to \infty$;

(4) $d(x_n, x^*) \leq \frac{(\alpha p)^n}{1-\alpha p} \cdot d(x_0, x_1)$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ (unde $p \in]1, \frac{1}{\alpha}[$ arbitrar).

În legătură cu teorema de mai sus, primul rezultat al acestui paragraf este o teoremă de dependenţă de date pentru operatori multivoci de tip Ćirić.

Teorema 4.2.6 *(T.A. Lazăr, D. O'Regan şi A. Petruşel [64]) Fie (X, d) un spaţiu metric complet şi $T_1, T_2 : X \to P_{cl}(X)$ doi operatori multivoci. Presupunem că:*

i) $\exists\ \alpha_i \in [0,1[$ a.î. $H_d(T_i(x),T_i(y)) \leq \alpha_i \cdot M_d^{T_i}(x,y), \forall x, y \in X$, şi $i \in \{1,2\}$;

ii) $\exists\ \eta > 0$ a.î. $H_d(T_1(x),T_2(x)) \leq \eta$, $\forall x \in X$.

Atunci $Fix(T_1) \neq \emptyset \neq Fix(T_2)$ şi $H_d(Fix(T_1), Fix(T_2)) \leq \frac{\eta}{1-\max\{\alpha_1,\alpha_2\}}$.

În cele ce urmează, vom prezenta o versiune locală a teoremei lui Ćirić pe o mulţime înzestrată cu două metrici. În acest sens vom aminti mai întâi, pentru un operator multivoc, conceptul de problemă de punct fix bine pusă.

Definiţia 4.2.1 *(I.A. Rus-A. Petruşel [96], [97]) Fie* (X, d) *un spaţiu metric,* $Y \subseteq X$ *şi* $T : Y \to P_{cl}(X)$ *un operator multivoc. Spunem că problema de punct fix este bine pusă în sens generalizat*

a) relativ la D_d*: dacă* $Fix(T) \neq \emptyset$ *şi oricare ar fi un şir* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ *a.î.* $D_d(x_n, T(x_n)) \to 0, n \to +\infty$*, rezultă că* $x_n \xrightarrow{d} x \in Fix(T), n \to +\infty$

b) relativ la H_d*: dacă* $SFix(T) \neq \emptyset$ *şi oricare ar fi un şir* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ *a.î.* $H_d(x_n, T(x_n)) \to 0, n \to +\infty$*, rezultă că* $x_n \xrightarrow{d} x \in SFix(T), n \to +\infty$

Teorema 4.2.7 *(T.A. Lazăr, D. O'Regan şi A. Petruşel [64]) Fie* $X \neq \emptyset$*,* $x_0 \in X$ *şi* $r > 0$*. Presupunem că* d*,* d' *sunt două metrici definite pe* X *iar* $T : \overline{B}^d_{d'}(x_0, r) \to P(X)$ *un operator multivoc. Presupunem că:*

i) (X, d) *este un spaţiu metric complet;*

ii) $\exists\ c > 0$ *a.î.* $d(x, y) \leq cd'(x, y)$*,* $\forall\ x, y \in X$*;*

iii) dacă $d \neq d'$ *atunci operatorul* $T : \overline{B}^d_{d'}(x_0, r) \to P(X^d)$ *are graficul o mulţime închisă în* $X \times X$*, în timp ce*

dacă $d = d'$ *atunci* $T : \overline{B}^d_{d}(x_0, r) \to P_{cl}(X^d)$*;*

iv) $\exists\ \alpha \in [0, 1[$ *a.î.* $H_{d'}(T(x), T(y)) \leq \alpha M^T_{d'}(x, y)$*,* $\forall\ x, y \in \overline{B}^d_{d'}(x_0, r)$*;*

v) $D_{d'}(x_0, T(x_0)) < (1 - \alpha)r$*.*

Atunci:

(A) există $x^* \in \overline{B}^d_{d'}(x_0, r)$ *a.î.* $x^* \in T(x^*)$*;*

(B) dacă $SFix(T) \neq \emptyset$ *şi* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{B}^d_{d'}(x_0, r)$ *este a.î.*

$$H_{d'}(x_n, T(x_n)) \to 0 \text{ când } n \to +\infty,$$

atunci $x_n \xrightarrow{d'} x \in SFix(T)$ *când* $n \to +\infty$ *(adică problema de punc fix pentru operatorul* T *este bine pusă în sensul generalizat în raport cu* $H_{d'}$*).*

Observaţia 4.2.1 *(T.A. Lazăr, D. O'Regan şi A. Petruşel [64]) Teorema 4.2.7 are loc şi dacă înlocuim condiţia (ii) prin:*

(ii') dacă $d' \ngeq d$ *atunci* $\forall\ \epsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ *a.î.*
pentru $\forall\ x, y \in \overline{B}^d_{d'}(x_0, r)$ *ce satisfac relaţia* $d'(x, y) < \delta$ *avem că* $d(u, v) < \epsilon$, $\forall\ u \in T(x)$ *şi* $v \in T(y)$.

Următoarea teoremă este un rezultat de omotopie pentru operatori multivoci de tip Ćirić, definiţi pe o mulţime înzestrată cu două metrici.

Teorema 4.2.8 *(T.A. Lazăr, D. O'Regan şi A. Petruşel [64]) Fie* (X, d) *un spaţiu metric complet şi* d' *o altă metrică definită pe* X *a.î.* $\exists\ c > 0$ *cu* $d(x, y) \leq cd'(x, y)$, $\forall\ x, y \in X$.

Fie U *o submulţime deschisă a lui* (X, d') *şi* V *o submulţime închisă a lui* (X, d), *a.î.* $U \subset V$.

Fie $G : V \times [0, 1] \to P(X)$ *un operator multivoc a.î. sunt satisfăcute condiţiile:*

i) $x \notin G(x, t)$, $\forall\ x \in V \setminus U$ *şi* $\forall\ t \in [0, 1]$;

ii) $\exists\ \alpha \in [0, 1[$, *a.î.* $\forall\ t \in [0, 1]$ *şi* $\forall\ x, y \in V$ *avem:*

$$H_{d'}(G(x, t), G(y, t)) \leq \alpha M^{G(\cdot,t)}_{d'}(x, y);$$

iii) există o funcţie crescătoare şi continuă $\phi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *a.î.*

$$H_{d'}(G(x, t), G(x, s)) \leq |\phi(t) - \phi(s)|, \forall\ t, s \in [0, 1] \text{şi } \forall\ x \in V;$$

iv) $G : V^d \times [0, 1] \to P(X^d)$ *este un operator închis.*

Atunci $G(\cdot, 0)$ *are un punct fix, dacă şi numai dacă* $G(\cdot, 1)$ *are un punct fix.*

Un caz special, util în aplicaţii, al T.4.2.8 se obţine dacă luăm $d = d'$.

Corolar 4.2.1 *(T.A. Lazăr, D. O'Regan şi A. Petruşel [64]) Fie* (X, d) *un spaţiu metric complet,* U *o submulţime deschisă a lui* X *şi* V *o submulţime închisă a lui* X, *ce satisfac incluziunea* $U \subset V$. *Fie* $G : V \times [0, 1] \to P(X)$ *un operator multivoc închis, a.î. următoarele condiţii sunt satisfăcute:*

i) $x \notin G(x,t)$, $\forall\ x \in V \setminus U$ *şi* $\forall\ t \in [0,1]$;

ii) $\exists\ \alpha \in [0,1[$, *a.î.* $\forall\ t \in [0,1]$ *şi* $\forall\ x, y \in V$ *avem:*

$$H_d(G(x,t), G(y,t)) \leq \alpha M_d^{G(\cdot,t)}(x,y);$$

iii) $\exists\ \phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ *crescătoare şi continuă, a.î.*

$$H_d(G(x,t), G(x,s)) \leq |\phi(t) - \phi(s)| \forall\ t, s \in [0,1] \text{ şi } \forall\ x \in V;$$

Atunci $G(\cdot, 0)$ *are un punct fix dacă şi numai dacă* $G(\cdot, 1)$ *are un punct fix.*

Observaţia 4.2.2 *(T.A. Lazăr, D. O'Regan şi A. Petruşel [64]) În Corolarul 4.2.1 se poate considera (de regulă pentru aplicaţii) mulţimea* $Q = \overline{U}$.

În acest caz, condiţia (i) devine:

(i') $x \notin G(x,t)$, $\forall\ x \in \partial U$ *şi* $\forall\ t \in [0,1]$.

Bibliografie

[1] M. Aamri, K. Chaira, Approximation du point fixe et applications faiblement contractantes, Extracta Math. 17 (2002) 97-110.

[2] R.P. Agarwal, D. O'Regan, N. Shahzad, Fixed point theory for generalized contractive maps of Meir-Keeler type, Math. Nachr. 276 (2004) 3-22.

[3] R.P. Agarwal, D. O'Regan, Fixed point theory for generalized contractions on spaces with two metrics, J. Math. Anal. Appl. 248(2000), 402-414.

[4] R.P. Agarwal, J.H. Dshalalow, D. O'Regan, Fixed point and homotopy results for generalized contractive maps of Reich type, Appl. Anal. 82 (2003) 329-350.

[5] R.P. Agarwal, D. O'Regan, R. Precup, Domain invariance theorems for contractive type maps. Dynam. Systems Appl. 16 (2007), no. 3, 579-586.

[6] J. Andres, J. Fišer, Metric and topological multivalued fractals, Intern. J. Bifurcation and Chaos 14 (2004), 1277-1289.

[7] J. Andres, L. Górniewicz, On the Banach contraction principle for multivalued mappings, Approximation, Optimization and Mathematical Economics (Pointe-à-Pitre, 1999), 1-23 Physica, Heidelberg, (2001).

[8] J.P. Aubin, H. Frankowska, Set-Valued Analysis, Birkhauser, Basel, (1990).

[9] J.P. Aubin, J. Siegel, Fixed points and stationary points of dissipative multivalued maps, Proc. Amer. Math. Soc. 78 (1980) 391-398.

[10] Y.M. Ayerbe Toledano, T. Dominguez Benavides, L. López Acedo, Measures of Noncompactness in Metric Fixed Point Theory, Birkhäuser Verlag, Basel, (1997).

[11] M.F. Barnsley, Lecture note on iterated function systems, Proc. of Symposia in Appl. Math., 39(1989), 127-144.

[12] M.F. Barnsley, Fractals everywhere, Academic Press, Boston, (1988).

[13] G. Beer, Topologies on Closed and Closed Convex Sets, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, (1993).

[14] V.Berinde, Generalized Contractions and Applications, CUB Press 22, Baia Mare, (1997).

[15] V. Berinde, Approximation of fixed points of some nonself generalized ϕ-contractions, Math. Balkanica (N.S.) 18 (2004), no. 1-2, 85-93.

[16] V. Berinde, A fixed point theorem for mapping with contracting orbital diameters, Bul. Ştiinţ. Univ. Baia Mare Ser. B, 10 (1994), 29-38.

[17] V. Berinde, Iterative Approximation of Fixed Points, Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin, (2007).

[18] K. Border, Fixed Point Theorems with Applications to Economics and Game Theory, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1985).

[19] A. Bollenbacher, T.L. Hicks, A fixed point theorem revisited, Proc. Amer. Math. Soc. 102 (1988) 898-900.

[20] F. Browder, On a theorem of Caristi and Kirk, Fixed Point Theory and its Applications, Proceedings Sem. Dalhousie Univ., Halifax, Academic Press New York, (1976), 23-27.

[21] A. Bucur, L. Guran, A. Petruşel, Fixed points for multivalued operators on a set endowed with vector-valued metrics, Fixed Point Theory, 10(2009), 19-34.

[22] C. Bylka, B. Rzepecki, Results on fixed points, Demonstratio Math., 17 (1984), no. 1, 97-106.

[23] J. Caristi, Fixed points theorems for mappings satisfying inwardness conditions, Trans. Amer. Math. Soc. 215 (1976) 241-251.

[24] N. Castañeda, A note on a fixed point theorem and Newton method, Indian J. Pure Applied Math., 30 (1999), no. 2, 199-201.

[25] T.H. Chang, C.L. Yen, Some fixed point theorems in Banach space. J. Math. Anal. Appl. 138 (1989), no. 2, 550-558.

[26] Y.-Q. Chen, On a fixed point problem of Reich, Proc. Amer. Math. Soc. 124 (1996), no. 10, 3085-3088.

[27] C. Chifu, G. Petrusel, Well-posedness and fractals via fixed point theory, Fixed Point Theory Appl. (2008), Art ID. 645419, 9 pp.

[28] C. Chifu, A. Petrusel, Multivalued fractals and generalized multivalued contractions, Chaos, Solitons and Fractals 36 (2008), 203-210.

[29] A. Chis-Novac, R. Precup, I.A. Rus, Data dependence of fixed points for non-self generalized contractions, Fixed Point Theory 10 (2009), no. 1, 73-87.

[30] L.B.Ćirić,A generalization of Banach's contraction principle, Proc. Amer. Math. Soc., 45 (1974), 267-273.

[31] L.B.Ćirić, Fixed points for generalized multi-valued contractions, Math. Vesnik 9(24) (1972), 265-272.

[32] L.B.Ćirić, Non-self mappings satisfying non-linear contractive condition with applications, Nonlinear Analysis 71 (2009) 2927-2935

[33] L.B.Ćirić, J.S. Ume, M.S. Khan, H.K. Pathak, On some nonself mappings, Math. Nachr. 251 (2003), 28–33.

[34] H. Covitz, S.B. Nadler jr., Multivalued contraction mappings in generalized metric spaces, Israel J. Math. 8 (1970) 5-11.

[35] J. Daneš, Some fixed point theorems, Comment.Math.Univ.Carolin., 9(1968),223-235.

[36] K. Deimling, Multivalued Differential Equations, W. de Gruyter, Basel, (1992).

[37] J. Dugundji, A. Granas, Weakly contractive maps and elementary domain invariance theorem, Bull. Greek Math. Soc. 19 (1978) 141-151.

[38] R. Espínola, A. Petruşel, Existence and data dependence of fixed points for multivalued operators on gauge spaces, J. Math. Anal. Appl., 309(2005), 420-432.

[39] Y. Feng, S. Liu, Fixed point theorems for multivalued contractive mappings and multivalued Caristi's fixed point theorems, J. Math. Anal. Appl. 317 (2006), 103-112.

[40] R.B. Fraser, S.B. Nadler jr., Sequences of contractive maps and fixed points, Pacific J. Math., 31(1969), 659-667.

[41] M. Fréchet, Les espaces abstraits, Gauthier-Villars, Paris, (1928).

[42] M. Frigon, Fixed point results for multivalued contractions in gauge spaces and applications, Set Valued Mappings with Applications in Nonlinear Analysis, Ser. Math. Anal. Appl., Vol. 4, Taylor & Francis, London, (2002), 175-181.

[43] M. Frigon, Fixed point and continuation results for contractions in metric and gauge spaces, Banach Center Publ. 77 (2007), 89-114.

[44] M. Frigon, A. Granas, Résultats du type de Leray-Schauder pour les contractions multivoques, Topol. Methods Nonlinear Anal. 4 (1994) 197-208.

[45] K.M. Ghosh, S.K. Chatterjea, Some fixed point theorems, Bull. Calcutta Math. Soc. 71 (1979), no. 1, 13-22.

[46] V. Glăvan, V. Guţu, On the dynamics of contracting relations, in Analysis and Optimization of Differential systems (Eds. V. Barbu, I. Lasiecka, D. Tiba, C. Varsan), Kluwer Acad. Publ., (2003), 179-188.

[47] K. Goebel, W.A. Kirk, Topics in Metric Fixed Point Theory, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1990).

[48] L. Górniewicz, Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, (1999).

[49] A. Granas, J. Dugundji, Fixed Point Theory, Springer Verlag Berlin, (2003).

[50] M. Hegedüs, New generalizations of Banach's contraction principle, Acta Sci. Math. (Szeged) 42 (1980) 87-89.

[51] M. Hegedüs, T. Szilágyi, Equivalent conditions and a new fixed point theorem in the theory of contractive type mappings, Math. Japon. 25 (1980) 147-157.

[52] T.L. Hicks, B.E. Rhoades, A Banach type fixed point theorem, Math. Japon. 24 (1979) 327-330.

[53] T.L. Hicks, L.M. Saliga, Fixed point theorems for non-self maps (I), Internat. J. Math. Math. Sci. 17 (1994), no. 4, 713-716.

[54] S. Hu, N.S. Papageorgiou, Handbook of Multivalued Analysis, Vol. I-II, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997, 1999.

[55] J.E.Hutchinson, Fractals and self-similarity, Indiana Univ.Math.J.30 (1981),713-747.

[56] J. Jachymski, Continuous dependence of attractors of iterated function systems, J. Math. Anal. Appl., 198 (1996), 221-226.

[57] J. Jachymski, Around Browder's fixed point theorem for contractions, J. Fixed Point Theory Appl. 5 (2009), no. 1, 47-61.

[58] J. Jachymski, I. Jóźwik, Nonlinear contractive conditions: a comparison and related problems, Banach Center Publ. 77 (2007) 123-146.

[59] W.A. Kirk, B. Sims (eds.), Handbook of Metric Fixed Point Theory, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, (2001).

[60] A. Lasota, J. Myjak, Attractors of multifunctions, Bull. Polish Acad. Sci. Math., 48(2000), 319-334.

[61] A. Latif, I. Beg, Geometric fixed points for single and multivalued mappings, Demonstratio Math., 30(1997), 791-800.

[62] **T.A. Lazăr**, Data dapendence for multivalued contractions on generalized complete metric spaces, Seminar on Fixed Point Theory Cluj-Napoca 1 (2000), 55-58.

[63] **T.A. Lazăr**, Fixed points for non-self nonlinear contractions and non-self Caristi type operators, Creative Math.& Inf. 17 (2008), No. 3, 446-451.

[64] **T.A. Lazăr**, D. O'Regan, A. Petruşel, Fixed points and homotopy results for Ciric-type multivalued operators on a set with two metrics, Bull. Korean Math. Soc. 45 (2008), No. 1, 6773.

[65] **T.A. Lazăr**, A. Petruşel, N. Shahzad, Fixed points for non-self operators and domain invariance theorems, Nonlinear Analysis 70 (2009) 117-125.

[66] **T.A. Lazăr**, V.L. Lazăr, Fixed points for non-self multivalued operators on a set with two metrics, JP Journal of Fixed Point Theory and Applications 4 (2009), No. 3, 183-191.

[67] **T.A. Lazăr**, Remarks on some metrical fixed point theorems, Analele Univ. Oradea, Fasc. Matematica, 26(2010), No. 1, 111-115.

[68] **T.A. Lazăr**, G. Petruşel, The theory of the Reich's fixed point theorem for multivalued operators, trimis spre publicare.

[69] T.C. Lim, On fixed point stability for set-valued contractive mappings with applications to generalized differential equations,J. Math. Anal. Appl. 110 (1985) 436-441.

[70] M. Maciejewski, Inward contractions on metric spaces, J. Math. Anal. Appl. 330 (2007) 1207-1219.

[71] J.T. Markin, Continuous dependence of fixed points sets, Proc. Amer. Math. Soc., 38 (1973), 545-547.

[72] J. Matkowski, Integrable solutions of functional equations, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 127 (1975) 68 pp.

[73] A. Meir, E. Keeler, A theorem on contraction mappings, J. Math. Anal. Appl. 28 (1969) 326-329.

[74] N. Mizoguchi, W. Takahashi, Fixed point theorems for multivalued mappings on complete metric spaces, J. Math. Anal. Appl., 141(1989), 177-188.

[75] G. Moţ, A. Petruşel, G. Petruşel, Topics in Multivalued Analysis and Applications to Mathematical Economics, House of the Book of Science, (2007).

[76] A. Muntean, Fixed Point Principles and Applications to Mathematical Economics, Cluj University Press, (2002).

[77] A.S. Mureşan, Some fixed point theorems of Maia type, Seminar on Fixed Point Theory, Preprint, 88-3, Univ. Babes-Bolyai, Cluj-Napoca, (1988), 35-42.

[78] S.B. Nadler jr., Multivalued contraction mappings, Pacific J. Math. 30(1969), 475-488.

[79] S.B. Nadler jr., Periodic points of multi-valued ε-contractive maps, Topol. Methods Nonlinear Anal., 22(2003), No.2, 399-409.

[80] D. O'Regan, R. Precup, Continuation theory for contractions on spaces with two vector-valued metrics, Appl. Anal., 82 (2003), no. 2, 131-144.

[81] D. O'Regan, R. Precup, Theorems of Leray-Schauder Type and Applications, Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, (2001).

[82] R.S. Palais, A simple proof of the Banach contraction principle, Journal of Fixed Point Theory and Applications 2 (2007) 221-223.

[83] N.S. Papageorgiou, Convergence theorems for fixed points of multifunctions and solutions of differential inclusions in Banach spaces, Glas. Mat. Ser. III, 23(1988), 247-257.

[84] L. Pasicki, A generalization of Reich's fixed point theorem, Comment. Math. Prace Mat. 23 (1983), no. 1, 97-99.

[85] S. Park, W.K. Kim, Extensions of the weak contractions of Dugundji and Granas, J. Korean Math. Soc. 21 (1984) 1-7.

[86] M. Păcurar, I.A. Rus, Fixed point theory for cyclic φ-contractions, Nonlinear Analysis 72 (2010) 1181-1187.

[87] A. Petruşel, Singlevalued and multivalued Meir-Keeler type operators, Revue D'Analse Num. et de Th. de l'Approx., Tome 30(2001), 75-80.

[88] A. Petruşel, Generalized multivalued contractions, Nonlinear Anal. 47 (2001) 649-659.

[89] A. Petruşel, On Frigon-Granas-type multifunctions, Nonlinear Anal. Forum 7 (2002) 113-121.

[90] A. Petruşel, Operatorial Inclusions, House of the Book of Science Cluj-Napoca, (2002).

[91] A. Petruşel, Multivalued weakly Picard operators and applications, Scienticae Mathematicae Japonicae, 59(2004), 169-202.

[92] A. Petruşel, I. A. Rus, Dynamics on $(P_{cp}(X), H_d)$ generated by a finite family of multi-valued operators on (X, d), Math. Moravica, 5(2001), 103-110.

[93] A. Petruşel, A. Sîntămărian, Single-valued and multi-valued Caristi type operators, Publ. Math. Debrecen 60 (2002) 167-177.

[94] A. Petruşel, I.A. Rus, Multivalued Picard and weakly Picard operators, Fixed Point Theory and Applications (E. Llorens Fuster, J. Garcia Falset, B. Sims-Eds.), Yokohama Publishers (2004), 207-226.

[95] A. Petruşel, I.A. Rus, Fixed point theory for multivalued operators on a set with two metics, Fixed Point Theory 8 (2007) 97-104.

[96] A. Petruşel, I.A. Rus, Well-posedness of the fixed point problem for multivalued operators , Applied Analysis and Differential Equations (O. Cârjă, I. I. Vrabie eds.), World Scientific (2007), pp. 295-306.

[97] A. Petruşel, I.A. Rus, J.-C. Yao, Well-posedness in the generalized sense of the fixed point problems, Taiwanese J. Math. 11 (2007), no. 3, 903-914.

[98] A. Petrusel, I.A. Rus, M.A. Şerban, Fixed points for operators on generalized metric spaces, CUBO 10 (2008), no. 4, 45-66.

[99] A. Petruşel, **T.A. Lazăr**, Multivalued Picard operators and applications, Proc. of 11th Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing, 26-29 September (2009), Timişoara, Romania.

[100] A. Petruşel, I.A. Rus, A theory of a metrical fixed point theorem for a multivalued operstor, Proc. of the 9-th International Conference on Fixed Point Theory and its Applications, în curs de apariţie.

[101] R. Precup, Discrete continuation method for boundary value problems on bounded sets in Banach spaces, J. Applied Comput. Math., 113 (2000), 267-281.

[102] R. Precup, Continuation method for contractive maps on spaces endowed with vector-valued metrics, Sém. de la Théorie de la Meilleure Approx., Conv. et Optimisation, Ed. Srima, Cluj, (2001), 113-120.

[103] R. Precup, Continuation results for mappings of contractive type, Sem. on Fixed Point Theory Cluj-Napoca, 2(2001), 23-40.

[104] R. Precup, The continuation principle for generalized contractions, Bull. Appl. Comput. Math. (Budapest), 96-C (2001), 367-373.

[105] R. Precup, A Mōnch type generalization of the Eilenberg-Montgomery fixed point theorem, Sem. on Fixed Point Theory Cluj-Napoca, 1 (2000), 69-72.

[106] R. Precup, Existence theorems for nonlinear problems by continuation methods, Nonlinear Anal., 30 (1997), 3313-3322.

[107] R. Precup, Continuation theorems for mappings of Caristy type, Studia Univ Babeş-Bolyai Math., 41 (1996), 101-106.

[108] R. Precup, On the continuation principle for nonexpansive maps, Studia Univ. Babeş-Bolyai Math., 41 (1996), 85-89.

[109] R.Precup, On the topological transversality principle, Nonlinear Anal.,20(1993),1-9.

[110] R. Precup, On the reverse of the Krasnoselskii-Browder boundary inequality , Studia Univ. Babeş-Bolyai Math., 38 (1993), 41-55.

[111] R. Precup, Note on an abstract continuation theorem, Studia Univ. Babeş-Bolyai Math., 37 (1992), 85-90.

[112] R. Precup, Generalized topological transversality and existence theorems, Libertas Math., 11 (1991), 65-79.

[113] R. Precup, Discrete continuation method for boundary value problems on bounded sets in Banach spaces, Fixed Point Theory with Applications in Nonlinear Analysis., J. Comput. Appl. Math., 113 (2000), 267-281.

[114] R. Radovanović, Approximation of a fixed point of some nonself mappings, Math. Balkanica (N.S.) 15 (2001), no. 3-4, 213-218.

[115] S. Reich, Fixed point of contractive functions, Boll. Un. Mat. Ital. 5 (1972), 26-42.

[116] S. Reich, Kannan's fixed point theorem, Boll. Un. Mat. Ital., 4 (1971), 1-11.

[117] S. Reich, A fixed point theorem for locally contractive multi-valued functions, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. 17 (1972), 569-572.

[118] S. Reich, Some problems and recent results in fixed point theory, Topol. Methods in Nonlinear Funct. Anal., Contemporary Math., 21 (1983), 179-187.

[119] I.A. Rus, Fixed point theorems for multivalued mappings in complete metric spaces, Math. Japon. 20 (1975) 21-24.

[120] I.A. Rus, On a fixed point theorem of Maia, Studia Univ. Babeş-Bolyai Math. 22 (1977), 40-42.

[121] I.A. Rus, Principii şi aplicaţiii ale teoriei punctului fix, Editura Dacia, Cluj-Napoca, (1979).

[122] I.A. Rus, Basic problems of the metric fixed point theory revisited (II), Studia Univ. Babeş- Bolyai Math. 36 (1991) 81-89.

[123] I.A. Rus, Weakly Picard mappings, Comment.Math.Univ. Carolinae,34(1993),769-773.

[124] I.A. Rus, Generalized Contractions and Applications, Cluj University Press, Cluj-Napoca, (2001).

[125] I.A. Rus, Picard operators and applications, Scientiae Mathematicae Japonicae 58 (2003), 191-219.

[126] I.A. Rus, Data dependence of the fixed points in a set with two metrics, Fixed Point Theory 8 (2007), no. 1, 115-123.

[127] I.A. Rus, Picard operators and well-posedness of fixed point problems, Studia Univ. Babeş-Bolyai Mathematica 52 (2007), 147-156.

[128] I.A. Rus, The theory of a metrical fixed point theorem: theoretical and applicative relevances, Fixed Point Theory 9 (2008), 541-559.

[129] I.A. Rus, S. Mureşan, Data dependence of the fixed point set of weakly Picard operators, Studia Univ. Babeş-Bolyai Math. 43 (1998) 79-83.

[130] I.A. Rus, A. Petruşel, G. Petruşel, Fixed Point Theory 1950-2000 : Romanian Contributions, House of the Book of Science, Cluj-Napoca, (2002).

[131] I.A. Rus, A. Petruşel, G. Petruşel, Fixed Point Theory, Cluj University Press, Cluj-Napoca, (2008).

[132] I.A. Rus, A. Petruşel, A. Sîntămărian, Data dependence of the fixed point set of some multivalued weakly Picard operators, Nonlinear Analysis 52 (2003), 1947-1959.

[133] I.A. Rus, A. Petruşel, M.A. Şerban, Weakly Picard operators: equivalent definitions, applications and open problems, Fixed Point Theory 7 (2006) 3-22.

[134] B. Rzepecki, Remarks on the Banach fixed point principle and its applications, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 27 (1982), no. 1, 81-93.

[135] J. Saint-Raymond, Multivalued contractions, Set-Valued Analysis, 2(1994), 559-571.

[136] S.P. Singh, On fixed point theorems, Seminar in Analysis, Inst. Math. Sci., Madras, (1974), 1-37.

[137] S.P. Singh, On a fixed point theorem in metric space. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 43 (1970) 229-232.

[138] A. Sîntămărian, Metrical strict fixed point theorems for multivalued mappings, Sem. on Fixed Point Theory, Babeş-Bolyai Univ. Cluj-Napoca, (1997), 27-30.

[139] W. Takahashi, Nonlinear Functional Analysis. Fixed Point Theory and its Applications, Yokohama Publishers, Yokohama, (2000).

[140] E. Tarafdar, G.X.-Z. Yuan, Set-valued contraction mapping principle, Applied Math. Letter, 8(1995), 79-81.

[141] Ts. Tsachev, V.G. Angelov, Fixed points of nonself-mappings and applications, Nonlinear Analysis 21(1993), No. 1, 9-16.

[142] M. Turinici, A fixed point theorem on metric spaces, An. Ştiin. Univ. Al.I. Cuza Iasi, Sect. I Mat.(N.S.) 20 (1974), 101-105.

[143] W. Walter, Remarks on a paper by F. Browder about contraction, Nonlinear Anal. 5 (1981) 21-25.

[144] R. Węgrzyk, Fixed point theorems for multifunctions and their applications to functional equations, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 201 (1982) 28 pp.

[145] H-K. Xu, Metric fixed point theory for multivalued mappings, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 389 (2000), 39 pp.

[146] M. Yamaguti, M. Hata, J. Kigani, Mathematics of Fractals, Translations Math. Monograph, Vol. 167, AMS Providence, RI, (1997).

[147] G.X.-Z. Yuan, KKM Theory and Applications in Nonlinear Analysis, Marcel Dekker New York, (1999).