Universitatea "Babeş-Bolyai", Cluj-Napoca

Facultatea de Matematică şi Informatică

Mihaela Manole

METODE DE PUNCT FIX PENTRU STUDIUL ECUAŢIILOR DE EVOLUŢIE SEMILINIARE

Coordonator ştiinţific

Prof. Dr. Radu Precup

Cluj-Napoca, 2010

Cuprins

Cuvinte cheie: ecuaţii de evoluţie, teoreme de punct fix, operatori complet continui, generator infinitesimal al unui C_0-semigrup de contracţii, matrice convergentă la zero, principii de punct fix, sisteme de operatori.

Introducere

Ecuaţiile diferenţiale parţiale constitue un subiect cu multe faţete. Chiar dacă teoria ecuaţiilor cu derivate parţiale a devenit in ultimul secol o disciplină matematică în sine cu metode şi obiective proprii, nu poate fi ignorant faptul că îşi trage rădăcinile din fizica secolului XIX, în speţă din mecanică, din teoria electricităţii, a propagării căldurii şi electromagnetismului, fizica rămânând şi astăzi principala beneficiară şi domeniu de aplicabilitate a ecuaţiilor cu derivate parţiale. Dezvoltarea clasică a analizei funcţionale neliniare are loc simultan cu începuturile analizei funcţionale liniară pe la începutul secolului XX în lucrările matematicienilor Picard, S. Bernstein, Ljapunov, E. Schimdt, şi Lichtenstein şi a fost motivată de dorinţa de a studia existenţa şi proprietăţile problemelor la limita pentru ecuaţii neliniare cu derivate parţiale. Instrumentul clasic de lucru a fost principiul de contracţie a lui Picard (pus în forma sa cea mai clară de către Banach în teza sa în 1920 - teorema de punct fix a lui Banach).

Dincolo de dezvoltarea timpurie a teoriei de bifurcaţie a lui Ljapunov şi E. Schimdt în jurul anului 1905, a doua, şi chiar şi mai fructuoasă, sursa a metodelor clasice în analiza funcţională neliniară a fost dezvoltată în teoria aplicaţiilor neliniare compacte în spaţii Banach la sfârşitul anilor 1920 şi la începutul anilor 1930. Acestea au inclus bine-cunoscuta Teoremă de punct fix a lui Schauder şi extinderea gradului topologic a lui Brower de către Leray şi Schauder în 1934 la aplicaţii pe spaţii Banach de forma I + C cu C compact (precum şi rezultatele interesante legate de aplicaţiile neliniare Fredholm ale lui Caccioppoli).

Rolul central al aplicaţiilor compacte în această fază de dezvoltare a analizei funcţionale neliniare s-a datorat în parte, naturii aparatului tehnic în curs de dezvoltare, dar, de asemenea, în parte, tendinţei nu prea fructuoase de a privi teoria ecuaţiilor integrale ca domeniu predestinat de aplicare a teoriei ce urma să fie dezvoltată. Cu toate acestea, mai multe probleme importante de analiză se află în domeniul oarecum diferit al problemelor la limită pentru ecuaţii cu derivate parţiale, iar din eforturile de a aplica teoria operatorilor compacţi (şi în special al teoremei Leray-Schauder), la problemele din urmă au dat naştere la cereri tot mai inaccesibile (şi, uneori, invalide), estimări *a priori* în aceste probleme; speranţa de aplicare a analizei funcţionale neliniare la problemele de acest tip este centrată pe un program general de a crea teorii noi pentru clasele importante de operatori neliniari ca generatori infinitezimali de C_0-semigrupuri de contracţii sau operatori monotoni.

Tematica acestei teze de doctorat se încadrează în tematica generală de studiu a problemelor semiliniare la limită, utilizând metoda operatorilor pe baza rezultatelor abstracte din analiza neliniară. Metodele folosite au fost iniţiate la începutul anilor şaizeci de către J.L. Lions şi Temam pentru ecuaţii neomogene, cu termenul sursă în $H^{-1}(\Omega)$, şi Perov şi Kibenko pentru sistemele semiliniare de operatori iar de atunci au fost folosite pe scară largă pentru probleme specifice ca:

-probleme la limită pentru ecuaţii diferenţiale parţiale: J.-L.Lions [42], J.-L.Lions, E.Magenes [41], T.Cazenave [15], T.Cazenave, A.Haraux [16], T.Cazenave, F.B.Weissler [17], T.Kato [36], R.Temam [76], D.Bainov, E. Minchev and A.Myshkis [5], V.Barbu [6], H.Brezis and F.Browder [11], I.Bialynicki-Birula and J. Mycielski [14], L.C.Evans [21], R.Glassey [28], T.Kato [34], A.I.Perov, A.V.Kibenko [64], R.Precup [65], [66], [67].

-probleme parabolice şi eliptice la limită: N.H.Pavel [62], D.Gilbarg şi N.S.Trudinger [24], K.Tintarev [77]

-sisteme semiliniare de operatori: A.I. Perov, A.V.Kibenko [64], R.Precup [65], [68], C.Avramescu [4], I.A. Rus [72], M.J. Ablowitz, B.Prinary and A.D.Trubatch [1], A.Domarkas [20].

-semigrupuri neliniare şi ecuaţii diferenţiale: V.Barbu [7], F.Kappel, H.Brezis şi M.G.Crandall [39], A.C.McBride [52], N.H.Pavel [62], A.Pazy [63], I.Vrabie [81], [82],[83].

-analiză funcţională neliniară şi ecuaţii diferenţiale parţiale: H.Brezis [12], M.Clapp [18], P.Jebelean [33].

Subiecte înrudite pot fi găsite în A.De Bouard [9], J.Bourgain [10], D.Bainov, E. Minchev [13], C.Cohen-Tannoudji, J.Dupont-Roc, G.Grynberg [19], R.P.Feynman [22], [23], J.Ginibre şi G.Velo [25], [26], [27], A.Granas, J. Dugundji [29], H.Grosse şi A.Martin [30].

Scopul acestui studiu este de a găsi astfel de operatori pentru care putem dovedi proprietatea de compactitate, în scopul aplicării principiilor de punct fix pentru diferite clase de ecuaţii diferenţiale parţiale şi sistemele corespunzătoare.

Probleme clasice la limită din fizica matematică includ, în afară de ecuaţii de tip eliptic, cu valori iniţiale pentru ecuaţia căldurii şi problema Cauchy pentru ecuaţia undelor, în plus, ca urmare a dezvoltării mecanicii cuantice, probleme cu valoari iniţiale pentru ecuaţia Schrödinger. Toate aceste probleme pot fi scrise într-o formă operatorială comună:

$$Lu = Fu$$

unde

(1) pentru ecuaţia căldurii: $Lu = u_t - \tilde{a}\Delta u$
(2) pentru ecuaţia undelor: $Lu = u_{tt} - \tilde{a}\Delta u$
(3) pentru ecuaţia lui Schrödinger: $Lu = iu_t + \Delta u,$

L este un operator diferenţial iar F o aplicaţie neliniară. Vom arata că operatorul soluţie $L^{-1} = S$ pentru problema neliniară:

$$\begin{cases} Lu = f(x) \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases}$$

există şi mai mult, este complet continuu pentru toate cele trei tipuri de ecuaţii.

Scopul acestei lucrări este de a face noi precizări privind abordarea operatorială a unor ecuaţii cu derivate parţiale de evoluţie şi de a extinde această teorie la sistemele semiliniare de operatori. Mai exact, vom demonstra proprietăţi de bază, cum ar fi estimarea în normă şi compactitatea pentru operatorul soluţie (liniar) asociat unor ecuaţii neomogene de evoluţie liniare şi le vom folosi pentru a aplica teoremele lui Banach, Schauder şi Leray-Schauder pentru problemele de punct fix echivalente cu probleme Chauchy-Dirichlet pentru ecuaţiile de evoluţie. Vom extinde aceste rezultate la sistemele semiliniare operatoriale corespunzătoare. Principiul Banach de contracţie pe spaţii metrice complete va fi înlocuit cu teorema lui Perov de punct fix pentru operatorii complet continui şi principiul Leray-Schauder pentru operatorii complet continui şi mulţimi de contracţii.

Lucrarea de faţă este structurată pe patru capitole precedate de un breviar teoretic şi urmate de lista bibliografică a publicaţiilor.

Primul capitol, intitulat **Preliminarii** are scopul de a aminti unele noţiuni şi rezultate de bază necesare în prezentarea capitolelor urmatoare ale acestei teze de doctorat. În redactarea acestui capitol am utilizat urmatoarele resurse bibliografice: R.Precup [67],[68], H.Brezis [12], A.Granas si J.Dugundji [29], A.I.Perov şi A.V. Kibenko [64], I.A.Rus [72]. [73], H.Brezis [12], D. Gilbarg şi N. S. Trudinger [24], J.-L. Lions [42], [43], J.-L.Lions et E.Magenes [41], T. Cazenave, A.Haraux [16], J.-L.Lions şi E.Magenes [41], V.Barbu [7], A.Pazy [63], I.Vrabie [81], [82] .

Motivaţia capitolului al doilea, intitulat **Teoreme de existenţă a sistemelor de ecuaţii semiliniare pentru ecuaţia căldurii şi a undelor** constă în rezultatele cunoscute ale lui A. I. Perov şi A.V. Kibenko [64] pentru versiunea vectorială a principiului de contracţie aplicat pentru ecuaţia căldurii şi a undelor ce a fost recent extinsă de către R. Precup [67] la alte subiecte de analiză neliniară. Scopul nostru principal în capitolul 2 este de a extinde aceste metode la sisteme de ecuaţii şi de a generaliza rezultatele din R. Precup [68].

În secţiunea 2.1. vom prezenta prima ecuaţie de evoluţie pentru care vom aplica rezultatele noastre. Vom prezenta proprietăţile de bază, precum estimări în normă şi compactitate pentru operatorul soluţie asociat ecuaţiei căldurii neomogene liniare şi le vom folosi în scopul aplicării teoremelor de punct fix ale lui Perov, Shauder şi Leray-Shauder pentru problema echivalentă cu sistemul:

$$\begin{cases} Lu = F(u,v) & \\ Lv = G(u,v) & \text{pe } Q \\ u(x,0)=0,\ \ v(x,0)=0 & \text{pe } \Omega \\ u=v=0 & \text{pe } \Sigma \end{cases} \tag{0.0.1}$$

Aici prin Lu întelegem $Lu = u_t - \Delta u$ astfel încât $S = \mathrm{L}^{-1}$ iar F, G sunt operatori neliniari. Cautăm soluţia slabă a problemei (0.0.1) echivalentă cu problema de punct fix $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = N\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ în spaţiul $C([0,T];H^{-1}(\Omega)) \times \mathrm{C}([0,\mathrm{T}];H^{-1}(\Omega))$, unde $u,v \in C\big([0,T];L^2(\Omega)\big)$, $N = (N_1, N_2)$ definit de

$$N_1 = S \circ F \text{ şi } N_2 = S \circ G.$$

În secţiunea a doua vom folosi acelaşi program pentru ecuaţia undelor şi urmatorul sistem:

$$\begin{cases} Lu = F(u,u',v,v') \\ Lv = G(u,u',v,v') \\ u(x,0) = 0, \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \\ v(x,0) = 0, \ \frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = 0 \\ u = v = 0 \text{ pe } \Sigma \end{cases} \qquad (0.0.2)$$

în spaţiile $E_0 = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ şi $E = L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ înzestrate, respectiv, cu normele:

$$|w|_{E_0} = \left(|w_1|^2_{H_0^1} + |w_2|^2_{L^2}\right)^{1/2}$$

$$|w|_E = \left(|w_1|^2_{L^2} + |w_2|^2_{H^{-1}}\right)^{1/2}$$

pentru orice $w = [w_1, w_2]$. Aici $Lw = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \Delta w$, $w_1 = (u, u')$, $w_2 = (v, v')$.

Studiul realizat pentru (0.0.1) şi (0.0.2) va fi unul vectorial şi vom folosi matrice în loc de constante. Rezultatul va fi unul de teorie de existenţă derivată din principiile de contracţie.

Rezultatele proprii ale autorului sunt urmatoarele:

Lema 2.1.1, Teorema 2.1.2, Teorema 2.1.3, Teorema 2.1.4, Teorema 2.2.1, Teorema 2.2.2.

Al treilea capitol al lucrării se intitulează **Teoreme de existenţă pentru ecuaţii de evoluţie semiliniare, generale şi sisteme** şi are ca scop extinderea rezultatelor din capitolul 2 la cazul general al ecuaţiilor de evoluţie şi sisteme. Capitolul este structurat în două secţiuni. Contribuţiile autorului din prima parte au la bază rezultate din I.Vrabie [81], [82]. Vom demonstra că operatorul soluţie este complet continuu, proprietate crucială pentru obţinerea rezultatelor din secţiunea a doua.

În secţiunea a doua vom prezenta două rezultate referitoare la urmatoarele sisteme semiliniare de ecuaţii:

$$\begin{cases} u_t - Au = F(u,v) \\ v_t - Au = G(u,v) \\ u(0) = v(0) = 0 \end{cases} \qquad (0.0.3)$$

în spaţiul Banach X. Aici $Lu = u_t - Au$ şi $A: D(A) \subset X \to X$ este generatorul infinitezimal al unui C_0-semigrup de contracţii. L este operatorul liniar pentru care $S = \mathrm{L}^{-1}$ şi F, G sunt operatori neliniari. Se caută soluţia slabă a problemei de punct fix $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ în spaţiul X^2, unde $u, v \in C([0,T];X) \times C([0,T];X)$, $N = (N_1, N_2)$ definit de

$$N_1 = S \circ F \text{ şi } N_2 = S \circ G.$$

Vom prezenta în continuare cazuri particulare ale teoremei de punct fix a lui Perov's şi principiul de contracţie a lui Schauder. Rezultatele din această secţiune reprezintă un caz particular al rezultatelor din R. Precup (see [68]).

Rezultatele proprii ale autorului sunt următoarele: Teorema 3.1.2, Teorema 3.1.3 ş Teorema 3.2.1.

Capitolul 4 si anume : **Teoreme de punct fix pentru ecuaţia neliniară Schrödinger** prezintă solvabilitatea problemei Cauchy-Dirichlet pentru ecuaţiile Schrödinger perturbate:

$$\begin{cases} u_t - i\Delta u = F(u) & pe\ \Omega \times (0,\mathrm{T}) \\ u(x,0) = 0 & pe\ \ \Omega \\ u = 0 & pe\ \partial\Omega \times (0,\mathrm{T}) \end{cases} \tag{0.0.4}$$

unde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ este un domeniu marginit şi F este un operator general nelinear care, în particular, poate fi un operator de superpoziţie, un operator de întârziere, sau un operator integral. Ecuaţii Schrödinger specifice se prezintă ca modele în cateva domenii din fizică. Problema studiată este una clasică (vezi [15], [36], [42], [41] şi [76]) iar scopul nostru aici este de a pune în valoare abordarea operatorială bazată pe rezultate abstracte din analiza funcţional neliniară. Mai precis vom demonstra proprietăţi de bază ca estimarile în normă şi compactitatea pentru operatorul soluţie (liniar) asociat ecuaţiei liniare Schrödinger neomogene, proprietăţi pe care le vom folosi la aplicarea teoremelor de punct fix Banach, Schauder şi Leray-Schauder. Acelaşi program a fost aplicat în discuţia perturbărilor neliniare din ecuaţia căldurii şi a undelor în [65] şi [66].

Teoremele 4.2.1, 4.3.1, 4.3.2, şi 4.3.3, sunt rezultatele originale ale autorului conţinute în Capitolul 4 al acestei lucrări de doctorat. Aceste teoreme sunt incluse in M.Manole and R.Precup [49].

Ultimul capitol şi anume **Sisteme de ecuaţii Schrödinger neliniare**, prezintă o generalizare a rezultatelor din capitolul patru la sisteme de ecuaţii Schrödinger neliniare. În prima parte vom prezenta ecuaţia Schrödinger pentru care vom aplica rezultatele:

$$\begin{cases} u_t - i\Delta u = f & pe\ \ Q = \Omega \times (0,\mathrm{T}) \\ u(x,0) = 0 & pe\ \ \Omega \\ u = 0 & pe\ \Sigma = \partial\Omega \times (0,\mathrm{T}) \end{cases} \tag{0.0.5}$$

Vom prezenta proprietăţile de bază (estimări în normă şi compactitate) ale operatorului soluţie (liniar) asociat ecuaţiei liniare neomogene Schrödinger obţinute în Capitolul 4 şi le vom folosi în scopul aplicării teoremelor de punct fix Perov, Schauder şi Leray-Schauder problemei echivalente cu sistemul:

$$\begin{cases} Lu = F(u,v) \\ Lv = G(u,v) \\ u(x,0) = 0, \;\; v(x,0) = 0 \end{cases} \tag{0.0.6}$$

în $H^{-1}(\Omega)$. Aici prin Lu se întelege $Lu = u_t - i\Delta u$ astfel încât $S = \mathrm{L}^{-1}$ şi F, G sunt operatori neliniari. Se caută soluţia slabă a problemei (0.0.6) echivalentă cu problema de punct fix $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = N\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ în spaţiul $C([0,T]; H^{-1}(\Omega)) \times \mathrm{C}([0,\mathrm{T}]; H^{-1}(\Omega))$, unde $u, v \in C\big([0,T]; L^2(\Omega)\big)$, $N = (N_1, N_2)$ este definit de

$$N_1 = S \circ F \text{ şi } N_2 = S \circ G.$$

Rezultate proprii ale autorului sunt regăsite în teoremele 5.1.1, 5.1.2, 5.1.3 şi sunt incluse în Manole [50].

În final doresc să aduc calde mulţumiri conducătorului meu ştiinţific, prof. univ. dr. Radu Precup, pentru îndrumarea atentă şi încurajarea permanentă de care m-am bucurat pe parcursul stagiului meu de doctorat.

Cluj-Napoca, Septembrie 2010 — Drd. Mihaela Manole

1 Preliminarii

Argumentele şi demonstraţiile din această teză de doctorat au la bază următoarele rezultate de bază din analiza neliniară.

1.1 ***Notaţii de bază şi rezultate***

1.1.1 **Operatori complet continui**

1.1.2 **Principii de punct fix**

În formularea rezultatelor de existenţă vom aplica următoarele teoreme (vezi Cazenave [14], Vrabie [82] şi Precup [66]) în capitolele 2, 3 şi 4. După ce vom demonstra existenţa şi compactitatea operatorului soluţie pentru ecuaţia căldurii, a undelor şi Schrödinger vom putea aplica următoarele rezultate ecuaţiilor de evoluţie. În capitolul 2 al acestei lucrări vom folosi rezultatele din Precup [66] şi [68]. Primul este principiul de contracţie a lui Banach.

Teorema 1.1.11 (Banach). *Fie (X,d) un spaţiu metric complet şi* $F: X \to X$ *. Dacă există o constantă* $L < 1$ *astfel încât* $d(F(x), F(y)) \leq Ld(x, y)$ *pentru orice* $x, y \in X$, *atunci F are un unic punct fix* $x_0 \in X$*; adică, există un singur* $x_0 \in X$ *astfel încât* $F(x_0) = x_0$.

Urmatoarele două teoreme sunt cunoscute ca teoreme de punct fix ale lui Schauder. În aplicaţii a doua variantă este mai utilă.

Teorema 1.1.12 (Schauder). *Fie K o multime nevidă, convexă şi mărginită într-un spaţiu Banach X şi fie* $T: K \to K$ *un operator continuu. Atunci T are cel puţin un punct fix în K, adică există cel puţin un* $u \in K$ *astfel încât* $T(u) = u$.

Teorema 1.1.13 (Schauder). *Fie D o mulţime nevidă, convexă, mărginită şi închisă în spaţiul Banach X şi fie* $T: D \to D$ *un operator complet continuu. Atunci T are cel puţin un punct fix în D.*

Urmatoarea teoremă este principiul de punct fix al lui Leray-Schauder. În aplicaţii, una dintre condiţiile din teorema de punct fix a lui Schauder este invarierea domeniului $T(D) \subset D$ care trebuie să fie îndeplinită pentru o submulţime mărginită, închisă şi convexă a lui *D* într-un spaţiu Banach. Principiul Leray-Schauder face posibilă evitarea acestei condiţii şi implică numai o condiţie de mărginire să fie indeplinită.

Teorema 1.1.14 (Leray–Schauder). *Fie X un spaţiu Banach, K o submulţime mărginită deschisă în* X *cu* $0 \in K$, *şi* $N : \overline{K} \to X$ *un operator complet continuu. Dacă* $u \neq \lambda N(u)$ *pentru toţi* $u \in \overline{K} \setminus K$ *şi* $\lambda \in (0,1)$, *atunci N are cel puţin un punct fix.*

În aplicaţii principiul Leray-Schauder este de obicei folosit împreună cu aşa numita tehnică de marginire '*a priori*':

Să presupunem ca avem de rezolvat urmatoarea ecuaţie operatorială:

$$N(u) = u,\ u \in K, \tag{1.1.1}$$

unde K este o submulţime închisă, convexă a spaţiului Banach $(X, \|\cdot\|_X)$, şi $N: K \to K$ este complet continuu. Atunci căutăm soluţii pentru familia de ecuaţii:

$$u = (1-\lambda)u_0 + \lambda N(u), \quad u \in K, \tag{1.1.2}$$

când $\lambda \in (0,1)$. Aici $u_0 \in K$ fixat (în cele mai multe cazuri $u_0 = 0$). Dacă această mulţime este mărginită, adică există $R > 0$ astfel încât

$$\|u - u_0\|_X < R$$

atât timp cât *u* este o soluţie pentru (1.1.2) pentru unele valori $\lambda \in (0,1)$, atunci fie U intersecţia submulţimii K cu bila deschisă $B(u_0, R)$ din *X*. În acest caz, Teorema 1.1.14 se aplică şi garantează existenţa soluţiei ecuaţiei (1.1.1).

Ultima teoremă de punct fix utilizată în lucrare este teorema lui Perov. Principiul de contracţie a lui Banach a fost generalizat în A.I.Perov şi A.V.Kibenko [64] pe spaţii înzestrate cu metrici vectoriale. Vom prezenta în primul rând câteva noţiuni de bază şi rezultate şi apoi vom enunţa teorema lui Perov.

Fie *X* o mulţime nevidă. Prin metrică vectorială pe *X* înţelegem o aplicaţie $d: X \times X \to \mathbb{R}^n$ cu următoarele proprietăţi:

i) $d(u,v) \geq 0$ pentru toţi $u, v \in X$; dacă $d(u,v) = 0$ atunci $u = v$.
ii) $d(u,v) = d(v,u)$ pentru toţi $u, v \in X$;
iii) $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$ pentru toţi $u, v, w \in X$.

O mulţime X înzestrată cu o metrică vectorială formează un spaţiu metric generalizat. Pentru spaţiile metrice generalizate noţiunile de şiruri convergente, completitudine, submulţimi deschise şi închise sunt similare ca cele pentru spaţiile metrice obişnuite.

Definiţia 1.1.15 Fie (X,d) un spaţiu metric generalizat. O aplicaţie $N: X \to X$ spunem că este o *contracţie* dacă există o matrice $M \in M_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ astfel încât

$$M^k \to 0 \text{ pentru } k \to \infty \tag{1.1.3}$$

şi

$$d(N(u), N(v)) \leq Md(u,v)$$

pentru orice $u, v \in X$. O matrice M care satisface condiţiile (1.1.3) spunem că este *convergentă la zero*.

Lema 1.1.16 *(vezi Precup* [68]*) Fie M o matrice patratică cu elemente nenegative. Urmatoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *M este o matrice convergentă la zero.*

(ii) *I-M este o matrice nesingulară şi*
$(I - M)^{-1} = I + M + M^2 + \cdots$.

(iii) $|\lambda| < 1$ *pentru orice* $\lambda \in \mathbb{C}$ *cu* $det(M - \lambda I) = 0$.

(iv) $I - M$ *este nesingulară şi* $(I - M)^{-1}$ *are elemente nenegative.*

Teorema 1.1.15 (Perov) *Fie (E,d) un spaţiu metric complet generalizat cu* $d: E \times E \to \mathbb{R}^n$*, şi fie* $N: E \to E$ *astfel încât*

$$d\big(N(u), N(v)\big) \leq Md(u,v) \tag{1.1.4}$$

pentru orice $u, v \in E$ *şi unele matrice pătratice M de numere nenegative. Dacă matricea M este convergentă la zero, adică* $M^k \to 0$ *pentru* $k \to \infty$ *atunci N are un singur punct fix u şi*

$$d(N^k(v), u) \leq M^k (I - M)^{-1} d(N(v), v) \tag{1.1.5}$$

pentru orice $v \in E$ *şi* $k \geq 1$.

1.2 *Spaţii Sobolev*

1.3 *Funcţii şi valori proprii ale problemei Dirichlet*

1.4 *Ecuaţia neomogenă a căldurii in $H^{-1}(\Omega)$*

Următoarele leme şi teoreme se vor folosi în Capitolul 2 în scopul justificării completei continuităţi a operatorului soluţie S pentru ecuaţia neomogenă a căldurii în $H^{-1}(\Omega)$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & pe\ Q = \Omega \times (0, \mathrm{T}) \\ u(x, 0) = g_0 & pe\ \ \Omega \\ u = 0 & pe\ \Sigma = \partial\Omega \times (0, \mathrm{T}) \end{cases} \tag{1.4.1}$$

În acest fel vom avea suportul teoretic pentru extinderea teoriei la sistemele semiliniare de operatori. Avem în vedere Precup [65] şi [66] pentru următoarele rezultate .

Teorema 1.4.1 (Lions) *Dacă $f \in L^2\big(0, T; H^{-1}(\Omega)\big)$ şi $g_0 \in L^2(\Omega)$, atunci există o funcţie unică*

$$u \in L^2\big(0, T; H_0^1(\Omega)\big) \cap C\big([0, T]; L^2(\Omega)\big)$$

astfel încât pentru orice $v \in H_0^1(\Omega)$ funcţia $(u(t), v)_{L^2}$ este absolut continuă pe $[0, T]$ şi

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(u(t), v)_{L^2} + (u(t), v)_{H_0^1} = (f(t), v)\ a.p.t.\ t \in [0, T] \\ \qquad\qquad\qquad u(0) = g_0. \end{cases}$$

Mai mult, pentru orice $t \in [0, T]$, avem

$$\frac{1}{2}|u(t)|_{L^2}^2 - \frac{1}{2}|g_0|_{L^2}^2 + \int_0^t |u(\tau)|_{H_0^1}^2 d\tau = \int_0^t \big(f(\tau), u(\tau)\big) d\tau.$$

Următoarea teoremă de estimare presupune pe de o parte, dependenţa continuă a funcţiilor f şi g_0 de soluţia u a problemei (1.4.1), şi, pe de altă parte garantează neexpansivitatea operatorului soluţie de la $L^2\big(0, T; H^{-1}(\Omega)\big)$ la $L^2\big(0, T; H_0^1(\Omega)\big)$ şi de la $L^2\big(0, T; H^{-1}(\Omega)\big)$ la $C\big([0, T]; L^2(\Omega)\big)$.

Teorema 1.4.2 *Fie $f \in L^2\big(0, T; H^{-1}(\Omega)\big)$ şi $g_0 \in L^2(\Omega)$. Dacă u este soluţia problemei* (1.4.1) *atunci pentru orice $t \in [0, T]$ avem*

$$|u|_{C\left([0,t]; L^2(\Omega)\right)} \leq \sqrt{2|g_0|^2 + |f|^2}$$

$$|u|_{L^2\left(0,t; H_0^1(\Omega)\right)} \leq \frac{1}{2}\left(|f| + \sqrt{|f|^2 + 2|g_0|^2}\right)$$

unde $|f| = |f|_{L^2\left(0,t; H^{-1}(\Omega)\right)}$ *şi* $|g_0| = |g_0|_{L^2(\Omega)}$.

În particular, pentru $g_0 = 0$ *si* $t \in [0,T]$, *avem următoarele inegalităţi :*

$$|u|_{C\left([0,t];L^2(\Omega)\right)} \leq |f|_{L^2\left(0,t;H^{-1}(\Omega)\right)}$$

$$|u|_{L^2\left(0,t;H_0^1(\Omega)\right)} \leq |f|_{L^2\left(0,t;H^{-1}(\Omega)\right)}.$$

Teorema 1.4.3 *Fie* $g_0 \in L^2(\Omega)$ *şi*

$$\Phi: C\left([0,T];L^2(\Omega)\right) \to L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$$

fie o aplicaţie pentru care există o constantă $a \in \mathbb{R}_+$ *astfel încât următoarele inegalităţi au loc pentru orice* $u, v \in L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$

$$|\Phi(u)(t) - \Phi(v)(t)|_{H^{-1}(\Omega)} \leq a|u(t) - v(t)|_{L^2(\Omega)}\ a.p.t.\,pe\ [0,T].$$

Atunci problema (2.0.1.) *admite soluţie unică* u, *adică o funcţie*

$$u \in L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right) \cap C\left([0,T];L^2(\Omega)\right)$$

cu proprietatea ca pentru orice $v \in H_0^1(\Omega)$ *funcţia* $(u(t),v)_{L^2}$ *este absolut continuă pe* $[0,T]$ *şi*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(u(t),v) + (u(t),v)_{H_0^1} = (\Phi(u)(t),v)\ a.p.t.\ t \in [0,T] \\ u(0) = g_{0.} \end{cases}$$

Teorema 1.4.4 *Operatorul soluţie S este complet continuu de la* $L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$ *la* $L^2\left(0,T;L^p(\Omega)\right)$ *pentru* $(2^*)' \leq p < 2^*$ *dacă* $n \geq 3$ *şi pentru orice* $p \geq 1$ *dacă* $n = 1$ *ori* $n = 2$.

1.5 *Ecuatia neomogena a undelor in* $\boldsymbol{H^{-1}(\Omega)}$.

Alt grup de teoreme şi leme vor fi folosite pentru a demonstra completa continuitate a operatorului soluţie S pentru ecuaţia undelor neomogenă. Facem referiri în cele ce urmează la Precup [66].

Teorema 1.5.1 (Lions-Mangenes) *Dacă* $f \in L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$, $g_0 \in L^2(\Omega)$ *şi* $g_1 \in H^{-1}(\Omega)$, *atunci există o funcţie unică u astfel încât*

$$u \in C\left([0,T];L^2(\Omega)\right) \cap C^1\left([0,T];H^{-1}(\Omega)\right)$$

$$u(0) = g_0,\ \ u'(0) = g_1$$

$$\int_0^T (u,h)_{L^2} dt = \int_0^T (f,v)dt + (g_1, v(0)) - \left(g_0, v'(0)\right)_{L^2}$$

Pentru orice funcţie $h \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, *unde* $v \in C([0,T];H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega))$ *este soluţia problemei*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \Delta v = h & pe\ Q \\ v(x,T) = \frac{\partial v}{\partial t}(x,T) = 0 & pe\ \Omega \\ v = 0 & pe\ \Sigma \end{cases} . \tag{1.5.1}$$

Definiţia 1.5.1 Prin soluţie (slabă sau generalizată) a problemei Cauchy-Dirichlet

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f & pe\ Q := \Omega \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g_0(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g_1(x) & pe\ \Omega \\ u = 0 & pe\ \Sigma := \partial\Omega \times (0,\infty) \end{cases} \tag{1.5.2}$$

unde $f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, $g_0 \in L^2(\Omega)$ *si* $g_1 \in H^{-1}(\Omega)$, se înţelege funcţia *u* definită în Teorema 1.5.1

Observaţia 1.5.2 *Dacă* $f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, $g_0 \in L^2(\Omega)$ *şi* $g_1 \in H^{-1}(\Omega)$, *atunci soluţia slabă a problemei* (1.5.2) satisface relaţiile:

$$u \in C([0,T];H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega))$$

$$|u(t)|_{H_0^1}^2 \leq 3\left(|g_0|_{H_0^1}^2 + |g_1|_{L^2}^2 + t\int_0^t |f(s)|_{H^{-1}}^2 ds\right)$$

$$|u'(t)|_{L^2}^2 \leq 3\left(|g_0|_{H_0^1}^2 + |g_1|_{L^2}^2 + t\int_0^t |f(s)|_{H^{-1}}^2 ds\right).$$

2 Teoreme de existenţă a sistemelor de ecuaţii semiliniare pentru ecuaţia căldurii şi a undelor

Scopul nostru principal în acest capitol este de a extinde metoda prezentată de Precup în [67] şi de a generaliza rezultatele la sisteme semiliniare de operatori pentru ecuaţiile căldurii şi a undelor. În prima parte a acestui capitol vom considera problema neliniară Cauchy-Dirichlet pentru sisteme de ecuaţii ale căldurii. Suportul teoretic este asigurat de rezultatele de existenţă şi unicitate obţinute de R.Precup (vezi [65]) iar noi vom stabili existenţa soluţiei slabe pentru un sistem de ecuaţii ale căldurii semiliniare. În continuare vom aplica teoria punctului fix pentru acest tip de sistem şi vom enunţa teoreme de existenţă de tipul principiilor lui Banach, Schauder şi Leray-Schauder. Abordarea folosită are la bază teoria operatorilor complet continui combinată cu metoda matricelor ce converg la zero. Acelaşi program va fi folosit pentru ecuaţia undelor neliniară pentru care, de asemeni vom stabili rezultate de existenţă de tipul principiilor de punct fix.

2.1 ***Sisteme semiliniare pentru ecuaţia căldurii***

Fie Ω o submulţime deschisă şi mărginită din $\mathbb{R}^N$, $0 < T < \infty$ şi considerăm problema Cauchy-Dirichlet pentru ecuaţia căldurii:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f \quad pe\ Q = \Omega \times (0, \mathrm{T}) \\ u(x,0) = 0 \ \ pe \ \ \Omega \\ u = 0 \qquad\qquad pe\ \Sigma = \partial\Omega \times (0, \mathrm{T}) \end{cases} \tag{2.0.1}$$

Conform teoremelor 1.3.1, 1.3.2 si 1.3.3 din R.Precup [67] putem asocia problemei (2.1.1) operatorul soluţie

$$S: L^2\big(0,T; H^{-1}(\Omega)\big) \to L^2\big(0,T; H_0^1(\Omega)\big) \cap C\big([0,T]; L^2(\Omega)\big),$$

definit de $Sf = u$ unde $u \in L^2\big(0,T; H_0^1(\Omega)\big) \cap C\big([0,T]; L^2(\Omega)\big)$ este soluţia slabă a problemei (2.1.1) .

Obiectul studiului nostru în prima parte a acestui capitol este existenţa soluţiei sistemului de ecuaţii neliniare pentru ecuaţia căldurii:

$$\begin{cases} Lu = F(u,v) \qquad pe\ Q \\ Lv = G(u,v) \qquad pe\ Q \\ u(x,0) = 0, \ \ v(x,0) = 0\ pe\ \Omega \\ u = v = 0 \end{cases} \tag{2.0.2}$$

Aici prin Lu înţelegem $Lu = u_t - \Delta u$ astfel încât $S = \mathrm{L}^{-1}$ şi F, G sunt operatori neliniari. Căutăm soluţia slabă a problemei (2.0.2) care este problema de punct fix $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = N\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ în spaţiul $C([0,T]; L^2(\Omega)) \times \mathrm{C}([0,\mathrm{T}]; L^2(\Omega))$, unde $N = (N_1, N_2)$ este definit prin

$$N_1 = S \circ F \text{ şi } N_2 = S \circ G.$$

2.1.1 Aplicaţie a teoremei de punct fix a lui Perov

Primul rezultat este o teoremă de existenţă, unicitate şi aproximare. În continuare prezentăm un rezultat util dezvoltărilor ulterioare.

Lema 2.1.1 *Fie matricea patratică cu elemente nenegative* $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$. *Atunci pentru un* $\theta > 0$ *suficient de mare matricea*

$$M := \begin{bmatrix} a_1/\sqrt{\theta} & b_1/\sqrt{\theta} \\ a_2/\sqrt{\theta} & b_2/\sqrt{\theta} \end{bmatrix}$$

este convergentă la zero.

Teorema 2.1.2 *Fie* $F, G: C([0,T]; L^2(\Omega)) \times C([0,T]; L^2(\Omega)) \to L^2(0,T; H^{-1}(\Omega))$ *operatori continui. Presupunem că*

$$|F(u_1,v_1)(t) - F(u_2,v_2)(t)|_{H^{-1}} \leq a_1|u_1(t) - u_2(t)|_{L^2} + b_1|v_1(t) - v_2(t)|_{L^2}$$

şi (2.1.1)

$$|G(u_1,v_1)(t) - G(u_2,v_2)(t)|_{H^{-1}} \leq a_2|u_1(t) - u_2(t)|_{L^2} + b_2|v_1(t) - v_2(t)|_{L^2}$$

pentru orice $(u_1,v_1),(u_2,v_2) \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \times C([0,T]; L^2(\Omega))$ *şi unele constante nenegative* a_1, a_2, b_1, b_2 .

Atunci (2.0.2) *are o soluţie unică* $(u,v) \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \times C([0,T]; L^2(\Omega))$.

2.1.2 Aplicaţie a teoremei de punct fix a lui Schauder

Următoarea teoremă de existenţă este un rezultat de tipul principiului de punct fix a lui Schauder, presupunând că nelinearităţile F şi G au o creştere cel mult liniară.

Teorema 2.1.3

Fie $F, G: L^2([0,T]; L^2(\Omega)) \times L^2([0,T]; L^2(\Omega)) \to L^2(0,T; H^{-1}(\Omega))$. *Presupunem că F şi G sunt continue şi satisfac condiţiile de creştere.*

$$|F(u_1,u_2)(t)|_{H^{-1}} \leq a_1|u_1(t)|_{L^2} + b_1|u_2(t)|_{L^2} + h_1 \tag{2.1.5}$$

şi

$$|G(u_1,u_2)(t)|_{H^{-1}} \leq a_2|u_1(t)|_{L^2} + b_2|u_2(t)|_{L^2} + h_2$$

pentru toţi $u = (u_1,u_2) \in C(0,T;L^2(\Omega)) \times C(0,T;L^2(\Omega))$, *unde* $a_i, b_i, h_i \in \mathbb{R}_+$. *Atunci* (2.0.2) *are cel puţin o soluţie* $u = (u_1,u_2)$, *adică funcţia*

$$u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap C([0,T];L^2(\Omega)) \times L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap C([0,T];L^2(\Omega)).$$

2.1.3 Aplicaţie a teoremei de punct fix Leray-Schauder

Următorul rezultat se bazează pe principiul Leray-Schauder. Se caută o soluţie slabă a sistemului (2.0.2).

Teorema 2.1.4

Fie $F, G: L^2([0,T];L^2(\Omega)) \times L^2([0,T];L^2(\Omega)) \to L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. *Presupunem că F şi G sunt continue şi admit descompunerile* $F = F_0(u,v) + f$ *şi* $G = G_0(u,v) + g$ *astfel încât să fie satisfacute următoarele condiţii pentru orice* $u, v \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ *,orice* $t \in [0,T]$ *, unele constante* $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}_+$ *astfel încât* $\lambda_1 > \left(a_1 + b_2 + \sqrt{(a_1 - b_2)^2 + 4a_2b_1}\right)/2$ *, şi* $f, g \in H^{-1}(\Omega)$*:*

$$\begin{aligned} &(F_0(u,v)(t), u(t)) \leq a_1|u(t)|_{L^2}^2 + b_1|v(t)|_{L^2}^2 \\ &(G_0(u,v)(t), v(t)) \leq a_2|u(t)|_{L^2}^2 + b_2|v(t)|_{L^2}^2 \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

atunci (2.0.2) *admite cel puţin o soluţie* $(u,v) \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \times L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$.

Exemplu 2.1.1 Fie $F_0, G_0: L^p(\Omega) \times L^p(\Omega) \to L^{(2^*)'}(\Omega)$ două aplicaţii continue care satisfac următoarele condiţii:

$$|F_0(u,v)|_{L^{(2^*)'}} \leq c_1|v|_{L^p}^{\frac{p}{(2^*)'}} \text{ si } |G_0(u,v)|_{L^{(2^*)'}} \leq c_2|v|_{L^p}^{\frac{p}{(2^*)'}}, \tag{2.1.11}$$

pentru orice $u, v \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$;

$$(F_0(u,v),u) \leq a_1|u|_{L^2}^2 + b_1|v|_{L^2}^2$$

şi (2.1.12)

$$(G_0(u,v),v) \leq a_2|u|_{L^2}^2 + b_2|v|_{L^2}^2$$

pentru orice $u, v \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$

pentru unele valori $\lambda_1 > \frac{\left(a_1+b_2+\sqrt{(a_1-b_2)^2+4a_2b_1}\right)}{2}$, $a_1, a_2, b_1, b_2 > 0, (2^*)' \leq p \leq 2^*$ dacă $n \geq 3$ şi $p \geq 1$ pentru $n = 2$ şi $n = 1$. Atunci funcţiile $F, G: L^2\big(0, T; L^p(\Omega)\big) \times L^2\big(0, T; L^p(\Omega)\big) \to L^2\big(0, T; H^{-1}(\Omega)\big)$ date de relaţia $F(u)(t) = F_0\big(u(t)\big)$ şi de $G(u)(t) = G_0\big(u(t)\big)$ satisfac toate condiţiile Teoremei 2.1.4.

Exemplu 2.1.2 Fie $f, g: \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcţii astfel încât $f(.,\tau), g(.,\tau)$ sunt măsurabile pentru orice $\tau \in \mathbb{R}$, $f(x,.), g(x,.)$ sunt continue pentru aproape toţi $x \in \Omega$ şi există $c_1, c_2, \alpha \in \mathbb{R}_+$, $1 \leq \alpha < 2^* - 1$ astfel încât

$$|f(x,\tau)| \leq c_1|\tau|^\alpha \text{ si } |g(x,\tau)| \leq c_2|\tau|^\alpha; \qquad (2.1.13)$$

$$\tau f(x,\tau) \leq 0 \text{ si } \tau g(x,\tau) \leq 0 \qquad (2.1.14)$$

pentru aproape toţi $x \in \Omega$ şi toţi $\tau \in \mathbb{R}$. Atunci operatorii de superpoziţie $F, G: L^p(\Omega) \times L^p(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ daţi de $F(u,v) = f\big(.,v(.)\big)$, şi $G(u,v) = g\big(.,v(.)\big)$, cu $p = \alpha(2^*)'$, satisfac condiţiile din exemplul precedent.

Exemplul 2.1.3 Funcţiile $f(x,\tau) = -|\tau|^{\alpha-1}\tau$ si $g(x,\tau) = -|\tau|^{\beta-1}\tau$ ($\tau \in \mathbb{R}$,), unde $1 \leq \alpha, \beta < 2^* - 1$, satisfac toate condiţiile din Exemplul 2.1.2.

2.2 ***Sisteme de ecuaţii neliniare pentru ecuaţia undelor***

Ne vom ocupa în continuare de găsirea soluţiei slabe pentru un alt sistem de evoluţie.

Fie Ω o submulţime deschisă şi mărginită a lui $\mathbb{R}^N$, $0 < T < \infty$ şi considerăm problema Cauchy-Dirichlet la limită:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f \quad pe\ Q = \Omega \times (0,\mathrm{T}) \\ u(x,0) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \quad pe\ \Omega \\ u = 0 \qquad\qquad pe\ \Sigma = \partial\Omega \times (0,\mathrm{T}) \end{cases} \qquad (2.2.1)$$

Conform Teoremei 1.4.1 şi Observaţiei 1.4.2 putem asocia problemei (2.2.1) operatorii soluţie

$S_0: L^2\big(0,T; H^{-1}(\Omega)\big) \to C\big([0,T]; H_0^1(\Omega)\big) \cap C^1\big([0,T]; L^2(\Omega)\big)$,

$S: L^2\big(0,T; H^{-1}(\Omega)\big) \to C\big([0,T]; H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)\big)$,

definiţi de $S_0 f = u, Sf = [u, u']$, unde u este soluţia problemei (2.2.1).

În această secţiune vom urmări existenţa soluţiei pentru un sistem de ecuaţii semiliniare pentru ecuaţia undelor:

$$
\begin{cases}
Lu = F(u,v) pe\ Q \\
Lv = G(u,v) pe\ Q \\
u(x,0) = 0,\ \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0\ pe\ \Omega \\
v(x,0) = 0,\ \frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = 0\ pe\ \Omega \\
\mathrm{w}_1 = \mathrm{w}_2 = 0 \text{ pe } \Sigma
\end{cases}
\tag{2.2.2}
$$

Aici $Lw = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \Delta w$. Vom face câteva notaţii pentru urmatoarele spaţii: $E_0 = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ şi $E = L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ înzestrate cu normele:

$$|w|_{E_0} = \left(|u|_{H_0^1}^2 + |v|_{L^2}^2\right)^{1/2}$$

$$|w|_E = \left(|u|_{L^2}^2 + |v|_{H^{-1}}^2\right)^{1/2}$$

pentru orice $w = [u,v]$.

2.2.1 **Aplicaţie a teoremei de punct fix a lui Perov**

Teorema 2.2.1 *Fie* $F, G: C([0,T];E)^2 \to L^2\big(0,T;H^{-1}(\Omega)\big)$ *operatori continui. Presupunem că există* $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}_+$ *astfel încât dacă* $w_1 = [u_1,u_2], w_2 = [v_1,v_2]$ *atunci*

$$|F(w_1)(t) - F(w_2)(t)|_{H^{-1}} \le a_1|u_1(t) - u_2(t)|_{E_0} + b_1|v_1(t) - v_2(t)|_{E_0}$$

şi (2.2.3)

$$|G(w_1)(t) - G(w_2)(t)|_{H^{-1}} \le a_2|u_1(t) - u_2(t)|_{E_0} + b_2|v_1(t) - v_2(t)|_{E_0}$$

pentru orice $w_1 = [u_1,u_2]$, $w_2 = [v_1,v_2] \in C([0,T];E)$. *Atunci sistemul* (2.2.2) *are o soluţie unică* $w = (w_1,w_2)$, *cu* $w_1, w_2 \in C\big([0,T];H_0^1(\Omega)\big) \cap C^1\big([0,T];L^2(\Omega)\big)$.

Următoarea teoremă reprezintă un rezultat de existenţă bazat pe principiul de punct fix a lui Schauder, presupunând că aplicaţiile neliniare F şi G au o creştere cel mult liniară.

2.2.2 **Aplicaţie a teoremei de punct fix a lui Schauder**

Următoarea teoremă este un rezultat de existenţă pentru problema (2.2.2) derivat din principiul de punct fix a lui Schauder, cu presupunerea că aplicaţiile neliniare F şi G au o creştere aproape liniară.

Teorema 2.2.2 *Fie* $F, G: C([0,T]; L^2(\Omega) \times E)^2 \to L^2\big(0,T; H^{-1}(\Omega)\big)$. *Presupunem că F şi G sunt continui şi satisfac condiţiile de creştere:*

$$|F(u_1,u_2)(t)|_{H^{-1}} \leq a_1|u_1(t)|_{E_0} + b_1|u_2(t)|_{E_0} + h_1 \tag{2.2.6}$$

şi

$$|G(u_1,u_2)(t)|_{H^{-1}} \leq a_2|u_1(t)|_{E_0} + b_2|u_2(t)|_{E_0} + h_2$$

pentru toţi $u \in C([0,T]; E), u = (u_1,u_2)$, *unde* $a_i, b_i, h_i \in \mathbb{R}_+$. *Atunci problema* (2.2.2) *are cel puţin o soluţie* $u = (u_1,u_2), u_1, u_2 \in C\big([0,T]; H_0^1(\Omega)\big) \cap C^1\big([0,T]; L^2(\Omega)\big)$.

3 Teoreme de existenţă pentru ecuaţii de evoluţie semiliniare, generalizate şi sisteme

Începând cu un rezultat de existenţă şi unicitate pentru o ecuaţie de evoluţie neomogenă generalizată cu termenul sursă într-un spaţiu Banach, X, prezentăm în continuare teoreme de existenţă pentru sisteme de evoluţie semiliniare via teoremele de punct fix Perov şi Schauder . În prima parte a acestui capitol vom considera problema neomogenă $\begin{cases} u' = Au + f \\ u(0) = 0 \end{cases}$ căreia îi putem asocia operatorul soluţie $S: L^1(0,T;X) \to C([0,T];X) \subset L^p(0,T;X)$, conform rezultatelor din Vrabie ([82], pp.142). Pornind de la aceleaşi rezultate vom demonstra că avem completa continuitate a operatorului soluţie necesară aplicării teoremei de punct fix a lui Schauder, atât pentru ecuaţia semiliniară operatorială cât şi pentru sistemul de operatori.

În acest capitol vom studia existenţa soluţiilor pentru următorul sistem de ecuaţii semiliniare

$$\begin{cases} u' - Au = F(u,v) \\ v' - Av = G(u,v) \\ u(0) = 0, \;\; v(0) = 0 \end{cases} \tag{3.0.1}$$

într-un spaţiu Banach X.

Scopul studiului din acest capitol este de a aplica aceleaşi metode folosite în capitolul 2, acum pentru sisteme de ecuaţii de evoluţie generalizate. Aceasta presupune folosirea operatorului $Lu = u' - Au$, unde operatorul A este generatorul infinitezimal al unui C_0-semigrup. L este un operator liniar astfel încât $S = \mathrm{L}^{-1}$ şi F, G sunt operatori neliniari. Căutăm soluţia slabă a problemei de punct fix $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = N\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ în spaţiul $C([0,T],X)^2$, unde $u, v \in C([0,T];X) \times C([0,T];X)$, $N = (N_1, N_2)$ definit prin

$$N_1 = S \circ F \text{ şi } N_2 = S \circ G.$$

Interesul deosebit arătat problemei (3.0.1) se datorează faptului ca acest sistem poate fi privit ca un model abstract pentru sisteme particulare care descriu procese specifice precum sistemele mecanice sau dinamice.

În prima secţiune vom prezenta teoreme de existenţă pentru sistemul semiliniar de operatori

$$\begin{cases} u' = Au + F(u) \\ u(0) = 0 \end{cases} \tag{3.0.2}$$

unde $A: D(A) \subseteq X \to X$ este generatorul infinitezimal al C_0-semigrupului $\{\mathcal{T}(t); t \geq 0\}$.

X este un spaţiu Banach şi vom defini urmatoarele spaţii Banach:

$\mathcal{L}(X) = \{\mathcal{T}(t);\ \mathcal{T}: X \to X$ liniar şi continuu$\}$ înzestrat cu norma operatorială:

$$\|\mathcal{T}\|_{\mathcal{O}} = \sup_{\|x\|\leq 1} \|\mathcal{T}x\|$$

pentru orice $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(X)$ si $C([0,T];X)$ spaţiul funcţiilor continue înzestrat cu norma:

$$\|f\|_{\infty} = sup\{\|f(t)\|; t \in [0,T]\}.$$

F este un operator continuu definit prin:

$$F: C([0,T];X) \subset L^p(0,T;X) \to L^1(0,T;X)$$

Analiza sistemului (3.0.1) va fi una pentru valori vectoriale şi vom folosi matrice în loc de constante, aşa cum a fost iniţiată de către A.I. Perov şi A.V. Kibenko [64] pentru versiunea vectorială a principiului de contracţie şi a fost extinsă recent în R.Precup [68] la alte problematici din analiza neliniară. Mai mult, această teorie poate fi uşor extinsă la sisteme de n ecuaţii operatoratoriale cu $n \geq 2$, şi conţine, ca un caz particular teoria din secţiunile 3.1.2 şi 3.1.3 pentru o singură ecuaţie.

3.1 *Ecuaţii de evoluţie semiliniare*

Este bine cunoscut (vezi Vrabie [82], pp.142) faptul că putem asocia problemei neomogene

$$\begin{cases} u' = Au + f \\ u(0) = 0 \end{cases} \tag{3.1.1}$$

operatorul soluţie

$$S: L^1(0,T;X) \to C([0,T];X) \subset L^p(0,T;X)$$

dat de $Sf = u$ unde $u: [0,T] \to X$ este definit de aşa numita formulă a *variaţiei constantelor*:

$$u(t) = \int_0^t \mathcal{T}(t-s)f(s)ds \quad \text{pentru fiecare } t \in [0,T] \tag{3.1.2}$$

este o C_0-soluţie a problemei (3.1.1).

3.1.1 **Operatorul soluţie**

Urmatoarele leme se vor folosi în scopul aplicării teoremei de punct fix a lui Schauder, mai exact pentru a demonstra completa continuitate a operatorului soluţie S.

Lema 3.1.1 *Fie* $f \in L^1(0,T;X)$ *şi* $S: L^1(0,T;X) \to C([0,T];X) \subset L^p(0,T;X)$ *operatorul soluţie a problemei* (3.1.1). *Atunci operatorul soluţie S este neexpansiv de la* $L^1(0,T;X)$ *la* $C([0,T];X)$. *În particular* S *aplică mulţimile mărginite din* $L^1(0,T;X)$ *în mulţimi mărginite din* $([0,T];X)$.

Lema 3.1.2 (Vrabie [82] pp.143) *Fie* $A: D(A) \subseteq X \to X$ *generatorul infinetizimal al unui* C_0-*semigrup de contracţii* $\{\mathcal{T}(t); t \geq 0\}$, *şi fie* $\mathcal{F}$ *o submulţime uniform integrabilă din* $L^1(0,T;X)$. *Atunci* $S\mathcal{F}$ *este relativ compactă în* $C([0,T];X)$ *există o submulţime densă* D *în* $[0,T]$ *astfel încât, pentru orice* $t \in D$, *secţiunea familiei* $S\mathcal{F}$ *în t*, $(S\mathcal{F})(t) = \{(Sf)(t); f \in \mathcal{F}\}$ *este relativ compactă în X.*

Lema 3.1.3 (Vrabie [82] p.147) *Fie* $A: D(A) \subseteq X \to X$ *generatorul infinitezimal* C_0-*semigrup de contracţii* $\{\mathcal{T}(t); t \geq 0\}$, *şi fie* $\mathcal{F}$ *o submulţime mărginită din* $L^1(0,T;X)$. *Atunci* $S\mathcal{F}$ *este relativ compactă în* $L^p(0,T;X)$ *pentru orice* $p \in [1,+\infty)$ *dacă şi numai dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există o submulţime relativ compactă* C_ε *în X astfel încât pentru orice* $f \in \mathcal{F}$, *există o submulţime* $E_{\varepsilon,f}$ *în* $[0,T]$ *a cărei măsură Lebesgue este mai mică decât ε şi astfel încât* $(S\mathcal{F})(t) \in C_\varepsilon$ *f pentru orice* $f \in \mathcal{F}$ *şi* $t \in [0,T] \backslash E_{\varepsilon,f}$.

Lema 3.1.4 (Gutman) *O famile uniform integrabilă* $\mathcal{F}$ *din* $L^p(0,T;X)$ *este relativ compactă dacă şi numai dacă:*

(i) $\mathcal{F}$ *este p-echiintegrabilă;*

(ii) *pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există o mulţime compactă* C_ε *în X astfel încât, petru orice* $f \in \mathcal{F}$ *există o submulţime măsurabilă* $E_{\varepsilon,f}$ *din* $[0,T]$ *a cărei măsură Lebesgue este mai mică ca ε şi astfel încât* $(S\mathcal{F})(t) \in C_\varepsilon$ *pentru orice*$f \in \mathcal{F}$ *şi* $t \in [0,T] \backslash E_{\varepsilon,f}$.

Lema 3.1.5 (Baras-Hassan-Veron) *Fie* $A: D(A) \subseteq X \to X$, *(X este un spaţiu Banach) generatorul infinitezimal al unui* C_0-*semigrup de contracţii compact. Atunci pentru orice submulţime* $\mathcal{F}$ *mărginită din* $L^1(0,T;X)$ *şi pentru orice* $p \in [1,+\infty)$, *mulţimea*

$$S\mathcal{F} \coloneqq \{Sf; f \in \mathcal{F}\},$$

este relativ compactă în $L^p(0,T;X)$.

Teorema 3.1.1 *Operatorul soluţie S este complet continuu de la* $L^1(0,T;X)$ *la* $L^p(0,T;X)$ *pentru orice* $p \in [1,\infty)$.

3.1.2 **Aplicaţie a principiului de contracţie a lui Banach**

Vom aplica teorema de punct fix a lui Banach în scopul obţinerii existenţei soluţiei problemei (3.1.1).

Teorema 3.1.2 *Fie* $F: C([0,T];X) \subset L^p(0,T;X) \to L^1(0,T;X)$ *o funcţie continuă pentru care există o constantă* $a \in \mathbb{R}_+$ *astfel încât să fie verificate urmatoarele inegalităţi*

$$|F(u)(t) - F(v)(t)|_X \le a|u(t) - v(t)|_X \tag{3.1.5}$$

pentru toţi $u, v \in C([0,T];X)$ *şi orice* $t \in [0,T]$. *Atunci există cel puţin o soluţie a problemei* (3.1.1).

3.1.3 **Aplicaţie a teoremei de punct fix a lui Schauder**

Următorul rezultat de existenţă provine din teorema de punct fix a lui Schauder. Condiţia Lipschitz pentru funcţia neliniară *F* din Teorema 3.1.2 este slăbită până la o condiţie de creştere cel mult liniară.

Teorema 3.1.3 *Fie* $F: L^p(0,T;X) \to L^1(0,T;X)$ *o aplicaţie continuă pentru care există constantele* $a, b \in \mathbb{R}_+$ *astfel încât următoarea inegalitate are loc*

$$|F(u)(t)|_X \le a|u(t)|_X + b$$

oricare ar fi $u \in C([0,T];X)$ *şi a.p.t.* $t \in [0,T]$.

Atunci există cel puţin o soluţie a problemei (3.1.1).

Exemplu 3.1.1 Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domeniu mărginit, $n \ge 1$, şi fie $f: \mathbb{R}_+ \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $p \in [1, +\infty]$ astfel încât

(a) $f(.,.,\tau)$ este măsurabilă pentru orice $\tau \in \mathbb{R}$,

(b) continuă a.p.t. $x \in \Omega$, şi

(c) pentru fiecare $T > 0$ există constantele $a_T > 0$ şi $b_T \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$|f(t,x,\tau)| \le a_T|\tau|^p + b_T$$

pentru a.p.t. $x \in \Omega$ şi orice $\tau \in \mathbb{R}$.

Atunci operatorul $F: L^p(0,\mathrm{T};\mathrm{X}) \to L^1(0,\mathrm{T};\mathrm{X})$ definit prin

$$F(u)(x) \coloneqq f(t,x,u(x))$$

satisface toate condiţiile Teoremei 3.1.3.

3.2 *Sisteme de ecuaţii de evoluţie semiliniare*

Studiul acestei secţiuni este centrat pe existenţa soluţiei pentru următorul sistem de ecuaţii de evoluţie semiliniare:

$$\begin{cases} Lu = F(u,v) \\ Lv = G(u,v) \\ u(0) = 0, \;\; v(0) = 0 \end{cases} \tag{3.2.1}$$

într-un spaţiu Banach X. Aici $Lu = u' - Au$ este un operator liniar astfel încât $S = L^{-1}$, F, G sunt operatori neliniari şi A este generatorul infinitezimal al unui C_0-semigrup de contracţii $\{\mathcal{T}(t); t \geq 0\}$. Se caută soluţia slabă a problemei de punct fix $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = N\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ în spaţiul X^2, unde $u, v \in C([0,T];X) \times C([0,T];X)$, $N = (N_1, N_2)$ definit prin

$$N_1 = S \circ F \text{ şi } N_2 = S \circ G.$$

Primul rezultat este o teoremă de existenţă, unicitate şi aproximare.

3.2.1 **Aplicaţie a teoremei de punct fix a lui Perov**

Teorema 3.2.1 *Fie* $F, G: C([0,T];X)^2 \to L^1(0,T;X)$. *Presupunem că*

$$\|F(u_1,v_1) - F(u_2,v_2)\| \leq a_1\|u_1 - u_2\| + b_1\|v_1 - v_2\|$$

şi (3.2.2)

$$\|G(u_1,v_1) - G(u_2,v_2)\| \leq a_2\|u_1 - u_2\| + b_2\|v_1 - v_2\|$$

pentru orice $u, v \in C([0,T];X) \times C([0,T];X)$, $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$ *şi* a_1, a_2, b_1, b_2 *sunt constante nenegative* .

Atunci problema (3.2.1) *are o soluţie unică* $u = (u_1, u_2) \in C([0,T];X) \times C([0,T];X)$.

3.2.2 **Aplicaţie a teoremei de punct fix a lui Schauder**

Următoarea teoremă este un rezultat de existenţă derivat din principiul de punct fix a lui Schauder, cu presupunerea că aplicaţiile neliniare F şi G au o creştere cel mult liniară.

Teorema 3.2.2 *Fie* $F, G: L^p(0,T;X)^2 \to L^1(0,T;X)$. *Presupunem că F şi G sunt continue şi satisfac condiţiile de creştere:*

$$|F(u_1,u_2)(t)|_X \leq a_1|u_1(t)|_X + b_1|u_2(t)|_X + h_1(t)$$

şi (3.2.4)

$$|G(u_1,u_2)(t)|_X \le a_2|u_1(t)|_X + b_2|u_2(t)|_X + h_2(t)$$

pentru toţi $u = (u_1,u_2) \in C([0,T];X) \times C([0,T];X)$, *unde* $a_i, b_i, h_i \in \mathbb{R}_+$. *Atunci problema* (3.2.1) *are cel puţin o soluţie* $u = (u_1,u_2) \in C([0,T];X) \times C([0,T];X)$.

3.2.3 **Exemple**

Exemplu 3.2.1 Fie $F, G: L^p(0,T;X)^2 \to L^1(0,T;X)$ două aplicaţii continue pentru care există constantele $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}_+$ astfel încât

$$|F(u_1,u_2)(t)|_X \le a_1|u_1(t)|_X + b_1|u_2(t)|_X + h_1(t)$$

şi

$$|G(u_1,u_2)(t)|_X \le a_2|u_1(t)|_X + b_2|u_2(t)|_X + h_2(t).$$

Atunci aplicaţiile $F_1, G_1: F: L^p(0,T;X)^2 \to L^1(0,T;X)$ definite de

$F_1(u)(t) = F(u(t))$ şi $G_1(u)(t) = G(u(t))$, $\big((u_1,u_2), \in C([0,T];X) \times C([0,T];X)\big)$

satisfac toate condiţiile Teoremei 3.2.2.

Exemplu 3.2.2 Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domeniu mărginit, $n \ge 1$, şi considerăm funcţiile $f, g: \mathbb{R}_+ \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $p \in [1, +\infty]$ astfel încât $f(t,\cdot,\tau)$ şi $g(t,x,\cdot)$ sunt măsurabile pentru orice $\tau \in \mathbb{R}$, continue a.p.t. $x \in \Omega$, $f(t,.,\tau), g(t,\cdot,0) \in L^1(0,\mathrm{T};\mathrm{X})$ şi există constantele $a_0, \mathrm{b}_0 \in \mathbb{R}_+$ cu

$$|f(t,x,\tau) - f(t,x,0)| \le a_0|\tau|$$

$$|g(t,x,\tau) - g(t,x,0)| \le b_0|\tau|$$

a.p.t. $x \in \Omega$ şi pentru toţi $\tau \in \mathbb{R}$. Atunci operatorii $F, G: L^p(0,\mathrm{T};\mathrm{X}) \to L^1(0,\mathrm{T};\mathrm{X})$ definiţi prin

$F(u,v) \coloneqq f(t,\cdot,u(\cdot))$ şi $G(u,v) \coloneqq g(t,\cdot,u(\cdot))$

satisfac toate condiţiile din exemplul precedent.

4 Ecuaţii Schrödinger neliniare via principii de punct fix

Considerând pentru început un rezultat de existenţă şi unicitate pentru ecuaţia Schrödinger neomogenă cu termenul sursă în $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$, prezentăm rezultate de existenţă pentru ecuaţia Schrödinger neliniară perturbată via teoremele de punct fix Banach, Schauder şi Leray-Schauder. În prima parte a acestui capitol vom considera problema Cauchy-Dirichlet pentru ecuaţia lui Schrödinger. Cadrul teoretic al acestui capitol are la bază teoria spaţiului Sobolev $H^{-1}(\Omega)$ iar noi vom demonstra existenţa soluţiei slabe pe baza unui rezultat de existenţă şi unicitate datorat lui J.L.Lions [42]. Vom include o demonstraţie adaptată după Temam [76] şi Precup [66] pentru completitudine. În continuare vom asocia problemei Cauchy-Dirichlet operatorul soluţie $S: L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \to L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap \mathrm{C}([0,\mathrm{T}];\mathrm{H}^{-1}(\Omega))$. Vom studia completa continuitate a acestui operator pe spaţiul $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ în scopul obţinerii unui rezultat referitor la problema superliniară. Acesta va fi stabilit folosind teorema de punct fix a lui Leray-Schauder. (vezi Precup [66]).

4.1 *Ecutii Schrödinger liniare*

4.1.1 Introducere

Acest capitol tratează solvabilitatea slabă a problemei Cauchy-Dirichlet pentru următoarea ecuaţie Schrödinger perturbată:

$$\begin{cases} u_t - i\Delta u = F(u) & pe\ \Omega \times (0,\mathrm{T}) \\ u(x,0) = 0 & pe\ \ \Omega \\ u = 0 & pe\ \partial\Omega \times (0,\mathrm{T}) \end{cases} \tag{4.1.1}$$

Aici $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ este un domeniu mărginit şi F este un operator neliniar general care, în particular, poate fi un operator de superpoziţie, un operator de întârziere, sau un operator integral. Ecuaţii Schrödinger specifice apar ca model în unele domenii ale fizicii. Preblema pusă este una clasică (vezi [15], [36], [42], [41] şi [76]) iar scopul autorului este de face precizări asupra abordării ei operatoriale pe baza rezultatelor abstracte din analiza funcţională neliniară. Mai exact, vom demonstra proprietăţi de bază, precum estimări în normă şi compactitate, pentru operatorul soluţie (liniar) asociat ecuaţiei Schrödinger liniare, neomogene şi vom folosi aceste proprietăţi în scopul aplicării teoremelor Banach, Schauder şi Leray-Schauder problemei de punct fix echivalentă cu problema (4.1.1). Acelaşi program a fost aplicat şi în discuţia ecuaţiilor căldurii şi a undelor neliniare în [65] şi [66].

În comparaţie cu [65] şi [66], aici spaţiile pe care lucrăm sunt spaţii de funcţii cu valori complexe. Astfel $L^2(\Omega)$ aste spaţiul tutur funcţiilor u măsurabile cu valori complexe cu $\int_\Omega |u(x)|^2 dx < \infty$ înzestrat cu produsul scalar şi norma:

$$(u,v)_{L^2} = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}dx, \quad |u|_{L^2} = \left(\int_\Omega |u(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

De asemeni, spaţiul Sobolev de funcţii complexe $H_0^1(\Omega)$ este înzestrat cu produsul scalar şi norma

$$(u,v)_{H_0^1} = \int_\Omega \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_k}\right)dx, \quad |u|_{H_0^1} = (u,u)_{H_0^1}^{\frac{1}{2}}.$$

De obicei prin $H^{-1}(\Omega)$ se întelege spaţiul dual al spaţiului $H_0^1(\Omega)$, care este spaţiul tuturor funcţionalelor liniare, continue cu valori pe $H_0^1(\Omega)$. Dualitatea dintre $H_0^1(\Omega)$ şi $H^{-1}(\Omega)$ este definită in felul următor: pentru $f \in H^{-1}(\Omega)$ şi $u \in H_0^1(\Omega)$, (f,u) reprezintă valuarea lui f în $\bar{u}$; în particular, dacă $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, atunci $(f,u) = \int_\Omega f\bar{u}dx$, şi dacă $f \in L^2(\Omega)$, atunci $(f,u) = (f,v)_{L^2}$. Reamintim că $-\Delta$ este o izometrie între spaţiile $H_0^1(\Omega)$ şi $H^{-1}(\Omega)$.

Pe parcursul acestui capitol prin λ_k şi ϕ_k $(k = 1,2,\ldots)$ vom înţelege valorile şi funcţiile proprii ale operatorului $-\Delta$. Astfel

$$\begin{cases} -\Delta\phi_k = \lambda_k\phi_k & \text{pe } \Omega \\ \phi_k = 0 & \text{pe } \partial\Omega \end{cases}$$

De asemenea, presupunem că $|\phi_k|_{L^2} = 1$. Atunci sistemul $(\phi_k)_{k\geq 1}, \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\phi_k\right)_{k\geq 1}$ este ortonormat şi complet în $L^2(\Omega)$ şi, respectiv în $H_0^1(\Omega)$. În plus, amintim inegalitatea lui Poincaré:

$$|u|_{L^2} \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}|u|_{H_0^1}, \ u \in H_0^1(\Omega). \tag{4.1.2}$$

4.1.2 Ecuaţia neomogenă Schrödinger în $H^{-1}(\Omega)$

Vom avea nevoie în demonstraţii de urmatoarea lemă, o versiune pentru funcţii cu valori complexe a rezultatului din [65], care este o transpunere a relaţiei lui Parseval pe $H^{-1}(\Omega)$ şi a proprietăţii de completitudine a funcţiilor proprii ϕ_k.

Lema 4.1.1 (i) *Pentru orice* $u \in H^{-1}(\Omega)$, *avem*

$$u = \sum_{k=1}^{\infty}(u,\phi_k)\,\phi_k \quad (\text{în } H^{-1}(\Omega)) \tag{4.1.3}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}|(u,\phi_k)|^2 = |u|_{H^{-1}}^2 \tag{4.1.4}$$

(ii) *Dacă* $u \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, *atunci*

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} (u, \phi_k)\, \phi_k \quad (\hat{\imath}n\ \ L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))).$$

Considerăm acum problema Cauchy-Dirichlet pentru ecuaţia Schrödinger neomogenă:

$$\begin{cases} u_t - i\Delta u = f & pe\ \ \Omega \times (0, \mathrm{T}) \\ u(x, 0) = g_0(x) & pe\ \ \Omega \\ u = 0 & pe\ \partial\Omega \times (0, \mathrm{T}) \end{cases} \tag{4.1.5}$$

Avem următorul rezultat de existenţă şi unicitate. Demonstraţia foloseşte argumente provenite din lucrările [41], [76] şi [66].

Teorema 4.1.1 *Dacă* $f \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ *şi* $g_0 \in L^2(\Omega)$, *atunci există o funcţie unică* u *astfel încât*

$$u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega)),\ \ u' \in L^2\big(0, T; H^{-1}(\Omega)\big) \tag{4.1.6}$$

$$\text{şi} \quad \begin{cases} (u'(t), v) \quad + i(u(t), v)_{H_0^1} = (f(t), v)\ a.e.\ on\ [0, T], for\ all\ v \in H_0^1(\Omega), \\ u(0) = g_0 \end{cases} \tag{4.1.7}$$

Prin *soluţie* (unică sau generalizată) a problemei Cauchy-Dirichlet (4.1.5), când $f \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)$ şi $g_0 \in L^2(\Omega)$, înţelegem funcţia u care satisface (4.1.6) şi (4.1.7). Aplicaţia

$$S: L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \to L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap \mathrm{C}([0, \mathrm{T}]; L^2(\Omega))$$

dată de $Sf = u$, unde u este soluţia unică a problemei (4.1.5) pentru $g_0 = 0$, este numită operatorul soluţie a problemei Cauchy-Dirichlet pentru ecuaţia Schrödinger.

4.2 *Operatorul soluţie Schrödinger*

4.3 *Estimări în normă*

Urmatoarea teoremă de estimare garantează neexpansivitatea şi proprietatea Lipschitz a operatorului soluţie S de la $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ la $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ şi, respectiv, $\mathrm{C}([0, \mathrm{T}]; L^2(\Omega)$.

Teorema 4.2.1 *Fie* $f \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$. *Atunci pentru orice* $t \in [0, T]$ *avem*

$$|Sf|_{L^2(0,t;H_0^1(\Omega))} \le |f|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \tag{4.2.1}$$

şi

$$|Sf|_{C([0,t];L^2(\Omega))} \le \sqrt{2}|f|_{L^2(0,t;H^{-1}(\Omega))} \tag{4.2.2}$$

4.3.1 Compactitatea

Această secţiune tratează completa continuitate a operatorului soluţie S. Vom folosi de asemeni următorul rezultat (vezi [65, p 255] şi [82, p 307]):

Lema 4.2.1 *Fie X, B şi Y spaţii Banach astfel încât au loc scufundările* $X \subset B$ *compactă şi* $B \subset Y$ *continuă. Dacă mulţimea F este mărginită în* $L^p(0,T;X)$ *şi relativ compactă în* $L^p(0,T;Y)$*, unde* $1 \le p \le \infty$*, atunci F este relativ compactă în* $L^p(0,T;B)$ **.**

Teorema 4.2.2 *Operatorul soluţie S este complet continuu de la* $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ *la* $L^2(0,T;L^p(\Omega))$ *pentru* $(2^*)' = \frac{2n}{n+2} \le p \le 2^* = \frac{2n}{n-2}$ *dacă* $n \ge 3$ *si pentru orice* $p \ge 1$ *dacă n=1 sau n=2.*

4.4 ***Rezultate de existenţă pentru ecuaţia Schrödinger neliniară***

4.4.1 Aplicaţie a teoremei de punct fix a lui Banach

Primul rezultat de existenţă şi unicitate pentru problema semiliniară (4.1.1) este stabilit în sensul teoremei de punct fix a lui Banach.

Teorema 4.3.1 *Fie* $g_0 \in L^2(\Omega)$ *si* $F: C([0,T];L^2(\Omega)) \to L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ *o aplicaţie pentru care există constantă* $a \in \mathbb{R}_+$ *astfel încât urmatoarea inegalitate are loc oricare ar fi* $u, v \in C\big([0,T];\, L^2(\Omega)\big)$*:*

$$|F(u)(t) - F(v)(t)|_{H^{-1}} \le a|u(t) - v(t)|_{L^2}\ a.p.t.\,pe\ \ [0,T]. \tag{4.3.1}$$

Atunci există o soluţie unică u a problemei (4.1.1)*, adică o funcţie,*

$$u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap C\big([0,T];L^2(\Omega)\big)\,, \quad u' \in L^2\big(0,T;H^{-1}(\Omega)\big)$$

şi

$$\begin{cases} (u'(t),v) + i(u(t),v)_{H_0^1} = (F(u)(t),v) \quad a.p.t\ \ t \in [0,T],\ \ pentru\ orice\ v \in H_0^1(\Omega) \\ \qquad\qquad u(0) = g_0 \end{cases}$$

Exemplu 4.3.1 Fie $G: L^2(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ o aplicaţie pentru care există o constantă $a \in \mathbb{R}_+$ cu

$$|G(u) - G(v)|_{H^{-1}(\Omega)} \le a|u - v|_{L^2(\Omega)}\,,\ u, v \in\ L^2(\Omega)\,. \tag{4.3.2}$$

Atunci aplicaţia $F: C([0,T];L^2(\Omega)) \to L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ dată de

$$F(u)(t) = G\big(u(t)\big)\ \ (u \in C\big([0,T];L^2(\Omega)\big), t \in [0,T])$$

satisface toate condiţiile Teoremei 4.3.1.

Exemplu 4.3.2 Fie $g: \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie astfel încât $g(.,\tau)$ este măsurabilă pentru fiecare $\tau \in \mathbb{R}$, $g(.,0) \in H^{-1}(\Omega)$ şi există o constantă $a_0 \in \mathbb{R}_+$ cu

$$|g(x,\tau_1) - g(x,\tau_2)| \leq a_0|\tau_1 - \tau_2|$$

a.p.t. $x \in \Omega$ şi orice $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$. Atunci operatorul $G: L^2(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ definit prin

$$G(u) = g\big(.,u(.)\big)$$

satisface toate condiţiile din exemplul precedent.

4.4.2 Aplicaţie a teoremei de punct fix a lui Schauder

Următorul rezultat de existenţă provine din teorema de punct fix a lui Schauder. Condiţia Lipschitz pentru termenul neliniar F din Theorem 4.3.1 este slăbită până la o condiţie de creştere cel mult liniară.

Teorema 4.3.2 *Fie* $g_0 \in L^2(\Omega)$ *şi* $F: L^2(0,T; L^2(\Omega)) \to L^2(0,T; H^{-1}(\Omega))$ *o aplicaţie continuă pentru care există constanta* $a \in \mathbb{R}_+$ *astfel încât să aibă loc urmatoarea inegalitate pentru orice* $u \in C\big([0,T];\ L^2(\Omega)\big)$

$$|F(u)(t) - F(0)(t)|_{H^{-1}} \leq a|u(t)|_{L^2}\ a.p.t\ pe\ \ [0,T].$$

Atunci există cel puţin o soluţie a problemei (4.1.1).

Exemplu 4.3.3 Fie $G: L^2(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ o funcţie continuă pentru care există o constantă $a \in \mathbb{R}_+$ astfel ca

$$|G(u) - G(0)|_{H^{-1}} \leq a|u|_{L^2}\,,\ u \in\ L^2(\Omega)\,. \tag{4.3.3}$$

Atunci aplicaţia $F: C([0,T]; L^2(\Omega)) \to L^2(0,T; H^{-1}(\Omega))$ dată prin

$$F(u)(t) = G\big(u(t)\big)\ \ (u \in L^2\big(0,T; L^2(\Omega)\big), t \in [0,T])$$

satisface toate condiţiile Teoremei 4.3.2.

Exemplu 4.3.4 Fie $g: \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie astfel încât $g(.,\tau)$ este măsurabilă pentru orice $\tau \in \mathbb{R}$, $g(x,.)$ este continuă a.p.t. $x \in \Omega$, $g(.,0) \in H^{-1}(\Omega)$ şi există $a_0 \in \mathbb{R}_+$ astfel ca

$$|g(x,\tau) - g(x,0)| \leq a_0|\tau|$$

a.p.t. $x \in \Omega$ şi oricare ar fi $\tau \in \mathbb{R}$. Atunci operatorul $G: L^2(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ definit prin

$$G(u) = g(.\,, u(.))$$

satisface condiţiile din exemplul anterior.

4.4.3 Aplicaţie a teoremei de punct fix a lui Leray-Schauder

Următorul rezultat de existenţă se înscrie în seria celor obţinute pe baza teoremei de punct fix a lui Leray-Schauder (vezi [66]).

Teorema 4.3.3 *Fie* $g_0 \in L^2(\Omega)$ *si* $F: L^2(0,T; L^p(\Omega)) \to L^2(0,T; H^{-1}(\Omega))$, *unde* $(2^*)' \leq p \leq 2^*$ *dacă* $n \geq 3$ *si* $p \geq 1$ *pentru* $n = 2$ *şi* $n = 1$. *Presupunem că F este continuă şi mărginită (transformă mulţimi mărginite în mulţimi mărginite) şi există constantele* $a, b \in \mathbb{R}_+$, $a < \lambda_1$ *şi* $f \in H^{-1}(\Omega)$ *astfel încât dacă* $F_0 \coloneqq F - f$ *atunci are loc urmatoarea inegalitate*

$$(F_0(u)(t), u(t)) \leq a|u(t)|_{L^2}^2 + b \tag{4.3.4}$$

pentru orice $u \in L^2(0,T; L^p(\Omega))$ *şi a.p.t.* $t \in [0,T]$.

Atunci există cel puţin o soluţie a problemei (4.1.1).

Exemplu 4.3.5 Fie $G: L^p(\Omega) \to L^{(2^*)'}(\Omega)$ o aplicaţie continuă care satisface urmatoarele condiţii:

$$|G(u) - G(0)|_{L^{(2^*)'}} \leq c_0 |v|_{L^p}^{\frac{p}{(2^*)'}}, \; pentru\ orice\ v \in L^p(\Omega); \tag{4.3.6}$$

$$(G(v), v) \leq a|v|_{L^2}^2 + b \; pentru\ orice\ v \in L^p(\Omega), \tag{4.3.7}$$

pentru unele valori $a < \lambda_1$, $b, c \geq 0, (2^*)' \leq p \leq 2^*$ dacă $n \geq 3$ şi $p \geq 1$ pentru $n = 2$ şi $n = 1$. Atunci aplicaţia $F: L^2(0,T; L^p(\Omega)) \to L^2(0,T; H^{-1}(\Omega))$ dată prin

$$F(u)(t) = G(u(t))$$

satisface condiţiile Teoremei 4.3.3.

Exemplu 4.3.6 Fie $g: \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie astfel încât $g(.\,, \tau)$ este măsurabilă pentru orice $\tau \in \mathbb{R}$, $g(x, .)$ este continuă a.p.t. $x \in \Omega$ şi există $c_0, \alpha \in \mathbb{R}_+$, $1 \leq \alpha < 2^* - 1$ astfel încât

$$|g(x, \tau)| \leq c_0 |\tau|^\alpha; \tag{4.3.8}$$

$$\tau g(x, \tau) \leq 0 \tag{4.3.9}$$

a.p.t. $x \in \Omega$ şi orice $\tau \in \mathbb{R}$. Atunci operatorul de superpoziţie $G: L^p(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ dat prin $G(v) = g(.\,, v(.))$, cu $p = \alpha(2^*)'$, satisface condiţiile exemplului precedent.

Exemplu 4.3.7 Funcţia $g(x, \tau) = -|\tau|^{\alpha-1}\tau$ $(\tau \in \mathbb{R},)$, unde $1 \leq \alpha < 2^* - 1$, satisface condiţiile din Exemplul 4.3.6.

5 Sisteme de ecuaţii neliniare Schrödinger

Flosind teoria de existenţă liniară din capitolul 4 vom stabili rezultate de existenţă pentru sisteme de ecuaţii neliniare perturbate de operatori Schrödinger via teoremele de punct fix ale lui Perov, Schauder şi Leray-Schauder. Cadrul abstract de lucru este corelat cu spaţiile Lebesgue-Sobolev. Demonstraţiile sunt bazate pe metoda matricelor convergente la zero prezentată în lucrarea Precup [68]. Rezultatele autorului particularizează teoria generală din lucrarea amintită. Acest capitol are ca obiect de studiu solvabilitatea slabă a sistemelor semiliniare de operatori folosind metoda matricelor convergente la zero. Punctul de plecare în acest studiu este operatorul soluţie Schrödinger, pentru care am stabilit proprietatea de compactitate în Capitolul 4.

5.1 *Ecuaţii Schrödinger neliniare*

Fie Ω o submulţime deschisă şi mărginită din $\mathbb{R}^N$, $0 < T < \infty$ şi considerăm problema Chaucy-Dirichlet pentru ecuaţia Schrödinger liniară:

$$\begin{cases} u_t - i\Delta u = f & pe\ Q = \Omega \times (0, \mathrm{T}); \\ u(x,0) = 0 & pe\ \ \Omega; \\ u = 0 & pe\ \ \Sigma := \partial\Omega \times (0, \mathrm{T}). \end{cases} \tag{5.1.1}$$

Conform Teoremelor 4.1.1, 4.2.1 şi 4.2.2 putem asocia acestei probleme operatorul soluţie

$$S: L^2\big(0, T; H^{-1}(\Omega)\big) \to L^2\big(0, T; L^2(\Omega)\big) \cap C\big([0, T]; L^2(\Omega)\big),$$

definit prin $Sf = u$ unde $u \in L^2\big(0, T; L^2(\Omega)\big) \cap C\big([0, T]; L^2(\Omega)\big)$ este soluţia slabă a problemei (5.1.1) .

În prima parte ne vom ocupa cu existenţa soluţiei pentru următorul sistem de ecuaţii semiliniare Schrödinger:

$$\begin{cases} Lu = F(u, v) & pe\ \ \Omega \times (0, \mathrm{T}); \\ Lv = G(u, v) & pe\ \Omega \times (0, \mathrm{T}); \\ u(x, 0) = 0, v(x, 0) = 0 & pe\ \Omega; \\ u = v = 0 & pe\ \Sigma. \end{cases} \tag{5.1.2}$$

Aici prin Lu se înţelege $Lu = u_t - i\Delta u$ astfel încât $S = \mathrm{L}^{-1}$ şi F, G sunt operatori neliniari. Se urmăreşte găsirea unei soluţii slabe pentru problema (5.1.2), care reprezintă, de fapt, un punct fix a problemei $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = N\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$, unde $u, v \in C\big([0,T]; L^2(\Omega)\big)$, $N = (N_1, N_2)$ definit prin

$$N_1 = S \circ F, \text{ şi } N_2 = S \circ G.$$

5.1.1 **Aplicaţie a teoremei de punct fix a lui Perov**

Primul rezultat este o teoremă de existenţă, unicitate şi aproximare.

Teorema 5.1.1 *Fie* $F, G: C\big([0,T]; L^2(\Omega)\big) \times C\big([0,T]; L^2(\Omega)\big) \to L^2\big(0,T; H^{-1}(\Omega)\big)$ *operatori continui. Presupunem că*

$$|F(u_1,v_1)(t) - F(u_2,v_2)(t)|_{H^{-1}} \le a_1|u_1(t) - u_2(t)|_{L^2} + b_1|v_1(t) - v_2(t)|_{L^2}$$

şi (5.1.3)

$$|G(u_1,v_1)(t) - G(u_2,v_2)(t)|_{H^{-1}} \le a_2|u_1(t) - u_2(t)|_{L^2} + b_2|v_1(t) - v_2(t)|_{L^2}$$

pentru orice $(u_1,v_1), (u_2,v_2) \in C\big([0,T]; L^2(\Omega)\big) \times C\big([0,T]; L^2(\Omega)\big)$, $t \in [0,T]$ *şi unele constante nenegative* a_1, a_2, b_1, b_2 .

Atunci problema (5.1.2) *admite o soluţie unică* $(u,v) \in C\big([0,T]; L^2(\Omega)\big) \times C\big([0,T]; L^2(\Omega)\big)$.

Exemplu 5.1.1 *Fie* $F_1, G_1: L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ *doua aplicaţii pentru care există constantele* $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}_+$ *astfel că*

$$|F_1(u_1,v_1) - F_1(u_2,v_2)|_{H^{-1}} \le a_1|u_1 - u_2|_{L^2} + b_1|v_1 - v_2|_{L^2}$$

şi

$$|G_1(u_1,v_1) - G_1(u_2,v_2)|_{H^{-1}} \le a_2|u_1 - u_2|_{L^2} + b_2|v_1 - v_2|_{L^2}$$

pentru orice $u_1, v_1, u_2, v_2 \in L^2(\Omega)$.

Atunci aplicaţiile $F, G: C([0,T]; L^2(\Omega)) \times C\big([0,T]; L^2(\Omega)\big) \to L^2(0,T; H^{-1}(\Omega))$ *date prin*

$$F(u,v)(t) = F_1(u(t), v(t)) \text{ si } G(u,v)(t) = G_1(u(t), v(t))$$

pentru orice $(u,v) \in C\big([0,T]; L^2(\Omega)\big) \times C\big([0,T]; L^2(\Omega)\big)$ *satisfac condiţiile Teoremei* 5.1.1.

5.1.2 Aplicaţie a teoremei de punct fix a lui Schauder

Următorul rezultat este un rezultat de existenţă provenit din aplicarea principiului de punct fix a lui Schauder, cu presupunerea că neliniarităţile F şi G au o creştere cel mult liniară.

Teorema 5.1.2 *Fie* $F, G: C([0,T]; L^2(\Omega)) \times C([0,T]; L^2(\Omega)) \to L^2(0,T; H^{-1}(\Omega))$. *Presupunem că F şi G sunt continue şi satisfac condiţiile de creştere*

$$|F(u_1,u_2)(t)|_{H^{-1}} \le a_1|u_1(t)|_{L^2} + b_1|u_2(t)|_{L^2} + h_1$$

şi (5.1.7)

$$|G(u_1,u_2)(t)|_{H^{-1}} \le a_2|u_1(t)|_{L^2} + b_2|u_2(t)|_{L^2} + h_2$$

pentru orice $u = (u_1,u_2) \in C(0,T; L^2(\Omega)) \times C(0,T; L^2(\Omega))$ $, t \in [0,T]$, *unde* $a_i, b_i, h_i \in \mathbb{R}_+$. *Atunci* (5.1.2) *are cel puţin o soluţie* $u = (u_1,u_2)$,

$u \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap C([0,T]; L^2(\Omega)) \times L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap C([0,T]; L^2(\Omega))$.

Exemplu 5.1.2 *Fie* $F_1, G_1: L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ *două funcţii continue pentru care există* $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}_+$ *astfel ca*

$$|F_1(u_1,u_2)|_{H^{-1}} \le a_1|u_1|_{L^2} + b_1|u_2|_{L^2} + h_1$$

şi

$$|G_1(u_1,u_2)|_{H^{-1}} \le a_2|u_1|_{L^2} + b_2|u_2|_{L^2} + h_2$$

Atunci aplicaţiile $F, G: C([0,T]; L^2(\Omega)) \times C([0,T]; L^2(\Omega)) \to L^2(0,T; H^{-1}(\Omega))$ *date prin*

$$F(u)(t) = F_1(u(t)) \text{ si } G(u)(t) = G_1(u(t))$$

pentru orice $u = (u_1,u_2) \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \times C([0,T]; L^2(\Omega))$ *satisfac condiţiile din Teorema* 5.1.2.

Exemplu 5.1.3 Fie $f, g: \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcţii continue astfel încât $f(.,\tau)$ şi $g(.,\tau)$ sunt măsurabile pentru orice $\tau \in \mathbb{R}$, $f(.,\tau), g(x,.)$ sunt continue a.p.t. $x \in \Omega$, $f(.,\tau), g(.,0) \in H^{-1}(\Omega)$ şi există constantele $a_0, b_0 \in \mathbb{R}_+$ astfel ca

$$|f(x,\tau) - f(x,0)| \le a_0|\tau|$$

şi

$$|g(x,\tau) - g(x,0)| \le b_0|\tau|$$

a.p.t. $x \in \Omega$ şi orice $\tau \in \mathbb{R}$. Atunci operatorii $F, G: C([0,T]; L^2(\Omega)) \times C([0,T]; L^2(\Omega)) \to L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$ definiţi prin

$$F(u,v) = f(.,u(.)) \text{ şi } G(u,v) = g(.,u(.))$$

satisfac condiţiile din exemplul precedent.

5.1.3 **Aplicaţie a teoremei de punct fix a lui Leray-Schauder**

Următorul rezultat este bazat pe principiul de punct fix a lui Leray-Schauder. Urmărim obţinerea unei soluţii slabe a sistemului (5.1.2).

Teorema 5.1.3 *Presupunem că F şi G sunt continue şi admit descompunerile* $F = F_0(u,v) + f$ *şi* $G = G_0(u,v) + g$ *astfel încât următoarele condiţii sunt satisfacute pentru toţi* $u, v \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$, *orice* $t \in [0,T]$, *unele constante* $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}_+$ *astfel încât* $\lambda_1 > \left(a_1 + b_2 + \sqrt{(a_1 - b_2)^2 + 4a_2b_1}\right)/2$, *şi* $f, g \in H^{-1}(\Omega)$:

$$(F_0(u,v)(t), u(t)) \leq a_1|u(t)|_{L^2}^2 + b_1|v(t)|_{L^2}^2$$

$$(G_0(u,v)(t), v(t)) \leq a_2|u(t)|_{L^2}^2 + b_2|v(t)|_{L^2}^2 \qquad (5.2.9)$$

Atunci (5.1.2) *are cel puţin o soluţie*

$$(u,v) \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \times L^2(0,T; H_0^1(\Omega)).$$

Exemplu 5.1.4 Fie $F_0, G_0: L^p(\Omega) \times L^p(\Omega) \to L^{(2^*)'}(\Omega)$ aplicaţii continue care satisfac următoarele condiţii:

$$|F_0(u,v)|_{L^{(2^*)'}} \leq c_1|v|_{L^p}^{\frac{p}{(2^*)'}} \text{ si } |G_0(u,v)|_{L^{(2^*)'}} \leq c_2|v|_{L^p}^{\frac{p}{(2^*)'}}, \qquad (5.2.13)$$

pentru toţi $u, v \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$;

$$(F_0(u,v)(t), u(t)) \leq a_1|u(t)|_{L^2}^2 + b_1|v(t)|_{L^2}^2$$

şi (5.1.14)

$$(G_0(u,v)(t), v(t)) \leq a_2|u(t)|_{L^2}^2 + b_2|v(t)|_{L^2}^2$$

pentru toţi $u, v \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$

pentru unele valori $\lambda_1 > \frac{\left(a_1+b_2+\sqrt{(a_1-b_2)^2+4a_2b_1}\right)}{2}$, $a_1, a_2, b_1, b_2 > 0, (2^*)' \leq p \leq 2^*$ dacă $n \geq 3$ şi $p \geq 1$ pentru $n = 2$ şi $n = 1$. Atunci aplicaţiile $F, G: L^2(0, T; L^p(\Omega)) \times L^2(0, T; L^p(\Omega)) \to L^2(0, T; H^{-1}$date prin $F(u)(t) = F_0\big(u(t)\big)$ şi prin $G(u)(t) = G_0\big(u(t)\big)$ satisfac toate condiţiile din Teorema 5.1.3.

Exemplu 5.1.5 Fie $f, g: \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcţii astfel încât $f(.,\tau), g(.,\tau)$ sunt măsurabile pentru orice $\tau \in \mathbb{R}$, $f(x,.), g(x,.)$ sunt continue a.p.t. $x \in \Omega$ şi există $c_1, c_2, \alpha \in \mathbb{R}_+$, $1 \leq \alpha < 2^* - 1$ astfel încât

$$|f(x,\tau)| \leq c_1|\tau|^\alpha \text{ şi } |g(x,\tau)| \leq c_2|\tau|^\alpha; \tag{5.1.15}$$

$$\tau f(x,\tau) \leq 0 \text{ şi } \tau g(x,\tau) \leq 0 \tag{5.1.16}$$

a.p.t. $x \in \Omega$ şi toţi $\tau \in \mathbb{R}$. Atunci operatorii de superpoziţie $F, G: L^p(\Omega) \times L^p(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ daţi prin $F(u,v) = f\big(.,v(.)\big)$, şi $G(u,v) = g\big(.,v(.)\big)$, cu $p = \alpha(2^*)'$, satisfac condiţiile din exemplul precedent.

Exemplu 5.1.6 Funcţiile $f(x,\tau) = -|\tau|^{\alpha-1}\tau$ si $g(x,\tau) = -|\tau|^{\beta-1}\tau$ $(\tau \in \mathbb{R},)$, unde $1 \leq \alpha, \beta < 2^* - 1$, satisfac condiţiile din Exemplu 5.1.5.

Bibliografie

[1] M.J. Ablowitz, B. Prinari and A. D. Trubatch, *Discrete and Continuous Nonlinear Schrödinger Systems*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.

[2] S.D'Agostino, *From Electrodynamics to Quantum Electrodynamics: a History of the Symbolic Representation of Physics Laws*, France, Editions Frontiere, 1998.

[3] A.I.Ahiezer and V.B.Berestetki, ,*Electrodinamica cuantică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1958.

[4] C. Avramescu, Sur l'existence des solutions convergentes pour des équations intégrales, An. Univ. Craiova Ser. V (2) (1974), 87–98.

[5] D. Bainov, E. Minchev and A. Myshkis, *Above estimates of the interval of existence of solutions of the nonlinear Schrödinger equation with potential*,Nonlin. World 3 (1996), 537-544.

[6] V. Barbu, *Probleme la limită pentru ecuaţii cu derivate parţiale*, Editura Academiei Române, Bucureşti, 1993.

[7] V. Barbu, *Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces*, Nordhoff, Leyden 1976.

[8] T.B. Benjamin and J.E. Feir, *The disintegration of wave-trains in deep water*, Part 1, J. Fluid Mech. 27 (1967), 417-430.

[9] A. De Bouard, Nonlinear Schrödinger equation with magnetic fields, *Diff. and Integral Equations* **4**,1991, 73-88.

[10] J. Bourgain. *Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations. I. Schrodinger equations*. Geom. Funct. Anal. 3(2)(1993), 107-156.

[11] H. Brezis and F. Browder, *Partial differential equations in the 2th century,* Univ. P. et M. Curie, 1990.

[12] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications,* Masson, Paris, 1983.

[13] D. Bainov, E. Minchev, *Blowingup of solutions to nonlinear Scrodinger equations*, Rendiconti di Matematica, Serie VII, Volume 16, (1996), 109-115.

[14] T. Bialynicki-Birula and I. Mycielski, Wave *equations with logarithmic nonlinearities*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. 23(1975), 461-466.

[15] T. Cazenave, *Semilinear Schrödinger Equations*, Courant Lecture Notes in Mathematics Vol.10, Amer.Math.Soc., Providence, 2003.

[16] T. Cazenave, A. Haraux, *An introduction to semilinear evolution equations*, Claredon Press Oxford, 1998.

[17] T. Cazenave and F.B. Weissler, The *Cauchy problem for the nonlinear Schrödinger equation in* H^1, Manuscripta Math. 61(1988), 477-494.

[18] M. Clapp, *Metodos Variacionales en Ecuaciones Diferenciales Parciales*, Instituto Matematicas Universidad Nacional Autonoma de Mexico, 2007.

[19] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc and G. Grynberg, *Photons and atoms to quantum electrodynamics*: *Introduction to Quantum Electrodynamics*. New York: Wiley, 1989.

[20] A. Domarkas, *Collaps of solutions of a system of nonlinear Schrödinger equations,* Liet. Mat. Rinkinys **31**, (1991), 598-604.

[21] L.C. Evans, *Partial Differential Equations,* Berkley Mathematics Lecture Notes, 1994.

[22] R.P. Feynman, *Fizica modernă*, Vol.3, Editura Tehnică, Bucureşti, 1970.

[23] R.P. Feynman, *QED-The strange theory of light and matter*, Princeton University Press, 1985.

[24] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of the second order*, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[25] J. Ginibre and G. Velo, *On a class of nonlinear Schrödinger equations, special theories in dimensions 1, 2 and 3*. Ann. Inst. Henri Poincaré 28: 287-316, 1978.

[26] J. Ginibre, and G. Velo,. *On a class of nonlinear Schrödinger equations*, J. Funct. Anal. 32(1979), 1-71.

[27] J. Ginibre and G. Velo, *On a class of nonlinear Schrödinger equations with non local interaction*, Math. Z. 170(1980), 109-136.

[28] R. Glassey, *On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equations,* J. Math. Phys. **18**,(1977), 1794-1797.

[29] A. Granas and J. Dugundji, *Fixed Point Theory*, Springer, New York, 2003.

[30] H. Grosse and A. Martin, *Particle Physics and the Schrödinger Equation, Cambridge Monographs on Particle Physics*, Nuclear Physics and Cosmology, Cambridge Univ. Press, 1997.

[31] A. Hasegawa and Y. Kodama, *Solitons in Optical Communications*, Academic Press, San Diego, 1995.

[32] J.M. Jauch, *Foundations of quantum mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, 1966.

[33] P. Jebelean, *Metode de analiză neliniară cu aplicaţii în probleme la limită cu p-Laplacian*, Editura Universităţii de Vest, Timişoara, 2001.

[34] T. Kato, *Remarks on holomorphic families of Schrödinger and Dirac operators, in Differential equations*, (Knowles I., Lewis R., Eds.), North-Holland Math. Stud., North-Holland, Amsterdam, 1984, 341-352.

[35] T. Kato, On nonlinear Schrödinger equations. *Ann. Inst. Henri Poincaré Phys. Theor.* 46(1987), 113-129.

[36] T. Kato, On nonlinear Schrödinger equations. *Schrödinger operators*, 218-263. Lecture Notes in Physics, 345. Springer, Berlin, 1989.

[37] T. Kato, *An $L^{q,r}$-theory for nonlinear Schrödinger equations. Spectral and scattering theory and applications*, pp.223-238. Advanced Studies in Pure Mathematics, 23. Mathematical Society of Japan, Tokyo, 1994.

[38] T. Kato, *On nonlinear Schrödinger equations. II. H^s-solutions and unconditional well-posedness*. J. Anal. Math. 67(1995), 281-306.

[39] F. Kappel, H. Brezis and M.G. Crandall, *Semigroups, Theory and Applications*, Longman Scientific & Technical, 1986.

[40] Li Ta-Tsien, Chen Yunmei, *Global Classical Solutions for Nonlinear Evolution Equations*, Longman Scientific and Technical, Harlow, 1992.

[41] J.-L. Lions and E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, vol1,2, Dunod, Paris, 1968.

[42] J.-L. Lions, *Quelques méthods de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Paris, Dunod, Gauthier-Villars, 1969.

[43] J.-L. Lions, *Contrôlabilite exacte, stabilization et perturbations de systemes distributives*. Tome 1, Paris, 310 (1990), 801-806.

[44] P.-L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case* I, Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire 1 (1984), 109-145.

[45] Y. Long, *On the density of range for some nonlinear operators*, Annals de L'I.H.P., Section C, 2(1989), 139-151.

[46] M. Manole (Irimiea), *The finite Fourier series: triangle's case*, Conference on Analysis, Functional Equations, Approximation and Convexity **2**, Risoprint, Cluj-Napoca, (2004), 97-104.

[47] M. Manole (Irimiea), A.-B. Haifa and S. Hobai, *From Newton's second low to Schrödinger equation in molecular dynamic.* I. *Hydrogen atom and harmonic oscillator*, Ann. Tiberiu Popoviciu Semin. Funct. Equ., Approx. Convexity **3,** Mediamira Science, Cluj-Napoca (2005), 221-226.

[48] M. Manole (Irimiea), Z.Fazacas and S.Hobai, *An application of Shepard's interpolation.* Ann. Tiberiu Popoviciu Semin. Funct. Equ. Approx. Convexity **3,** Mediamira Science, Cluj-Napoca (2005), 227-232.

[49] M. Manole and R. Precup, *Nonlinear Schrodinger Equations via Fixed Point Principles*. to appear.

[50] M. Manole, *Systems of Nonlinear Schrodinger Equations*, to appear.

[51] B. A. Malomed, *Variational methods in nonlinear fiber optics and related fields*, Progress in Optics 43 (2002), 69-191.

[52] A.C. McBride, *Semigroups of linear operators: an introduction*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, 156, Longman Scientific&Technical, 1987.

[53] F. Merle, *Determination of blow-up solutions with minimal mass for nonlinear Schrödinger equations with critical power*. Publications du laboratoire d'anlyse numerique, Univ.Pierre et Marie Curie, 1991.

[54] B. Le Mesurier, G. Papanicolau, C. Sulem and P.L. Sulem, Focusing and multifocusing solutions of the nonlinear Schrödinger equation, *Physica D* **31**(1988), 78-102.

[55] D. Muzsi and R. Precup, *Nonresonance and existence for systems of semilinear operator equations*, *Appl. Anal.* 87 (2008), no. 9, 1005-1018.

[56] H. Nawa, *,,Mass concentration" phenomenon for the nonlinear Schrodinger equation with critical power nonlinearity*, II Kodai Math. J 13(3) (1990), 333-348.

[57] V. Novacu, *Teoria cuantică a câmpurilor*, Editura Tehnica, 1984.

[58] Y.-G. Oh, *Existence of semi-classical bound states of nonlinear Schrödinger equations with potentials of the class* (V_a), Communications on Partial Differential Equations 13 (1988), 1499-1519.

[59] M. Onorato, A. R. Osborne, M. Serio and S. Bertone, *Freak waves in random oceanic sea states*, Phys. Rev. Lett. 86 (2001), 5831-5834.

[60] P. Rabinowitz, *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*, CBMS Regional Conf. Ser. In Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI, vol 65, 1986.

[61] D. O'Regan and R. Precup, *Theorems of Leray-Schauder Type and Applications*, Gordon and Breach, Amsterdam, 2001.

[62] N.H. Pavel, *Nonlinear Evolution Operators and Semigroups*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 1987.

[63] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer, Berlin, 1983.

[64] A.I. Perov and A.V. Kibenko, *O a certain general method for investigation of boundary value problems*, Izv. Akad. Nauk SSSR 30 (1966) 249–264 (in Russian).

[65] R. Precup, *The nonlinear heat equation via fixed point principles*, Ann. Tiberiu Popoviciu Semin. Funct. Equ. Approx. Convexity **4** (2006), 111-127.

[66] R. Precup, *Lectures on Partial Differential Equations* (in Romanian), Cluj University Press, Cluj- Napoca, 2004.

[67] R. Precup, *Methods in Nonlinear Integral Equations*, Kluwer, Dordrecht, 2002.

[68] R. Precup, *The role of matrices that are convergent to zero in the study of semilinear operator systems*, Mathematical and Computer Modelling 49(2008), 703-708.

[69] A.M. Precupanu, Analiza matematica. Masura si integrala. Editura Universitatii ,,Alexandru Ioan Cuza", Iasi, 2006.

[70] T. Precupanu, *Analiza functională pe spatii liniare normate"*, Editura Universitatii ,,Alexandru Ioan Cuza", Iasi, 2005.

[71] T.-L. Radulescu (Dinu), *Methods in the nonlinear analysis for the study of boundary value problems*, Ph.D. Thesis, Cluj-Napoca, 2005.

[72] I.A. Rus, *Principles and Applications of the Fixed Point Theory* (in Romanian), Dacia, Cluj, 1979.

[73] I.A. Rus, *Fixed Point Structure Theory*, Cluj University Press, 2005.

[74] E. Stein, *Harmonic Analysis: Real Variable Methods, Orthogonality and*

Oscillatory Integrals, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993.

[75] C. Sulem and P.-L. Sulem, *The Nonlinear Schrödinger Equation. Self-focusing and Wave Collapse*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 139, Springer-Verlag, New York, 1999.

[76] R. Temam, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Springer, Berlin, 1988.

[77] K. Tintarev, *A semilinear elliptic problem on unbounded domains with reverse penalty*, Nonlinear Anal., in press (doi:10.1016/j.na.2005.07.003).

[78] M. Tsutsumi, Nonexistence of global solutions to the Cauchy problem for the damped nonlinear Schrödinger equations, *SIAM J. Math. Anal*. **15**, no. 2, 1984, 357-366.

[79] Ş. Ţiţeica, *Mecanica cuantică*, Editura Academiei Române, Bucuresti, 1984.

[80] L. Vega, *On the local smoothing for a class of conformally invariant Schroedinger equations,* Proc. Amer. Math. Soc, 135(2006), 119-128.

[81] I.I. Vrabie, *Semigrupuri de operatori liniari si aplicatii*, Editura Universitatii ,,Al. I. Cuza" Iasi 2001.

[82] I.I. Vrabie, C_0*-Semigroups and Applications,* North-Holland, 2003.

[83] I.I. Vrabie, *Compactness Methods for Nonlinear Evolutions*, John Wiley &Sons Inc., New York, 1995.

[84] V. E. Zakharov, *Collapse of Langmuir waves, Journal Exper. And Theoretical Physics* **35**(1972), 908-914.

[85] V. E. Zakharov, *Collapse and Self-focusing of Langmuir Waves*, Handbook of Plasma Physics, (M. N. Rosenbluth and R. Z. Sagdeev, eds.), vol. 2 (A. A. Galeev and R. N. Sudan, eds.) 81-121, Elsevier (1984).

[86] I. Yosida, *Functional Analysis*, Springer, 1965.