FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
UNIVERSITATEA "BABEŞ–BOLYAI"
CLUJ-NAPOCA, ROMÂNIA

MIRCEA-DAN RUS

METODA ITERAŢIILOR MONOTONE PENTRU OPERATORI MIXT-MONOTONI

Rezumatul tezei de doctorat

CONDUCĂTOR ŞTIINŢIFIC: Prof. Dr. RADU PRECUP

CLUJ-NAPOCA, 2010

Cuprins

Cuvinte cheie

Operator mixt-monoton, punct fix, punct fix cuplat, metoda iteraţiilor monotone, metrica Thompson, spaţiu liniar ordonat, spaţiu Banach ordonat, con normal, spaţiu metric ordonat, φ-contracţie, ecuaţii integrale Fredholm neliniare, sisteme de operatori parţial monotoni.

Introducere

Este bine cunoscut faptul că *metoda iterațiilor monotone* (*MIM* pe scurt), cuplată cu *metoda sub şi supra soluţiilor*, oferă un mecanism eficient şi flexibil pentru demonstrarea atât teoretică cât şi constructivă a rezultatelor de existenţă (şi unicitate) pentru o varietate largă de ecuaţii şi sisteme neliniare.

Aceste două metode apar în lucrările lui E. Picard în anii 1890, în studiul problemei Dirichlet pentru ecuaţii diferenţiale neliniare de ordinul al doilea ([77], [78], [79]). În esenţă, *MIM* descrie următorul fenomen abstract:

Fie problema de punct fix

$$x = T(x) \quad (x \in X) \tag{1}$$

unde $X = (X, \leq)$ este o mulţime ordonată şi $T : X \to X$ este un operator crescător în raport cu relaţia de ordine pe X (i.e., $T(x) \leq T(y)$ oricând $x \leq y$). Dacă $x_0, y_0 \in X$ sunt astfel încât

$$\begin{cases} x_0 \leq y_0 \\ x_0 \leq T(x_0) \\ y_0 \geq T(y_0) \end{cases}, \tag{2}$$

atunci şirurile $(x_n), (y_n)$ definite recursiv prin

$$\begin{cases} x_{n+1} = T(x_n) \\ y_{n+1} = T(y_n) \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{3}$$

sau, echivalent (folosind puterile funcţionale ale lui T), prin

$$\begin{cases} x_n = T^n(x_0) \\ y_n = T^n(y_0) \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$$

satisfac

$$x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n \leq \ldots \leq y_m \leq \ldots \leq y_1 \leq y_0. \tag{4}$$

Mai mult, dacă x este o soluţie pentru (1) astfel încât $x_0 \leq x \leq y_0$, atunci

$$x_n \leq x \leq y_m \quad \text{pentru orice } n, m \in \mathbb{N}.$$

În prezenţa unei convergenţe pe X şi în anumite condiţii (a se vedea, spre exemplu, Krasnosel′skiĭ [46]), se poate obţine că (x_n) este convergent la o soluţie x^* (minimală) pentru (1) şi (y_n) este convergent la o soluţie y^* (maximală) pentru (1), însemnând că orice soluţie x pentru (1) astfel încât $x_0 \leq x \leq y_0$ se va afla *între* x^* şi y^*. Presupuneri suplimentare pot asigura că $x^* = y^*$, adică unicitatea soluţiei în intervalul $[x_0, y_0]$.

Aproximarea monotononă bilaterală a soluţiei şi metoda constructivă pe care le aduce *MIM* a condus la un interes crescut în a extinde metoda şi la alte clase de operatori, altele decât cea a operatorilor crescători. S-a observat mai întâi (vezi Babkin [6]) că monotonia poate fi uşor slăbită prin considerarea unei condiţii Lipschitz unilaterale asupra operatorului T. Dacă X este un spaţiu liniar real şi există un scalar $M > 0$ astfel încât

$$T(y) - T(x) \geq -M(y - x) \quad \text{pentru orice } x \leq y,$$

atunci T poate fi înlocuit cu operatorul crescător

$$\widetilde{T}(x) = \frac{T(x) + Mx}{M + 1} \quad (x \in X),$$

deoarece T şi $\widetilde{T}$ au aceleaşi puncte fixe.

De asemenea, cazul când T este descrescător ($T(x) \geq T(y)$ oricând $x \leq y$) a fost considerat, fie prin modificarea metodei iterative (vezi Picard [77]), fie prin studierea punctelor fixe ale operatorului crescător $T^2 = T \circ T$ cu presupuneri suplimentare care să asigure că soluţii pentru (1) se pot obţine din soluţii ale ecuaţiei $x = T^2(x)$.

Un pas important în extinderea *MIM* la o clasă mai largă de operatori a fost făcut de către Opoĭtsev [74] care a considerat cazul operatorilor *heterotonici* (denumiţi astfel de Opoĭtsev), i.e., operatorii T ce se pot scrie sub forma

$$T(x) = A(x, x) \quad (x \in X)$$

unde $A : X^2 \to X$ este *mixt-monoton*, i.e., crescător în raport cu primul argument şi descrescător în raport cu al doilea. Această clasă conţine, evident, atât clasa operatorilor crescători, cât şi cea a operatorilor descrescători.

În acest caz, *MIM* este descrisă în termenii operatorului A; (2) este înlocuită prin

$$\begin{cases} x_0 \leq y_0 \\ x_0 \leq A(x_0, y_0) \\ y_0 \geq A(y_0, x_0) \end{cases}, \tag{5}$$

(perechea (x_0, y_0) este numită *sub-supra punct fix cuplat* pentru A), şirurile aproximante (3) sunt definite prin

$$\begin{cases} x_{n+1} = A(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = A(y_n, x_n) \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}), \tag{6}$$

în timp ce conceptul de soluţie pentru (1) este slăbit, considerând *cvasi-soluţii*, i.e., perechi $(x, y) \in X^2$ ce satisfac

$$\begin{cases} x = A(x, y) \\ y = A(y, x) \end{cases} \tag{7}$$

(perechea (x, y) este numită *punct fix cuplat* pentru A). În aceste condiţii, $(x_n), (y_n)$ verifică (4) şi, dacă $(x, y) \in X^2$ este o cvasi-soluţie pentru (1) astfel încât

$$x_0 \leq x \leq y_0, \quad x_0 \leq y \leq y_0, \tag{8}$$

atunci

$$x_n \leq x \leq y_m, \quad x_n \leq y \leq y_m \quad \text{pentru orice } n, m \in \mathbb{N}.$$

Urmând teoria operatorilor crescători şi concavi dezvoltată de Krasnosel′skiĭ şi studenţii săi în anii 1960 ([7], [8], [46], [47], [48], [49], [97], [98]), Opoĭtsev [73], [74], [75] a studiat în anii 1970 o clasă particulară de operatori heterotonici (aşa-numiţii operatori heterotonici *pseudoconcavi*) şi a stabilit primele rezultate de punct fix, respectiv de punct fix cuplat pentru operatori heterotonici (respectiv, pentru operatori mixt-monotoni), în cadrul spaţiilor Banach ordonate. În ultimele trei decenii, rezultatele lui Opoĭtsev au fost "*redescoperite*" sau extinse de diverşi autori, însă, regretabil, nici unul dintre aceştia nu citează lucrările lui Opoĭtsev [74].

*

Obiectivul pe care mi l-am propus prin această teză a fost acela de a realiza un studiu detaliat şi unitar în ceea ce priveşte punctele fixe ale operatorilor mixt-monotoni, folosind *MIM* atât în prezenţa, cât şi în absenţa *metodei sub şi supra soluţiilor*.

Am pornit studiul în contextul cel mai general (cel al mulţimilor ordonate) - ceea ce constituie o noutate - şi am avansat la cazul spaţiilor metrice ordonate (unde există doar câteva rezultate de punct fix, apărute recent), apoi în spaţii liniare ordonate folosind metrica Thompson, şi în final în cazul spaţiilor Banach ordonate (unde sunt formulate marea majoritate a teoremelor de punct fix existente la ora actuală). De asemenea, mi-am propus să exemplific modul de aplicare al teoriei şi rezultatelor abstracte la studiul câtorva probleme neliniare pe care le-am considerat ilustrative.

Am pus accentul, în principal, pe acele rezultate de punct fix care produc atât existenţa punctului fix cât şi unicitatea (fie într-o mulţime predefinită, fie local, într-o mulţime care se poate preciza), iar punctele fixe se pot obţine într-un mod constructiv, ca limită a unui proces iterativ bilateral (punctul fix este aproximat atat de jos, cât şi de sus, ceea ce este extrem de util pentru controlul erorii de aproximare).

Am exclus acele rezultate în care punctele fixe se obţin ca elemente maximale (sau minimale) ale unor mulţimi, folosind lema lui Zorn sau ca supremum (respectiv, infimum) ale unor mulţimi in latici (deşi folosesc *MIM*, astfel de rezultate de existenţă a punctului fix sunt neconstructive).

Nu am intenţionat să realizez o prezentare de ansamblu a teoriei punctului fix pentru operatori mixt-monotoni ci, mai degrabă, intenţia a fost de a urma câteva direcţii importante de cercetare pe această temă şi de a le scoate în evidenţă conceptele şi rezultatele fundamentale, prezentând atât rezultate şi concepte cunoscute cât, mai ales idei, noţiuni şi rezultate noi, originale.

Dintre contribuţiile personale cuprinse în prezenta teză pe care le consider cele mai importante aş vrea să amintesc:

- realizarea unui studiu sistematic al *MIM* pentru operatori mixt-monotoni, atât în prezenţa cât şi în absenţa *metodei sub şi supra solutiilor*;
- definirea şi studierea unor noţiuni şi concepte noi, în scopul simplificării şi prezentării unitare a teoriei;
- formularea pentru prima dată a *MIM* pentru operatori mixt-monotoni în cadrul general al mulţimilor ordonate;
- prima investigare sistematică a *MIM* pentru operatori mixt-monotoni în cadrul spaţiilor metrice ordonate şi în cel al spaţiilor liniare ordonate prin intermediul metricii Thompson;
- analiza detaliată a proprietăţilor şi caracteristicilor metricii Thompson în cadrul general al spaţiilor liniare ordonate, cu multe rezultate noi;
- aplicarea rezultatelor teoretice, abstracte, la câteva probleme neliniare ilustrative, incluzând aici şi sisteme de ecuaţii.

De asemenea, lucrarea lasă loc la numeroase direcţii de cercetare pentru viitor.

*

§1. În contextul mulţimilor ordonate (*Secţiunile 3.1* şi *3.2*), arătăm mai întâi că este posibil să exprimăm şirurile aproximante $(x_n), (y_n)$ din (6) folosind puterile funcţionale ale operatorului A în raport cu o anumită lege de compoziţie asociativă (pe care o introducem în Definiţia 3.1.1 şi o numim *operaţia de m-compunere*[1] *a operatorilor de două variabile*). Evident, dacă $A, B : X^2 \to X$, atunci compunerea uzuală $B \circ A$ (sau $A \circ B$) nu este posibilă, astfel că definim m-compunerea lui A şi B prin

$$(B * A)(x, y) = B(A(x, y), A(y, x)) \quad (x, y \in X),$$

şi demonstrăm că este asociativă şi că are ca element neutru proiecţia canonică a lui X^2 pe X (Propoziţia 3.1.2). Este important de notat că m-compunerea operatorilor mixt-monotoni este tot un operator mixt-monoton (Propoziţia 3.1.17). Folosind acest nou concept, este posibil să rescriem şirurile (x_n) şi (y_n) definite în (6) prin

$$\begin{cases} x_n = A^n(x_0, y_0) \\ y_n = A^n(y_0, x_0) \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

unde puterile funcţionale ale lui A sunt în raport cu $*$.

Fără a fi nevoie de o topologie pe X, arătăm în Secţiunea 3.2 că este posibil să formulăm o *schemă de aproximare* pentru punctele fixe ale unui operator mixt-monoton doar în termenii relaţiei de ordine. În condiţiile exprimate anterior în descrierea *MIM* pentru operatori heterotonici (i.e., mixt-monotoni), se arată (printre alte rezultate) că:

1. Dacă $\bigcap_{n\geq 0} [x_n, y_n] = \emptyset$, atunci (1) nu are soluţii în $[x_0, y_0]$ (Corolarul 3.2.3).
2. Dacă $\bigcap_{n\geq 0} [x_n, y_n] = \{x^*\}$, atunci x^* este unica soluţie a ecuaţiei (1) în intervalul $[x_0, y_0]$ şi pentru orice $u_0, v_0 \in [x_0, y_0]$ astfel încât $u_0 \leq x^* \leq v_0$, şirurile $(u_n), (v_n)$ definite prin
$$u_n = A^n(u_0, v_0),\ v_n = A^n(v_0, u_0)\ (n \in \mathbb{N}), \quad (9)$$
verifică $\bigcap_{n\geq 0} [u_n, v_n] = \{x^*\}$ (descriem acest fenomen în Teorema 3.2.1 prin introducerea noţi-

[1] în original (în limba engleză): *mirror composition* sau *m-composition* (pe scurt)

uni de *punct fix slab* (o)*-atractiv* (*weakly order-attractive fixed punct*) – Definiţiile 3.2.4 şi 3.2.9).

3. Dacă $\sup x_n$ şi $\inf y_n$ există şi
$$\sup x_n = \inf y_n = x^*,$$
atunci $\bigcap_{n\geq 0} [x_n, y_n] = \{x^*\}$ (deci, x^* este unica soluţie a ecuaţiei (1) în $[x_0, y_0]$) şi, pentru orice u_0, v_0 în $[x_0, y_0]$ astfel încât $u_0 \leq x^* \leq v_0$, şirurile $(u_n), (v_n)$ definite prin (9) verifică
$$\sup u_n = \inf v_n = x^*$$
(descriem acest fenomen în Teorema 3.2.1 prin introducerea noţiuni de *punct fix* (o)*-atractiv* (*order-attractive fixed punct*) – Definiţiile 3.2.7 şi 3.2.9).

Discutăm, de asemenea, în detaliu ce se întâmplă dacă (x_0, y_0) nu este o sub-supra soluţie pentru (1). În acest caz, arătăm că este posibil să folosim *MIM* fără ajutor din partea metodei sub şi supra soluţiilor (Lema 3.2.1, Teorema 3.2.16, Corolarul 3.2.17). În particular, studiem cazul când, după un număr de k iteraţii, (x_k, y_k) este o sub-supra soluţie pentru (1) (Teorema 3.2.19).

§2. Mai departe (în *Secţiunea 3.3*), extindem *MIM* pentru operatori mixt-monotoni în contextul *spaţiilor metrice ordonate*, dotate cu o metrică extinsă[2] completă d şi studiem convergenţa şirurilor aproximante $(x_n), (y_n)$ în noul context. Presupunem următoarele *proprietăţi de legătură* între d şi relaţia de ordine (aceste proprietăţi sunt satisfăcute în orice spaţiu Banach ordonat cu con normal atât de metrica normei, cât şi de *metrica (extinsă) Thompson*):

(i) d este *interval-semi-monotonă*, i.e., există $\gamma \geq 1$ astfel încât $d(x', y') \leq \gamma d(x, y)$ pentru orice $x, x', y, y' \in X$ cu $x \leq x' \leq y' \leq y$ (Definiţia 3.3.1);

(ii) orice interval din X este închis în raport cu şirurile monotone.

Pentru a obţine un unic punct fix pentru operatorul A în intervalul $[x_0, y_0]$ iar acesta să fie limita (în raport cu d) a şirurilor (x_n) şi (y_n), arătăm că este necesar şi suficient (Teorema 3.3.24) ca
$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0, \tag{10}$$
sau, echivalent,
$$\lim_{n\to\infty} (d * A^n)(x_0, y_0) = 0.$$
În caz afirmativ, dacă x^* notează unicul punct fix a lui A în $[x_0, y_0]$ atunci, pentru orice $x, y \in [x_0, y_0]$, şirul $(A^n(x, y))$ este convergente la x^* (descriem acest comportament introducând noţiunea de operator m-Picard, vezi Definiţia 3.3.16). Mai mult, $\sup x_n = \inf y_n = x^*$, astfel că toate concluziile din contextul anterior rămân valide. De notat că nu se cer condiţii de continuitate sau compacitate pentru A.

Investigăm şi cazul când (x_0, y_0) nu este o sub-supra soluţie pentru (1) şi arătăm că această condiţie restrictivă nu este esenţială, dacă suntem dispuşi să renunţăm la monotonia şirurilor aproximante şi cerem ca A să fie continuu (Teorema 3.3.20, Corolarul 3.3.21). În particular, studiem cazul când după un număr de iteraţii se obţine o sub-supra soluţie pentru (1) (în Teorema 3.3.26).

În esenţă, toate rezultatele de punct fix din această secţiune exprimă condiţii asupra operatorului A care sunt suficiente pentru a asigura (10). În această direcţie, studiem cazul când A este de tip contractiv în raport cu m-compunerea, i.e.,
$$d(A(x, y), A(y, x)) \leq \Psi(x, y)$$
sau, echivalent,
$$(d * A)(x, y) \leq \Psi(x, y)$$
unde Ψ satisface anumite condiţii (Teorema 3.3.29 şi Corolarul 3.3.38). În particular, arătăm în Corolarul 3.3.39 că dacă A satisface o condiţie de tip Meir-Keeler (a se vedea [63]), atunci (10) este satisfăcută pentru orice sub-supra soluţie (x_0, y_0) cu $d(x_0, y_0) < \infty$.

Un caz special este cel când Ψ este o funcţie radială, i.e., când A satisface o condiţie de tip Φ-contracţie, similară cu cea dată de Boyd şi Wong [15] pentru operatori de o variabilă, şi anume:
$$(d * A)(x, y) \leq \Phi(d(x, y)). \tag{11}$$
Demonstrăm (în Teorema 3.3.47) că dacă (11) este satisfăcută şi

$(*)$ pentru orice $t > 0$, există $\tau > 0$ astfel încât $\Phi(s) < t$ pentru orice $s \in [t, t + \tau)$

atunci (10) este verificată pentru orice sub-supra soluţie (x_0, y_0) cu $d(x_0, y_0) < \infty$.

Clasa funcţiilor Φ ce verifică $(*)$ este studiată în Propoziţiile 3.3.48, 3.3.49, 3.3.50, 3.3.54, Corolarul 3.3.52, Exemplul 3.3.46. Arătăm, spre exemplu, că dacă $\Phi(t) < t$ pentru orice $t > 0$ şi Φ este superior semicontinuă la dreapta, atunci Φ satisface $(*)$.

O scurtă comparaţie între rezultatele proprii şi câteva rezultate recente de punct fix pentru operatori mixt-monotoni în spaţii metrice ordonate (a se vedea Agarwal et al. [1], Ćirić et al. [25], Gnana Bhaskar şi Lakshmikantham [30], Lakshmikantham şi Ćirić [54], Nieto şi Rodríguez-López [69] şi [70]) pot fi găsite în Secţiunea 3.5.

§3. O parte importantă a tezei constă din teoreme de punct fix pentru operatori mixt-monotoni în spaţii liniare ordonate, utilizând *metrica Thompson* (cf. Thompson [102]) şi rezultatele obţinute în spaţii metrice ordonate. Abordarea nu este nouă şi poate fi găsită în lucrările lui Opoĭtsev [74] şi Chen [22] pentru cazul spaţiilor Banach ordonate.

Dacă (X, K) este un spaţiu liniar ordonat (a se vedea Secţiunea 1.6) şi $x, y \in K$, atunci (semi)metrica extinsă Thompson între x şi y este definită prin
$$\rho(x, y) = \inf \{s \geq 0 : \mathrm{e}^{-s} x \leq y \leq \mathrm{e}^{s} x\},$$
unde $\inf \emptyset = +\infty$. Dacă $\rho(x, y)$ este finită, atunci x şi y se numesc *legate* sau *cvasi-comparabile* (în original: *linked*, conform Thompson [102]) - aceasta este echivalentă cu existenţa scalarilor $0 < \mu \leq \lambda$ astfel încât $\mu x \leq y \leq \lambda x$. Această relaţie este o echivalenţă care

[2] O metrică extinsă are aceeaşi definiţie cu cea a unei metrici obişnuite, cu diferenţa că poate lui şi valoarea $+\infty$ (vezi *Secţiunea 1.4*). Un exemplu este *metrica (extinsă) Thompson* studiată în detaliu în *Capitolul 2* şi folosită în *Capitolul 3*.

desparte K în componente disjuncte (numite *părţi*), astfel că ρ este o semimetrică pe orice parte a conului K; în plus, dacă K este aproape arhimedean, atunci ρ este o metrică pe fiecare parte a lui K (Propoziţia 2.1.2).

Capitolul 2 este dedicat în întregime studiului metricii Thompson, cu un interes special acordat completitudinii. Una dintre concluziile care pot fi trase din acest studiu separat este că putem aplica teoremele de punct fix din Secţiunea 3.3 la spaţiul metric ordonat (K, ρ), în condiţiile în care K este arhimedean şi autocomplet (Definiţia 2.1.2).

În această direcţie, singura preocupare rămasă este de exprima condiţiile din teoremele de punct fix fără utilizarea explicită a lui ρ. Spre exemplu, se arată că dacă Y este o parte a lui K şi $A : Y^2 \to K$ este un operator mixt-monoton, atunci condiţia de tip Φ-contracţie (11) în raport cu ρ, împreună cu $(*)$, pot fi obţinute presupunând că

$$A(\lambda x, x) \geq \varphi(\lambda) A(x, \lambda x) \text{ pentru orice } \lambda \in (0,1),\ x \in Y \tag{12}$$

unde $\varphi : (0,1) \to (0,1]$ este astfel încât

$(*')$ pentru orice $t \in (0,1)$, există $\tau > 0$ astfel încât $\varphi(s) > t$ pentru orice $s \in (t-\tau, t]$.

Un rezultat similar, în contextul spaţiilor Banach ordonate, poate fi găsit la Chen [22].

Clasa funcţiilor ce satisfac condiţia $(*')$ este studiată în Propoziţiile 3.4.18, 3.4.21, 3.4.22, 3.4.23, 3.4.25, Corolarul 3.4.24. Se arată, spre exemplu, că dacă $\varphi(t) > t$ pentru orice $t \in (0,1)$ şi φ este inferior semicontinuă la stânga, atunci φ satisface $(*')$. Merită menţionat faptul că $(*')$ poate fi slăbită, cerând doar ca $\varphi(t) > t$ pentru orice $t \in (0,1)$, dacă (12) se înlocuieşte cu

$$A(\lambda x, y) \geq \varphi(\lambda) A(x, \lambda y)$$
$$\text{pentru orice } \lambda \in (0,1),\ x, y \in Y \text{ liniar dependente.} \tag{13}$$

În acest fel, se obţin rezultate apropiate de cele ale lui Opoĭtsev [74].

§4. Toate rezultatele de punct fix obţinute în spaţii liniare ordonate folosind metrica Thompson rămân adevărate în cazul spaţiilor Banach ordonate cu con normal, întrucât normalitatea conului asigură că ρ este completă (Teorema 2.4.6). În plus, ρ-convergenţa este mai puternică decât convergenţa în normă (Teorema 2.4.6), ceea ce înseamnă că operatorii m-Picard în raport cu ρ sunt m-Picard şi în raport cu norma.

În acest mod, regăsim rezultatele lui Opoĭtsev [74], [75], Guo [32], Liang et al. [57], Liu et al. [59], Xu şi Jia [113], Xu şi Yuan [111], [112], Wu şi Liang [110], Li et al. [56] drept cazuri particulare sau versiuni mai slabe ale rezultatelor proprii din *Secţiunea 3.4*.

În acelaşi context, putem aplica rezulatele de punct fix din spaţii metrice ordonate la orice spaţiu Banach ordonat cu con normal, unde metrica este cea indusă de normă (normalitatea conului asigură că norma este semimonotonă, deci că d este interval-semi-monotonă). Astfel, se obţin rezultate de punct fix ce nu sunt restricţionate la con.

§5. Arătăm în Secţiunea 3.5 că este posibil să extindem metodele şi rezultatele obţinute pentru operatori mixt-monotoni la o clasă mai largă de operatori, în contextul spaţiilor liniare ordonate. Această idee apare într-o formă simplificată în lucrările lui Shuvar [96], Guo şi Lakshmikantham [34].

Dacă (X, K) este an spaţiu liniar ordonat şi $A, B : X^2 \to X$, atunci se defineşte

$$B \circledast A := B * A - B + P : X^2 \to X,$$

unde P este proiecţia canonică a lui X^2 pe X (i.e., $P(x, y) = x$). Arătăm în Propoziţia 3.5.4 că A şi $B \circledast A$ au aceleaşi puncte fixe (cuplate) dacă B este m-injectiv (vezi Definiţia 3.5.3). Presupunând mai departe că $B \circledast A$ este mixt-monoton, rezultă că punctele fixe ale lui A pot fi studiate indirect prin intermediul operatorului mixt-monoton $B \circledast A$.

Spre exemplu, alegând $B(x, y) = \alpha x$ ($\alpha > 0$), se poate vedea că orice teoremă de punct fix pentru operatori mixt-monotoni rămân valabile dacă cerem ca operatorul

$$B \circledast A = \alpha A(x, y) + (1-\alpha)x$$

să fie mixt-monoton, în loc să cerem ca A să fie mixt monoton.

§6. O aplicaţie abstractă a rezultatelor din Capitolul 3 este prezentată în *Secţiunea 4.3* unde se studiază sistemul

$$x^i = T_i(x^1, x^2, \ldots, x^N), \quad i \in \{1, \ldots, N\}$$
$$x = (x^1, x^2, \ldots, x^N) \in U$$

unde $N \geq 1$, $\{(X_i, \leq) : i \in \{1, 2, \ldots, N\}\}$ este o familie de mulţimi ordonate, $X := X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_N$ e spaţiul produs, ordonat în raport cu relaţia de ordine $x = (x^1, x^2, \ldots, x^N) \leq (y^1, y^2, \ldots, y^N) = y$ *dacă şi numai dacă* $x^i \leq y^i$ pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$,$U_i \subseteq X_i$ ($i \in \{1, 2, \ldots, N\}$), $U := U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_N \subseteq X$, $\{T_i : U \to X_i : i \in \{1, 2, \ldots, N\}\}$ o familie de operatori de N variabile şi $T = (T_1, T_2, \ldots, T_N) : U \to X$ iar T_i este *parţial monoton* pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$, i.e., T_i este monoton (crescător sau descrescător) în raport cu fiecare variabilă independent. Evident, sistemul poate fi văzut ca problemă de punct fix pe mulţimea U pentru operatorul T. Idea este de a demonstra că T este heterotonic, i.e., că există un operator mixt-monoton $A : U^2 \to X$ (pe care îl construim efectiv) astfel încât

$$A(x, x) = T(x) \quad \text{pentru orice } x \in U.$$

În acest mod, putem stabili o echivalenţă între sistemul considerat şi problema de punct fix pentru A pe mulţimea U.

*

Teza este structurată după cum urmează.

Capitolul 1 este un capitol preliminar cu scopul de a oferi un punct central de referinţă pentru noţiunile, notaţiile şi rezultatele (cunoscute) ce se folosesc în prezenta teză, astfel încât să se realizeze o tratare unitară a tuturor subiectelor şi ideilor ce fac obiectul tezei. Lucrările de referinţă pentru acest capitol sunt cele ale lui Amann [4], Blumenthal [14], Deimling [27], Guo et al. [31], Edelstein [29], Jameson [40], Jung [41], Krasnosel′skiĭ [46], Luxemburg [61], Namioka [66], Nussbaum [71], Schaefer [93], Thompson [102], Wong [107].

Capitolul 2 este dedicat în întregime unui studiu detaliat al metricii introduse de A. C. Thompson în 1963 (cf. [102]). Acest studiu este motivat de rolul important pe care îl are această metrică în rezultatele din capitolul următor.

În cea mai mare parte, rezultatele din acest capitol sunt rezultate proprii - rezultatele care nu îmi aparţin au fost referite către autorii lor. Cele mai importante dintre rezultatele personale sunt Teoremele 2.3.21, 2.4.5, 2.4.6, Propoziţiile 2.2.4, 2.2.30 şi Corolariile 2.2.7, 2.2.16, 2.3.23, 2.3.24, 2.4.7. Lucrările de referinţă pentru acest capitol sunt cele ale lui Amann [4], Andô [5], Bauer şi Bear [9], Bear [10] şi [11], Bear şi Weiss [12], Birkhoff [13], Chen [23], Deimling [27], Jameson [40], Krasnosel′skiĭ [46], Krause şi Nussbaum [51], Namioka [66]), Nussbaum [71], Nussbaum şi Walsh [72], Ng [68], Opoĭtsev [75], Peressini [76], Schaefer [93], Stecenko [98], Thompson [102], Turinici [103] şi [104], Wong [107], Zabreĭko et al. [115].

Capitolul este structurat în cinci secţiuni, fiecare dintre acestea tratând câte un aspect al metricii Thompson. *Secţiunea 2.1* este introductivă. *Secţiunea 2.2* tratează câteva dintre proprietăţile metricii Thompson, grupate pe categorii (monotonie, convexitate, topologice). Completitudinea metricii este studiată separat, în detaliu, în *secţiunile 2.3* şi *2.4*. *Secţiunea 2.5* cuprinde o scurtă prezentare a generalizărilor metricii Thompson.

Capitolul 3 este dedicat în întregime teoriei punctului fix pentru operatori mixt-monotoni, aspecte descrise pe scurt pe parcursul prezentei introduceri. *Secţiunea 3.1* face introducerea în subiect. *Secţiunea 3.2* prezintă metoda iteraţiilor monotone pentru operatori mixt-monotoni în contextul cel mai general, cel al mulţimilor ordonate. *Secţiunea 3.3* prezintă rezultate de punct fix în spaţii metrice ordonate. *Secţiunea 3.4* acoperă cazul spaţiilor liniare ordonate, unde rezultatele de punct fix sunt obţinute din folosind metrica Thompson şi rezultatele din secţiunea anterioară. Cazul particular al spaţiilor Banach ordonate este descris pe scurt în *Secţiunea 3.5*, împreună şi cu alte aspecte importante.

Cu puţine excepţii, rezultatele din acest capitol sunt noi. Cele mai importante sunt Teoremele 3.2.13, 3.2.14, 3.2.18, 3.2.19, 3.3.24, 3.3.26, 3.3.47, 3.4.19, 3.4.20, 3.4.26, 3.4.28, 3.4.29, 3.4.30, 3.4.31, 3.4.32, 3.4.33, 3.4.34, 3.5.1, Propoziţiile 3.3.17, 3.3.49, 3.4.21, Lema 3.2.1 şi Corolariile 3.3.21, 3.3.38, 3.3.39, 3.3.52. Unele dintre acestea (sau rezultate similare) au apărut în [89], [90], [91], [92].

În **Capitolul 4** aplicăm rezultatele de punct fix din Capitolul 3 la câteva clase de probleme neliniare exprimate ca ecuaţii de punct fix pentru operatori mixt-monotoni. Unele rezultate din acest capitol (sau altele similare) au fost deja publicate în [91], [92]. Cele mai importante rezultate personale sunt Teoremele 4.1.9, 4.1.10, 4.2.1, 4.2.2, 4.2.5, 4.2.6.

1

Preliminarii

Scopul acestui capitol preliminar este de a oferi un punct central de referinţă pentru noţiunile, notaţiile şi rezultatele (cunoscute) ce se folosesc în prezenta teză, astfel încât să se realizeze o tratare unitară a tuturor subiectelor şi ideilor ce fac obiectul tezei. Facem referire, pentru mai multe detalii către lucrările lui Amann [4], Blumenthal [14], Deimling [27], Guo et al. [31], Edelstein [29], Jameson [40], Jung [41], Krasnosel′skiĭ [46], Luxemburg [61], Namioka [66], Nussbaum [71], Schaefer [93], Thompson [102], Wong [107].

1.1 Mulţimi ordonate

1.2 Spaţii semimetrice

1.3 Spaţii semimetrice extinse

Printr-o semimetrică extinsă se va înţelege o semimetrică ce poate lua şi valoarea $+\infty$. Dacă (X, d) este un spaţiu semimetric extins, atunci relaţia $\asymp$ dată de $x \asymp y$ *dacă şi numai dacă* $d(x, y) < \infty$ este o echivalenţă ce partiţionează X în componente, numite *componente semimetrice*. Dacă $x \in X$, atunci $X(x)$ va nota componento semimetricăă a lui X ce îl conţine pe x. Completitudinea în acest caz se defineşte la fel ca în cazul finit. Conform lui Jung [41, p. 114],

P 6 Un spaţiu semimetric extins este complet *dacă şi numai dacă* toate componentele sale semimetrice sunt complet.

Un exemplu important de spaţiu semimetric extins este cel dat de un con (într-un spaţiu liniar peste $\mathbb{R}$) în care se defineşte *semimetrica extinsă Thompson* (studiată în Capitolul 2). Mai multe detalii se pot consulta în lucrările lui Jung [41] şi Luxemburg [61].

1.4 Spaţii metrice ordonate

În mod uzual, *un spaţiu (semi)metric ordonat* reprezintă simpla asociere dintre o (semi)metrică (d) şi o relaţie de ordine $(\leq)$ pe o mulţime (X) şi se notează prin $(X, d, \leq)$ sau prin $(X, \leq, d)$. Este clar că acest concept poate cuprinde şi cazul când d este o (semi)metrică extinsă, ceea ce va fi şi convenţia folosită pe parcursul întregii teze.

Nu există o acceptare generală asupra *legăturilor* care ar trebui considerate între metrica extinsă d şi relaţia de ordine $\leq$. Majoritatea acestor presupuneri suplimentare privesc *proprietăţi de închidere* ale relaţiei de ordine relativ la topologia indusă de d pe X, cum ar fi:

(C_1) $\leq$ este închisă în X^2, i.e., dacă $(x_n), (y_n)$ sunt şiruri convergente în X astfel încât $x_n \leq y_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, atunci $\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n$;

(C_2) $[x)$ şi $(x]$ sunt închise, pentru orice $x \in X$, i.e., dacă $x \in X$ şi (x_n) este un şir convergent astfel încât $x_n \geq x$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ (sau $x_n \leq x$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$), atunci $\lim_{n\to\infty} x_n \geq x$ (sau $\lim_{n\to\infty} x_n \leq x$, respectiv);

(C_3) Orice interval în X este închis, i.e, dacă $x, y \in X$ astfel încât $x \leq y$ şi (x_n) este un şir convergent din $[x, y]$, atunci $\lim_{n\to\infty} x_n \in [x, y]$;

sau versiuni mai *slabe* (notate aici prin $(C_1'), (C_2'), (C_3')$) care cer închiderea doar prin şiruri monotone.

De asemenea, luăm în considerare şi următoarele proprietăţi:

(C_4') Orice şir crescător (respectiv, descrescător) şi convergent din X este majorat (respectiv, minorat) de limita sa.

(C_5') Orice şir monoton şi convergent din X este mărginit în ordine.

P 8 $(C_1') \Leftrightarrow (C_2') \Leftrightarrow \big((C_3')$ şi $(C_5')\big) \Rightarrow (C_4') \Rightarrow (C_5')$.

1.5 Spaţii liniare

Spaţiile liniare din această teză sunt considerate peste corpul numerelor reale $\mathbb{R}$. Elementul nul al spaţiului se va nota cu θ şi se vor considera notaţiile şi terminologia standard.

Dacă $x \in X$ astfel încât $-x + U$ este absorbantă, atunci x este numit *punct intern* al lui U şi U este numită *radială în* x. Mulţimea punctelor interne ale lui U se notează cu U° şi este numită *interiorul linial* (sau *nucleul*) lui U. Mulţimea $X \setminus (X \setminus U)^\circ$ este numită *închiderea linială* a lui U şi este notată prin U^c. Dacă $U = U^\circ$, atunci U se numeşte *linial deschisă*. Dacă $U = U^c$, atunci U este numită *linial închisă*.

O mulţime ℓ de elemente din X este numită *linie* dacă există $x \in X$ astfel încât $x + \ell$ este un subspaţiu unidimensional al lui X. U este numită *linial mărginită* dacă $\ell \cap U$ este mărginită (în ℓ) pentru orice line ℓ din X.

U este numită *stea*, *stea punctată*, *balansată*, *pozitiv omogenă*, *strict pozitiv omogenă*, sau *omogenă* dacă incluziunea $\lambda U \subseteq U$ are loc pentru orice λ în, respectiv, $[0, 1]$, $(0, 1]$, $[-1, 1]$, $[0, \infty)$, $(0, \infty)$, $\mathbb{R}$.

1.6 Spaţii liniare ordonate

Fie X un spaţiu liniar. O submulţime K a lui X este numită *con* dacă este convexă, pozitiv omogenă şi verifică $K \cap (-K) = \{\theta\}$. K induce pe X o relaţie de ordine compatibilă cu structura liniară, dată de: $x \leq y$ *dacă şi numai dacă* $y - x \in K$.

Presupunem în continuare că (X, K) este un spaţiu liniar ordonat. Conul K este numit:

1. *linial solid* dacă $K^\circ \neq \emptyset$;
2. *generator* (sau *reproducător*) dacă $X = K - K$;
3. *arhimedean* dacă $x \leq \theta$ oricând există $y \in X$ astfel încât $nx \leq y$ pentru toţi $n \in \mathbb{N}$.
4. *aproape arhimedean* dacă $x = \theta$ oricând există $y \in X$ astfel încât $-y \leq nx \leq y$ pentru toţi $n \in \mathbb{N}$.

Dacă K este linial solid, atunci orice element din K° este numit *element unitate* relativ la ordine.

P 20 Dacă K este linial solid, atunci este generator.

P 24 K este aproape arhimedean *dacă şi numai dacă* orice mulţime mărginit în ordine este linial mărginită *dacă şi numai dacă* K nu include linii *dacă şi numai dacă* K^c este con.

P 25 K este arhimedean *dacă şi numai dacă* K este linial închisă.

Două elemente x, y din K se numesc *legate* sau *cvasi-comparabile* (*linked*, cf. Thompson [102]) dacă există $0 < \mu \leq \lambda$ astfel încât $\mu x \leq y \leq \lambda x$ şi notăm această relaţie cu $x \sim y$. Aceasta este o echivalenţă care partiţionează conul K în componente disjuncte (numite *părţi ale conului*) şi notăm prin $K(u)$ clasa de echivalenţă (partea conului) ce îl conţine pe $u \in K$.

P 26 $K(\theta) = \{\theta\}$.

P 27 Dacă K este linial solid, atunci K° este o parte a lui K.

P 28 Orice parte a lui K este convexă, convexă relativ la ordine, închisă faţă de adunare şi strict pozitiv omogenă.

1.7 Spaţii normate ordonate

Presupunem în continuare că $(X, K, \|\cdot\|)$ este un spaţiu normat ordonat. Relativ la topologia normei, $\mathring{U}$ şi $\overline{U}$ notează, respectiv, interiorul şi închiderea submulţimii U în X.

Conul K este numit:

1. *solid* dacă $\mathring{K} \neq \emptyset$;
2. *total* dacă $X = \overline{K - K}$;
3. *regular* dacă orice şir crescător care este majorat este convergent;
4. *tare regular* dacă orice şir crescător care este mărginit în normă este convergent;
5. *normal* dacă norma este semi-monotonă, i.e., există $\gamma > 0$ astfel încât $\|x\| \leq \gamma \|y\|$ pentru orice $x, y \in K$, $x \leq y$.

P 32 Dacă K este solid, atunci este linial solid şi $\mathring{K} = K^\circ$.

P 33 Dacă K este generator, atunci este total.

P 34 Dacă K este tare regular, atunci este regular.

P 35 Dacă K este regular, atunci este normal.

X este numit (cf. Wong [107]) *fundamental* σ*-(o) complet* (respectiv, *monoton secvenţial complet*) dacă orice şir Cauchy crescător în X are supremum (respectiv, are limită).

1.8 Topologia mărginirii în ordine pe un spaţiu liniar ordonat

Topologia mărginirii în ordine τ_b pe un spaţiu liniar ordonat (X, K) este topologia local convexă absorbantă generată de familia tuturor intervalelor. Altfel spus, o mulţime convexă este o τ_b-vecinătate a originii *dacă şi numai dacă* absoarbe orice interval.

P 44 τ_b este cea mai mare topologie local convexă pentru care toate intervalele sunt topologic mărginite.

P 45 Dacă K este linial solid, atunci τ_b este topologia seminormabilă indusă de oricare dintre *seminormele unitate* $|\cdot|_u$ $(u \in K^\circ)$ (vezi Secţiunea 1.9) şi $\overset{\circ}{K} = K^\circ$.

P 46 Dacă K este generator şi τ_0 este o topologie metrizabilă completă pe X astfel încât K este închisă, atunci $\tau_b \subseteq \tau_0$.

Presupunem în continuare că $(X, K, \|\cdot\|)$ este un spaţiu normat ordonat. Legătura dintre topologia normei (τ) şi τ_b este dată de următoarele consecinţe ale proprietăţilor $(P\,44)$–$(P\,46)$.

P 47 K este normal *dacă şi numai dacă* $\tau \subseteq \tau_b$.

P 48 Dacă $(X, \|\cdot\|)$ este complet şi K este generator, atunci $\tau_b \subseteq \tau$.

P 49 Dacă $(X, \|\cdot\|)$ este complet şi K este un con normal şi solid, atunci $\tau = \tau_b$ şi norma pe X este echivalentă cu oricare dintre normele unitate $|\cdot|_u$ $(u \in K^\circ)$. Reciproc, dacă $\tau = \tau_b$ şi K este linial solid, atunci K este normal şi solid.

1.9 Seminormele unitate într-un spaţiu liniar ordonat

Fie (X, K) un spaţiu liniar ordonat. Fixăm $u \in K \setminus \{\theta\}$ şi fie $X_u = \{x \in X : [-u, u] \text{ absoarbe pe } x\}$, $K_u = X_u \cap K$.

P 50 X_u este un subspaţiu liniar al lui (X, K) ce include intervalul $[-u, u]$ şi are pe u ca element unitate.

P 52 Dacă $v \in K \setminus \{\theta\}$, atunci $X_v = X_u$ *dacă şi numai dacă* $v \sim u$.

P 53 $X_u = X$ *dacă şi numai dacă* $u \in K^\circ$.

P 54 $K_u = \bigcup\{[\theta, \lambda u] : \lambda \geq 0\}$

P 55 ${K_u}^\circ = K(u)$.

Funcţionala $|\cdot|_u$ definită pe X_u prin $|x|_u = \inf\{\lambda \geq 0 : -\lambda u \leq x \leq \lambda u\}$ este funcţionala Minkowski asociată mulţimii convexe, balansate, absorbante $[-u, u]$, deci este o seminormă pe X_u, numită *u-seminorma*.

P 56 Dacă $v \sim u$, atunci $|\cdot|_u$ şi $|\cdot|_v$ sunt echivalente.

P 58 $|\cdot|_u$ este monotonă, i.e., $\theta \leq x \leq y$ implică $|x|_u \leq |y|_u$.

P 59 K_u este generator şi normal.

P 60 $|\cdot|_u$ este o normă pe X_u *dacă şi numai dacă* K_u este aproape arhimedean.

P 61 K_u este închisă în X_u *dacă şi numai dacă* K_u este linial închisă *dacă şi numai dacă* K_u este arhimedean.

Presupunem în continuare că K_u este arhimedean.

P 62 $(X_u, K_u, |\cdot|_u)$ este un spaţiu normat ordonat.

P 64 $[-u, u]$ este bila unitate închisă din X_u.

P 65 K_u este $|\cdot|_u$-solid, deci $\overset{\circ}{K_u} = {K_u}^\circ = K(u)$.

P 66 Topologia u-normei pe X_u este topologia mărginirii în ordine.

P 67 Dacă K este arhimedean, atunci orice parte Q a lui $K \setminus \{\theta\}$ are asociat un subspaţiu liniar al lui (X, K) care este un spaţiu normat ordonat relativ la oricare dintre u-normele (echivalente) $(u \in Q)$ şi conul este solid (deci generator) şi normal. În plus, Q este interiorul (topologic şi lineal) al conului pozitiv în spaţiul normat corespondent.

P 68 Dacă K este arhimedean şi linial solid, atunci (X, K) devine un spaţiu normat ordonat relativ la oricare dintre u-norme, cu $u \in K^\circ$. Adiţional, topologia lui X este topologia mărginirii în ordine, K este normal (orice u-normă este monotonă) şi solid ($\overset{\circ}{K} = K^\circ$).

2

Metrica Thompson

Scopul acestui capitol este de a realiza un studiu detaliat al metricii introduse de A. C. Thompson în 1963 (cf. [102]). Acest studiu este motivat de rolul important pe care îl are această metrică în rezultatele din capitolul următor.

În cea mai mare parte, rezultatele din acest capitol sunt rezultate proprii - rezultatele care nu îmi aparţin au fost referite către autorii lor. Lucrările de referinţă pentru acest capitol sunt cele ale lui Amann [4], Andô [5], Bauer şi Bear [9], Bear [10] şi [11], Bear şi Weiss [12], Birkhoff [13], Chen [23], Deimling [27], Jameson [40], Krasnosel′skiĭ [46], Krause şi Nussbaum [51], Namioka [66]), Nussbaum [71], Nussbaum şi Walsh [72], Ng [68], Opoĭtsev [75], Peressini [76], Schaefer [93], Stecenko [98], Thompson [102], Turinici [103] şi [104], Wong [107], Zabreĭko et al. [115].

În cele ce urmează, X va nota un spaţiu liniar ordonat având conul K, dacă nu se specifică altfel.

2.1 Concepte şi rezultate introductive

Metrica Thompson ([102]) (notată aici cu ρ) este definită între oricare două elemente cvasi-comparabile $x, y \in K$ prin

$$\rho(x, y) = \inf \{s \geq 0 : \mathrm{e}^{-s} x \leq y \leq \mathrm{e}^{s} x\}. \tag{2.1.1}$$

Propoziţia 2.1.2 *ρ este o semimetrică pe fiecare parte a lui K. Mai mult, ρ este o metrică pe fiecare parte a lui K* dacă şi numai dacă *K este aproape arhimedean.*

Observaţia 2.1.3 Este convenabil să definim ρ pentru orice pereche de elemente din K, prin $\rho(x, y) = \infty$ pentru orice $x, y \in K$ ce nu sunt cvasi-comparabile (cf. Krause [51]) şi folosind convenţia că $\inf \emptyset = \infty$, (2.1.1) rămâne adevărată. În acest fel, ρ devine o *(semi)metrică extinsă* pe K şi $x \sim y$ *dacă şi numai dacă* $\rho(x, y) < \infty$. Deşi ρ nu este o metrică pe K în adevăratul sens al cuvântului, vom continua să o numim metrică.

Observaţia 2.1.5 Definiţia lui $\rho(x, y)$ depinde doar de relaţia de ordine de pe subspaţiul liniar generat de $\{x, y\}$. Acest fapt asigură că dacă x şi y sunt văzute ca elemente într-un subspaţiu liniar Y al lui X, atunci $\rho(x, y)$ este aceeaşi atât în X cât şi în Y (presupunând, bineînţeles, că Y moşteneşte relaţia de ordine de pe X).

Exemplul 2.1.6 Dacă $X = \mathbb{R}$ şi $K = \mathbb{R}_+$, atunci părţie lui K sunt $\{0\}$ şi $(0, \infty)$, iar $\rho(x, y) = |\ln x - \ln y|$.

2.2 Proprietăţile metricii Thompson

În această secţiune studiem proprietăţile elementare ale metricii Thompson, în cazul general al spaţiilor liniare ordonate. De notat că majoritatea rezultatelor sunt adevărate fară a presupune vreo proprietate de tip arhimedean asupra lui K.

2.2.1 Proprietăţi de monotonie

Propoziţia 2.2.4 *Fie $x, x', y, y' \in K$ astfel încât $x \leq x'$ şi $y \geq y'$. Atunci $\rho(x', x' + y') \leq \rho(x, x + y)$.*

Corolarul 2.2.6 *Fie $x, x', y, y' \in K$ astfel încât $x \leq y \leq x' \leq y'$ şi $y' - x' \leq y - x$. Atunci $\rho(x', y') \leq \rho(x, y)$.*

Corolarul 2.2.7 *Fie $x, x', y, y' \in K$ astfel încât $x \leq x' \leq y' \leq y$. Atunci $\rho(x', y') \leq \rho(x, y)$.*

Corolarul 2.2.9 (Bauer and Bear [9]) *Fie $x, x', y, y' \in K$ şi $\lambda, \mu > 0$. Atunci*

$$\rho(\lambda x + \mu y, \lambda x' + \mu y') \leq \max \left\{\rho(x, x'), \rho(y, y')\right\}.$$

Corolarul 2.2.10 (Bauer and Bear [9]) *Fie $x, y, z \in K$. Atunci $\rho(x + z, y + z) \leq \rho(x, y)$.*

2.2.2 Proprietăţi de convexitate

Propoziţia 2.2.11 *ρ este cvasiconvexă în raport cu fiecare dintre argumente.*

Propoziţia 2.2.13 *Fie $u \in K$, $x, y \in K(u)$ şi $t \in [0, 1]$. Atunci*

$$\rho((1-t)x + ty, u) \leq \ln\left((1-t)\mathrm{e}^{\rho(x,u)} + t\mathrm{e}^{\rho(y,u)}\right). \tag{2.2.1}$$

Observaţia 2.2.15 Altfel spus, Propoziţia 2.2.13 afirmă că e^{ρ} este convexă în raport cu fiecare dintre argumente.

Corolarul 2.2.16 *Fie $x, y \in K$ astfel încât $x \sim y$ şi $s, t \in [0, 1]$. Atunci*

$$\rho((1-t)x + ty, (1-s)x + sy) \leq \ln\left(|t-s|\,\mathrm{e}^{\rho(x,y)} + 1 - |t-s|\right). \tag{2.2.2}$$

2.2.3 Proprietăţi topologice

Propoziţia 2.2.21 (Bauer and Bear [9]) *Operatorii $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ din $(0, \infty) \times K$ în K şi $(x, y) \mapsto x + y$ din K^2 în K sunt continui în raport cu ρ.*

Propoziţia 2.2.22 (Bauer and Bear [9]) *Fie Q o parte a lui K. Atunci operatorul $(\lambda, x, y) \mapsto \lambda x + (1-\lambda)y$ din $[0, 1] \times Q^2$ în Q este continuu în raport cu ρ.*

Propoziţia 2.2.24 *Dacă K este arhimedean şi $x \in K$, atunci $[x)$ şi $[\theta, x]$ sunt ρ-închise.*

Observaţia 2.2.25 Propoziţia 2.2.24 afirmă că spaţiul metric ordonat $(K, \rho, \leq)$ satisface proprietatea (C_2).

Propoziţia 2.2.26 *Fie $x, y \in K$ astfel încât $x \leq y$. Atunci intervalul $[x, y]$ este*

1. *ρ-mărginit* dacă şi numai dacă *$x \sim y$;*
2. *ρ-închis dacă K este arhimedean.*

2.2.4 Legătura dintre metrica Thompson şi seminormele unitate

Propoziţia 2.2.30 *Fie $u \in K \setminus \{\theta\}$ şi $x, y \in K(u)$. Atunci*

1. $\rho(x, y) = \ln\max\left\{|x|_y, |y|_x\right\}$*;*
2. $\rho(x, y) \geq |\ln|x|_u - \ln|y|_u|$*;*
3. $|x|_u \leq \mathrm{e}^{\rho(x,y)}|y|_u$ *(şi* $|y|_u \leq \mathrm{e}^{\rho(x,y)}|x|_u$*);*
4. $\mathrm{e}^{-\rho(x,u)} \leq |x|_u \leq \mathrm{e}^{\rho(x,u)}$ *(şi* $\mathrm{e}^{-\rho(x,u)} \leq |u|_x \leq \mathrm{e}^{\rho(x,u)}$*);*
5. $|u|_x \leq \mathrm{e}^{\rho(x,y)}|u|_y$ *(şi* $|u|_y \leq \mathrm{e}^{\rho(x,y)}|u|_x$*);*
6. $\rho(x, y) \leq \ln\left(1 + |x-y|_u \cdot \max\left\{|u|_x, |u|_y\right\}\right)$*;*
7. $\left(\mathrm{e}^{\rho(x,y)} - 1\right) \cdot \min\left\{|u|_x^{-1}, |u|_y^{-1}\right\} \leq |x-y|_u \leq \left(2\mathrm{e}^{\rho(x,y)} - \mathrm{e}^{-\rho(x,y)} - 1\right) \cdot \min\{|x|_u, |y|_u\}$*;*
8. $\left(1 - \mathrm{e}^{-\rho(x,y)}\right) \cdot \max\left\{|u|_x^{-1}, |u|_y^{-1}\right\} \leq |x-y|_u$*;*
9. $|x-y|_x \geq 1 - \mathrm{e}^{-\rho(x,y)}$ *(şi* $|x-y|_y \geq 1 - \mathrm{e}^{-\rho(x,y)}$*).*

Următorul rezultat este o consecinţă a Propoziţiei 2.2.30. Pentru rezultate similare se poate consulta Opoïtsev [75], Stecenko [98], Bauer şi Bear [9, Theorem 4].

Teorema 2.2.31 *Metrica Thompson şi u-(semi)norma sunt topologic echivalente pe $K(u)$.*

2.3 Completitudinea metricii Thompson

Deoarece ρ este definită în orice spaţiu liniar ordonat, este de aşteptat ca să exprimăm completitudinea metricii în termenii proprietăţilor relaţiei de ordine în raport cu structura liniară. Un astfel de rezultat însă nu există. Scopul acestei secţiuni este de a enunţa şi demonstra un astfel de rezultat. Pentru a enunţa şi demonstra rezultatele principale, e nevoie de introducerea unor noţiuni noi şi stabilirea câtorva proprietăţi.

2.3.1 Şiruri auto-mărginite şi mulţimi auto-complete într-un con

Definiţia 2.3.1 Un şir (x_n) din K este numit:

1. *auto-mărginit superior în ordine* (sau, simplu, *auto-mărginit superior*) dacă pentru orice $\lambda > 1$ exists $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n \leq \lambda x_k$ pentru orice $n \geq k$.

2. *auto-mărginit inferior în ordine* (sau, simplu, *auto-mărginit inferior*) dacă pentru orice $\mu \in (0,1)$ exists $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $\mu x_k \leq x_n$ pentru orice $n \geq k$.
3. *auto-mărginit în ordine* (sau, simplu, *auto-mărginit*) dacă este auto-mărginit superior şi inferior.

Observaţia 2.3.2 Proprietăţile de auto-mărginire ale unui şir depind doar de structura spaţiului liniar ordonat generat de valorile şirului. Astfel, dacă (x_n) este un şir dintr-un subspaţiu liniar Y al lui X, atunci (x_n) este auto-mărginit (superior/inferior) în X *dacă şi numai dacă* (x_n) este auto-mărginit (superior/inferior) în Y (unde Y moşteneşte relaţia de ordine din X).

Observaţia 2.3.3 Dacă (x_n) este un şir crescător din K, atunci este auto-mărginit superior *dacă şi numai dacă* pentru orice $\lambda > 1$ exists $k \in \mathbb{N}$ astfel încât λx_k majorează pe (x_n). De asemenea, dacă (x_n) este descrescător, atunci este auto-mărginit inferior *dacă şi numai dacă* pentru orice $\mu \in (0,1)$ exists $k \in \mathbb{N}$ astfel încât μx_k minorează pe (x_n).

Propoziţia 2.3.4

1. *Orice şir ρ-Cauchy din K este auto-mărginit.*
2. *Orice şir crescător din K este auto-mărginit inferior.*
3. *Orice şir descrescător din K este auto-mărginit superior..*
4. *Un şir crescător din K este auto-mărginit superior* dacă şi numai dacă *este ρ-Cauchy.*
5. *Un şir descrescător din K este auto-mărginit inferior* dacă şi numai dacă *este ρ-Cauchy.*

Definiţia 2.3.7 O submulţime nevidă U a lui K este numită:

1. *auto-completă superior în ordine* (sau, simplu, *auto-completă superior*) dacă orice şir crescător din U, auto-mărginit superior are supremum şi $\sup x_n \in U$.
2. *auto-completă inferior în ordine* (sau, simplu, *auto-completă inferior*) dacă orice şir descrescător din U, auto-mărginit inferior are infimum şi $\inf x_n \in U$.
3. *auto-completă în ordine* (sau, simplu, *auto-completă*) dacă este auto-completă inferior şi superior.

Dacă nu se cere ca supremumul (respectiv, infimumul) să fie în U, spunem că U este *cvasi auto-completă* (*superior/inferior*).

Următorul rezultat arată că există o dualitate între şirurile crescătoare auto-mărginite superior şi cele descrescătoare auto-mărginite inferior.

Propoziţia 2.3.8 *Fie (x_n) un şir crescător din K, auto-mărginit superior şi (t_k) un şir descrescător de numere reale, convergent la* 1. *Atunci există un subşir $\left(x_{n_k}\right)$ al lui (x_n) astfel încât următoarele condiţii sunt satisfăcute:*

1. *Şirul (y_k) dat de $y_k = t_k x_{n_k}$ ($k \in \mathbb{N}$) este descrescător şi auto-mărginit inferior.*
2. *$x_n \leq y_k$ pentru orice $n, k \in \mathbb{N}$.*
3. *Dacă K este arhimedean, x majorează pe (x_n) şi y minorează pe (y_k), atunci $y \leq x$.*
4. *Dacă K este arhimedean şi (x_n) aparţine unui subspaţiu liniar Y al lui X, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

   (a) (x_n) *are supremum.*
   (b) (x_n) *are supremum în* Y.
   (c) (y_k) *are infimum.*
   (d) (y_k) *are infimum în* Y.
   (e) $\exists\, x \in K$ *a.î.* $x_n \leq x \leq y_k$ *pentru orice* $n, k \in \mathbb{N}$.

   În caz afirmativ, $\sup x_n = \sup\limits_{Y} x_n = \inf y_k = \inf\limits_{Y} y_k = x$ *şi* $y_k \xrightarrow{\rho} x$, $x_n \xrightarrow{\rho} x$.

Un rezultat similar se poate formula pentru şiruri descrescătoare, auto-mărginite inferior. Au loc următoarele consecinţe:

Teorema 2.3.10 *Presupunem că K este arhimedean şi fie U o submulţime nevidă a lui K, convexă în ordine, strict pozitiv-omogenă. Atunci toate cele şase proprietăţi de auto-completitudine din Definiţia 2.3.7 sunt echivalente pe U.*

Propoziţia 2.3.13 *Presupunem că K este arhimedean.*

1. *K este auto-complet* dacă şi numai dacă *orice parte a sa este auto-completă.*
2. *Dacă K este linial solid şi K° este auto-complet, atunci K este auto-complet.*

2.3.2 Câteva proprietăţi ale şirurilor monotone în raport cu normele unitate într-un spaţiu liniar ordonat

Fixăm $u \in K \setminus \{\theta\}$ şi presupunem că K_u este arhimedean.

Propoziţia 2.3.20 *Fie (x_n) un şir $|\cdot|_u$-Cauchy din K_u.*

1. *Dacă există $\delta > 0$ şi un subşir (x_{n_k}) al lui (x_n) astfel încât $x_{n_k} \geq \delta u$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$, atunci (x_n) este auto-mărginit.*
2. *Dacă (x_n) este crescător şi există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_{n_0} \in K(u)$, atunci (x_n) este auto-mărginit.*

2.3.3 Rezultate principale

Teorema 2.3.21 *Fie $u \in K \setminus \{\theta\}$ astfel încât K_u este arhimedean (în X_u). Atunci următoarele condiţii sunt echivalente:*

1. *$K(u)$ este ρ-complet.*
2. *$K(u)$ este auto-complet în X_u.*
3. *K_u este auto-complet în X_u.*
4. *X_u este fundamental σ-(o) complet.*
5. *X_u este monoton secvenţial complet.*
6. *X_u este $|\cdot|_u$-complet.*

*În plus, dacă K este arhimedean, atunci condiţiile **2** şi **3** pot fi înlocuite de versiunile mai tari:*

2a. *$K(u)$ este auto-complet (în X).*
3b. *K_u este auto-complet (în X).*

Observaţia 2.3.22 Echivalenţa dintre **4**, **5** şi **6** se poate obţine şi din rezultate mai generale (vezi Jameson [40, pp. 111–119] şi Wong [107]).

Corolarul 2.3.23 *Dacă K este arhimedean, atunci ρ este completă pe K* dacă şi numai dacă *K este auto-complet.*

Corolarul 2.3.24 *Dacă K este arhimedean şi linial solid, atunci următoarele condiţii sunt echivalente:*

1. *ρ este completă pe K.*
2. *K este auto-complet.*
3. *K° este auto-complet.*
4. *ρ este completă pe K°.*
5. *Topologia mărginirii în ordine pe X este completă.*

2.4 Metrica Thompson în spaţii Banach ordonate

Când X este un spaţiu Banach ordonat, completitudinea lui X_u în raport cu u-norma este strâns legată de normalitatea lui K. Aceste aspecte au fost în parte studiate de Krasnosel′skiĭ [46] şi le vom extinde cu noi rezultate în această secţiune. Este presupus în continuare că $(X, K, \|\cdot\|)$ este un spaţiu Banach ordonat. Primul rezultat aparţine lui Thompson:

Teorema 2.4.2 (Thompson [102]) *Dacă K este normal, atunci orice parte Q a lui K este un spaţiu metric complet în raport cu ρ. Mai departe, dacă un şir (x_n) din Q este ρ-convergent la $x \in Q$, atunci este convergent în normă la x.*

Următoarele rezultate include câteva rezultate parţiale ale lui Amann [4, Theorem 2.3], Chen [22], Deimling [27, Proposition 19.9], Jameson [40, pp. 111–119], Krasnosel′skiĭ [46, Theorem 1.3], Nussbaum [71, Remark 1.3] şi Thompson [102, Lemma 3].

Teorema 2.4.5 *Fie $u \in K \setminus \{\theta\}$. Atunci următoarele condiţii sunt echivalente:*

1. *ρ este completă pe $K(u)$.*
2. *$|\cdot|_u$ este completă pe X_u.*
3. *Scufundarea lui X_u în X este continuă.*
4. *$[\theta, x]$ este mărginit în normă pentru orice $x \in K(u)$.*
5. *$[\theta, u]$ este mărginit în normă.*
6. *Orice şir (x_n) din $K(u)$ ce este ρ-convergent la $x \in K(u)$, este convergent în normă la x.*

Teorema 2.4.6 *Următoarele condiţii sunt echivalente:*

1. *ρ este completă pe K.*
2. *K este auto-complet.*
3. *K este normal.*
4. *Topologia normei pe K este mai slabă decât topologia lui ρ.*

Corolarul 2.4.7 *Dacă K este solid, atunci următoarele condiţii sunt echivalente:*

1. *ρ este completă pe K.*
2. *ρ este completă pe $\mathring{K}$.*
3. *$[\theta, u]$ este mărginită în normă pentru un anume (sau, pentru toţi) $u \in \mathring{K}$.*
4. *Orice şir (x_n) din $\mathring{K}$, care este ρ-convergent la $x \in \mathring{K}$, este convergent în normă la x.*
5. *K este normal.*
6. *Topologia (normată a) mărginirii în ordine pe X este completă.*
7. *Topologia (normată a) mărginirii în ordine pe X este mai fină decât topologia normei.*

2.5 Extinderi ale metricii Thompson

2.5.1 Metrica generată de un semigrup de operatori crescători

O generalizare a metricii Thompson la o metrică generată de un semigrup de operatori crescători a fost propusă de Turinici în [103] şi [104].

2.5.2 Metrica Bauer-Bear-Weiss

Semimetrica extinsă Bauer-Bear-Weiss (cf. [9], [10], [11], [12]) este o generalizare naturală a metricii Thompson în orice spaţiu liniar X, unde conul poate fi înlocuit de orice mulţime convexă K, nemaifiind nevoie de o relaţie de ordine pe X compatibilă cu structura liniară. În cazul în care K nu include linii, atunci semimetrica devine metrică (extinsă).

3

Teoria punctului fix pentru operatori mixt-monotoni

Scopul acestui capitol este de a elabora un studiu detaliat şi unitar al punctelor fixe pentru operatori mixt-monotoni, folosind *metoda iteraţiilor monotone* atât în prezenţa, cât şi în absenţa *metodei sub şi supra soluţiilor*. Am pornit studiul în contextul cel mai general (cel al mulţimilor ordonate) - ceea ce constituie o noutate - şi am avansat la cazul spaţiilor metrice ordonate (unde există doar câteva rezultate de punct fix, apărute recent), apoi în spaţii liniare ordonate folosind metrica Thompson, şi în final în cazul spaţiilor Banach ordonate (unde sunt formulate marea majoritate a teoremelor de punct fix existente la ora actuală).

Am pus accentul, în principal, pe acele rezultate de punct fix care produc atât existenţa punctului fix cât şi unicitatea (fie într-o mulţime predefinită, fie local, într-o mulţime care se poate preciza), iar punctele fixe se pot obţine într-un mod constructiv, ca limită a unui proces iterativ bilateral (punctul fix este aproximat atat de jos, cât şi de sus, ceea ce este extrem de util pentru controlul erorii de aproximare).

Am exclus acele rezultate în care punctele fixe se obţin ca elemente maximale (sau minimale) ale unor mulţimi, folosind lema lui Zorn sau ca supremum (respectiv, infimum) ale unor mulţimi in latici (deşi folosesc metoda iteraţiilor monotone, astfel de rezultate de existenţă a punctului fix sunt neconstructive).

Nu am intenţionat să realizăm o prezentare de ansamblu a teoriei punctului fix pentru operatori mixt-monotoni ci, mai degrabă, intenţia a fost de a urma câteva direcţii importante de cercetare pe această temă şi de a le scoate în evidenţă conceptele şi rezultatele fundamentale, prezentând atât rezultate şi concepte cunoscute cât, mai ales idei, noţiuni şi rezultate noi, originale.

Deoarece teoria punctului fix pentru operatori mixt-monotoni are avantajul că include atât teoria pentru operatori crescători, cât şi pe cea pentru operatori descrescători într-o singură abordare unitară, se pot obţine prin particularizare atât rezultate cunoscute cât şi rezultate noi în aceste direcţii intens studiate. Întrucât această sarcină este elementară, vom omite orice detalii în această direcţie.

3.1 Concepte şi rezultate introductive

Peste tot în această secţiune, U, V, W vor fi mulţimi nevide şi $A : U^2 \to V$, $B : V^2 \to W$ operatori de două variabile, dacă nu se specifică altfel.

3.1.1 Compunerea operatorilor de două variabile

În timp ce compunerea uzuală a operatorilor A şi B nu are sens, este posibil să definim o lege de compoziţie asociativă similară (numită *operaţia de m-compunere*[1] şi notată prin $*$).

Definiţia 3.1.1 m-compunerea operatorilor A şi B este definită prin

$$B * A : U^2 \to W, \quad (B * A)(x, y) = B(A(x, y), A(y, x)) \quad (x, y \in U). \tag{3.1.1}$$

Propoziţia 3.1.2 *m-compunerea este asociativă.*

Pentru orice mulţime nevidă X, notăm prin P_X operatorul proiecţie canonică

$$P_X : X^2 \to X, \quad P(x, y) = x \quad (x, y \in X). \tag{3.1.2}$$

Propoziţia 3.1.3 $A * P_U = P_V * A = A$.

[1]În original (în limba engleză): *the mirror composition* sau, pe scurt, *the m-composition*.

Observaţia 3.1.4 Dacă A invariază pe U, i.e., $A : U^2 \to V \subseteq U$, atunci, conform Propoziţiei 3.1.2, se pot defini puterile funcţionale ale lui A prin $A^{n+1} = A * A^n = A^n * A$ ($n \in \mathbb{N}$), cu $A^0 = P_U$.

3.1.2 Puncte fixe şi puncte fixe cuplate pentru operatori de două variabile

Presupunem în continuare că $U \cap V \neq \emptyset$.

Definiţia 3.1.7 Un element $x \in U \cap V$ este numit *punct fix* pentru A dacă $A(x, x) = x$.

Definiţia 3.1.9 (Guo and Lakshmikantham [34]) O pereche $(x, y) \in (U \cap V)^2$ este numită *punct fix cuplat* pentru A dacă

$$\begin{cases} x = A(x, y) \\ y = A(y, x) \end{cases}.$$

Observaţia 3.1.10 Evident, (x, y) este punct fix cuplat (pentru A) *dacă şi numai dacă* (y, x) este punct fix cuplat. De asemenea, x este punct fix *dacă şi numai dacă* (x, x) este punct fix cuplat.

Pentru uşurarea expunerii, vom nota mulţimea punctelor fixe cuplate ale lui A prin $\mathrm{cfp}(A)$.

3.1.3 Puncte fixe cuplate extremale ale operatorilor de două variabile

Din acest punct în această secţiune, U, V, W vor fi mulţimi ordonate (pentru simplificare vom nota cu $\leq$ relaţia de ordine indiferent de mulţimea considerată). Întrucât interesul este de a obţine rezultate pentru puncte fixe şi nu pentru puncte fixe cuplate, este de dorit ca anumite proprietăţi impuse operatorului să asigure că (aproape) oricare punct fix se obţine dintr-un punct fix cuplat. În acest sens, vom considera următoarea proprietate:

(μ) Dacă $(x, y) \in \mathrm{cfp}(A)$ astfel încât x şi y sunt comparabile, atunci $x = y$.

Dacă U_1 este o submulţime nevidă a lui U şi restricţia lui A la U_1^2 satisface (μ), atunci vom spune că A are proprietatea (sau, satisface) (μ) pe U_1.

Definiţia 3.1.13 Dacă $U_1 \subseteq U$ şi $(x, y) \in \mathrm{cfp}(A)$, atunci (x, y) este numit *extremal în* U_1^2 dacă

$$x, y \in U_1, \quad x \leq y, \quad \mathrm{cfp}(A) \cap U_1^2 \subseteq [x, y]^2.$$

Combinaţia dintre proprietatea (μ) şi existenţa unui punct fix cuplat extremal dă primul rezultat de existenţă şi unicitate a punctelor fixe pentru operatori de două variabile.

Propoziţia 3.1.14 *Dacă A are proprietatea (μ) pe $U_1 \subseteq U$ şi (x, y) este un punct fix cuplat extremal al lui A în U_1^2, atunci $x = y$, (x, x) este unicul punct fix cuplat al lui A în U_1^2 şi x este unicul punct fix al lui A în U_1.*

3.1.4 Operatori mixt-monotoni

Definiţia 3.1.15 (Guo and Lakshmikantham [34]) A este numit *mixt-monoton*, sau se spune că *are proprietatea de mixt-monotonie*, dacă $A(x_1, y_1) \leq A(x_2, y_2)$ pentru orice $x_1, x_2, y_1, y_2 \in U$ astfel încât $x_1 \leq x_2$, $y_1 \geq y_2$.

Propoziţia 3.1.16 *A este mixt-monoton* dacă şi numai dacă $A(\cdot, y) : U \to V$ *este crescător pentru orice $y \in U$ şi $A(x, \cdot) : U \to V$ este descrescător pentru orice $x \in U$.*

Propoziţia 3.1.17 *Dacă A şi B sunt mixt-monotoni, atunci $B * A$ este mixt-monoton.*

Corolarul 3.1.18 *Dacă $V \subseteq U$, $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 1$) şi A este mixt-monoton, atunci A^n este mixt-monoton.*

3.1.5 Sub-supra puncte fixe cuplate pentru operatori de două variabile

Noţiunile de *sub punct fix* şi *supra punct fix* din cazul operatorilor de o variabilă se transpun în cazul operatorilor de două variabile după cum urmează (presupunem în continuare că U, V, W sunt submulţimi ale unei mulţimi ordonate $(X, \leq)$, deci U, V, W folosesc aceeşi relaţie de ordine).

Definiţia 3.1.19 (Guo and Lakshmikantham [34]) O pereche $(x, y) \in U^2$ se numeşte *sub-supra punct fix cuplat* pentru A dacă $x \leq y$, $x \leq A(x, y)$ şi $y \geq A(y, x)$.

Pentru uşurinţa expunerii, se va nota prin $\Lambda(A)$ mulţimea sub-supra punctelor fixe cuplate ale lui A.

3.2 Metoda iteraţiilor monotone pentru operatori mixt-monotoni în mulţimi ordonate şi puncte fixe (o)-atractive

Peste tot în această secţiune, $(U, \leq)$ este o mulţime ordonată şi A este un operator mixt-monoton ce invariază pe U, dacă nu se specifică altfel.

De asemenea, fie $x_0, y_0 \in U$ astfel încât $x_0 \leq y$ şi se definesc şirurile $(x_n), (y_n)$ prin

$$x_{n+1} = A(x_n, y_n), \quad y_{n+1} = A(y_n, x_n) \qquad (n \in \mathbb{N}), \tag{3.2.1}$$

sau, echivalent, prin

$$x_n = A^n(x_0, y_0), \quad y_n = A^n(y_0, x_0) \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{3.2.2}$$

în raport cu m-compunerea. De asemenea, notăm $U_0 := \bigcap\limits_{n \geq 0} [x_n, y_n]$.

Proprietăţile fundamentale ale lui $(x_n), (y_n)$ şi U_0 sunt adunate în următoarea lemă.

Lema 3.2.1

1. *$x_n \leq y_n$ şi $A\left([x_n, y_n]^2\right) \subseteq [x_{n+1}, y_{n+1}]$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.*
2. *U_0 este convexă în ordine (posibil vidă) şi*
$$\mathrm{cfp}(A) \cap [x_0, y_0]^2 \subseteq U_0^2. \tag{3.2.3}$$
3. *Presupunem că $x_n \leq y_m$ pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$. Dacă $\sup x_n$ există, atunci $\sup x_n$ este cel mai mic element al lui U_0. Simetric, dacă $\inf y_n$ există, atunci $\inf y_n$ este cel mai mare element al lui U_0. Dacă atât $\sup x_n$ cât şi $\inf y_n$ există, atunci $\sup x_n \leq \inf y_n$ şi*
$$U_0 = [\sup x_n, \inf y_n]. \tag{3.2.4}$$
4. *Dacă $(x_0, y_0) \in \Lambda(A)$, atunci (x_n) este crescător, (y_n) este descrescător, $x_n \leq y_m$ pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, $(x_n, y_n) \in \Lambda(A)$ şi $A\left([x_n, y_n]^2\right) \subseteq [x_n, y_n]$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.*

Corolarul 3.2.3 *Dacă $U_0 = \emptyset$, atunci A nu are puncte fixe cuplate în $[x_0, y_0]^2$ (deci nu are puncte fixe în $[x_0, y_0]$).*

Motivaţi de Lema 3.2.1, dăm următoarele definiţii.

Definiţia 3.2.4 Un punct $x^* \in U$ este numit (x_0, y_0)-*slab* (o)-*atractiv*[2] *pentru A* dacă $U_0 = \{x^*\}$ şi notăm prin $x^* \overset{A}{\underset{w}{\Subset}} (x_0, y_0)$.

Observaţia 3.2.5 Evident, dacă $x^* \overset{A}{\underset{w}{\Subset}} (x_0, y_0)$, atunci $x^* \in [x_0, y_0]$.

Definiţia 3.2.7 Un punct $x^* \in U$ este numit (x_0, y_0)-(o)-*atractiv*[3] *pentru A* dacă $\sup x_n = \inf y_n = x^*$ şi scriem $x^* \overset{A}{\Subset} (x_0, y_0)$.

Propoziţia 3.2.8 $x^* \overset{A}{\Subset} (x_0, y_0)$ dacă şi numai dacă $x^* \overset{A}{\underset{w}{\Subset}} (x_0, y_0)$ *şi* $\sup x_n, \inf y_n$ *există.*

Definiţia 3.2.9 Un punct $x^* \in U$ este numit *(slab)* (o)-*atractiv*[4] *pentru A pe* $[x_0, y_0]$ dacă $x^* \in [x_0, y_0]$ şi $x^* \overset{A}{\Subset} (u_0, v_0)$ (respectiv, $x^* \overset{A}{\underset{w}{\Subset}} (u_0, v_0)$) pentru orice $u_0, v_0 \in [x_0, y_0]$ astfel încât $u_0 \leq x^* \leq v_0$ şi notăm prin $x^* \overset{A}{\Subset} [x_0, y_0]$ (respectiv, prin $x^* \overset{A}{\underset{w}{\Subset}} [x_0, y_0]$).

Propoziţia 3.2.10 *Dacă $x^* \overset{A}{\underset{w}{\Subset}} [x_0, y_0]$, atunci $x^* \overset{A}{\underset{w}{\Subset}} (x_0, y_0)$ şi $x^* \overset{A}{\underset{w}{\Subset}} [u_0, v_0]$ pentru orice $u_0, v_0 \in [x_0, y_0]$ astfel încât $u_0 \leq x^* \leq v_0$.*

Propoziţia 3.2.11 *Dacă $x^* \overset{A}{\Subset} [x_0, y_0]$, atunci $x^* \overset{A}{\Subset} (x_0, y_0)$ şi $x^* \overset{A}{\Subset} [u_0, v_0]$ pentru orice $u_0, v_0 \in [x_0, y_0]$ astfel încât $u_0 \leq x^* \leq v_0$.*

Propoziţia 3.2.12 *Dacă $x^* \overset{A}{\Subset} [x_0, y_0]$, atunci $x^* \overset{A}{\underset{w}{\Subset}} [x_0, y_0]$.*

---

[2] (x_0, y_0)-*weakly order-attractive*
[3] (x_0, y_0)-*order-attractive*
[4] *(weakly) order-attractive*

Teorema 3.2.13 *Fie $x^* \in U$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. $x^* \underset{w}{\overset{A}{\Subset}} [x_0, y_0]$.
2. *x^* este punct fix pentru A şi* $x^* \underset{w}{\overset{A}{\Subset}} (x_0, y_0)$.

În caz afirmativ, (x^*, x^*) este unicul punct fix cuplat pentru A în $[x_0, y_0]^2$ (şi x^* este unicul punct fix pentru A în $[x_0, y_0]$).

Teorema 3.2.14 *Fie $x^* \in U$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. $x^* \overset{A}{\Subset} [x_0, y_0]$.
2. *x^* este punct fix pentru A şi* $x^* \overset{A}{\Subset} (x_0, y_0)$.

În caz afirmativ, (x^*, x^*) este unicul punct fix cuplat pentru A în $[x_0, y_0]^2$ (şi x^* este unicul punct fix pentru A în $[x_0, y_0]$).

Concluzionăm prin rezultatele principale ale acestei secţiuni.

Teorema 3.2.16 *Fie $x^* \in U$ şi presupunem că există $k \geq 1$ astfel încât $x^* \in \bigcap_{n=0}^{k-1} [x_n, y_n]$ şi $x^* \underset{w}{\overset{A}{\Subset}} (x_k, y_k)$. Atunci $x^* \underset{w}{\overset{A}{\Subset}} [x_n, y_n]$ pentru orice $n \in \{0, 1, \ldots, k\}$, (x^*, x^*) este unicul punct fix cuplat pentru A în $\bigcup_{n=0}^{k} [x_n, y_n]^2$ şi x^* este unicul punct fix pentru A în $\bigcup_{n=0}^{k} [x_n, y_n]$. În plus, dacă $x^* \overset{A}{\Subset} (x_k, y_k)$, atunci $x^* \overset{A}{\Subset} [x_n, y_n]$ pentru orice $n \in \{0, 1, \ldots, k\}$.*

Corolarul 3.2.17 *Dacă $x^* \in [x_0, y_0]$ astfel încât $x^* \underset{w}{\overset{A}{\Subset}} (x_1, y_1)$, atunci $x^* \underset{w}{\overset{A}{\Subset}} [x_0, y_0]$, $x^* \underset{w}{\overset{A}{\Subset}} [x_1, y_1]$, (x^*, x^*) este unicul punct fix cuplat pentru A în $[x_0, y_0]^2 \cup [x_1, y_1]^2$ şi x^* este unicul punct fix pentru A în $[x_0, y_0] \cup [x_1, y_1]$. În plus, dacă $x^* \overset{A}{\Subset} (x_1, y_1)$, atunci $x^* \overset{A}{\Subset} [x_0, y_0]$ şi $x^* \overset{A}{\Subset} [x_1, y_1]$.*

Teorema 3.2.18 *Presupunem că $(x_0, y_0) \in \Lambda(A)$. Dacă $x^* \underset{w}{\overset{A}{\Subset}} (x_0, y_0)$, atunci (x^*, x^*) este unicul punct fix cuplat pentru A în $[x_0, y_0]^2$, x^* este unicul punct fix pentru A în $[x_0, y_0]$ şi $x^* \underset{w}{\overset{A}{\Subset}} [x_0, y_0]$. În particular, dacă $x^* \overset{A}{\Subset} (x_0, y_0)$, atunci $x^* \overset{A}{\Subset} [x_0, y_0]$ şi toate celelalte concluzii rămân adevărate.*

Teorema 3.2.19 *Dacă $k \in \mathbb{N}$ şi $x^* \in [x_0, y_0]$ sunt astfel încât $(x_k, y_k) \in \Lambda(A)$ şi $x^* \underset{w}{\overset{A}{\Subset}} (x_k, y_k)$, atunci (x^*, x^*) este unicul punct fix cuplat pentru A în $\bigcup_{n=0}^{k} [x_n, y_n]^2$, x^* este unicul punct fix pentru A în $\bigcup_{n=0}^{k} [x_n, y_n]$ şi $x^* \underset{w}{\overset{A}{\Subset}} [x_n, y_n]$ pentru orice $n \in \{0, 1, \ldots, k\}$. În plus, dacă $x^* \overset{A}{\Subset} (x_k, y_k)$, atunci $x^* \overset{A}{\Subset} [x_n, y_n]$ pentru orice $n \in \{0, 1, \ldots, k\}$.*

3.3 Teoreme de punct fix pentru operatori mixt-monotoni în spaţii metrice ordonate

Peste tot în această secţiune, $(X, d, \leq)$ va fi un spaţiu metric ordonat, cu d o mertică extinsă, U o submulţime nevidă a lui X, convexă în ordine şi A un operator mixt-monoton ce invariază pe U, dacă nu se specifică altfel. De notat că, în acest caz, supremumul în raport cu X este notat prin $\sup$ şi cel în raport cu submulţimea U este notat prin $\sup\limits_U$ (la fel pentru infimum). Această distincţie este necesară când vorbim de puncte (o)-atractive, astfel că dacă $x^* \overset{A}{\Subset} (x_0, y_0)$ $(x_0, y_0 \in U, x_0 \leq y_0)$, atunci se înţelege că $x^* \in U$ şi $x^* = \sup\limits_U x_n = \inf\limits_U y_n$, întrucât $A : U^2 \to U$.

3.3.1 Proprietăţi ale spaţiilor metrice ordonate cu metrică extinsă şi interval-semi-monotonă

Definiţia 3.3.1 d este numită *interval-semi-monotonă* (în raport cu $\leq$) dacă există $\gamma \geq 1$ (numită *constantă de semi-monotonie*), astfel încât $d(x', y') \leq \gamma d(x, y)$ pentru orice $x, x', y, y' \in X$ cu $x \leq x' \leq y' \leq y$. Dacă $\gamma = 1$, atunci d este numită *interval-monotonă*.

Exemplul 3.3.2 Dacă (X, K) este un spaţiu liniar ordonat şi K este aproape arhimedean, atunci metrica Thompson ρ este o metrică extinsă interval-monotonă pe K.

Exemplul 3.3.3 Dacă $(X, K, \|\cdot\|)$ este un spaţiu normat ordonat şi K este normal, atunci X este un spaţiu metric ordonat a cărui metrică (indusă de normă) este semi-monotonă.

Din acest moment, în această subsecţiune, presupunem că d este interval-semi-monotonă, cu γ notând constanta de semi-monotonie.

Propoziţia 3.3.4

1. *Orice componentă metrică a lui X este convexă în ordine.*
2. *Orice interval dintr-o componentă metrică a lui X este mărginită.*

Propoziţia 3.3.5 *Dacă (C_3') este satisfăcută şi (x_n) este un şir crescător din X având un subşir $\left(x_{n_k}\right)$ convergent şi majorat, atunci (x_n) este convergent, are supremum şi $\lim_{n\to\infty} x_n = \sup x_n = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$.*

Propoziţia 3.3.7 *Dacă $(x_n), (y_n), (z_n)$ sunt şiruri din X astfel încât $x_n \le y_n \le z_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi $(x_n), (z_n)$ converg la x, atunci (y_n) converge la x.*

Propoziţia 3.3.8 *Fie (x_n) un şir crescător şi (y_n) un şir descrescător din X astfel încât $x_n \le y_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Fie următoarele afirmaţii:*

(i) $(x_n), (y_n)$ *sunt convergente şi au aceeaşi limită.*

(ii) $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$.

(iii) $\inf_n d(x_n, y_n) = 0$.

*Atunci **(ii)** şi **(iii)** sunt echivalente şi sunt implicate de **(i)**. În plus, dacă d este completă, atunci cele trei afirmaţii sunt echivalente.*

3.3.2 Puncte fixe atractive şi operatori mixt-monotoni m-Picard

Fie $x_0, y_0 \in U$ şi se definesc şirurile $(x_n), (y_n)$ prin (3.2.1) sau, echivalent, prin (3.2.2).

Definiţia 3.3.10 $x^* \in X$ se numeşte (x_0, y_0)-*atractiv pentru A* (în raport cu d) dacă $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = x^*$ şi notăm acest lucru prin $x^* \underset{d}{\overset{A}{\Subset}} (x_0, y_0)$.

Propoziţia 3.3.13 *Dacă A este continuă şi $x^* \in U$ astfel încât $x^* \underset{d}{\overset{A}{\Subset}} (x_0, y_0)$, atunci x^* este punct fix pentru A.*

Definiţia 3.3.14 Fie V o submulţime nevidă a lui U. Un punct $x^* \in X$ se numeşte *atractiv pentru A* pe V dacă $x^* \underset{d}{\overset{A}{\Subset}} (u_0, v_0)$ pentru orice $u_0, v_0 \in V$ şi notăm acest fapt prin $x^* \underset{d}{\overset{A}{\Subset}} V$.

Definiţia 3.3.16 Fie V be a submulţime nevidă a lui U. A se numeşte operator *m-Picard* pe V dacă

$$\mathbf{A} : U^2 \to U^2, \quad \mathbf{A}(x, y) = (A(x, y), A(y, x))$$

este operator Picard pe V^2 (i.e., $\mathbf{A}$ are un unic punct fix în V^2 şi $(\mathbf{A}^n(x, y))$ este convergent la unicul punct fix pentru orice $(x, y) \in V^2$).

Propoziţia 3.3.17 *Fie V o submulţime nevidă a lui U. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. *A este m-*Picard *pe V.*
2. *A este* Picard *pe V în raport cu m-compunerea (i.e., A are un unic punct fix x^* în V şi $(A^n(x, y))$ este convergent la x^* pentru orice $(x, y) \in V^2$).*
3. *A are un unic punct fix x^* în V şi $x^* \underset{d}{\overset{A}{\Subset}} V$.*
4. *A are un unic punct fix cuplat (x^*, x^*) în V^2 şi $x^* \underset{d}{\overset{A}{\Subset}} V$.*

În caz afirmativ, (x^*, x^*) este unicul punct fix pentru A în V^2.

Propoziţia 3.3.18 *Dacă d este interval-semi-monotonă, $x_0 \le y_0$ şi $x^* \in X$ astfel încât $x^* \underset{d}{\overset{A}{\Subset}} (x_0, y_0)$, atunci $x^* \underset{d}{\overset{A}{\Subset}} [x_n, y_n]$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.*

Observaţia 3.3.19 Dacă $x^* \overset{A}{\underset{d}{\Subset}} V_1$ şi $x^* \overset{A}{\underset{d}{\Subset}} V_2$, atunci *nu* este valabil, în general, că $x^* \overset{A}{\underset{d}{\Subset}} V_1 \cup V_2$.

Teorema 3.3.20 *Presupunem că (C_2) este satisfăcută. Dacă $x_0 \leq y_0$ şi x^* este punct fix pentru A în $[x_0, y_0]$ astfel încât $x^* \overset{A}{\underset{d}{\Subset}} (x_0, y_0)$, atunci $x^* = \sup x_n = \inf y_n$, (x^*, x^*) este unicul punct fix cuplat pentru A în $\bigcup\limits_{n\geq 0} [x_n, y_n]^2$, x^* este unicul punct fix pentru A în $\bigcup\limits_{n\geq 0} [x_n, y_n]$ şi $x^* \overset{A}{\Subset} [x_n, y_n]$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.*

În plus, dacă d este interval-semi-monotonă, atunci A este m-Picard pe $[x_n, y_n]$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Corolarul 3.3.21 *Presupunem că (C_2) este satisfăcută şi A este continuă. Dacă $x_0 \leq y_0$ şi $x^* \in [x_0, y_0]$ astfel încât $x^* \overset{A}{\underset{d}{\Subset}} (x_0, y_0)$, atunci x^* este punct fix pentru A şi concluziile Teoremei 3.3.20 se menţin.*

Observaţia 3.3.22 Când $(x_n), (y_n)$ sunt mărginite în ordine, atunci (C_2) poate fi înlocuită de (C_3) în Teorema 3.3.20 şi Corolarul 3.3.21.

Observaţia 3.3.23 În general, punctele fixe (o)-atractive nu sunt (metric) atractive, chiar şi atunci când are loc (C_2), metrica este interval-semi-monotonă şi operatorul mixt-monoton este continuu.

Următorul rezultat este fundamental.

Teorema 3.3.24 *Presupunem că $(x_0, y_0) \in \Lambda(A)$ şi se consideră următoarele afirmaţii:*

(i) $x^* \overset{A}{\underset{d}{\Subset}} (x_0, y_0)$ *pentru un anume* $x^* \in X$.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$.

(iii) $\inf\limits_{n} d(x_n, y_n) = 0$.

Atunci:

1. *Dacă (C_3') este satisfăcută, atunci (i) asigură că x^* este unicul punct fix pentru A în $[x_0, y_0]$, $x^* \overset{A}{\Subset} [x_0, y_0]$ şi A este m-Picard pe $[x_0, y_0]$.*
2. *Dacă d este completă şi interval-semi-monotonă, atunci cele trei afirmaţii sunt echivalente.*

Teorema 3.3.26 *Presupunem că (C_3') este satisfăcută, d este completă şi interval-semi-monotonă.*

Dacă $x_0 \leq y_0$ şi există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $(x_k, y_k) \in \Lambda(A)$, atunci cele trei afirmaţii din Teorema 3.3.24 sunt echivalente. În caz afirmativ, x^* este unicul punct fix pentru A în $[x_k, y_k]$, $x^* \overset{A}{\Subset} [x_k, y_k]$, $x^* \overset{A}{\underset{d}{\Subset}} [x_n, y_n]$ pentru orice $n \in \{0, 1, \ldots, k\}$ şi A este m-Picard pe $[x_k, y_k]$.

În plus, dacă $x^* \in [x_0, y_0]$, atunci x^* este unicul punct fix pentru A în $\bigcup\limits_{n=0}^{k} [x_n, y_n]$ şi A este m-Picard pe $[x_n, y_n]$ pentru orice $n \in \{0, 1, \ldots, k\}$.

3.3.3 Existenţa şi unicitatea punctelor fixe atractive pentru operatori mixt-monotoni m-contractivi via sub-supra puncte fixe cuplate

Definiţia 3.3.27 Sub-supra punctul fix cuplat $(x_0, y_0) \in \Lambda(A)$ se numeşte:

1. *propriu pentru A* dacă există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $(d * A^n)(x_0, y_0) < \infty$;
2. *impropriu pentru A* dacă nu este propriu, i.e., dacă $(d * A^n)(x_0, y_0) = \infty$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Definiţia 3.3.28 A se numeşte *propiu* dacă $\Lambda(A)$ este nevidă şi oricare dintre sub-supra punctele fix cuplate ale lui A este propriu pentru A.

In toate rezultatele care urmează, presupunem că are loc (C_3'), d este completă şi interval-semi-monotonă, iar $\gamma \geq 1$ notează constanta de semi-monotonie a lui d.

Fie

$$W = \{(x, y) \in \Lambda(A) : x \neq y \text{ şi } d(x, y) < \infty\}$$

şi presupunem că W este nevidă.

Teorema 3.3.29 *Fie $\Psi : W \to [0, \infty)$ astfel încât:*

(π_1) Pentru orice şir crescător (x_n) şi orice şir descrescător (y_n) din aceeaşi componentă metrică a lui U astfel încât $(x_n, y_n) \in \Lambda(A)$ pentru toţi $n \in \mathbb{N}$ şi $\inf\limits_{n} d(x_n, y_n) > 0$, există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $\Psi(x_k, y_k) < \inf\limits_{n} d(x_n, y_n)$.

Dacă

$$(d * A)(x,y) \le \Psi(x,y) \text{ pentru orice } (x,y) \in W, \tag{3.3.1}$$

atunci următoarele proprietăţi au loc:

1. $(d * A)(x,y) < d(x,y)$ *pentru orice* $(x,y) \in W$.
2. A *satisface proprietatea* (μ) *pe fiecare componentă metrică a lui* U.
3. *Dacă* $(x_0, y_0) \in \Lambda(A)$ *este propriu, atunci* A *are un unic punct fix* x^* *în* $[x_0, y_0]$, $x^* \overset{A}{\Subset} [x_0, y_0]$ *şi* A *este* m*-Picard pe* $[x_0, y_0]$.
4. *Dacă* A *este propriu, atunci* A *satisface proprietatea* (μ) *şi concluziile din* **3** *se menţin pentru orice* $(x_0, y_0) \in \Lambda(A)$.

Pentru a găsi funcţii Ψ ce verifică condiţiile din teorema anterioară, este imperativ să găsim criterii clare pentru (π_1). Astfel, fie $D = d(W) \subseteq (0,\infty)$. Vom nota cu D'_+ mulţimea punctelor limită la dreapta pentru D în $(0,\infty)$, i.e.,

$$D'_+ = \{t > 0 : (t, t+\tau) \cap D \neq \emptyset \text{ pentru orice } \tau > 0\}$$

şi prin $\overline{D}_+$ vom nota închiderea lui D la dreapta în $(0,\infty)$, i.e.,

$$\overline{D}_+ = D \cup D'_+ = \{t > 0 : [t, t+\tau) \cap D \neq \emptyset \text{ pentru orice } \tau > 0\}.$$

De remarcat că vom folosi aceste notaţii pentru orice submulţime a lui $(0,\infty)$ (nu doar pentru D), dacă este necesar.

Propoziţia 3.3.36 *Dacă* $\Psi : W \to [0,\infty)$ *satisface:*

(π_2) *Pentru orice* $t \in \overline{D}_+$, *există* $\tau > 0$ *astfel încât*

$$(x,y) \in W \text{ şi } d(x,y) \in [t, t+\tau) \text{ implică } \Psi(x,y) < t \tag{3.3.2}$$

atunci Ψ *satisface* (π_1).

Observaţia 3.3.37 Dacă $t > 0$ astfel încât $t \notin \overline{D}_+$, atunci $[t, t+\tau) \cap D = \emptyset$ pentru un anume $\tau > 0$, astfel că (3.3.2) este automat satisfăcută (deoarece nu este nimic de verificat). Cu această observaţie, (π_2) este echivalentă cu:

(π'_2) Pentru orice $t > 0$, există $\tau > 0$ astfel încât (3.3.2) este satisfăcută.

Corolarul 3.3.38 *Dacă* $\Psi : W \to [0,\infty)$ *satisface* (π_2) *şi (3.3.1), atunci concluziile Teoremei 3.3.29 se menţin.*

Corolarul 3.3.39 *Dacă pentru orice* $t \in \overline{D}_+$, *există* $\tau > 0$ *astfel încât*

$$(x,y) \in W \text{ şi } d(x,y) \in [t, t+\tau) \text{ implică } (d * A)(x,y) < t, \tag{3.3.3}$$

atunci concluziile Teoremei 3.3.29 se menţin.

Observaţia 3.3.40 Când A este un operator de o variabilă, i.e., $A(x,y) = A(x)$ sau $A(x,y) = A(y)$, condiţia din Corolarul 3.3.39 este identică cu cea dată de Meir şi Keeler [63] (cu excepţia că monotonia nu era necesară).

Este posibil să simplificăm condiţiile din (π_1) şi (π_2), considerând doar funcţii radiale. Definim mai întâi câteva noţiuni noi.

Fie $\Phi : D \to [0,\infty)$ o funcţie arbitrară.

Definiţia 3.3.42 Spunem că A este o *Φ–m-contracţie* dacă

$$(d * A)(x,y) \le \Phi(d(x,y)) \text{ pentru orice } (x,y) \in W. \tag{3.3.4}$$

Următorul concept este o modificare a unei noţiuni similare (*L-funcţie*) introduse de Lim [58].

Definiţia 3.3.44 Spunem că Φ *este o M-funcţie* dacă următoarea proprietatea este satisfăcută:

(M_1) Pentru orice $t \in \overline{D}_+$, există $\tau > 0$ astfel încât $\Phi(s) < t$ pentru orice $s \in [t, t+\tau) \cap D$.

Dacă Φ este definită pe o mulţime ce include D şi restricţia lui Φ la D este o M-funcţie, atunci spunem că Φ *este o M-funcţie pe D*.

Observaţia 3.3.45 Este clar că cerinţele din (M_1) sunt verificate pentru orice $t > 0$ astfel încât $t \notin \overline{D}_+$, deoarece mulţimea $[t, t+\tau) \cap D$ este vidă pentru un anume $\tau > 0$, astfel că (M_1) este echivalentă cu:

(M'_1) Pentru orice $t > 0$, există $\tau > 0$ astfel încât $\Phi(s) < t$ pentru orice $s \in [t, t+\tau) \cap D$.

Exemplul 3.3.46 Dacă $\alpha \in [0,1)$ şi $\Phi(t) = \alpha t$ pentru orice $t \in D$, atunci Φ este o M-funcţie.

Teorema 3.3.47 *Dacă* A *este o* Φ–m*-contracţie şi* Φ *este o* M*-funcţie, atunci concluziile Teoremei 3.3.29 se menţin.*

Pentru rezultate similare, facem referire la lucrările lui Agarwal et al. [1], Ćirić et al. [25], Gnana Bhaskar şi Lakshmikantham [30], Lakshmikantham şi Ćirić [54], Nieto şi Rodríguez-López [69] şi [70]. Pentru o analiză comparativă între rezultatele personale şi rezultatele din lucrările citate facem referire la Secţiunea 3.5.

Studiem mai departe clasa M-funcţiilor. Se consideră mai întâi următoarele proprietăţi similare cu (M_1):

(M_2) Pentru orice $t \in D'_+$, există $\tau > 0$ astfel încât $\Phi(s) < t$ pentru orice $s \in (t, t+\tau) \cap D$.

(M_3) Pentru orice şir (t_n) în D astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t > 0$, există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $\Phi(t_k) < t$.

(M_4) Pentru orice şir (t_n) în D astfel încât $\inf t_n = t > 0$, există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $\Phi(t_k) < t$.

(M_5) Pentru orice şir descrescător (t_n) în D astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t > 0$, există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $\Phi(t_k) < t$.

(M_6) Pentru orice şir strict descrescător (t_n) în D astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t > 0$, există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $\Phi(t_k) < t$.

Propoziţia 3.3.48 *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. *Φ este o M-funcţie.*
2. *Φ satisface (M_2) şi $\Phi(t) < t$ pentru orice $t \in D$.*
3. *Φ satisface (M_3).*
4. *Φ satisface (M_4).*
5. *Φ satisface (M_5).*
6. *Φ satisface (M_6) şi $\Phi(t) < t$ pentru orice $t \in D$.*

Următoarele condiţii (similare cu cele date de Boyd şi Wong în [15]) sunt suficiente pentru ca Φ să fie o M-funcţie.

Propoziţia 3.3.49 *Dacă $\Phi(t) < t$ pentru orice $t \in D$ şi $\limsup\limits_{s\to t^+} \Phi(s) < t$ pentru orice $t \in D'_+$, atunci Φ este o M-funcţie.*

Presupunem în continuare că Φ este definită pe $\overline{D}_+$.

Propoziţia 3.3.50 *Dacă $\Phi(t) < t$ pentru orice $t \in \overline{D}_+$ şi $\limsup\limits_{s\to t^+,\, s\in D} \Phi(s) \le \Phi(t)$ pentru orice $t \in D'_+$, atunci Φ este o M-funcţie pe D.*

Propoziţia 3.3.51 *Dacă $\Phi(t) < t$ pentru orice $t \in \overline{D}_+$ şi Φ este superior semicontinuă la dreapta, atunci Φ este o M-funcţie pe D.*

Corolarul 3.3.52 *Dacă $\Phi(t) = \alpha(t)t$ pentru orice $t \in \overline{D}_+$, unde $\alpha : \overline{D}_+ \to [0,1)$ este superior semicontinuă la dreapta, atunci Φ este o M-funcţie pe D.*

Fixăm $\tau > 0$ (oricât de mic dorim) şi fie

$$D_\tau = (D - D'_+) \cap (0, \tau) = \left\{s - t : t \in D'_+, s \in (t, t+\tau) \cap D\right\}.$$

Presupunem în continuare că $\Phi : \overline{D}_+ \cup D_\tau \to [0, \infty)$.

Propoziţia 3.3.54 *Dacă următoarele condiţii sunt satisfăcute:*

(i) $\Phi(t) < t$ *pentru orice* $t \in \overline{D}_+$;

(ii) $\Phi(t) \le t$ *pentru orice* $t \in D_\tau$;

(iii) $\Phi(s-t) \ge \Phi(s) - \Phi(t)$ *pentru orice* $t \in D'_+$ *şi orice* $s \in (t, t+\tau) \cap D$;

atunci Φ este o M-funcţie pe D.

3.3.4 Teoreme de punct fix pentru operatori mixt-monotoni via puncte fixe cuplate extremale

3.4 Teoreme de punct fix pentru operatori mixt-monotoni în spaţii liniare ordonate

Peste tot în această secţiune, (X, K) va fi un spaţiu liniar ordonat, K un con arhimedean şi auto-complet, iar $\le$ notează relaţia de ordine indusă de K pe X. Din studiul realizat în Capitolul 2 rezultă căt metrica Thompson ρ este o metrică extinsă şi completă pe K (Propoziţia 2.1.2, Observaţia 2.1.3 şi Corolarul 2.3.23) care este interval-monotonă (Corolarul 2.2.7). În plus, spaţiul metric ordonat $(K, \rho, \le)$ satisface (C_2) (Propoziţia 2.2.24), deci şi (C_3) şi (C'_i), cu $i = \overline{1,5}$. În concluzie, putem aplica oricare dintre rezultatele din secţiunea anterioară la cazul spaţiului metric ordonat $(K, \rho, \le)$. Facem referire la Secţiunile 1.5, 1.6 şi Capitolul 2 pentru detalii legate de spaţii liniare ordonate şi metrica Thompson.

3.4.1 Rezultate preliminare exprimate în termenii metricii Thompson

Fie U o submulţime nevidă alui K, convexă în ordine şi A un operator mixt-monoton ce invariază pe U. De notat că vom folosi aceleaşi notaţii din Subsecţiunea 3.3.3, i.e.,

$$W = \{(x, y) \in \Lambda(A) : x \neq y \text{ şi } x \sim y\}, \quad D = \rho(W) \subseteq (0, \infty)$$

şi presupunem din acest moment că W este nevidă.

Considerem, de asemenea, componentele proiective ale lui W,

$$W_1 = \{x \in U : \text{ există } y \in U \text{ astfel încât } (x, y) \in W\}$$
$$W_2 = \{y \in U : \text{ există } x \in U \text{ astfel încât } (x, y) \in W\}$$

şi fie

$$E = \left\{e^{-\rho(x,y)} : (x, y) \in W\right\} = e^{-D} \subseteq (0, 1)$$

$$E'_- = \{\lambda \in (0, 1) : (\lambda - \varepsilon, \lambda) \cap E \neq \emptyset \text{ pentru orice } \varepsilon > 0\} = e^{-D'_+} \subseteq (0, 1)$$

(mulţimea punctelor limită la stânga pentru E în $(0, 1)$)

$$\overline{E}_- = \{\lambda \in (0, 1) : (\lambda - \varepsilon, \lambda] \cap E \neq \emptyset \text{ pentru orice } \varepsilon > 0\} = e^{-\overline{D}_+} = E \cup E'_- \subseteq (0, 1)$$

(închiderea lui E la stânga în $(0, 1)$)

$$E_\delta = \left\{\frac{\mu}{\lambda} : \lambda \in E'_-,\ \mu \in (\delta\lambda, \lambda)\right\} = e^{-D_{\ln \delta^{-1}}} \subseteq (\delta, 1)$$

pentru un $\delta \in (0, 1)$ (orice valoare, oricât de aproape de 1 este suficientă).

Următorul rezultat este o consecinţă directă a Teoremei 3.3.29, în termenii metricii Thompson.

Teorema 3.4.1 *Fie $\psi : W \to (0, 1]$ care satisface următoarea proprietate:*

(ρ_1) Pentru orice $\lambda \in \overline{E}_-$ şi oricare şiruri (x_n), (y_n) din aceeaşi parte a lui U astfel încât (x_n) este crescător, (y_n) este descrescător, $(x_n, y_n) \in \Lambda(A)$ pentru toţi $n \in \mathbb{N}$ şi $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \ln \lambda^{-1}$, există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $\psi(x_k, y_k) > \lambda$.

Dacă

$$A(x, y) \geq \psi(x, y)A(y, x) \quad \textit{pentru orice } (x, y) \in W, \tag{3.4.1}$$

atunci următoarele proprietăţi au loc:

1. *$(\rho * A)(x, y) < \rho(x, y)$ pentru orice $(x, y) \in W$.*
2. *A satisface proprietatea (μ) pe fiecare parte a lui U.*
3. *Dacă $(x_0, y_0) \in \Lambda(A)$ este propriu, atunci A are un unic punct fix x^* în $[x_0, y_0]$, $x^* \overset{A}{\Subset} [x_0, y_0]$ şi A este m-Picard pe $[x_0, y_0]$ în raport cu ρ.*
4. *Dacă A este propriu, atunci A are proprietatea (μ) şi concluziile din **3** au loc pentru orice $(x_0, y_0) \in \Lambda(A)$.*

3.4.2 Rezultate principale

Inconvenientul major din Teorema 3.4.1 este folosirea explicită a metricii Thompson în exprimarea condiţiei (ρ_1). Dorim să depăşim acest inconvenient prin următoarele rezultate de punct fix.

Considerăm în continuare că V este o submulţime a lui K ce include pe U şi fie $A : V^2 \to K$ un operator mixt-monoton ce invariază mulţimea U. Vom folosi aceleaşi notaţii (cu acelaşi sens) din subsecţiunile anterioare $(W, W_1, W_2, D, E, ...)$ pentru restricţia operatorului A la U^2.

Definiţia 3.4.6 Un şir crescător (x_n) din W_1 este numit *W-împerechiat*[5] dacă există un şir descrescător (y_n) astfel încât $(x_n, y_n) \in W$ şi $x_0 \sim y_0$. Şirul (y_n) este numit *o W-pereche descrescătoare a lui (x_n)*.

În mod simetric, un şir descrescător (y_n) din W_2 este numit *W-împerechiat* dacă există un şir crescător (x_n) astfel încât $(x_n, y_n) \in W$ şi $x_0 \sim y_0$. Şirul (x_n) este numit *o W-pereche crescătoare a lui (y_n)*.

Observaţia 3.4.7 Dacă (y_n) este o W-pereche descrescătoare a unui şir crescător W-împerechiat (x_n) din W_1, atunci (y_n) este un şir W-împerechiat din W_2 şi (x_n) este o W-pereche crescătoare a lui (y_n). De asemenea, $(x_n), (y_n)$ sunt din aceeaşi parte a lui U.

Simetric, dacă (x_n) este o W-pereche crescătoare a unui şir descrescător W-împerechiat (y_n) din W_2, atunci (x_n) este un şir W-împerechiat din W_1 şi (y_n) este o W-pereche descrescătoare a lui (x_n). De asemenea, $(x_n), (y_n)$ sunt din aceeaşi parte a lui U.

Teorema 3.4.8 *Fie $\phi : E \times W_1 \to (0, 1]$ care satisface următoarea proprietate:*

[5] *W-paired* (în engleză)

(ρ_2) *Pentru orice şir crescător W-împerechiat (x_n) din W_1 şi orice şir crescător (λ_n) din E care converge la un $\lambda \neq 1$, există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $\phi(\lambda_k, y_k) > \lambda$.*

Dacă

$$\lambda^{-1} W_1 \subseteq V \quad \text{pentru orice } \lambda \in E \tag{3.4.2}$$

$$A(x, \lambda^{-1}x) \geq \phi(\lambda, x) A(\lambda^{-1}x, x) \quad \text{pentru orice } \lambda \in E, x \in W_1, \tag{3.4.3}$$

atunci concluziile Teoremei 3.4.1 rămân adevărate.

Teorema 3.4.9 *Fie $\phi : E \times W_2 \to (0, 1]$ care verifică următoarea proprietate:*

(ρ_3) *Pentru orice şir descrescător W-împerechiat (y_n) din W_2 şi orice şir crescător (λ_n) din E ce converge la un $\lambda \neq 1$, există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $\phi(\lambda_k, y_k) > \lambda$.*

Dacă

$$\lambda W_2 \subseteq V \quad \text{pentru orice } \lambda \in E \tag{3.4.4}$$

$$A(\lambda y, y) \geq \phi(\lambda, y) A(y, \lambda y) \quad \text{pentru orice } \lambda \in E, y \in W_2, \tag{3.4.5}$$

atunci concluziile Teoremei 3.4.1 rămân adevărate.

Observaţia 3.4.11 Dacă $\phi : E \times W_1 \to (0, 1]$ satisface (ρ_2), atunci $\phi(\lambda, x) > \lambda$ pentru orice $\lambda \in E, x \in W$. Similar, dacă $\phi : E \times W_2 \to (0, 1]$ satisface (ρ_3), atunci $\phi(\lambda, y) > \lambda$ pentru orice $\lambda \in E$, $y \in W_2$.

Dacă ϕ se alege independent de al doilea argument, i.e., $\phi(\lambda, \cdot) = \varphi(\lambda) \in (0, 1]$ pentru orice $\lambda \in E$, atunci (ρ_2) şi (ρ_3) se simplifică. Urmând aceeaşi paşi ca în Subsecţiunea 3.3.3, mai întâi definim şi studiem un nou concept numit *N–funcţie* (analog cu cel de M-funcţie, definit anterior).

Fie $\varphi : E \to (0, 1]$.

Definiţia 3.4.14 Spunem că *φ este o N–funcţie* dacă următoarea proprietatea este satisfăcută:

(N_1) Pentru orice $\lambda \in \overline{E}_-$, există $\varepsilon > 0$ astfel încât $\varphi(\mu) > \lambda$ pentru orice $\mu \in (\lambda - \varepsilon, \lambda] \cap E$.

Dacă φ este definită pe o mulţime mai mare din $(0, 1)$ ce include pe E şi restricţia lui φ la E este o N–funcţie, atunci spunem că *φ este o N–funcţie pe E*.

Observaţia 3.4.15 Este clear că cerinţele din (N_1) sunt verificate pentru orice $\lambda \notin \overline{E}_-$, deoarece mulţimea $(\lambda - \varepsilon, \lambda] \cap E$ este vidă pentru un anume $\varepsilon > 0$.

Următorul rezultat arată că există o dualitate între M–funcţii şi N–funcţii.

Propoziţia 3.4.16 *φ este o N–funcţie* dacă şi numai dacă $\Phi : D \to [0, \infty)$ *este o M-funcţie, unde*

$$D = \ln E^{-1} = \{\ln \lambda^{-1} : \lambda \in E\} \quad (\text{echivalent, } E = \mathrm{e}^{-D} = \{\mathrm{e}^{-t} : t \in D\})$$

$$\Phi(t) = \ln(\varphi(\mathrm{e}^{-t}))^{-1},\ t \in D \quad (\text{echivalent, } \varphi(\lambda) = \mathrm{e}^{-\Phi(\ln \lambda^{-1})},\ \lambda \in E).$$

Exemplul 3.4.17 Dacă $\varphi(\lambda) = \lambda^\alpha$ pentru orice $\lambda \in E$, unde $\alpha \in [0, 1)$, atunci φ este o N–funcţie, deoarece duala sa $\Phi(t) = \ln(\varphi(\mathrm{e}^{-t}))^{-1} = \alpha t$ este o M-funcţie (vezi Exemplul 3.3.46).

Legat de (N_1) se consideră următoarele proprietăţi similare:

(N_2) Pentru orice $\lambda \in E'_-$, există $\varepsilon > 0$ astfel încât $\varphi(\mu) > \lambda$ pentru orice $\mu \in (\lambda - \varepsilon, \lambda) \cap E$.

(N_3) Pentru orice şir (λ_n) în E astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda < 1$, există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $\varphi(\lambda_k) > \lambda$.

(N_4) Pentru orice şir (λ_n) în E astfel încât $\sup \lambda_n = \lambda < 1$, există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $\varphi(\lambda_k) > \lambda$.

(N_5) Pentru orice şir crescător (λ_n) în E astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda < 1$, există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $\varphi(\lambda_k) > \lambda$.

(N_6) Pentru orice şir strict crescător (λ_n) în E astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda < 1$, există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $\varphi(\lambda_k) > \lambda$.

Propoziţia 3.4.18 *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. *φ este o N–funcţie.*
2. *φ satisface (N_2) şi $\varphi(\lambda) > \lambda$ pentru orice $\lambda \in E$.*
3. *φ satisface (N_3).*
4. *φ satisface (N_4).*
5. *φ satisface (N_5).*
6. *φ satisface (N_6) şi $\varphi(\lambda) > \lambda$ pentru orice $\lambda \in E$.*

Următoarele rezultate sunt consecinţe imediate ale Teoremelor 3.4.8, 3.4.9 şi Propoziţiei 3.4.18.

Teorema 3.4.19 *Dacă φ este o N–funcţie, (3.4.2) este satisfăcută şi*

$$A(x, \lambda^{-1}x) \geq \varphi(\lambda) A(\lambda^{-1}x, x) \quad \text{pentru orice } \lambda \in E, x \in W_1, \tag{3.4.6}$$

atunci concluziile Teoremei 3.4.1 se menţin.

Teorema 3.4.20 *Dacă φ este o N–funcţie, (3.4.4) este satisfăcută şi*

$$A(\lambda y, y) \geq \varphi(\lambda) A(y, \lambda y) \quad \text{pentru orice } \lambda \in E, y \in W_2, \tag{3.4.7}$$

atunci concluziile Teoremei 3.4.1 se menţin.

Pentru ca Teoremele 3.4.19 şi 3.4.20 să poate fi aplicate practic, este necesar să găsim condiţii suficiente pentru ca φ să fie o N–funcţie. Rezultatele care urmează se obţin din proprietăţi similare pentru M–funcţii.

Propoziţia 3.4.21 *Dacă $\varphi(\lambda) > \lambda$ pentru orice $\lambda \in E$ şi $\liminf\limits_{\mu \to \lambda^-} \varphi(\mu) > \lambda$ pentru orice $\lambda \in E'_-$, atunci φ este o N–funcţie.*

Propoziţia 3.4.22 *Dacă $\varphi : \overline{E}_- \to (0, 1]$ astfel încât $\varphi(\lambda) > \lambda$ pentru orice $\lambda \in \overline{E}_-$ şi $\liminf\limits_{\substack{\mu \to \lambda^- \\ \mu \in E}} \varphi(\mu) \geq \varphi(\lambda)$ pentru orice $\lambda \in E'_-$, atunci φ este o N–funcţie pe E.*

Propoziţia 3.4.23 *Dacă $\varphi : \overline{E}_- \to (0, 1]$ astfel încât $\varphi(\lambda) > \lambda$ pentru orice $\lambda \in \overline{E}_-$ şi φ este inferior semicontinuă la stânga, atunci φ este o N–funcţie pe E.*

Corolarul 3.4.24 *Dacă $\alpha : \overline{E}_- \to [0, 1)$ este superior semicontinuă la stânga (în particular, este o funcţie crescătoare), atunci $\varphi : \overline{E}_- \to (0, 1]$ dată de $\varphi(\lambda) = \lambda^{\alpha(\lambda)}$ este o N–funcţie.*

Propoziţia 3.4.25 *Dacă $\varphi : \overline{E}_- \cup E_\delta \to (0, 1]$ satisface:*

(i) $\varphi(\lambda) > \lambda$ *pentru orice* $\lambda \in \overline{E}_-$;
(ii) $\varphi(\lambda) \geq \lambda$ *pentru orice* $\lambda \in E_\delta$;
(iii) $\varphi\left(\dfrac{\mu}{\lambda}\right) \leq \dfrac{\varphi(\mu)}{\varphi(\lambda)}$ *pentru orice* $\lambda \in E'_-$ *şi orice* $\mu \in (\delta\lambda, \lambda) \cap E$;

atunci φ este o N–funcţie pe E.

Dacă (3.4.6) sau (3.4.7) este întărită, este posibil să slăbim cerinţele pentru φ.

Teorema 3.4.26 *Fie $\varphi : \overline{E}_- \cup E_\delta \to (0, 1]$ astfel încât*

$$\varphi(\lambda) > \lambda \quad \text{pentru orice } \lambda \in \overline{E}_- \tag{3.4.8}$$

$$\varphi(\lambda) \geq \lambda \quad \text{pentru orice } \lambda \in E_\delta. \tag{3.4.9}$$

Dacă

$$\lambda V \subseteq V \quad \text{pentru orice } \lambda \in \overline{E}_- \cup E_\delta \tag{3.4.10}$$

$$A(\lambda x, y) \geq \varphi(\lambda) A(x, \lambda y) \quad \text{pentru orice } \lambda \in \overline{E}_- \cup E_\delta \text{ şi } x, y \in V \text{ liniar dependente,} \tag{3.4.11}$$

atunci concluziile Teoremei 3.4.1 se menţin.

Teorema 3.4.27 *Fie $\varphi : \overline{E}_- \cup E_\delta \to (0, 1]$ care satisface (3.4.8) şi (3.4.9).*

Dacă

$$\lambda^{-1} V \subseteq V \quad \text{pentru orice } \lambda \in \overline{E}_- \cup E_\delta \tag{3.4.12}$$

$$A(x, \lambda^{-1} y) \geq \varphi(\lambda) A(\lambda^{-1} x, y) \quad \text{pentru orice } \lambda \in \overline{E}_- \cup E_\delta \text{ şi } x, y \in V \text{ liniar dependente,}$$

atunci concluziile Teoremei 3.4.1 se menţin.

În cazul mai general când ϕ nu este neapărat independentă de a doua variabilă, este încă posibil să obţinem rezultate similare cu cele din Teoremele 3.4.19, 3.4.20 şi 3.4.26.

Teorema 3.4.28 *Fie $\phi : E \times W_1 \to (0, 1]$ care satisface următoarea proprietate:*

(ρ_4) Pentru orice $(u, v) \in W$ cu $u \sim v$, există o N–funcţie $\varphi_{u,v} : E \to (0, 1]$ astfel încât

$$\phi(\lambda, x) \geq \varphi_{u,v}(\lambda) \quad \text{pentru orice } \lambda \in E, x \in [u, v] \cap W_1.$$

Dacă (3.4.2) şi (3.4.3) sunt satisfăcute, atunci concluziile Teoremei 3.4.1 se menţin.

Teorema 3.4.29 *Fie $\phi : E \times W_2 \to (0, 1]$ care satisface următoarea proprietate:*

(ρ_5) Pentru orice $(u, v) \in W$ cu $u \sim v$, există o N–funcţie $\varphi_{u,v} : E \to (0, 1]$ astfel încât

$$\phi(\lambda, y) \geq \varphi_{u,v}(\lambda) \quad \text{pentru orice } \lambda \in E, y \in [u, v] \cap W_2.$$

Dacă (3.4.4) şi (3.4.5) sunt satisfăcute, atunci concluziile Teoremei 3.4.1 se menţin.

Într-un mod similar se pot formula versiuni mai generale ale Teoremelor 3.4.26 şi 3.4.27.

Teorema 3.4.30 *Fie $\phi : \overline{E}_- \times V^2 \to (0,1]$ care satisface următoarea proprietate:*

(ρ_6) Pentru oricare două elemente cvasi-comparabile $u, v \in V$ cu $u \le v$, există a funcţie $\varphi_{u,v} : \overline{E}_- \to (0,1]$ astfel încât

$$\phi(\lambda, x, y) \ge \varphi_{u,v}(\lambda) > \lambda \quad \text{pentru orice } \lambda \in \overline{E}_- \text{ şi } x, y \in [u, v] \cap V \text{ liniar dependente.} \tag{3.4.13}$$

Dacă V satisface (3.4.10) şi A verifică

$$A(\lambda x, y) \ge \phi(\lambda, x, y) A(x, \lambda y) \quad \text{pentru orice } \lambda \in \overline{E}_- \text{ şi } x, y \in V \text{ liniar dependente,} \tag{3.4.14}$$

$$A(\lambda x, y) \ge \lambda A(x, \lambda y) \quad \text{pentru orice } \lambda \in E_\delta \text{ şi } x, y \in V \text{ liniar dependente,} \tag{3.4.15}$$

atunci concluziile Teoremei 3.4.1 se menţin.

Teorema 3.4.31 *Fie $\phi : \overline{E}_- \times V^2 \to (0,1]$ care verifică (ρ_6). Dacă (3.4.12),*

$$A(x, \lambda^{-1} y) \ge \phi(\lambda, x, y) A(\lambda^{-1} x, y) \quad \text{pentru orice } \lambda \in \overline{E}_- \text{ şi } x, y \in V \text{ liniar dependente,}$$

$$A(x, \lambda^{-1} y) \ge \lambda A(\lambda^{-1} x, y) \quad \text{pentru orice } \lambda \in E_\delta \text{ şi } x, y \in V \text{ liniar dependente,}$$

atunci concluziile Teoremei 3.4.1 se menţin.

3.4.3 Concluzii

Concluzionăm această secţiune prin câteva rezultate mai particulare dar mult mai uşor de aplicat. Cadrul este acelaşi, i.e., un spaţiu liniar ordonat (X, K), cu K con arhimedean şi auto-complet.

Teorema 3.4.32 *Fie Y submulţime nevidă a lui K, $A : Y^2 \to K$ un operator mixt-monoton şi $(x_0, y_0) \in \Lambda(A)$ astfel încât $[x_0, y_0] \subseteq Y$.*

Se definesc şirurile $(x_n), (y_n)$ prin (3.2.1) şi presupunem că există $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in (0,1)$ şi $\varphi : [\varepsilon, 1) \to (0,1]$ astfel încât următoarele condiţii sunt satisfăcute:

(i) $x_k \ge \varepsilon y_k$;

(ii) $V := \bigcup_{\lambda \in (0,1]} \lambda [x_k, y_k] \subseteq Y$;

(iii) $\varphi(\lambda) > \lambda$ *pentru orice* $\lambda \in [\varepsilon, 1)$;

(iv) $A(\lambda x, y) \ge \varphi(\lambda) A(x, \lambda y)$ *pentru orice* $\lambda \in [\varepsilon, 1)$ *şi* $x, y \in V$ *liniar dependente.*

Atunci A are un unic punct fix x^* în $[x_0, y_0]$, $x^* \overset{A}{\Subset} [x_0, y_0]$ şi A este m-Picard pe $[x_0, y_0]$ în raport cu ρ.

Teorema 3.4.33 *Fie Y o submulţime nevidă a lui K, convexă în ordine astfel încât $\lambda Y \subseteq Y$ pentru orice $\lambda \in (0,1)$ şi $A : Y^2 \to K$ un operator mixt-monoton. Presupunem că există $\varphi : (0,1) \to (0,1]$ astfel încât*

$$\varphi(\lambda) > \lambda \quad \text{pentru orice } \lambda \in (0,1) \tag{3.4.16}$$

$$A(\lambda x, y) \ge \varphi(\lambda) A(x, \lambda y) \quad \text{pentru orice } \lambda \in (0,1),\ x, y \in Y. \tag{3.4.17}$$

Dacă $(x_0, y_0) \in \Lambda(A)$ este propriu, atunci A are un unic punct fix x^* în $[x_0, y_0]$, $x^* \overset{A}{\Subset} [x_0, y_0]$ şi A este m-Picard pe $[x_0, y_0]$ în raport cu ρ.

În plus, dacă $(x, y) \in \Lambda(A)$ este propriu şi $\lambda \in (0,1)$ astfel încât $x^* \in [x, y]$ şi $\lambda^{-1} y \in Y$, atunci $(\lambda x, \lambda^{-1} y) \in \Lambda(A)$ este propriu, x^* este unicul punct fix pentru A în $[\lambda x, \lambda^{-1} y]$, $x^* \overset{A}{\Subset} [\lambda x, \lambda^{-1} y]$ şi A este m-Picard pe $[\lambda x, \lambda^{-1} y]$ în raport cu ρ. În particular, dacă $\lambda \in (0,1)$ astfel încât $\lambda^{-1} x^* \in Y$, atunci x^* este unicul punct fix pentru A în $[\lambda x^*, \lambda^{-1} x^*]$, $x^* \overset{A}{\Subset} [\lambda x^*, \lambda^{-1} x^*]$ şi A este m-Picard pe $[\lambda x, \lambda^{-1} x^*]$ în raport cu ρ.

Teorema 3.4.34 *Fie Y o parte a lui K şi $A : Y^2 \to K$ un operator mixt-monoton.*

Dacă există $u \in Y$ astfel încât $A(u, u) \in Y$ şi $\varphi : (0,1) \to (0,1]$ astfel încât (3.4.16) şi

$$A(\lambda x, y) \ge \varphi(\lambda) A(x, \lambda y) \text{ pentru orice } \lambda \in (0,1) \text{ şi } x, y \in Y \text{ liniar dependente,} \tag{3.4.18}$$

atunci $A(Y^2) \subseteq Y$, $\Lambda(A)$ este nevidă şi A are un unic punct fix x^* în Y. Mai mult, A este m-Picard pe Y în raport cu ρ şi $x^* \overset{A}{\Subset} [x_0, y_0]$ pentru orice $(x_0, y_0) \in \Lambda(A)$.

3.5 Câteva note şi observaţii finale

3.5.1 Teoreme de punct fix pentru operatori mixt-monotoni în spaţii Banach ordonate

Toate rezultatele de punct fix obţinute în spaţii liniare ordonate folosind metrica Thompson rămân adevărate în cazul spaţiilor Banach ordonate cu con normal, întrucât normalitatea conului asigură că ρ este completă (Teorema 2.4.6). În plus, ρ-convergenţa este mai puternică decât convergenţa în normă (Teorema 2.4.6), ceea ce înseamnă că operatorii m-Picard în raport cu ρ sunt m-Picard şi în raport cu norma.

În acest mod, regăsim rezultatele lui Opoĭtsev [74], [75], Guo [32], Liang et al. [57], Liu et al. [59], Xu şi Jia [113], Xu şi Yuan [111], [112], Wu şi Liang [110], Li et al. [56] drept cazuri particulare sau versiuni mai slabe ale rezultatelor proprii din *Secţiunea 3.4*.

În acelaşi context, putem aplica rezulatele de punct fix din spaţii metrice ordonate la orice spaţiu Banach ordonat cu con normal, unde metrica este cea indusă de normă (normalitatea conului asigură că norma este semi-monotonă, deci că d este interval-semi-monotonă). Astfel, se obţin rezultate de punct fix ce nu sunt restricţionate doar la con.

3.5.2 Teoria punctului fix pentru operatori crescători, respectiv descrescători din perspectiva operatorilor mixt-monotoni

Deoarece teoria punctului fix pentru operatori mixt-monotoni are avantajul că include atât teoria pentru operatori crescători, cât şi pe cea pentru operatori descrescători într-o singură abordare unitară, se pot obţine prin particularizare atât rezultate cunoscute cât şi rezultate noi în aceste direcţii intens studiate. Întrucât această sarcină este elementară, vom omite orice detalii în această direcţie.

3.5.3 Dualitatea între operatorii crescători şi operatorii mixt-monotoni

3.5.4 Echivalenţa unor teoreme de punct fix în spaţii metrice ordonate

3.5.5 O scurtă comparaţie între câteva teoreme de punct fix pentru operatori mixt-monotoni în spaţii metrice ordonate

Fie $(X, \leq, d)$ un spaţiu metric ordonat unde d este o metrică completă şi fie $A : X^2 \to X$ un operator mixt-monoton. O consecinţă directă a Teoremei 3.3.47 şi Propoziţiei 3.3.49 este următorul rezultat.

Teorema 3.5.1 *Presupunem că există a funcţie $\Phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ cu $\Phi(t) < t$ şi $\limsup_{s \to t^+} \Phi(s) < t$ pentru orice $t > 0$, astfel încât*

$$d(A(x, y), A(y, x)) \leq \Phi(d(x, y)) \quad \text{pentru orice } x, y \in X \text{ astfel încât } x \leq y. \tag{3.5.1}$$

De asemenea, presupunem că X satisface proprietatea (C_3') şi d este interval-semi-monotonă. Dacă există $(x_0, y_0) \in \Lambda(A)$, atunci A are un unic punct fix x^* în $[x_0, y_0]$, $x^* \overset{A}{\in} [x_0, y_0]$ şi A este m-Picard pe $[x_0, y_0]$.

În comparaţie, unul dintre cele mai recente şi mai generale rezultate de acest tip este următorul (a se vedea şi lucrările lui Agarwal et al. [1], Ćirić et al. [25], Gnana Bhaskar şi Lakshmikantham [30], Nieto şi Rodríguez-López [69] şi [70] pentru rezultate similare, dar mai puţin generale):

Teorema 3.5.2 (Lakshmikantham and Ćirić [54]) *Presupunem că există a funcţie $\Phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ cu $\Phi(t) < t$ şi $\lim_{s \to t} \Phi(s) < t$ pentru orice $t > 0$, astfel încât*

$$d(A(x, y), A(u, v)) \leq \Phi\left(\frac{d(x, u) + d(y, v)}{2}\right) \quad \text{pentru orice } x, y, u, v \in X \text{ astfel încât } x \leq u \text{ şi } y \geq v.$$

De asemenea, presupunem că:

1. A este continuă

sau

1a. X satisface proprietatea (C_4').

Dacă există $x_0, y_0 \in X$ astfel încât

$$x_0 \leq A(x_0, y_0) \text{ şi } y_0 \geq A(y_0, x_0),$$

atunci A are cel puţin un punct fix cuplat. În plus, dacă x_0, y_0 sunt comparabile, atunci A are cel puţin un punct fix.

Evident, condiţia de tip Φ-contracţie (care este cea mai restrictivă dintre toate condiţiile enumerate în cele două teoreme) este mai generală în Teorema 3.5.1, la fel şi concluziile sunt mai puternice.

3.5.6 Problema de punct fix pentru operatori de două variabile în spaţii liniare ordonate via operatori mixt-monotoni

3.5.7 Câteva comentarii

4

Aplicaţii

În acest capitol aplicăm rezultatele de punct fix din Capitolul 3 la câteva clase de probleme neliniare exprimate ca ecuaţii de punct fix pentru operatori mixt-monotoni. Unele rezultate din acest capitol (sau altele similare) au fost deja publicate în [91], [92].

4.1 Soluţii continue şi pozitive pentru ecuaţii integrale Fredholm neliniare

Fie ecuaţia integrală Fredholm neliniară

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s, x(s), x(s))\,\mathrm{d}s, \quad t \in [0,1], \tag{4.1.1}$$

în necunoscuta x, unde f poate fi singulară în a doua sau a treia variabilă. Se caută soluţii continue şi pozitive, astfel că se consideră $X = \mathcal{C}([0,1])$ spaţiul liniar al funcţiilor continue pe $[0,1]$ cu valori reale. Împreună cu norma $|x|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |x(t)|$ $(x \in X)$ şi în raport cu conul $K = \mathcal{C}([0,1];\mathbb{R}_+)$, X devine un *spaţiu Banach ordonat* astfel încât norma sa este monotonă, deci K este *normal*. Reamintim că dacă $x \in K$, atunci $K(x)$ notează partea lui K ce conţine pe x.

4.1.1 Rezultate preliminare

Mai întâi, presupunem că

(G_1) $G : [0,1] \times [0,1] \to [0,\infty)$ este continuă şi neidentic nulă

şi considerăm:

$$\begin{aligned} g(t) &= \sup_{s\in[0,1]} G(t,s) = |G(t,\cdot)|_\infty, \quad t \in [0,1] \\ \Gamma &= \{t \in [0,1] : G(t,s) = 0 \text{ pentru orice } s \in [0,1]\} \\ J &= [0,1] \setminus \Gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_0(s) &= \inf_{t\in J} \frac{G(t,s)}{g(t)}, \quad s \in [0,1] \\ \Gamma_0 &= \{s \in [0,1] : g_0(s) = 0\} \\ J_0 &= [0,1] \setminus \Gamma_0. \end{aligned}$$

Mai departe, restricţionăm discuţia asupra cazurilor când

(G_2) Γ şi Γ_0 sunt finite

şi considerăm mulţimile

$$U_r = \{x \in K(g) : |x|_\infty \le r\} \quad \text{pentru orice } r \in (0,\infty] \text{ arbitrar}$$

$$V = \left\{x \in \mathcal{C}(J) : x(s) > 0 \text{ pentru orice } s \in J \text{ şi } \int_0^1 x(s)\,\mathrm{d}s < \infty\right\}$$

Evident, $K(g) = U_\infty$. De asemenea, spaţiul liniar $\mathcal{C}(J)$ este ordonat de conul funcţiilor continue şi pozitive pe J.

Acum fixăm $r, r_0 \in (0,\infty]$ astfel încât $r_0 \le r$. De notat că dacă $a < b = \infty$, atunci prin $[a,b]$ se va înţelege $[a,\infty)$ şi prin $(a,b]$ se va înţelege (a,∞). Fie următoarele condiţii asupra lui f, r şi r_0:

(f_1) $f : J \times (0,r] \times (0,r] \to (0,\infty)$ este continuă.
(f_2) $f(s,u_1,v_1) \le f(s,u_2,v_2)$ pentru orice $s \in J$ şi $u_1,u_2,v_1,v_2 \in (0,r]$ astfel încât $u_1 \le u_2$, $v_1 \ge v_2$.
(f_3) Pentru orice $\lambda \in (0,1)$,

$$\inf\left\{\frac{f(s,\lambda u,v)}{f(s,u,\lambda v)} : s \in J,\ u,v \in (0,r_0]\right\} > \lambda.$$

(f_4) $\int_0^1 f(s,u_0,v_0 g(s))\,\mathrm{d}s < \infty$ pentru un anume $v_0 \in \left(0, \frac{r_0}{|g|_\infty}\right]$ şi $\begin{cases} \text{pentru toţi } u_0 \in [r_0,r], & \text{dacă } r_0 < \infty \\ \text{pentru un anume } u_0 > 0, & \text{dacă } r_0 = \infty \end{cases}$.

Lema 4.1.3 *Presupunând (f_1)–(f_3) satisfăcute, funcţia*

$$\varphi : (0,1) \to \mathbb{R},\quad \varphi(\lambda) = \inf\left\{\frac{f(s,\lambda u,v)}{f(s,u,\lambda v)} : s \in J,\ u,v \in (0,r_0]\right\} \qquad (\lambda \in (0,1))$$

este corect definită şi verifică

$$\begin{aligned} &\lambda < \varphi(\lambda) \le 1 \quad \textit{pentru orice } \lambda \in (0,1) \\ &f(s,\lambda u,v) \ge \varphi(\lambda) f(s,u,\lambda v) \quad \textit{pentru orice } \lambda \in (0,1),\ s \in J,\ u,v \in (0,r_0]. \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

Lema 4.1.4 *Dacă (f_1)–(f_4) sunt satisfăcute, atunci*

$$\int_0^1 f(s,u,vg(s))\,\mathrm{d}s < \infty \quad \textit{pentru orice } u \in (0,r],\ v \in \left(0, \frac{r}{|g|_\infty}\right].$$

Lema 4.1.5 *Presupunem (G_1), (G_2), (f_1), (f_2) şi (f_4). Dacă $x^* \in K$ este o soluţie pentru (4.1.1), atunci $x^* \in U_r$.*

Propoziţia 4.1.7 *Dacă (G_1), (G_2), (f_1)–(f_4) sunt satisfăcute, atunci operatorul*

$$A : U_r^2 \to K(g),\quad A(x,y)(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s,x(s),y(s))\,\mathrm{d}s, \quad (x,y \in U_r,\ t \in [0,1])$$

este corect definit, mixt-monoton şi

$$A(\lambda x, y) \ge \varphi(\lambda) A(x,\lambda y) \quad \textit{pentru orice } \lambda \in (0,1),\ x,y \in U_{r_0}.$$

4.1.2 Rezultate principale

Definiţia 4.1.8 Dacă $x_0, y_0 \in K(g)$ verifică

$$\begin{cases} x_0(t) \le y_0(t) \\ x_0(t) \le \int_0^1 G(t,s) f(s,x_0(s),y_0(s))\,\mathrm{d}s \\ y_0(t) \ge \int_0^1 G(t,s) f(s,y_0(s),x_0(s))\,\mathrm{d}s \end{cases} \quad \text{pentru orice } t \in [0,1], \tag{4.1.3}$$

atunci perechea (x_0, y_0) este numită o *sub-supra cvasi-soluţie* pentru (4.1.1).

Teorema 4.1.9 *Dacă au loc (G_1), (G_2), (f_1)–(f_4) cu $r_0 = r = \infty$, atunci ecuaţia (4.1.1) are o soluţie unică $x^* \in K$. Mai mult, $x^* \in K(g)$ şi pentru orice $x_0, y_0 \in K(g)$, şirurile (x_n), (y_n) definite prin*

$$\begin{cases} x_{n+1}(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s,x_n(s),y_n(s))\,\mathrm{d}s \\ y_{n+1}(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s,y_n(s),x_n(s))\,\mathrm{d}s \end{cases}, \quad t \in [0,1],\ n \in \mathbb{N} \tag{4.1.4}$$

sunt convergente la x^* în raport cu norma $|\cdot|_\infty$ şi cu metrica Thompson ρ.

În plus, dacă (x_0, y_0) este o sub-supra cvasi-soluţie pentru (4.1.1), atunci $(x_n(t))$ este crescător, $(y_n(t))$ este descrescător şi $x_n(t) \le x^*(t) \le y_n(t)$ pentru orice $t \in [0,1]$ şi $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 4.1.10 *Presupunem (G_1), (G_2), (f_1)–(f_4) cu $r_0 < \infty$ şi fie $(x_0, y_0) \in U_r^2$ o sub-supra cvasi-soluţie pentru (4.1.1). Se definesc şirurile $(x_n), (y_n)$ prin (4.1.4) şi presupunem că există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $|y_k|_\infty \le r_0$. Atunci ecuaţia (4.1.1) are o soluţie unică $x^* \in K$ astfel încât $x_0(t) \le x^*(t) \le y_0(t)$ pentru orice $t \in [0,1]$. Mai mult, următoarele proprietăţi sunt satisfăcute:*

1. *$(x_n(t))$ este crescător, $(y_n(t))$ este descrescător şi $x_n(t) \le x^*(t) \le y_n(t)$ pentru orice $t \in [0,1]$ şi $n \in \mathbb{N}$;*
2. *$(x_n), (y_n)$ sunt convergente la x^* în raport cu norma $|\cdot|_\infty$ şi cu metrica Thompson ρ.*

În plus, pentru orice $u_0, v_0 \in U_r$ astfel încât (u_0, v_0) este a sub-supra cvasi-soluţie pentru (4.1.1) şi

$$u_0(t) \le x^*(t) \le v_0(t) \quad \textit{pentru orice } t \in [0,1], \tag{4.1.5}$$

se definesc

$$\begin{cases} u_{n+1}(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s,u_n(s),v_n(s))\,\mathrm{d}s \\ v_{n+1}(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s,v_n(s),u_n(s))\,\mathrm{d}s \end{cases}, \quad t \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}. \tag{4.1.6}$$

Dacă există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $|v_k|_\infty \le r_0$, atunci x^* este unica soluţie a lui (4.1.1) din K care verifică (4.1.5).

4.2 Soluţii pozitive ale problemelor la frontieră pentru ecuaţiilor diferenţiale de ordinul al doilea

Considerăm următoarea problemă

$$\begin{cases} -x''(t) = f(t, x(t), x(t)), & t \in (0,1) \\ a_0 x(0) - b_0 x'(0) = 0 \\ a_1 x(1) + b_1 x'(1) = 0 \end{cases} \tag{4.2.1}$$

cu

$$\begin{cases} a_0, a_1, b_0, b_1 \geq 0 \\ \delta := a_0 a_1 + a_0 b_1 + a_1 b_0 > 0 \end{cases}. \tag{4.2.2}$$

4.2.1 Rezultate preliminare

Este un rezultat standard că problema (4.2.1) se reduce la ecuaţia integrală Fredholm (4.1.1), unde G este funcţia lui Green

$$G(t,s) = \frac{1}{\delta} \begin{cases} (a_0 t + b_0)(a_1(1-s) + b_1) & \text{dacă } 0 \leq t \leq s \leq 1 \\ (a_0 s + b_0)(a_1(1-t) + b_1) & \text{dacă } 0 \leq s < t \leq 1 \end{cases}. \tag{4.2.3}$$

Dacă $u_0(t) = \dfrac{a_0 t + b_0}{a_0 + b_0}$ şi $u_1(t) = \dfrac{a_1(1-t) + b_1}{a_1 + b_1}$ pentru orice $t \in [0,1]$, se poate rescrie

$$G(t,s) = \frac{(a_0 + b_0)(a_1 + b_1)}{\delta} \begin{cases} u_0(t) u_1(s) & \text{dacă } 0 \leq t \leq s \leq 1 \\ u_0(s) u_1(t) & \text{dacă } 0 \leq s < t \leq 1 \end{cases}.$$

Se obţine uşor că

$$g(s) = G(s,s) = \frac{(a_0 s + b_0)(a_1(1-s) + b_1)}{\delta} = \frac{(a_0 + b_0)(a_1 + b_1)}{\delta} u_0(s) u_1(s), \quad s \in [0,1] \tag{4.2.4}$$

$$g_0(t) = \min\{u_0(t), u_1(t)\}, \quad t \in [0,1],$$

iar

$$\frac{(a_0 + b_0)(a_1 + b_1)}{\delta + a_0 a_1} g_0(t) \leq g(t) \leq \frac{(a_0 + b_0)(a_1 + b_1)}{\delta} g_0(t) \quad \text{pentru orice } t \in [0,1]$$

ceea ce arată că g şi g_0 sunt cvasi-comparabile. De notat că $\Gamma = \Gamma_0 \subseteq \{0,1\}$.

4.2.2 Rezultate principale

Teorema 4.2.1 *Dacă (4.2.2), (f_1)–(f_4) cu $r_0 = r = \infty$, $J = (0,1)$, G şi g date de (4.2.3)-(4.2.4), atunci problema (4.2.1) are o soluţie pozitivă unică $x^* \in \mathcal{C}^2(0,1) \cap \mathcal{C}^1[0,1]$.*

Mai mult, $x^* \in K(g)$ şi pentru orice $x_0, y_0 \in K(g)$, şirurile $(x_n), (y_n)$ definite prin (4.1.4) sunt convergente la x^* în raport cu norma $|\cdot|_\infty$ şi cu metrica Thompson ρ.

În plus, dacă (x_0, y_0) este o sub-supra cvasi-soluţie pentru (4.1.1), atunci $(x_n(t))$ este crescător, $(y_n(t))$ este descrescător şi $x_n(t) \leq x^*(t) \leq y_n(t)$ pentru orice $t \in [0,1]$ şi $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 4.2.2 *Presupunem (4.2.2), (f_1)–(f_4) cu $r_0 < r \leq \infty$, $J = (0,1)$, G şi g date de (4.2.3)-(4.2.4) şi fie $(x_0, y_0) \in U_r^2$ o sub-supra cvasi-soluţie pentru (4.1.1).*

Dacă şirurile $(x_n), (y_n)$ date de (4.1.4) satisfac $|y_k|_\infty \leq r_0$ pentru un $k \in \mathbb{N}$, atunci problema (4.2.1) are o soluţie pozitivă unică $x^* \in \mathcal{C}^2(0,1) \cap \mathcal{C}^1[0,1]$ astfel încât $x_0(t) \leq x^*(t) \leq y_0(t)$ pentru orice $t \in [0,1]$.

Mai mult, următoarele proprietăţi sunt satisfăcute:

1. *$(x_n(t))$ este crescător, $(y_n(t))$ este descrescător şi $x_n(t) \leq x^*(t) \leq y_n(t)$ pentru orice $t \in [0,1]$ şi $n \in \mathbb{N}$;*
2. *$(x_n), (y_n)$ sunt convergente la x^* în raport cu norma $|\cdot|_\infty$ şi cu metrica Thompson ρ..*

În plus, dacă $u_0, v_0 \in U_r$ sunt astfel încât (u_0, v_0) este o sub-supra cvasi-soluţie pentru (4.1.1),

$$u_0(t) \leq x^*(t) \leq v_0(t) \quad \text{pentru orice } t \in [0,1], \tag{4.2.5}$$

şi $|v_k|_\infty \leq r_0$ pentru un $k \in \mathbb{N}$, cu $(u_n), (v_n)$ definite prin (4.1.6), atunci x^* este unica soluţie pozitivă pentru (4.2.1) în $\mathcal{C}^2(0,1) \cap \mathcal{C}^1[0,1]$ care verifică (4.1.5).

4.2.3 Câteva exemple

Considerăm următoarea problemă concretă

$$\begin{cases} -x'' = \mu(x^\alpha + x^{-\beta}), & t \in (0,1) \\ a_0 x(0) - b_0 x'(0) = 0 \\ a_1 x(1) + b_1 x'(1) = 0 \end{cases} \tag{4.2.6}$$

cu
$$\begin{cases} a_0, a_1, b_0, b_1, \alpha, \beta \geq 0 \\ \mu > 0 \\ \delta := a_0 a_1 + a_0 b_1 + a_1 b_0 > 0 \end{cases}. \tag{4.2.7}$$

Fie
$$f : (0, \infty) \times (0, \infty) \to (0, \infty), \quad f(x, y) = \mu(x^\alpha + y^{-\beta}).$$
Evident, f este continuă şi mixt-monotonă, astfel că (f_1) şi (f_2) sunt satisfăcute, cu $r = \infty$.

Lema 4.2.3 *Dacă $\beta < 1$, atunci (f_3) şi (f_4) sunt satisfăcute, cu $r = \infty$ şi pentru orice r_0 astfel încât*

1. *$r_0 \leq \infty$, dacă $\alpha < 1$;*
2. *$r_0 < \infty$, dacă $\alpha = 1$;*
3. *$r_0 \leq \left(\dfrac{1-\beta}{\alpha - 1}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$, dacă $\alpha > 1$.*

Când $\alpha, \beta < 1$, obţinem o uşoară extindere a unui rezultat al lui Zhao [119].

Teorema 4.2.4 *Dacă (4.2.7) şi $\alpha, \beta < 1$, atunci problema (4.2.6) are o soluţie pozitivă unică $x^* \in \mathcal{C}^2(0,1) \cap \mathcal{C}^1[0,1]$.*

Mai mult, dacă G şi g sunt definite prin (4.2.3)-(4.2.4), atunci $x^* \in K(g)$ şi pentru orice $x_0, y_0 \in K(g)$, şirurile $(x_n), (y_n)$ date de
$$\begin{cases} x_{n+1}(t) = \mu \int_0^1 G(t,s) \left(x_n(s)^\alpha + y_n(s)^{-\beta}\right) \mathrm{d}s \\ y_{n+1}(t) = \mu \int_0^1 G(t,s) \left(y_n(s)^\alpha + x_n(s)^{-\beta}\right) \mathrm{d}s \end{cases}, \quad t \in [0,1],\ n \in \mathbb{N} \tag{4.2.8}$$
sunt convergente la x^* în raport cu norma $|\cdot|_\infty$ şi cu metrica Thompson ρ.

În plus, dacă
$$\begin{cases} x_0(t) \leq y_0(t) \\ x_0(t) \leq \mu \int_0^1 G(t,s) \left(x_0(s)^\alpha + y_0(s)^{-\beta}\right) \mathrm{d}s \\ y_0(t) \geq \mu \int_0^1 G(t,s) \left(y_0(s)^\alpha + x_0(s)^{-\beta}\right) \mathrm{d}s \end{cases} \quad \textit{pentru orice } t \in [0,1], \tag{4.2.9}$$
atunci $(x_n(t))$ este crescător, $(y_n(t))$ este descrescător şi $x_n(t) \leq x^*(t) \leq y_n(t)$ pentru orice $t \in [0,1]$ şi $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 4.2.5 *Presupunem (4.2.7), $\alpha > 1$ şi $\beta < 1$ şi fie G şi g definite prin (4.2.3)-(4.2.4).*

Dacă $(x_0, y_0) \in K(g)^2$ satisface (4.2.9) iar şirurile $(x_n), (y_n)$ date de (4.2.8) satisfac
$$|y_k|_\infty \leq \left(\frac{1-\beta}{\alpha-1}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \quad \textit{pentru un } k \in \mathbb{N},$$
atunci problema (4.2.6) are o soluţie pozitivă unică $x^* \in \mathcal{C}^2(0,1) \cap \mathcal{C}^1[0,1]$ astfel încât $x_0(t) \leq x^*(t) \leq y_0(t)$ pentru orice $t \in [0,1]$.

Mai mult, următoarele proprietăţi sunt satisfăcute:

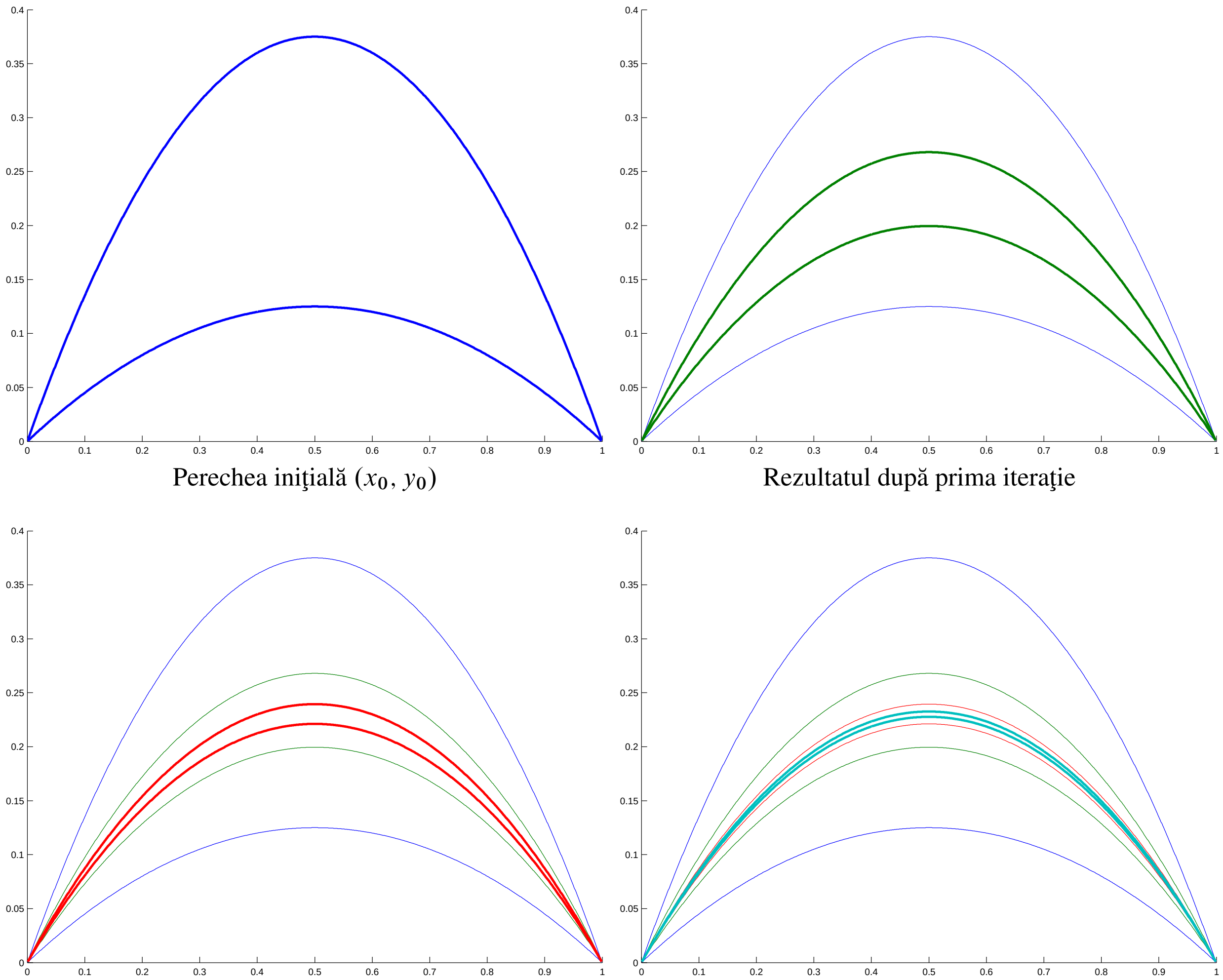
1. *$(x_n(t))$ este crescător, $(y_n(t))$ este descrescător şi $x_n(t) \leq x^*(t) \leq y_n(t)$ pentru orice $t \in [0,1]$ şi $n \in \mathbb{N}$;*
2. *$(x_n), (y_n)$ sunt convergente la x^* în raport cu norma $|\cdot|_\infty$ şi cu metrica Thompson ρ.*

În plus, dacă $u_0, v_0 \in K(g)$ sunt astfel încât
$$\begin{cases} u_0(t) \leq v_0(t) \\ u_0(t) \leq \mu \int_0^1 G(t,s) \left(u_0(s)^\alpha + v_0(s)^{-\beta}\right) \mathrm{d}s \\ v_0(t) \geq \mu \int_0^1 G(t,s) \left(v_0(s)^\alpha + u_0(s)^{-\beta}\right) \mathrm{d}s \end{cases} \quad \textit{pentru orice } t \in [0,1], \tag{4.2.10}$$
$$u_0(t) \leq x^*(t) \leq v_0(t) \quad \textit{pentru orice } t \in [0,1], \tag{4.2.11}$$
şi
$$|v_k|_\infty \leq \left(\frac{1-\beta}{\alpha-1}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \quad \textit{pentru un } k \in \mathbb{N},$$
cu $(u_n), (v_n)$ definite prin
$$\begin{cases} u_{n+1}(t) = \mu \int_0^1 G(t,s) \left(u_n(s)^\alpha + v_n(s)^{-\beta}\right) \mathrm{d}s \\ v_{n+1}(t) = \mu \int_0^1 G(t,s) \left(v_n(s)^\alpha + u_n(s)^{-\beta}\right) \mathrm{d}s \end{cases}, \quad t \in [0,1],\ n \in \mathbb{N},$$
atunci x^* este unica soluţie pozitivă pentru (4.2.6) în $\mathcal{C}^2(0,1) \cap \mathcal{C}^1[0,1]$ care verifică (4.2.11).

Teorema 4.2.6 *Dacă (4.2.7) şi $\alpha = 1$, $\beta < 1$, atunci problema (4.2.6) are o soluţie pozitivă unică $x^* \in \mathcal{C}^2(0,1) \cap \mathcal{C}^1[0,1]$ şi concluziile Teoremei 4.2.4 se păstrează.*

4.2.4 Câteva reprezentări grafice

Ilustrăm grafic procedeul de aproximare monotonă bilaterală a soluţiilor pe câteva exemple. Unul dintre aceste exemple este următorul:



Perechea iniţială (x_0, y_0) Rezultatul după prima iteraţie

Rezultatul după a doua iteraţie Rezultatul după a treia iteraţie

Figura 1: Aproximarea bilaterală a unicei soluţii pozitive a problemei

$$\begin{cases} -x'' = x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{5}}, & t \in (0,1) \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases}$$

unde $x_0(t) = \frac{t(1-t)}{2}$ şi $y_0(t) = \frac{3t(1-t)}{2}$ $(t \in [0,1])$

4.3 Problema de punct fix pentru sisteme de operatori parţial monotoni

Fie $N \geq 1$ un număr întreg, $\{(X_i, \leq) : i \in \{1, 2, \ldots, N\}\}$ o familie de mulţimi ordonate, $X := X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_N$ spaţiul produs ordonat în raport cu relaţia de ordine

$$x = (x^1, x^2, \ldots, x^N) \leq (y^1, y^2, \ldots, y^N) = y \textit{ dacă şi numai dacă } x^i \leq y^i \text{ pentru orice } i \in \{1, 2, \ldots, N\},$$

$U_i \subseteq X_i$ $(i \in \{1, 2, \ldots, N\})$, $U := U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_N \subseteq X$, $\{T_i : U \to X_i : i \in \{1, 2, \ldots, N\}\}$ o familie de operatori de N variabile şi $T = (T_1, T_2, \ldots, T_N) : U \to X$. Studiem sistemul

$$x^i = T_i(x^1, x^2, \ldots, x^N), \quad x = (x^1, x^2, \ldots, x^N) \in U, \ i \in \{1, 2, \ldots, N\} \tag{4.3.1}$$

în ipoteza că T_i este *parţial monoton* pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$, i.e., T_i este monoton (crescător sau descrescător) în raport cu fiecare variabilă independent. Evident, sistemul (4.3.1) poate fi văzut ca problemă de punct fix pe mulţimea U pentru operatorul T. Idea pe care am dezvoltat-o în [91] a fost de a demonstra că T este heterotonic, i.e., există un operator mixt-monoton $A : U^2 \to X$ astfel încât

$$A(x, x) = T(x) \quad \text{pentru orice } x \in U. \tag{4.3.2}$$

În acest mod, putem stabili o echivalenţă între (4.3.1) şi problema de punct fix pentru A pe mulţimea U

$$x = A(x, x), \quad x \in U. \tag{4.3.3}$$

Pentru a construi operatorul A, asociem fiecărui T_i un operator

$$\Sigma_i = (\Sigma_{i,1}, \Sigma_{i,2}, \ldots, \Sigma_{i,N}) : U^2 \to U$$

ale cărui componente sunt definite prin

$$\Sigma_{i,j} : U^2 \to U_j, \quad \Sigma_{i,j}(x, y) = \begin{cases} x_j, & \text{dacă } T_i \text{ este crescător în variabila } j \\ y_j, & \text{dacă } T_i \text{ este descrescător în variabila } j \end{cases} \quad (j \in \{1, 2, \ldots, N\}, \quad x, y \in U).$$

De asemenea, scriem $x \leq_i y$ $(x, y \in X)$ când $\Sigma_i(x, y) \leq \Sigma_i(y, x)$, i.e.,

$$\begin{cases} x_j \leq y_j \text{ dacă } T_i \text{ este crescător în variabila } j \\ x_j \geq y_j \text{ dacă } T_i \text{ este descrescător în variabila } j \end{cases} \quad (j \in \{1, 2, \ldots, N\}). \tag{4.3.4}$$

Se constată că $\leq_i$ defineşte o relaţie de ordine (alternativă) pe X. În aceste condiţii şi folosind notaţiile din Capitolul 3, arătăm că:

Lema 4.3.1 *Pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$:*

1. $\Sigma_i\left(\Sigma_i(x, y), \Sigma_i(u, v)\right) = \Sigma_i(x, v)$ *pentru orice* $x, y, u, v \in U$.
2. $\Sigma_i(x, x) = x$ *pentru orice* $x \in U$.
3. $\Sigma_i^2 = P_U$ *, unde puterile funcţionale sunt considerate în raport cu operaţia de m-compunere.*
4. Σ_i *este m-inversabilă (i.e., inversabilă în raport cu operaţia de m-compunere) şi* $\Sigma_i^{-1} = \Sigma_i$.
5. $\Sigma_i(x, y) \leq_i \Sigma_i(u, v)$ dacă şi numai dacă $\Sigma_i(x, v) \leq \Sigma_i(u, y)$ *pentru orice* $x, y, u, v \in U$.
6. $\Sigma_i(x, y) \leq_i \Sigma_i(y, x)$ dacă şi numai dacă $x \leq y$ *pentru orice* $x, y \in U$.
7. $\Sigma_i : (U^2, \leq) \to (U, \leq)$ *este crescător, i.e.,* $\Sigma_i(x, y) \leq \Sigma_i(u, v)$ *dacă* $x \leq u$ *şi* $y \leq v$ $(x, y, u, v \in U)$.
8. $\Sigma_i : (U^2, \leq) \to (U, \leq_i)$ *este mixt-monoton, i.e.,* $\Sigma_i(x, y) \leq_i \Sigma_i(u, v)$ *dacă* $x \leq u$ *şi* $y \geq v$ $(x, y, u, v \in U)$.
9. $T_i : (U, \leq_i) \to (X_i, \leq)$ *este crescător, i.e.,* $T_i(x) \leq T_i(y)$ *dacă* $x \leq_i y$ $(x, y \in U)$.

Teorema 4.3.2 *Operatorul*

$$A = (A_1, A_2, \ldots, A_N) : U^2 \to X, \quad A_i = T_i \Sigma_i \quad (i \in \{1, 2, \ldots, N\}) \tag{4.3.5}$$

este mixt-monoton şi satisface (4.3.2). Mai mult,

$$(A_i * \Sigma_i)(x, y) = T_i(x) \quad \text{pentru orice } i \in \{1, 2, \ldots, N\} \text{ şi } x, y \in U.$$

Exemplul 4.3.3 Dacă $N = 3$ şi T_1 este descrescător în raport cu primele două argumente şi crescător în ultimul argument (pe scurt, $T_1 : \searrow\searrow\nearrow$), atunci $\Sigma_1(x, y) = (y^1, y^2, x^3)$ şi $A_1(x, y) = T_1(y^1, y^2, x^3)$ pentru orice $x = (x^1, x^2, x^3)$, $y = (y^1, y^2, y^3) \in U$. De asemenea, $x \leq_1 y$ *dacă şi numai dacă* $x^1 \geq y^1, x^2 \geq y^2, x^3 \leq y^3$.

4.3.1 O teoremă de punct fix în spaţii metrice ordonate

Presupunem în continuare că d_i este o metrică completă pe X_i care verifică (C_3') şi care este interval semi-monotonă, cu γ_i notând constanta de semi-monotonie; de asemenea, fie $U_i := X_i$ pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$, astfel că $U = X$. În mod clar,

$$d : X^2 \to [0, \infty), \quad d(x, y) = \max_i d_i(x_i, y_i) \quad (x, y \in X)$$

este o metrică completă pe X care verifică (C_3') şi este interval semi-monotonă, iar $\max_i \gamma_i$ este constanta de semi-monotonie.

O consecinţă directă a Teoremelor 3.5.1 şi 4.3.2 este următorul rezultat.

Teorema 4.3.4 *Fie $\Phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ o funcţie ce verifică $\Phi(t) < t$ şi $\limsup_{s \to t+} \Phi(s) < t$ pentru orice $t > 0$. Presupunem că*

$$d_i(T_i(x), T_i(y)) \leq \Phi\left(\max_j d_j(x_j, y_j)\right) \quad \text{pentru orice } x, y \in X \text{ cu } x \leq_i y \text{ şi } i \in \{1, 2, \ldots, N\}. \tag{4.3.6}$$

Dacă există $(x_0, y_0) \in X^2$ astfel încât

$$\begin{cases} x_0^i \leq y_0^i \\ x_0^i \leq T_i \Sigma_i(x_0, y_0) \\ y_0^i \geq T_i \Sigma_i(y_0, x_0) \end{cases} \quad (i \in \{1, 2, \ldots, N\}), \tag{4.3.7}$$

atunci T este un operator Picard pe $[x_0, y_0]$. Mai mult, dacă x^* este unicul punct fix al lui T (i.e., unica soluţie a lui (4.3.1)) în $[x_0, y_0]$, atunci şirurile (x_n), respectiv (y_n) definite prin

$$\begin{cases} x_{n+1}^i = T_i \Sigma_i(x_n, y_n) \\ y_{n+1}^i = T_i \Sigma_i(y_n, x_n) \end{cases} \quad (i \in \{1, 2, \ldots, N\}, \ n \in \mathbb{N}) \tag{4.3.8}$$

sunt crescătoare, respectiv descrescătoare şi convergente la x^*.

4.3.2 O teoremă de punct fix în spaţii liniare ordonate

În cele ce urmează, presupunem că X_i este un spaţiu liniar ordonat în raport cu conul arhimedean şi auto-complet K_i (pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, N\}$) şi că U_i este o parte a lui K_i. Evident, X este un spaţiu liniar ordonat în raport cu conul $K = K_1 \times K_2 \times \cdots \times K_N$. Este uşor de verificat că U este o parte a lui K şi că K este arhimedean şi auto-complet. În particular, se poate presupune că $(X_i, K_i, |\cdot|_i)$ este un spaţiu Banach ordonat având conul normal pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, N\}$.

Teorema 4.3.5 *Presupunem că există $\varphi : (0,1) \to (0,1]$ astfel încât $\varphi(\lambda) > \lambda$ pentru orice $\lambda \in (0,1)$ şi*

$$T_i \Sigma_i(\lambda x, x) \geq \varphi(\lambda) T_i \Sigma_i(x, \lambda x) \text{ pentru orice } \lambda \in (0,1),\ x \in U \text{ şi } i \in \{1, 2, \dots, N\}. \tag{4.3.9}$$

Dacă există $u_0 \in U$ astfel încât $T(u_0) \in U$, atunci $T(U) \subseteq U$, T este Picard pe U în raport cu metrica Thompson şi există $(x_0, y_0) \in U^2$ care satisface (4.3.7). Mai mult, pentru orice $(x_0, y_0) \in U^2$ ce verifică (4.3.7), şirurile (x_n), (y_n) definite prin (4.3.8) sunt crescătoare, respectiv descrescătoare şi convergente la unicul punct fix al lui T în U.

4.3.3 Un exemplu abstract

Fie (4.3.1) cu $N = 3$: $\begin{cases} x^1 = T_1(x^1, x^2, x^3) \\ x^2 = T_2(x^1, x^2, x^3) \\ x^3 = T_3(x^1, x^2, x^3) \end{cases}$ şi presupunem că $T_1 : \nearrow\searrow\searrow$, $T_2 : \searrow\nearrow\searrow$ şi $T_3 : \searrow\searrow\searrow$. În acest caz,

$$\begin{cases} \Sigma_1(x, y) = (x^1, y^2, y^3) \\ \Sigma_2(x, y) = (y^1, x^2, y^3) \\ \Sigma_3(x, y) = (y^1, y^2, y^3) \end{cases}$$

şi

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} T_1(x^1, y^2, y^3) \\ T_2(y^1, x^2, y^3) \\ T_3(y^1, y^2, y^3) \end{pmatrix}^t$$

pentru orice $x = (x^1, x^2, x^3)$ şi $y = (y^1, y^2, y^3)$. Presupunem, de asemenea, contextul din subsecţiunea precedentă. În acest caz, (4.3.9) devine

$$\begin{cases} T_1(\lambda x^1, x^2, x^3) & \geq & \varphi(\lambda) T_1(x^1, \lambda x^2, \lambda x^3) \\ T_2(x^1, \lambda x^2, x^3) & \geq & \varphi(\lambda) T_2(\lambda x^1, x^2, \lambda x^3) \\ T_3(x^1, x^2, x^3) & \geq & \varphi(\lambda) T_2(\lambda x^1, \lambda x^2, \lambda x^3) \end{cases}, \tag{4.3.10}$$

(4.3.7) se scrie explicit după cum urmează:

$$\begin{cases} x_0 \leq y_0 & \\ x_0^1 \leq T_1(x_0^1, y_0^2, y_0^3) & y_0^1 \geq T_1(y_0^1, x_0^2, x_0^3) \\ x_0^2 \leq T_2(y_0^1, x_0^2, y_0^3) & y_0^2 \geq T_2(x_0^1, y_0^2, x_0^3) \\ x_0^3 \leq T_3(y_0^1, y_0^2, y_0^3) & y_0^3 \geq T_3(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \end{cases}. \tag{4.3.11}$$

iar şirurile (x_n), respectiv (y_n) în (4.3.8) sunt construite astfel:

$$\begin{cases} x_{n+1}^1 = T_1(x_n^1, y_n^2, y_n^3) & y_{n+1}^1 = T_1(y_n^1, x_n^2, x_n^3) \\ x_{n+1}^2 = T_2(y_n^1, x_n^2, y_n^3) & y_{n+1}^2 = T_2(x_n^1, y_n^2, x_n^3) \\ x_{n+1}^3 = T_3(y_n^1, y_n^2, y_n^3) & y_{n+1}^3 = T_3(x_n^1, x_n^2, x_n^3) \end{cases}. \tag{4.3.12}$$

Teorema 4.3.5 se rescrie după cum urmează:

Teorema 4.3.6 *Presupunem există $\varphi : (0,1) \to (0,1]$ astfel încât $\varphi(\lambda) > \lambda$ pentru orice $\lambda \in (0,1)$ şi (4.3.10) pentru orice $\lambda \in (0,1)$ şi $x = (x^1, x^2, x^3) \in U$. Dacă există $u_0 \in U$ astfel încât $T(u_0) \in U$, atunci $T(U) \subseteq U$, T este Picard pe U în raport cu metrica Thompson şi există $(x_0, y_0) \in U^2$ care verifică (4.3.11). Mai mult, pentru orice $(x_0, y_0) \in U^2$ ce verifică (4.3.11), şirurile (x_n), (y_n) definite prin (4.3.12) sunt crescătoare, respectiv descrescătoare şi convergente la unicul punct fix al lui T în U.*

Bibliografie

[1] AGARWAL, R. P., EL-GEBEILY, M. A. ŞI O'REGAN, D. Generalized contractions în partially spaţii metrice ordonate. *Appl. Anal. 87*, 1 (2008), 109–116.

[2] AGARWAL, R. P., O'REGAN, D. ŞI PRECUP, R. Construction of upper şi lower solutions cu applications to singular boundary value problems. *J. Comput. Anal. Appl. 7*, 2 (2005), 205–221.

[3] AMANN, H. On the number of solutions of neliniare equations în ordered Banach spaces. *J. Functional Analysis 11* (1972), 346–384.

[4] AMANN, H. Fixed punct equations şi neliniare eigenvalue problems în ordered Banach spaces. *SIAM Rev. 18*, 4 (1976), 620–709.

[5] ANDÔ, T. On fundamental properties of a Banach space cu a con. *Pacific J. Math. 12* (1962), 1163–1169.

[6] BABKIN, B. N. Solution of a boundary problem for an ordinary differential equation of a second order by Čaplygin's method. *Akad. Nauk SSSR. Prikl. Mat. Meh. 18* (1954), 239–242.

[7] BAHTIN, I. A. Non-linear equations cu uniformly concave operators. *Sibirsk. Mat. Ž. 4* (1963), 268–286.

[8] BAHTIN, I. A. ŞI KRASNOSEL′SKIĬ, M. A. The method of successive approximations în teoria equations cu concave operators. *Sibirsk. Mat. Ž. 2* (1961), 313–330.

[9] BAUER, H. ŞI BEAR, H. S. The part metric în convex sets. *Pacific J. Math. 30* (1969), 15–33.

[10] BEAR, H. S. A geometric characterization of Gleason parts. *Proc. Amer. Math. Soc. 16* (1965), 407–412.

[11] BEAR, H. S. *Lectures on Gleason parts*. Lecture Notes în Mathematics, Vol. 121. Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[12] BEAR, H. S. ŞI WEISS, M. L. An intrinsic metric for parts. *Proc. Amer. Math. Soc. 18* (1967), 812–817.

[13] BIRKHOFF, G. Extensions of Jentzsch's theorem. *Trans. Amer. Math. Soc. 85* (1957), 219–227.

[14] BLUMENTHAL, L. M. *Theory and applications of distance geometry*. Oxford, at the Clarendon Press, 1953.

[15] BOYD, D. W. ŞI WONG, J. S. W. On neliniare contractions. *Proc. Amer. Math. Soc. 20* (1969), 458–464.

[16] BROWDER, F. E. On convergenţa successive approximations for neliniare funcţieal equations. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 71=Indag. Math. 30* (1968), 27–35.

[17] BUICĂ, A. Existence results for evolution equations via monotone iterative techniques. *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal. 9*, 4 (2002), 487–498.

[18] BUICĂ, A. Monotone iterations for the initial value problem. *Semin. Fixed Point Theory Cluj-Napoca 3* (2002), 137–147. International Conference pe Nonlinear Operators, Differential Equations şi Applications (Cluj-Napoca, 2001).

[19] BUICĂ, A. ŞI PRECUP, R. Abstract generalized cvasilinearization method for coincidences. *Nonlinear Stud. 9*, 4 (2002), 371–386.

[20] CHEN, T. ŞI WU, X. P. Order-convex sets şi normality of cones. *Xinan Shifan Daxue Xuebao Ziran Kexue Ban 23*, 2 (1998), 138–141.

[21] CHEN, Y. Z. Existence theorems of puncte fixe cuplate. *J. Math. Anal. Appl. 154*, 1 (1991), 142–150.

[22] CHEN, Y. Z. Thompson's metric şi operatori mixt-monotoni. *J. Math. Anal. Appl. 177*, 1 (1993), 31–37.

[23] CHEN, Y. Z. A variant of the Meir-Keeler-type theorem în ordered Banach spaces. *J. Math. Anal. Appl. 236*, 2 (1999), 585–593.

[24] CHERPION, M., DE COSTER, C. ŞI HABETS, P. Monotone iterative methods for boundary value problems. *Differential Integral Equations 12*, 3 (1999), 309–338.

[25] ĆIRIĆ, L., CAKIĆ, N., RAJOVIĆ, M. ŞI UME, J. S. Monotone generalized neliniare contractions în partially spaţii metrice ordonate. *Fixed Point Theory Appl. 2008* (2008), Art. ID 131294, 11.

[26] COLLATZ, L. ŞI SCHRÖDER, J. Einschliessen der Lösungen von Randwertaufgaben. *Numer. Math. 1* (1959), 61–72.

[27] DEIMLING, K. *Nonlinear functional analysis*. Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[28] DUGUNDJI, J. ŞI GRANAS, A. Weakly contractive maps şi elementary domain invariance theorem. *Bull. Soc. Math. Grèce (N.S.) 19*, 1 (1978), 141–151.

[29] EDELSTEIN, M. An extension of Banach's contracţie principle. *Proc. Amer. Math. Soc. 12* (1961), 7–10.

[30] GNANA BHASKAR, T. ŞI LAKSHMIKANTHAM, V. Teoreme de punct fix în partially spaţii metrice ordonate şi applications. *Nonlinear Anal. 65*, 7 (2006), 1379–1393.

[31] GUO, D., CHO, Y. J. ŞI ZHU, J. *Partial ordering methods in nonlinear problems*. Nova Science Publishers Inc., Hauppauge, NY, 2004.

[32] GUO, D. J. Fixed points of operatori mixt-monotoni cu applications. *Appl. Anal. 31*, 3 (1988), 215–224.

[33] GUO, D. J. Existence şi unicitate of positive puncte fixe for operatori mixt-monotoni şi applications. *Appl. Anal. 46*, 1-2 (1992), 91–100.

[34] GUO, D. J. ŞI LAKSHMIKANTHAM, V. Coupled puncte fixe of neliniare operators cu applications. *Nonlinear Anal. 11*, 5 (1987), 623–632.

[35] HEIKKILÄ, S. ŞI LAKSHMIKANTHAM, V. *Monotone iterative techniques for discontinuous nonlinear differential equations*, vol. 181 of *Monographs şi Textbooks în Pure şi Applied Mathematics*. Marcel Dekker Inc., New York, 1994.

[36] HYERS, D. H., ISAC, G. ŞI RASSIAS, T. M. *Topics in nonlinear analysis & applications*. World Scientific Publishing Co.

Inc., River Edge, NJ, 1997.
[37] JACHYMSKI, J. Equivalent condiţii şi the Meir-Keeler type theorems. *J. Math. Anal. Appl. 194*, 1 (1995), 293–303.
[38] JACHYMSKI, J. R. Equivalence of some contractivity properties over metrical structures. *Proc. Amer. Math. Soc. 125*, 8 (1997), 2327–2335.
[39] JAMESON, G. Allied subsets of topological groups şi linear spaces. *Proc. London Math. Soc. (3) 18* (1968), 653–690.
[40] JAMESON, G. *Ordered linear spaces*. Lecture Notes în Mathematics, Vol. 141. Springer-Verlag, Berlin, 1970.
[41] JUNG, C. F. K. On generalized complet metric spaces. *Bull. Amer. Math. Soc. 75* (1969), 113–116.
[42] KANTOROVITCH, L. The method of successive approximations for funcţieal equations. *Acta Math. 71* (1939), 63–97.
[43] KHAVANIN, M. ŞI LAKSHMIKANTHAM, V. The method of mixed monotony şi first order differential systems. *Nonlinear Anal. 10*, 9 (1986), 873–877.
[44] KHAVANIN, M. ŞI LAKSHMIKANTHAM, V. The method of mixed monotony şi second order boundary value problems. *J. Math. Anal. Appl. 120*, 2 (1986), 737–744.
[45] KOLOSOV, A. I. On a class of equations cu operators having the properties of concavity (în russian). *Sibirsk. Mat. Zh. 27*, 2 (1986), 75–83.
[46] KRASNOSEL′SKIĬ, M. A. *Positive solutions of operator equations*. Translated din the Russian by Richard E. Flaherty; edited by Leo F. Boron. P. Noordhoff Ltd. Groningen, 1964.
[47] KRASNOSEL′SKIĬ, M. A. ŞI LADYŽENSKIĬ, L. A. The scope of the concept of a u_0-concave operator. *Izv. Vysš. Učebn. Zaved. Matematika 1959*, 5 (12) (1959), 112–121.
[48] KRASNOSEL′SKIĬ, M. A. ŞI STECENKO, V. J. Some non-linear problems cu many solutions. *Sibirsk. Mat. Ž. 4* (1963), 120–137.
[49] KRASNOSEL′SKIĬ, M. A. ŞI STECENKO, V. J. On teoria concave operator equations. *Sibirsk. Mat. Ž. 10* (1969), 565–572.
[50] KRASNOSEL′SKIĬ, M. A., VAĬNIKKO, G. M., ZABREĬKO, P. P., RUTITSKII, Y. B. ŞI STETSENKO, V. Y. *Approximate solution of operator equations*. Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1972. Translated din the Russian by D. Louvish.
[51] KRAUSE, U. ŞI NUSSBAUM, R. D. A limită set trichotomy for self-mappings of normal cones în Banach spaces. *Nonlinear Anal. 20*, 7 (1993), 855–870.
[52] KURPEL′, N. S. Some methods of constructing two-sided approximations to solutions of operator equations. In *Problems în the Theory şi History of Differential Equations (Russian)*. "Naukova Dumka", Kiev, 1968, pp. 131–146.
[53] KURPEL′, N. S. ŞI ŠUVAR, B. A. *Two-sided operator inequalities and their applications (in Russian)*. Naukova Dumka, Kiev, 1980.
[54] LAKSHMIKANTHAM, V. ŞI ĆIRIĆ, L. Coupled punct fix theorems for neliniare contractions în partially spaţii metrice ordonate. *Nonlinear Anal. 70*, 12 (2009), 4341–4349.
[55] LI, G. ŞI DUAN, H. On random punct fix theorems of random monotone operators. *Appl. Math. Lett. 18*, 9 (2005), 1019–1026.
[56] LI, K., LIANG, J. ŞI XIAO, T.-J. New existenţă şi unicitate theorems of positive puncte fixe for operatori mixt-monotoni cu perturbation. *J. Math. Anal. Appl. 328*, 2 (2007), 753–766.
[57] LIANG, Z., ZHANG, L. ŞI LI, S. Teoreme de punct fix for a class of operatori mixt-monotoni. *Z. Anal. Anwendungen 22*, 3 (2003), 529–542.
[58] LIM, T.-C. On characterizations of Meir-Keeler contractive maps. *Nonlinear Anal. 46*, 1, Ser. A: Theory Methods (2001), 113–120.
[59] LIU, J. S., LI, F. Y. ŞI LU, L. Q. Fixed points şi applications of operatori mixt-monotoni cu superlinear nonlinearities. *Acta Math. Sci. Ser. A Chin. Ed. 23*, 1 (2003), 19–24.
[60] LIU, X. ŞI WU, C. Existence of coupled cvasi-puncte fixe for operatori mixt-monotoni şi its application to the discontinuous integral equations. *Appl. Math. Comput. 112*, 2-3 (2000), 171–180.
[61] LUXEMBURG, W. A. J. On convergenţa successive approximations în teoria ordinary differential equations. II. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 61 = Indag. Math. 20* (1958), 540–546.
[62] MATKOWSKI, J. Integrable solutions of funcţieal equations. *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 127* (1975), 68.
[63] MEIR, A. ŞI KEELER, E. A theorem pe contracţie mappings. *J. Math. Anal. Appl. 28* (1969), 326–329.
[64] MOORE, J. Existence of multiple cvasipuncte fixe of operatori mixt-monotoni by iterative techniques. *Appl. Math. Comput. 9*, 2 (1981), 135–141.
[65] NAGUMO, M. Über die Differentialgleichung $y'' = f(x, y, y')$. *Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, III. Ser. 19* (1937), 861–866.
[66] NAMIOKA, I. Partially ordered linear topological spaces. *Mem. Amer. Math. Soc. no. 24* (1957), 50.
[67] NG, K. F. Solid sets în ordered topological vector spaces. *Proc. London Math. Soc. (3) 22* (1971), 106–120.
[68] NG, K. F. On order şi topological completeness. *Math. Ann. 196* (1972), 171–176.
[69] NIETO, J. J. ŞI RODRÍGUEZ-LÓPEZ, R. Contractive mapping theorems în partially ordered sets şi applications to ordinary differential equations. *Order 22*, 3 (2005), 223–239 (2006).
[70] NIETO, J. J. ŞI RODRÍGUEZ-LÓPEZ, R. Existence şi unicitate of punct fix în partially ordered sets şi applications to ordinary differential equations. *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 23*, 12 (2007), 2205–2212.
[71] NUSSBAUM, R. D. Hilbert's projective metric şi iterated neliniare maps. *Mem. Amer. Math. Soc. 75*, 391 (1988), iv+137.
[72] NUSSBAUM, R. D. ŞI WALSH, C. A metric inequality for the Thompson şi Hilbert geometries. *JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. 5*, 3 (2004), Article 54, 14 pp. (electronic).
[73] OPOĬTSEV, V. I. Heterogeneous şi combined-concave operators (în russian). *Sibirsk. Mat. Ž. 16*, 4 (1975), 781–792.
[74] OPOĬTSEV, V. I. Generalization of teoria monotone şi concave operators (în russian). *Trudy Moskov. Mat. Obshch. 36* (1978), 237–273.
[75] OPOĬTSEV, V. I. ŞI HURODZE, T. A. The positive spectrum of a pseudoconcave operator (în russian). *Sibirsk. Mat. Ž. 19*, 4 (1978), 849–856.
[76] PERESSINI, A. L. *Ordered topological vector spaces*. Harper & Row Publishers, New York, 1967.
[77] PICARD, E. Mémoire sur la theorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives. *J. de Math. 6* (1890), 145–210.
[78] PICARD, E. Sur l'application des méthodes d'approximations successives à l'étude de certaines équations différentielles

ordinaires. *J. de Math. 9* (1893), 217–272.

[79] PICARD, E. Sur un exemple d'approximations successives divergentes. *Bull. Soc. Math. France 28* (1900), 137–143.

[80] PRECUP, R. Monotone technique to the initial values problem for a delay integral equation din biomathematics. *Studia Univ. Babeş-Bolyai Math. 40*, 2 (1995), 63–73.

[81] PRECUP, R. Monotone iterations for descrescător maps în ordered Banach spaces. In *Proceedings of the Scientific Communications Meeting of "Aurel Vlaicu" University, Vol. 14A (Arad, 1996)* (1997), "Aurel Vlaicu" Univ. Arad, Arad, pp. 105–108.

[82] PRECUP, R. Convexity şi quadratic monotone approximation în delay differential equations. *Rev. Anal. Numér. Théor. Approx. 30*, 1 (2001), 89–93 (2002). Dedicated to the memory of Acad. Tiberiu Popoviciu.

[83] PRECUP, R. *Methods in nonlinear integral equations*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.

[84] RAKOTCH, E. A note pe contractive mappings. *Proc. Amer. Math. Soc. 13* (1962), 459–465.

[85] RHOADES, B. E. A comparison of various definitions of contractive mappings. *Trans. Amer. Math. Soc. 226* (1977), 257–290.

[86] RUS, I. A. *Generalized contractions and applications*. Cluj University Press, Cluj-Napoca, 2001.

[87] RUS, I. A., PETRUŞEL, A. ŞI PETRUŞEL, G. *Fixed point theory*. Cluj University Press, Cluj-Napoca, 2008.

[88] RUS, M. D. A note pe the existenţă of positive solutions of Fredholm integral equations. *Fixed Point Theory 5*, 2 (2004), 369–377.

[89] RUS, M. D. Fixed punct iterative techniques for mixt-monoton şi multi-operatori mixt-monotoni. *Automat. Comput. Appl. Math. 16*, 2 (2007), 323–331 (2008).

[90] RUS, M. D. Teoreme de punct fix for operatori mixt-monotoni în ordered Banach spaces. *Annals of the Tiberiu Popoviciu Seminar of Functional Equations, Approximation and Convexity 5* (2007), 143–152.

[91] RUS, M. D. Monotone iterative methods for systems of neliniare equations involving operatori mixt-monotoni. *Fixed Point Theory 9*, 1 (2008), 309–318.

[92] RUS, M. D. Positive solutions for singular neliniare second-order boundary-value problems via mixt-monoton iterative technique. *Automat. Comput. Appl. Math. 17*, 2 (2008), 317–322.

[93] SCHAEFER, H. H. *Topological vector spaces*. Springer-Verlag, New York, 1971. Third printing corrected, Graduate Texts în Mathematics, Vol. 3.

[94] SCHRÖDER, J. Anwendung von Fixpunktsätzen bei der numerischen Behandlung nichtlinearer Gleichungen în halbgeordneten Räumen. *Arch. Rational Mech. Anal. 4* (1959), 177–192 (1959).

[95] SCORZA-DRAGONI, G. II problema dei valori ai limiti studiato în grande per le equazioni differenziali del secondo ordine. *Math. Ann. 105*, 1 (1931), 133–143.

[96] SHUVAR, B. A. Two-sided estimates of solutions of equations cu generalized monotonically represented operators. *Ukrain. Mat. Zh. 34*, 2 (1982), 260–264, 271.

[97] STECENKO, V. J. The puncte fixe of neliniare transformations. *Sibirsk. Mat. Ž. 10* (1969), 642–652.

[98] STECENKO, V. J. ŞI IMOMNAZAROV, B. Existence of eigenvectors of non-linear not completely continuă operators. *Sibirsk. Mat. Ž. 8* (1967), 146–155.

[99] SUN, J. X. ŞI LIU, L. S. Iterative method for coupled cvasi-solutions of operator mixt-monoton equations. *Appl. Math. Comput. 52*, 2-3 (1992), 301–308.

[100] SUN, Y. A punct fix theorem for operatori mixt-monotoni cu applications. *J. Math. Anal. Appl. 156*, 1 (1991), 240–252.

[101] TASKOVIĆ, M. R. A monotone principle of puncte fixe. *Proc. Amer. Math. Soc. 94*, 3 (1985), 427–432.

[102] THOMPSON, A. C. On certain contracţie mappings în a partially ordered vector space. *Proc. Amer. Math. Soc. 14* (1963), 438–443.

[103] TURINICI, M. Mean value theorems via maximal element techniques. *J. Math. Anal. Appl. 88*, 1 (1982), 48–60.

[104] TURINICI, M. Volterra funcţieal equations via projective techniques. *J. Math. Anal. Appl. 103*, 1 (1984), 211–229.

[105] TURINICI, M. A correction: "A monotone principle of puncte fixe" [Proc. Amer. Math. Soc. **94** (1985), no. 3, 427–432; MR0787887 (87c:54065)] by M. R. Tasković. *Proc. Amer. Math. Soc. 122*, 2 (1994), 643–645.

[106] WONG, Y. C. The order-bound topology. *Proc. Cambridge Philos. Soc. 71* (1972), 321–327.

[107] WONG, Y. C. Relationship între order completeness şi topological completeness. *Math. Ann. 199* (1972), 73–82.

[108] WONG, Y. C. Open decompositions pe ordered convex spaces. *Proc. Cambridge Philos. Soc. 74* (1973), 49–59.

[109] WU, Y. New punct fix theorems şi applications of operator mixt-monoton. *J. Math. Anal. Appl. 341*, 2 (2008), 883–893.

[110] WU, Y. ŞI LIANG, Z. Existence şi unicitate of puncte fixe for operatori mixt-monotoni cu applications. *Nonlinear Anal. 65*, 10 (2006), 1913–1924.

[111] XU, B. ŞI YUAN, R. The existenţă of positive aproape periodic type solutions for some neutral neliniare integral equation. *Nonlinear Anal. 60*, 4 (2005), 669–684.

[112] XU, B. ŞI YUAN, R. On the positive aproape periodic type solutions for some neliniare delay integral equations. *J. Math. Anal. Appl. 304*, 1 (2005), 249–268.

[113] XU, S. ŞI JIA, B. Fixed-punct theorems of ϕ concave-$(-\psi)$ convex operatori mixt-monotoni şi applications. *J. Math. Anal. Appl. 295*, 2 (2004), 645–657.

[114] YEH, J. *Real analysis*, second ed. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2006.

[115] ZABREĬKO, P. P., KRASNOSEL′SKIĬ, M. A. ŞI POKORNYĬ, J. V. A certain class of positive linear operators. *Funkcional. Anal. i Priložen. 5*, 4 (1971), 9–17.

[116] ZHANG, M. Teoreme de punct fix of ϕ convex $-\psi$ concave operatori mixt-monotoni şi applications. *J. Math. Anal. Appl. 339*, 2 (2008), 970–981.

[117] ZHANG, Z. New punct fix theorems of operatori mixt-monotoni şi applications. *J. Math. Anal. Appl. 204*, 1 (1996), 307–319.

[118] ZHANG, Z. ŞI WANG, K. On punct fix theorems of operatori mixt-monotoni şi applications. *Nonlinear Anal. 70*, 9 (2009), 3279–3284.

[119] ZHAO, Z. Uniqueness of positive solutions for singular neliniare second-order boundary-value problems. *Nonlinear Anal. 23*, 6 (1994), 755–765.