UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

ELENA-IULIA STOICA

FUNCŢII SPECIALE CU APLICAŢII ÎN ANALIZA NUMERICĂ

REZUMATUL TEZEI DE DOCTORAT

CONDUCĂTOR ŞTIINŢIFIC
PROF. DR. DR. H. C. DIMITRIE D. STANCU
MEMBRU DE ONOARE AL
ACADEMIEI ROMÂNE

CLUJ-NAPOCA
2010

Cuprins

Introducere

Funcţiile matematice care apar în Analiză şi în Matematicile Aplicate, aşa numitele funcţii speciale, precum şi teoria matematică a aproximării acestora constituie o ramură importantă a funcţiilor uzuale studiate în mai multe volume de G. E. Andrews, R. Askey şi R. Roy (Cambridge University Press, Enciclopedia of Mathematics and its Aplications).

Există sute de funcţii speciale folosite în matematicile aplicate precum şi în domeniul I.T. Domeniul funcţiilor speciale s-a dezvoltat în mod continuu prin contribuţiile unor matematicieni celebri dintre care amintim pe L. Euler, Legendre, Laplace, Gauss, Kummer, Riemann şi Ramanujan.

Cunoscutul matematician Paul Turán folosea termenul de "funcţii uzuale" în locul celui folosit astăzi, de "funcţii speciale". Proprietăţile lor remarcabile au stârnit întotdeauna interesul matematicienilor.

Aspectul algebric al teoriei funcţiilor speciale nu s-a schimbat în mod semnificativ de-a lungul timpului.

Funcţiile speciale sunt de mare importanţă în combinatorică şi în teoria numerelor dintre care amintim aici lucrările lui Ghuzenberg şi Foata. Numeroase familii de funcţii speciale şi-au găsit aplicaţii în cadrul polinoamelor ortogonale. Relativ recent au apărut numeroase lucrări în acest sens dintre care îi cităm pe Petkovitek, Wilf, Zeilberger (1996), Macdonald (1995), Heckman şi Schlicktkrulc (1994), Vilenkin, Klimyk (1992).

Dintre funcţiile speciale se evidenţiază funcţiile şi seriile hipergeometrice cu ajutorul cărora se pot exprima o serie de funcţii importante din matematică. Rezultate în acest sens au fost obţinute de Euler, Pfaff şi Gauss.

La jumătate de secol după Gauss, Riemann dezvoltă teoria funcţiilor hipergeometrice dintr-un alt punct de vedere care permite obţinerea unor formule de bază cu mai puţine calcule. Funcţiile hipergeometrice au două proprietăţi semnificative în sensul utilităţii lor. Ele satisfac anumite identităţi pentru valori speciale. Au fost folosite de exemplu pentru calcularea numarului π cu milioane de zecimale.

Funcţia Gamma şi Beta scot în evidenţă foarte bine importanţa funcţiilor hipergeometrice.

Funcţia Gamma este introdusă în matematică de L. Euler în momentul când acesta pune problema extinderii factorialului obişnuit, $n!$ pentru valori naturale ale lui n, la toate valorile reale sau complexe ale lui n.

Dirichlet introduce de asemenea integralele multidimensionale iar Selberg găseşte o extindere importantă a integralei beta în timpul cercetărilor sale legate de funcţiile întregi.

Funcţia Gamma şi integrala Beta admit de asemenea q-extinderi care forme care conduc la funcţii hipergeometrice de bază şi la seriile corespunzătoare acestora.

* * *

Teza conţine cinci capitole precedate de o introducere şi urmate de o bibliografie cuprinzând 128 titluri. Primele trei capitole cuprind elemente teoretice folosite în capitolul 4, capitol ce conţine partea originală a tezei constând în construirea a 4 operatori de aproximare cu ajutorul formulelor de aproximare ale lui Abel Jensen. Capitolul 5 constituie un început pentru o cercetare ulterioară. Astfel încât, concret, teza conţine următoarele"

(1) Introducere, (2) Funcţia Gamma şi funcţia Beta, (3) Polinoame ortogonale clasice, (4) Cuadraturi numerice cu noduri Gaussiene multiple, (5) Aplicaţii ale unor funcţii speciale în Analiza Numerică, (6) Funcţia Zeta (Riemann, Hurwitz). Valori în întregi impari pentru $\zeta(z)$.

1. Funcţia Gamma şi funcţia Beta

Funcţia Gamma a fost introdusă în matematică de L. Euler (1720) când acesta încearcă să rezolve problema extinderii factorialului la numere reale şi complexe. Problema este, se pare, sugerată mai întâi de Bernoulli şi Goldbach.

Pentru $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$, funcţia Gamma, $\Gamma(z)$, se defineşte prin:

$$\Gamma(z) = \lim_{k\to\infty} \frac{k! \cdot k^{z-1}}{(z)_k}. \tag{1.1.5}$$

unde $(z)_k = z(z+1)\ldots(z+k-1)$, $k > 0$, $(z)_0 = 1$, $z \in \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$.

O consecinţă imediată a acestei definiţii este:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{1.1.6}$$

$$\Gamma(z+1) = z!, \quad z \in \mathbb{N} \tag{1.1.7}$$

$$\Gamma(1) = 1. \tag{1.1.8}$$

Înaintea lui Euler, Wallis (1656) încearcă să calculeze integrala:

$$\int_0^1 \sqrt{1-z^2}dz = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 (1-z)^{1/2}(1+z)^{1/2}dz.$$

Această integrală reprezintă aria unui sfert de cerc. Scopul lui Wallis a fost de a obţine o expresie pentru π, astfel încât el găseşte că:

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1-z^2}dz = \left[\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right]^2.$$

Integrala Beta se defineşte prin:

$$B(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt, \quad \mathrm{Re}\, z > 0,\ \mathrm{Re}\, w > 0.$$

Această integrală este simetrică în z şi w şi aceasta se deduce făcând schimbarea de variabilă $u = 1 - t$. Putem scrie de asemenea:

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z + w)} \tag{1.6.8}$$

şi

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(w)}{\Gamma(z + w)} \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt. \tag{1.6.7}$$

Integrala lui Euler de ordinul doi sau funcţia Gamma sub forma unei integrale infinite este dată de

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} \cdot e^{-t} dt; \quad \operatorname{Re} z > 0. \tag{1.1.9}$$

Formula este considerată şi o definiţie a lui $\Gamma(z)$, $\operatorname{Re} z > 0$.

În paragraful 1.5 "Numerele şi polinoamele lui Bernoulli" se introduc elemente teoretice, aceste polinoame fiind de mare importanţă în analiza matematică şi în combinatorică.

Notăm prin $B_n(z)$ polinoamele lui Bernoulli de grad n, care satisfac simultan două relaţii:

$$(\Delta B_n)(z) = nz^{n-1}, \quad B_n(0) = B_n \tag{1.5.7}$$

$$B_n'(z) = nB_{n-1}(z), \quad n \geq 1. \tag{1.5.11}$$

Evident că aceste polinoame cu proprietăţi atât de simple îşi găsesc aplicaţii interesante. Se observă că $B_n(z)$ sunt bine definite de cele două relaţii de mai sus.

Dacă $B_n(z)$ există atunci $B_n(z + h)$ va fi de asemenea un polinom de grad n şi folosind dezvoltarea Taylor putem scrie:

$$B_n(z + h) = B_n(z) + \sum_{j=1}^{m} \frac{h^j}{j!} B_n^{(j)}(z) \tag{1.5.14}$$

De asemenea:

$$B_n(z + h) = B_n(z) + \sum_{j=1}^{m} \binom{m}{j} h^j B_{n-j}(z) \tag{1.5.14$'$}$$

Ca urmare avem:

$$B_n(z + h) = B_n(z) + \sum_{j=1}^{m} \binom{m}{j} h^{n-j} B_j(z)$$

şi făcând $h = 1$, obţinem:

$$\sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} B_{n-j}(z) = nz^{n-1}.$$

Prin aceste formule polinoamele $B_n(z)$ sunt bine definite şi astfel:

$$B_0(z) = 1, \quad B_1(z) = z - \frac{1}{2}, \quad B_2(z) = z^2 - z + \frac{1}{6}, \ldots$$

Valoarea lui $B_n(z)$ pentru $z = 0$ dă numerele lui Bernoulli, adică:

$$B_n = B_n(0).$$

Astfel încât găsim:

$$B_0 = 1, \quad \sum_{j=1}^{1} \binom{n}{j} B_j = B_n \quad (n > 1)$$

Relaţie care mai poate fi scrisă şi sub forma:

$$(B+1)^n - B^n = 0, \quad n > 1.$$

Primele numere ale lui Bernoulli sunt:

$$B_0 = 1, \quad B_1 = \frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}.$$

Polinoamele lui Bernoulli se pot exprima şi cu ajutorul numerelor lui Bernoulli astfel:

$$B_n(z) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B_j z^{n-j}$$

sau

$$B_n(z) = (z+B)^n.$$

De asemenea, numerele şi polinoamele lui Bernoulli satisfac o relaţie de mare importanţă, respectiv: se observă că $B_{2j}(z)$ este simetric pentru $z = \dfrac{1}{2}$ şi că $B_{2j+1}\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$, de unde $B_{2j+1} = 0$ $(j > 0)$.

Polinoamele lui Bernoulli satisfac şi relaţia de recurenţă:

$$\sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} B_{n-j}(z) = nz^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Considerând funcţia de variabile complexe

$$G_z(t) = e^{tz}\frac{t}{e^t - 1}. \tag{1.5.15}$$

putem scrie

$$G_z(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(z)}{n!} t^n$$

unde:

$$A_n(z) = G_z^{(n)}(t)$$

în plus:

$$G_z(t) = e^{tz}\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(z)}{n!} t^n, \quad |t| < 2\pi \tag{1.5.16}$$

cu

$$B_n(z) = G_z^{(n)}(t) \tag{1.5.17}$$

Înlocuind $z = 0$, obţinem

$$G_0(t) = g(t) = \frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n, \quad |t| < 2\pi. \tag{1.5.18}$$

G_x poartă numele de funcţie generatoare a polinoamelor lui Bernoulli.

Polinoamele lui Bernoulli satisfac relaţia:

$$B_n(1 - z) = (-1)^n B_n(z), \quad n \in \mathbb{N},\ z \in \mathbb{C}. \tag{1.5.19}$$

Pentru $n = 2k$ obţinem:

$$B_{2k}(1 - z) = B_{2k}(z).$$

Ca urmare, graficul funcţiei $w = B_{2k}(z)$ este simeyric în raport cu $x = \dfrac{1}{2}$.

De asemenea numerele lui Bernoulli de grad par sunt egale cu zero:

$$B_{2k} = 0.$$

2. Polinoame ortogonale clasice

Pe intervalul $[-1, 1]$ considerăm funcţia pondere

$$w(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}, \quad \alpha > -1, \quad \beta > -1$$

pentru care obţinem polinoamele lui Jacobi $J_m^{(\alpha,\beta)}(x)$.

Dacă exponenţii sunt în intervalul considerat atunci putem scrie:

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} dx = 2^{\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}.$$

Pentru $\alpha = \beta = 0$ obţinem polinoamele lui Legendre:

$$L_m(x) = \frac{1}{2^m \cdot m!}[(x^2-1)^m]^{(m)} \tag{2.3.1}$$

cunoscută ca formula lui Rodrigues.

Relaţia de recurenţă corespunzătoare are forma:

$$\widetilde{L}_{m+1}(x) = x\widetilde{L}_m(x) - \frac{m^2}{4m^2-1}\widetilde{L}_{m-1}(x) \tag{2.3.2}$$

Dacă $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ obţinem polinoamele Chebyshev de primul tip:

$$J_m^{\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}(x) = \frac{(-1)^m}{2^m \cdot m!}\sqrt{1-x^2}[(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}]^{(m)} \tag{2.4.1}$$

sau echivalent polinomul

$$T_m(x) = \cos(m \arccos x) \tag{2.4.2}$$

diferite între ele doar printr-o constantă multiplicativă.

Pentru $\alpha = \beta = \dfrac{1}{2}$ obţinem polinoamele lui Cebyshev de speţa a doua

$$U_m(x) = \frac{1}{m+1}T'_{m+1}(x) = \frac{\sin[(m+1)\arccos x]}{\sin(\arccos x)} \tag{2.5.4}$$

Dacă $\alpha = \beta$ obţinem polinoamele ultrasferice:

$$J_m^{(\alpha,\alpha)}(x) = \frac{1}{2^m \cdot m!} \frac{(-1)^m}{(1-x^2)^\alpha} [(1-x^2)^{m+\alpha}]^{(m)} \tag{2.2.1}$$

Se prezintă de asemenea formula lui Christoffel-Darboux:

$$\mathcal{K}_m(x,t) = \sum_{k=1}^{m} \widehat{P}_k(x)\widehat{P}_k(t) = \sqrt{\gamma_{m+1}} \frac{\widehat{P}_{m+1}(x)\widehat{P}_m(t) - \widehat{P}_{m+1}(t)\widehat{P}_m(x)}{x-t}. \tag{2.0.30}$$

În paragraful 2.6 se prezintă polinoamele lui Laguerre

$$L_m^{[\alpha]}(x) = x^{-\alpha} e^x (x^{m+\alpha} e^{-x})^{(m)}, \quad x \in [0, +\infty) \tag{2.6.1}$$

cu funcţia pondere corespunzătoare:

$$w(x) = x^\alpha e^{-x}, \quad \alpha > -1 \tag{2.6.2}$$

şi relaţia de recurenţă:

$$\widetilde{L}_{m+1}^{[\alpha]}(x) = [x - (2m + \alpha + 1)]\widetilde{L}_m^{[\alpha]}(x) - m(m+\alpha)\widetilde{L}_{m-1}^{[\alpha]}(x). \tag{2.6.7}$$

Paragraful 2.7 prezintă polinoamele lui Hermite

$$H_m(x) = (-1)^m e^{x^2} (e^{-x^2})^{(m)} \tag{2.7.1}$$

cu funcţia pondere:

$$w(x) = e^{-x^2} \tag{2.7.2}$$

3. Cuadraturi numerice cu noduri gaussiene multiple

Paragraful 3.1 prezintă polinoamele s-ortogonale. Se notează cu $P_{n,s}(x)$ şirul polinoamelor s-ortogonale caracterizate prin condiţia:

$$\int_a^b w(x)P_{m,s}^{2s+1}(x)x^k dx = 0, \quad k = \overline{0, m-1} \tag{3.1.1}$$

Pentru intervalul $(-1, 1)$ avem:

$$\int_{-1}^{1} [P_{m,s}(x)]^{2s+2} = \frac{2}{1 + (2s+2)m} \tag{3.1.11}$$

formulă dată de Ghizzeti şi Ossicini [40].

Polinoamele s-ortogonale minimizează integrala

$$F(a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x)][P_{m,s}(x)]^{2s+2} dx \tag{3.1.13}$$

unde

$$P_{m,s}(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \tag{3.1.13$'$}$$

G. V. Milovanović [66] prezintă o metodă de construcţie a polinoamelor s-ortogonale.

S. Bernstein a demonstrat [10] că pentru orice întreg nenegativ $s \in \mathbb{N}$ care minimizează funcţia $F(a_0, a_1, \ldots, a_{m-1})$ se obţin polinoamele lui Chebyshev de primul tip

$$\widetilde{T}_m(x) = \frac{1}{2^{m-1}} T_m(x) \tag{3.1.15}$$

Paragraful 3.2 studiază formulele de cuadratură ale lui Gauss-Turán.

În general o astfel de formulă este de forma:

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{2s} A_{k,j}f^{(j)}(x_k) + R(f) \tag{3.2.1}$$

cu gradul de exactitate $N = 2(s+1)n - 1$.

Turán [120] a construit o astfel de formulă de cuadratură pentru intervalul $[-1,1]$ cu funcţia pondere $w(x) = 1$.

G. Vincenti [121] prezintă o metodă pentru evaluarea coeficienţilor polinoamelor s-ortogonale.

G. Milovanović [66], [67] a dat o metodă stabilă pentru construirea polinoamelor s-ortogonale $P_{n,s}(x)$.

Formula de cuadratură a lui Gauss-Bernstein-Turán este:

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{2s} A_{k,j}f^{(j)}\left(\cos\frac{2k-1}{2m}\pi\right) + R(f) \tag{3.2.4}$$

Paragraful 3.3 studiază polinoamele σ-ortogonale.

Fie $\sigma = (s_1, s_2, \ldots, s_m)$, $m \in \mathbb{N}$ un şir de numere întregi. Considerăm nodurile (x_k), $k = \overline{1,m}$ astfel încât $a \le x_1 < x_2 < \ldots < x_m \le b$ cu gradele de multiplicitate $2s_1+1$, $2s_2+1, \ldots$, $2s_m+1$. Se studiază formula de cuadratură:

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{2s_k} A_{k,j}f^{(j)}(x_k) + R(f) \tag{3.3.1}$$

cu gradul de exactitate $N = 2S + 2m - 1$, unde

$$S = s_1 + s_2 + \ldots + s_m.$$

Acest grad N se poate obţine dacă:

$$\int_a^b w(x)\prod_{\nu=1}^{m}(x-x_\nu)^{2s_\nu-1}x^k dx = 0, \quad k = \overline{0,m-1}. \tag{3.3.3}$$

Polinoamele care satisfac aceste condiţii se numesc polinoamelor σ-ortogonale.

O formulă de cuadratură de forma (3.3.1) a fost introdusă şi investigată de L. Chakalov [15] şi T. Popoviciu [83].

În cadrul tezei, pentru a construi o formulă de cuadratură de forma (3.3.1) se porneşte de la formula de interpolare Lagrange-Hermite

$$f(x) - (L_H f)(x) = (Rf)(x) \tag{3.3.8}$$

unde:

$$(L_H f)(x) = L\begin{pmatrix} x_k & , & t_j & , & x & ; f \\ 2s_k+1 & & 1 & & 1 & \end{pmatrix} \tag{3.3.4}$$

şi

$$(Rf)(x) = u(x)v(x)\begin{bmatrix} x_1 & ,\dots, & x_m & , & t_1 & ,\dots, & t_m & , & x & ; f \\ 2s_1+1 & & 2s_m+1 & & 1 & & 1 & & 1 & \end{bmatrix} \tag{3.3.9}$$

iar

$$\begin{aligned} v(x) &= (x-t_1)(x-t_2)\dots(x-t_m) \\ u(x) &= (x-x_1)^{2s_1+1}(x-x_2)^{2s_2+1}\dots(x-x_m)^{2s_m+1} \\ f_1 &\equiv f_1(x) = f(x)/v(x) \\ f_2 &\equiv f_2(x) = f(x)/u(x) \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Putem scrie de asemenea

$$(L_H f)(x) = v(x)L_H\begin{pmatrix} x_k & , & x & ; f_1 \\ 2s_k+1 & & 1 & \end{pmatrix} + u(s)L\begin{pmatrix} t_j & , & x & ; f_2 \\ 1 & & 1 & \end{pmatrix} \tag{3.3.5}$$

unde:

$$\begin{aligned} v(x) &= (x-t_1)(x-t_2)\dots(x-t_m) \\ u(x) &= (x-x_1)^{2s_1+1}(x-x_2)^{2s_2+1}\dots(x-x_m)^{2s_m+1} \\ f_1 &\equiv f_1(x) = f(x)/v(x) \\ f_2 &\equiv f_2(x) = f(x)/u(x) \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Înmulţind cu funcţia pondere $w(x)$ şi integrând pe intervalul (a, b) obţinem formula de cuadratură de forma

$$I(w; f) = F(f) + \phi(f) + E(f) \tag{3.3.10}$$

unde

$$E(f) = I(w, (Rf)(x))$$

$$\phi(f) = \sum_{j=1}^{m} B_j f(t_j) \tag{3.3.11}$$

Acum alegem nodurile x_k astfel încât să avem $B_j = 0$ $(j = \overline{1,n})$. Pentru aceasta este nevoie ca polinomul $u(x)$ să fie ortogonal pe (a,b) în raport cu funcţia pondere $w(x)$ cu orice polinom de grad $n-1$. Integrând apoi vom obţine pentru coeficienţii formulei de cuadratură expresia:

$$A_{k,j} = \int_a^b w(x) l_{k,j}(x) dx, \quad k = \overline{1,m},\ j = \overline{0,2s_k} \tag{3.3.17}$$

unde:

$$l_{k,j}(x) = \frac{(x-x_k)^j}{j!} \left[\sum_{\nu=0}^{2s_k-j} \frac{(x-x_k)^\nu}{\nu!} \left(\frac{1}{u_k(x)} \right)^{(\nu)}_{x_k} \right] u_k(x) \tag{3.3.18}$$

şi

$$u_k(x) = u(x)/(x-x_k)^{2s_k+1} \tag{3.3.19}$$

Polinoamele σ-ortogonale:

$$P_{m,\sigma}(x) = \prod_{\nu=1}^{m} (x - x_\nu^{m,\sigma}) \tag{3.3.20}$$

se pot obţine minimizând integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x) \prod_{\nu=1}^{m} (x-x_\nu)^{2s_\nu+2} dx. \tag{3.3.23}$$

Paragraful 3.4 poartă titlul ”Generalizarea dată de D. D. Stancu pentru formula de cuadratură a lui Gauss-Turán-Chakalov-Popoviciu”.

În lucrarea [92] D. D. Stancu a introdus şi investigat o formulă generală de cuadratură de forma:

$$I(f) = \phi(f) + R(f) \tag{3.4.1}$$

unde:

$$I(f) = I(f;w) = \int_a^b w(x) f(x) dx \tag{3.4.2}$$

şi

$$\phi(f) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=0}^{2s_j} A_{k,j} f^{(j)}(x_k) + \sum_{i=1}^{r} \sum_{\nu=0}^{r_i} B_{i,\nu} f^{(\nu)}(a_i) \tag{3.4.3}$$

iar polinomul nodurilor fixe este:

$$\omega(x) = \prod_{i=1}^{\pi}(x - a_i)^{r_i+1} \tag{3.4.4}$$

în timp ce polinomul nodurilor Gaussiene este de forma:

$$u(x) = \prod_{k=1}^{m}(x - x_k)^{2s_k+1} \tag{3.4.5}$$

Formula de cuadratură de mai sus are gradul maxim de exactitate $D = M + N + m - 1$, unde:

$$M = \sum_{i=1}^{r}(r_i + 1), \quad N = \sum_{k=1}^{m}(2s_k + 1) \tag{3.4.6}$$

dacă şi numai dacă $u(x)$ este ortogonal în raport cu funcţia pondere $w(x) \cdot \omega(x)$ cu orice polinom de grad $m - 1$.

Pentru a găsi nodurile x_k considerăm funcţia de n variabile

$$F(t_1, t_2, \ldots, t_m) = I(w; U) = \int_a^b w(x)\omega(x)(x - t_1)^{2s_1+2} \ldots (x - t_m)^{2s_m+2} dx \tag{3.4.24}$$

Această funcţie este continuă şi pozitivă. Ca urmare admite un minim relativ care se găseşte rezolvând sistemul de ecuaţii:

$$\frac{1}{2s_k + 2} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_k} = I(P_k) = 0 \tag{3.4.25}$$

unde:

$$P_k = \omega(x) \prod_{k=1}^{m}(x - x_k)^{2s_k+2} \frac{1}{x - x_k} \tag{3.4.26}$$

Avem:

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} = 0; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_k^2} > 0; \quad i, k = \overline{1, m};\ i \neq k \tag{3.4.28}$$

Pentru restul $R(f)$ s-a găsit expresia:

$$R(f) = \frac{f^{(M+N+m)}(\xi)}{(M + N + m)!} \int_a^b w(x)u^2(x)\omega(x)dx. \tag{3.4.29}$$

făcând $t_j \mapsto x_j$, $j = \overline{1, m}$, şi presupunând că funcţia f admite o derivată continuă de ordinul $M + N + n$ pe (a, b).

4. Aplicaţii ale unor funcţii speciale în Analiza Numerică

În paragraful 4.1 se prezintă operatorul liniar pozitiv al lui D. D. Stancu:

$$(S_n^\alpha f)(x) = S_n^\alpha(f,x) := \sum_{k=0}^{n} w_{n,k}^\alpha(x) f\left(\frac{k}{n}\right) \tag{4.1.1}$$

unde

$$w_{n,k}^\alpha(x) = \binom{n}{k} \frac{x^{(k,-\alpha)}(1-x)^{(n-k,-\alpha)}}{1^{(n,-\alpha)}}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{4.1.2}$$

Pentru $\alpha = 0$ acesta devine operatorul Bernstein, iar pentru $\alpha = \alpha_n = \dfrac{1}{n}$ obţinem operatorul de interpolare Lagrange.

Paragraful 4.2 studiază metode probabilistice cu ajutorul distribuţiei Markov-Polya. Această distribuţie se poate obţine prin următorul procedeu.

Se consideră o urnă ce conţine (a) bile albe şi (b) bile negre. Bilele sunt scoase la întâmplare din urnă şi apoi reintroduse de un număr (c) de ori. Procesul se repetă de n ori. Presupunând că X este variabila aleatoare k, $0 \le k \le n$ dacă din n încercări obţinem (a) bile albe atunci:

$$P(k;n,a,b,c) = \binom{n}{k} \frac{a(a+c)\dots[a+(k-1)c]b(b+c)\dots[b+(n-k-1)c]}{(a+b)(a+b+c)\dots[a+b+(n-1)c]} \tag{4.2.2}$$

Introducând notaţiile:

$$\begin{aligned} x &:= \frac{a}{a+b},\ x \text{ - variabil} \\ \alpha &= \frac{c}{a+b},\ \alpha = \text{ const} \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

observăm că:

$$w_{n,k}^{\alpha}(x) = \binom{n}{k} \frac{x^{(k,\alpha)}(1-x)^{(n-k,-\alpha)}}{1^{(n,-\alpha)}} \tag{4.2.5}$$

Operatorul liniar $(S_n^{\alpha} f)(x)$ se poate exprima şi cu ajutorul diferenţelor finite

$$(S_n^{\alpha} f)(x) = f(0) + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \frac{x(x+\alpha)\dots[x+(j-1)\alpha]}{(1+\alpha)(1+2\alpha)\dots[1+(j-1)\alpha]} \Delta_{\frac{1}{n}}^{j} f(0) \tag{4.2.18}$$

unde:

$$\Delta_{\frac{1}{n}}^{j} f(0) = \sum_{\nu=0}^{j} (-1)^{\nu} \binom{j}{\nu} f\left(\frac{j-\nu}{m}\right). \tag{4.2.18$'$}$$

În cazul $\alpha = 0$ acesta este dat de G. Lorentz.

Pentru $\alpha > 0$ putem să-i dăm o reprezentare cu ajutorul funcţiei Beta

$$(S_n^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{B\left(\frac{x}{\alpha}; \frac{1-x}{\alpha}\right)} \int_0^1 t^{\frac{x}{\alpha}} (1-t)^{\frac{1-x}{\alpha}} (B_n f)(t) dt \tag{4.3.1}$$

Folosind un rezultat al lui A. Lupaş obţinem:

$$(S_n^{\alpha} f)(x) = (\mathcal{B}_n f)(x) + \frac{\alpha x(1-x)}{1+\alpha} [x_0, x_1, x_2; \mathcal{B}_n, f] \tag{4.3.2}$$

şi cu ajutorul diferenţelor divizate avem:

$$(S_n^{\alpha} f)(x) = f(0) + \sum_{j=0}^{n} A_{n,j}(f) x(x+\alpha)\dots[x+(j-1)\alpha] \tag{4.3.2$'$}$$

În paragraful 4.4 sunt prezentaţi operatorii Stancu de ordinul doi respectiv operatorii Stancu-Baskakov şi Stancu-Meyer-König şi Zeller.

$$(V_m^{\alpha} f)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} v_{m,k}^{\alpha}(x) f\left(\frac{k}{m}\right), \quad x \geq 0 \tag{4.5.4}$$

unde

$$(W_m^{\alpha} f)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{m,k}^{\alpha}(x) f\left(\frac{k}{m+k}\right) \tag{4.5.9}$$

Apoi sunt prezentaţi operatorii lui D. D. Stancu folosind distribuţia Beta de ordinul doi:

$$(L_m f)(x) = (T_{mx,m+1} f)(x) = \frac{1}{B(mx, m+1)} \int_0^{\infty} f(t) \frac{t^{mx-1} dt}{(1+t)^{mx+m+1}} \tag{4.5.21}$$

iar pentru $f \in C[0,\infty)$ se evaluează ordinul de aproximare folosind modulul de continuitate de primul şi al doilea ordin.

În paragraful 4.6 se construiesc 4 operatori de aproximare folosind formulele de aproximare de tip Abel-Jensen.

În 1826 N. H. Abel prezintă o generalizare a formulei binomului lui Newton:

$$(u+n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u(u-k\beta)^{k-1}(v+k\beta)^{n-k} \tag{4.6.4}$$

unde β este un parametru nenegativ.

Sunt menţionate de asemenea formulele de tip Abel:

$$(u+v+n\beta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u(u+k\beta)^{k-1}(v+(n-k)\beta)^{n-k} \tag{4.6.10}$$

$$(u+v+n\beta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (u+k\beta)^{k} v[v+(n-k)\beta]^{n-k-1} \tag{4.6.11}$$

În [49] Jensen a obţinut o nouă identitate simetrică a lui Abel

$$[u+v(u+v+n\beta)]^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u(u+k\beta)^{k-1} v[v+(n-k)\beta]^{n-k-1} \tag{4.6.8}$$

Matematicianul american H. W. Gould [43] dă următoarea generalizare a formulei lui Vandermonde:

$$\binom{u+v+n\beta}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k\beta}{k} \binom{v+(n-k)\beta}{n-k} \frac{v}{v+(n-k)\beta}$$

care se poate scrie folosind puterile factoriale sub forma:

$$(u+n+n\beta)^{[n]} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (u+k\beta)^{[k]} u(v+(n-k)\beta)^{[n-k-1]}$$

unde puterile factoriale de ordin n şi pas h sunt definite prin:

$$u^{(n,h)} = u(u-h)\dots[u-(n-1)h] \tag{4.6.1}$$

Folosind identităţile combinatoriale precedente se introduc patru polinoame fundamentale:

$$s_{m,k}^{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{1^{(m,-\alpha)}} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x(x-k\beta)^{(k-1,-\alpha)}(1-x+k\beta)^{(m-k,-\alpha)} \tag{4.6.14}$$

$$q_{m,k}^{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{(1+m\beta)^{[m-1,-\alpha]}} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x(x+k\beta)^{(k-1,-\alpha)}(1-x)[1-x+(n-k)\beta]^{(m-k,-\alpha)} \tag{4.6.15}$$

$$p_{m,k}^{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{(1+m\beta)^{(m,-\alpha)}} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x(x+k\beta)^{(k-1,-\alpha)}[1-x+(m-k)\beta]^{(m-k,-\alpha)} \tag{4.6.16}$$

$$r_{m,k}^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{(1+m\beta)^{(m,-\alpha)}} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (x+k\beta)^{(k,-\alpha)}(1-x)[1-x+(m-k)\beta]^{(m-k-1,-\alpha)} \tag{4.6.17}$$

cu ajutorul cărora se construiesc patru operatori liniari pozitivi în raport cu o funcţie $f \in C[0,1]$

$$\begin{aligned} S_m^{\alpha,\beta,\gamma,\delta} f &= \sum_{k=0}^{m} s_{m,k}^{\alpha,\beta}(x) f\left(\frac{k+\gamma}{m+\delta}\right) \\ Q_m^{\alpha,\beta,\gamma,\delta} f &= \sum_{k=0}^{m} q_{m,k}^{\alpha,\beta}(x) f\left(\frac{k+\gamma}{m+\delta}\right) \\ P_m^{\alpha,\beta,\gamma,\delta} f &= \sum_{k=0}^{m} p_{m,k}^{\alpha,\beta}(x) f\left(\frac{k+\gamma}{m+\delta}\right) \\ R_m^{\alpha,\beta,\gamma,\delta} f &= \sum_{k=0}^{m} r_{m,k}^{\alpha,\beta}(x) f\left(\frac{k+\gamma}{m+\delta}\right) \end{aligned} \tag{4.6.18}$$

unde $0 \leq \gamma \leq \delta$.

În cazul $\beta = \gamma = \delta = 0$ aceşti operatori se reduc la operatorul Stancu S_m^{α} introdus şi investigat [95] în paragraful 4.1. Acest operator este în detaliu studiat de Della Vecchia [23], G. Mastroianni şi M. R. Occorsio M. R. [61] şi alţii.

5. Funcţia Zeta (Riemann, Hurwitz). Valori în întregi impari pentru $\zeta(z)$

Capitolul 5 prezintă mai întâi funcţia Zeta (Hurwitz şi Riemann) precum şi rezultate obţinute până în prezent legate de valori în întregi impari pentru funcţia Zeta a lui Riemann.

Cu ajutorul formulei

$$\zeta(-n) = (-1)^n \frac{B_{n+1}}{n+1} \tag{5.5.3}$$

se precizează că se pot calcula valorile funcţiei Zeta a lui Riemann cu ajutorul numerelor lui Bernoulli. Pentru argumente pare negative valorile funcţiei Zeta a lui Riemann sunt toate zero, în schimb pentru argumente impare apare problema naturii acestor valori.

Primul rezultat semnificativ în acest sens a fost obţinut de matematicianul francez R. Apery [6] în 1979 care demonstrează că $\zeta(3)$ este un număr iraţional. De atunci câţiva matematicieni au încercat să aplice metoda lui Apery şi pentru celelalte valori impare însă nu a funcţionat.

T. Rivoal arată legat de această problemă, că există o infinitate de numere iraţionale în şirul $\zeta(2k+1)$, $k \in \mathbb{N}$.

În 2001 matematicianul W. Zudilin demonstrează că orice mulţime de forma $\zeta(s+2)$, $\zeta(s+4), \ldots$, $\zeta(8s-3)$, $\zeta(8s-1)$ cu $s > 1$, s impar, conţine cel puţin un număr iraţional. Acesta arată de asemenea că cel puţin una din valorile $\zeta(5)$, $\zeta(7)$,

$\zeta(9)$ şi $\zeta(11)$ este iraţională.

În paragraful 5.1 se prezintă o demonstraţie a lui M. Prevost [85] pentru iraţionalitatea lui $\zeta(2)$ şi $\zeta(3)$ folosind aproximanţii Padé.

În final doresc să exprim aprecierea şi recunoştinţa pentru conducătorul ştiinţific D. D. Stancu, care mi-a fost de un real sprijin în elaborarea şi aducerea în formă finală a acestei teze de doctorat.

Bibliografie

[1] Abramotivz, M., Stegun, I. A., *Handbook of mathematical functions*, NBS Appl. Math. Ser. 55, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C., 1964.

[2] Adell, J. A., De la Cal, J., *On a Bernstein type operator associated with the inverse Polya-Eggenberger distribution*, Rend. Circolo Matem. Palermo, Ser. II, **33**(1993), 143-154.

[3] Agratini, O., *Aproximare prin operatori liniari*, Presa Univ. Clujeană, Cluj-Napoca, 2000.

[4] Aigner, M., Ziegler, G. M., *Proofs from the book*, Springer Verlag, 2004.

[5] Andrews, G. E., Askey, R., Roy, R., *Special function*, Cambridge University Press, 1999.

[6] Apery, R., *Irrotionalité de* $\zeta(2)$ *et* $\zeta(3)$, Journées arithmétique de Luminy, Astérisque, 61, 1979.

[7] Artin, E., *The Gamma function*, Leipzig, 1931.

[8] Baskakov, V. A., *An example of a linear positive operators in the space of continuous function*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **113**(1957), 249-251.

[9] Bell, W. W., *Special functions*, Van Nostrand Company, 1968.

[10] Bernstein, S., *Sur les polynomes orthogonaux relatifs à un segment fini*, J. Math. Pures Appl., **9(9)**(1930), 127-177.

[11] Bohman, H., *An approximation of continuous and analytic functions*, Ark. Mat., **2**(1952), 43-56.

[12] Boos, R. P., Buck, R. C., *Polynomial expansions of analytic functions*, Springer Verlag, Berlin, 1964.

[13] Carlitz, L., *Bernoulli and Euler numbers and orthogonal polynomials*, Duke Math. J., **26**(1959), 1-6.

[14] Chakalov, L., *Formules générales de quadrature mécanique du type de Gauss*, Colloq. Math., **5**(1957), 69-73.

[15] Chakalov, L., *General quadrature formulae of Gaussian type*, Bulgar. Akad. Nauk. Izv. Mat. Inst., **1**(1954), 67-84 (Bulgarian), English transl. East J. Approx., **1**(1995), 261-276.

[16] Chapman, R., *Evaluating* $\zeta(2)$, Department of Mathematics, University of Exeter, Exeter, EX4 4QE, UK, 2002.

[17] Cheney, E. W., Sharma, A., *On a generalization of Bernstein polynomials*, Riv. Nat. Univ., Parma, **5**(1964), 77-84.

[18] Chihara, T. S., *An introduction to orthogonal polynomials*, Gordon and Breach, New York, 1978.

[19] Christoffel, E. B., *Über die Ganbische Quadratur und eine Veralgemeinerung derselben*, J. Reine Angew. Math., **55**, 61-82 (Ges. Math. Abhandlungen I, 65-87).

[20] Christoffel, E. B., *Sur une classe particuliere de fonctions entières et de fractions continues*, Ann. Mat. Pura Appl. Ser. 2, vol. 8, 1-10 (Ges. Math. Abhandlungen II, 42-50).

[21] Clenshaw, C. W., Miller, G. F., Woodger, M., *Algoritms for special functions I*, Numer. Math., **4**(1974), 403-419.

[22] Coman, Gh., *Analiză numerică*, Ed. Libris, Cluj-Napoca, 1995.

[23] Della Vecchia, B., *The approximation of functions by means of the operators of D. D. Stancu*, October 15, 1990, Studia, Universitas.

[24] Della Vecchia, B., *On monotonicity of some linear positive operators*, Numerical Methods and Approximation Theory III (Nis, August 1987), 165-178.

[25] Della Vecchia, B., Kocić, L. M., *On the degeneracy property of some line positive operators*, Calcolo, **25**(1988), no. 4, 363-373.

[26] Derbyshire, J., *Prime obsession*, National Academy of Science, 2003.

[27] Derbyshire, J., *Prime obsession: Bernhard Riemann and the greatest unsolved problem in mathematics*, New York, Pengrin.

[28] Deuflhard, P., *On algorithms for the summation of certain special functions*, Bericht Nr. 7407, Techn. Univ. München, Ableitung Mathematike, 1974.

[29] Dingle, R. B., *Asymptotic expansions: their derivations and interpretations*, Academic Press, 1973.

[30] Draux, A., *Polynomes orthogonaux formeles. Applications*, Lecture Notes in Mathematics, 974, Springer Verlag, Berlin, 1983.

[31] Edwards, N. M., *Riemann Zeta function*, Academic Press, 1974.

[32] Erdélyi, A., *Asymptotic expansions*, Dover Publications, 1956.

[33] Feldheim, E., *Relations entre les polynomes de Jacobi, Laguerre et Hermite*, Acta Math., **74**(1941), 117-138.

[34] Fike, C. T., *Computer evaluation of mathematical functions*, Prentice Hall, Englewood Clifs, N. J., 1968.

[35] Fisher, R. A., *The negative binomial distribution*, Ann. Eugenics, **11**(1941), 182-187.

[36] Frontini, M., Gautschi, W., Milovanović, G. V., *Moment preserving spline approximation on finite intervals*, Numer. Math., **50**, 5, 503-518.

[37] Gavrea, I., *Aproximarea funcţiilor continue prin operatori liniari*, Ed. Mediamira, 2000.

[38] Gautschi, W., Milovanović, G. V., *Gaussian quadrature involving Eistein and Fermi functions with application to summation of series*, Math. Comput. 44, **169**(1985), 177-190.

[39] Ghizzetti, A., Ossicini, A., *Quadrature formulae*, Academic Verlag, Berlin, 1970.

[40] Ghizzetti, A., Ossicini, A., *Polinomi s-ortogonali e sviluppi in serie adessi collegati*, Acad. Scienze di Torino, Classe Sci. Fiz. Matem., Serie 4, nr. 18, 1974.

[41] Gonska, H. H., Meier, J., *Quantitative theorems on approximation Bernstein-Stancu operators*, Calcolo, **21**(1984), 317-335.

[42] Gonska, H. H., *Quantitative Korovkin type theorems on simultaneous approximation*, Math. Z., **186**(1984), 419-433.

[43] Gould, H. W., *Some generalizations of Vandermonde's convolution*, Amer. Math. Monthly, **63**(1956), 84-91.

[44] Gould, H. W., *Combinatorial identities*, Morgantown, W. V., 1972.

[45] Grüss, G., *Über das Maximum des absoluten Betrages*, Math. Zeitschr., **39**(1935), 215-226.

[46] Hochstadt, H., *Special functions of mathematical Physics*, Holt, New York, 1961.

[47] Ionescu, D. V., *Restes des formules de quadratire de Gauss et de Turán*, Acta Math. Sci. Hungar., **18**(1967), 283-295.

[48] Jebeleanu, P., *Analiză numerică: teme pentru lucrări de laborator*, Universitatea de Vest din Timişoara, 1998.

[49] Jensen, J. L. W., *Sur une identité d'Abel et sur d'autre formules analogues*, Acta Mathematica, **26**(1902), 307-318.

[50] Kaufman, B., *Special functions of mathematical physics from the wiepoint of Lie algebras*, J. Math. Phys., **7**(1966), 447-457.

[51] Knuth, D. E., *The art of computer-programming*, vol. 1, *Fundamental algorithms*, Addison-Wesley Publ. Comp., Reading, Massachusetts, USA, 1968, p. 75.

[52] Korovkin, P. P., *On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions*, Doklady Akad. Nauk, SSSR, **90**(1953), 961-964 (Russian).

[53] Lobatto, R., *Lessen over de Differential en integral*, Rekenig, Part II, 1852, Van Cleef Ped Inst., **89**(1953), 191-206.

[54] Loha, R. G., *On a characterization of the Gamma distribution*, Annals of Mathematical Statistics, **25**(1954), 784.

[55] Luke, Y. L., *The special functions and their approximations*, vol. I, II, Academic Press, 1969.

[56] Luke, Y. L., *Mathematical functions and their approximations*, Academic Press, 1975.

[57] Luke, Y. L., *Integrals of Bessel functions*, Mc Graw-Hill Book Company, 1962.

[58] Luke, Y. L., *The special functions and their approximations*, vol. I, II, Academic Press, New York, London, 1969.

[59] Lupaş, A., Müller, M., *Approximation properties of the Meyer-König and Zeller operators*, Aequationes Math.

[60] Lupaş, A., Müller, M., *Approximations eigenschaften der Gamma operatoren*, Math. Z., **98**(1967), 208-226.

[61] Mastroianni, G., Occorsio, M. R., *A new operator of Bernstein type*, Anal. Numer. Théor. Approx., **16**(1987), no. 1, 55-63.

[62] Meyer-König, Zeller, A., *Bernsteinsche Potenzreihen*, Studia Math., **19**(1960), 89-94.

[63] Micchelli, C. A., Rivlin, T. J., *Turán formulae and highest precision quadrature rules for Chebyshev coefficients*, IBN J. Res. Develop., **16**(1972), 372-379.

[64] Miller, W., *Lie Theory and special functions*, Academic Press, New York, 1968.

[65] Milne, L. M., Thomson, C. B. E., *The calculus of finite differences*, Mac Millan Company of Canada Limited, Toronto, 1933.

[66] Milovanović, G. V., *Construction of s-orthogonal polynomials and Turán quadrature formulae*, Numerical Methods and Approximation Theory III, Univ. Nis (Milovanović, G. V. ed.), 1988, 311-388.

[67] Milovanović, G. V., *s-orthogonality and generalized Turán quadrature: construction and application*, ICAOR Cluj-Napoca, Romania (D. D. Stancu et al. eds.), Transilvania Press, 1997, 91-106.

[68] Milovanović, G. V., Spalević, M. M., *A numerical procedure for coefficients in generalized Gauss-Turán quadratures*, FILOMAT (formerly Zb. Rad.), **9**(1995), 1-8.

[69] Mühlbach, G., *Veralgemeinerung der Bernstein - und Lagrange - polynome Bemerkungen zu einer Klasse linearer Polynomoperatoren von D. D. Stancu*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., **15**(1970), 1235-1252.

[70] Müller, M., *Die Folge der Gammaoperatoren*, Dissertation, Stuttgart, 1967.

[71] Nielsen, N., *Die Gammafunktion*, Chelsea, New York, 1965.

[72] Nielsen, K. L., *Traité élémentaire de nombres de Bernoulli*, Gauthier-Villars, Paris, 1923.

[73] Nielsen, K. L., *Methods in numerical analysis*, Mc Millan Company, New York, 1964.

[74] Nörlund, N. E., *Differenzenrechung*, Berlin, 1924, 17-23.

[75] Nörlund, N. E., *Mémoire sur les polynomes de Bernoulli*, Acta Mathematica, **43**(1920), 121-196.

[76] Nörlund, N. E., *Vorlesungen ueber Differenzenrechnung*, Chelsea, New York, 1954 (reprinted from 1923).

[77] Olver, F. W. J., *Asymptotic and special functions*, Academic Press, 1974.

[78] Ossicini, A., *Construzioni di formulae di quadrature di tipo Gaussiano*, Ann. Mat. Pura Apl., **72(4)**(1966), 213-238.

[79] Ossicini, A., Rosati, F., *Funzioni caratteristiche nelle formule di quadratura con nodi multipli*, Boll. Un. Mat. Ital., **4(11)**(1975), 224-237.

[80] Ossicini, A., Rosati, F., *Numeri di Christoffel e polinomi s-ortogonali*, in E. B. Christoffel (P. L. Butzer, F. Fehér, eds.), Birkhäuser, Basel, 1981, 148-157.

[81] Patterson, S. J., *An introduction to the theory of the Riemann Zeta function*, Cambridge University Press, 1988.

[82] Popoviciu, T., *Despre cea mai bună aproximaţie a funcţiilor continue*, Inst. Arte Grafice Ardealul, Cluj, 1937.

[83] Popoviciu, T., *Asupra unei generalizări a formulei de integrare numerică a lui Gauss*, Stud. Cerc. Ştiinţ. Acad. Iaşi, **6**(1955), 29-57.

[84] Popoviciu, T., *Sur le reste dans certaines formules linéaires d'approximation de l'analyse*, Mathematica (Cluj), **1(24)**(1959), 95-142.

[85] Prevost, M., *A new proof of the irrationality of* $\zeta(2)$ *and* $\zeta(3)$ *using Pade approximants*, Laboratoire de Mathématiques Appliquées, Université du Littoral, Centre Universitaire de la Mi-Voix, 1994.

[86] Rainville, E. D., *Special functions*, The Macmillan Company, New York, 1960.

[87] Razi, Q., *Approximation of a function by Kantorovich type operators*, Math. Vesnic., **41**(1989), no. 3, 183-192.

[88] Robinowitz, P., *Abscissas and weights for Lobatto quadrature of high order*, Math. Comp., **14**(1960), 47-52.

[89] Rota, G.-C., Mullin, R., *On the foundation of combinatorial theory*, Graph Theory and its Applications (ed. B. Harris), Academic Press, New York, 1970.

[90] Stancu, D. D., *O metodă pentru construirea de formule de cuadratură de grad înalt de exactitate*, Comunicările Acad. R.P.R., **8**(1958), 349-358.

[91] Stancu, D. D., *Asupra unor formule generale de integrare numerică*, Acad. R.P.R., Studii Cerc.-Matem., **9**(1958), 209-216.

[92] Stancu, D. D., *Sur quelques formules générales de quadrature du types Gauss-Christoffel*, Mathematica, Cluj, **1(24)**(1958), 167-182.

[93] Stancu, D. D., *Evaluation of the remainder term in approximation formulas by Bernstein polynomials*, Math. Comput., **17**(1963), 270-278.

[94] Stancu, D. D., *The remainder of certain linear approximation formulas in two variables*, J. SIAM Numer. Anal. B, **1**(1964), 137-163.

[95] Stancu, D. D., *Approximation of functions by a new class of linear polynomial operators*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., **8**(1968), 1173-1194.

[96] Stancu, D. D., *Probabilistic methods in the theory of approximation of functions of several variables by linear positive operators*, Approximation Theory (Proc. Sympos. Lancaster, 1969, ed. A. Talbot), 329-342.

[97] Stancu, D. D., *Recurrence relations of the Bernstein polynomials*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Cluj, **14**(1969), 31-45.

[98] Stancu, D. D., *Use of probabilistic methods in the theory of uniform approximation of continuous functions*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., **14**(1969), 673-691.

[99] Stancu, D. D., *Two classes of positive linear operators*, Anal. Univ. Timişoara, Ser. Sti. Matem., **8**(1970), 213-220.

[100] Stancu, D. D., *Approximation of functions by means of some new classes of positive linear operators*, in "Numerische Methoden der Approximations Theorie", (Proc. Conf. Math. Res. Inst., Oberwolfach, 1971, eds. L. Collatz, G. Meinardus), 187-203, Basel, Birkhäuser, 1972.

[101] Stancu, D. D., *Curs şi Culegere de probleme de Analiză Numerică*, Litografia Univ. Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca, 1977.

[102] Stancu, D. D., *Approximation of bivariate functions by means of some Bernstein-type operators*, in "Multivariate Approximation", 1978.

[103] Stancu, D. D., *Approximation of functions by means of a new generalized Bernstein operator*, Calcolo, **15**(1983), 211-229.

[104] Stancu, D. D., *On the representation by divided and finite differences of some linear positive operators constructed by means of probabilistic methods*, Itinerant Seminar of Functional Equations, Approximation and Convexity, Univ. Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca, 1983, 159-166.

[105] Stancu, D. D., *Generalized Bernstein approximating operators*, Itinerant Seminar on Functional Equations, Approximation and Convexity, Univ. Cluj-Napoca, 1984, 185-192.

[106] Stancu, D. D., *On the Beta approximating operators of second kind*, Revue d'Analyse Numérique et de Théorie de l'Approximation, 1995.

[107] Stancu, D. D., *Representation of remainders in approximation formula by some discrete type linear positive operators*, Rend. Circolo Matematica di Palermo, Ser. II, Suppl., **52**(1998), 781-791.

[108] Stancu, D. D., *Use of an identity of A. Hurwitz for construction of a linear positive operator of approximation*, Rev. Analyse Numér. Théorie de l'Approximation, **31**(2002), 115-118.

[109] Stancu, D. D., Coman, Gh., Agratini, O., Blaga, P., *Analiză numerică şi teoria aproximării*, vol. 1, 2, Presa Universitară Clujeană, 2002.

[110] Stoica, E. I., Stancu, D. D., *On the use of Abel-Jensen type combinatorial formulas for construction and investigation of some algebraic polynomial operators of approximation*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Mathematica, vol. LIV, **4**(2009).

[111] Stoica, E. I., *On the Stancu type linear positive operators of approximation constructed by using the beta and the gamma functions*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Mathematica, vol. LIII, **4**(2008).

[112] Stoica, E. I., *On the combinatorial identities of Abel-Hurwitz type and their use in constructive theory of functions*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Mathematica, 2010 (va apare).

[113] Steffensen, J. F., *Interpolation*, Chesea Publ. Company, New York, 1950.

[114] Stroud, A. H., Stancu, D. D., *Quadrature formulas with multiple Gaussian nodes*, J. SIAM Numer. Anal., **2**(1965), 129-143.

[115] Swetits, J., Wood, B., *Generalized Bernstein power series*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., **18**(1973), 461-471.

[116] Talman, J., *Special functions*, Benjamin, New York, 1968.

[117] Titchmars, E. C., *The theory of the Riemann Zeta function*, Oxford University Press, 1986.

[118] Thacher, H. C., *Computational methods for mathematical functions*, Report 32-1324, Jet Propulsion Laboratory, Pasadena, California, 1969.

[119] Truesdell, C., *An essay towards a unified theory of special functions*, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1948.

[120] Turán, P., *On the theory of the mechanical quadrature*, Acta Sc. Math. Szeged, **12**(1950), 30-37.

[121] Vincenti, G., *On the computation of the coefficients of s-orthogonal polynomials*, SIAM J. Numer. Anal., **23**(1986), 1290-1294.

[122] Whittaker, J. E., *Interpolatory function theory*, Cambridge Univ. Press, London, 1935.

[123] Whittaker, E. T., Watson, G. N., *A course of modern analysis*, Cambridge University Press, 1996.

[124] Wilson, J., *Some hipergeometric orthogonal polynomials*, SIAM J. Math. Anal., **11**(1980), 690-701.

[125] Wyman, M., Mosser, L., *On some polynomials of Touchard*, Canad. J. Math., **8**(1956).

[126] Zhong, C. W., Shan, T. J., *On approximation properties of Stancu operators of integral type*, Acta Sci. Natur. Univ. Amoien, **26**(1987).

[127] Zudilin, W., *One of the numbers $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ is irational*, Moscow, 2001.

[128] Zudilin, W., *A third-order Apéry-like recursion for* $\zeta(5)$, 2002.