UNIVERSITATEA ”BABEŞ-BOLYAI” CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

COOMOLOGIA GRUPURILOR ŞI A BLOCURILOR ALGEBRELOR GRUPALE

-Rezumatul tezei de doctorat-

de

Constantin Cosmin Todea

Conducător ştiinţific:

Prof. dr. Andrei Mărcuş

CLUJ NAPOCA

Cuprins

CUVINTE CHEIE: algebră simetrică, algebra de coomologie Hochschild, transfer, elemente stabile, algebra de coomologie a unui grup finit, G-algebră, grup punctat, bloc, defect grup, sistem de fuziune, algebra de coomologie a unui bloc, morfism de restricţie, varietate.

Introducere

Coomologia grupurilor are o istorie care porneşte de acum 100 de ani sau chiar mai mult. Originile sale sunt înrădăcinate în teoria grupurilor şi teoria numerelor şi au devenit mai apoi o componentă integrală a topologiei algebrice. În ultimii 30 de ani în coomologia grupurilor s-a dezvoltat o legătură puternică cu teoria reprezentărilor grupurilor finite. Dacă la început aplicaţiile priveau coomologiile în gradele 1 şi 2, mai târziu interacţiunea cu reprezentările implică studiul inelelor de coomologie, mai ales din punctul de vedere al geometriei spectrului de ideale maximale (prime), al varietăţilor acestor inele.

Teoria reprezentării s-a ocupat iniţial cu studiul proprietăţilor grupurilor abstracte prin intermediul unor aplicaţii liniare ale unor spaţii vectoriale. Iniţial ea s-a ocupat în principal cu reprezentări peste corpul numerelor reale sau complexe şi studiau caracterele ordinare ale grupurilor finite, definite de Frobenius în 1896. În aceeaşi perioadă L. E. Dickson consideră reprezentări ale grupurilor cu coeficienţi într-un corp finit, el arătând că dacă corpul scalarilor spaţiului vectorial are caracteristica p şi p nu divide ordinul lui G atunci metodele din teoria reprezentărilor ordinare pot fi aplicate cu succes. Dacă p divide ordinul lui G, Dickson a arătat că teoria este total diferită iar în acest caz avem teoria reprezentărilor modulare.

Teoria reprezentărilor modulare a fost dezvoltată de R. Brauer între 1935 şi 1977 care a construit aproape în totalitate scheletul a ceea ce numim azi teoria clasică a reprezentărilor modulare ale grupurilor finite. Brauer a definit şi studiat conceptele de bază ale teoriei blocurilor aplicând cu succes teoria în studiul grupurilor finite. J. A. Green a introdus în anii '60 conceptul de G-algebră unde G este un grup finit, care poate fi folosit pentru a aborda atât teoria blocurilor cât şi teoria modulelor.

Un alt pas esenţial a fost realizat la sfârşitul anilor '70, prin contribuţiile lui J. L. Alperin, M. Broué şi L. Puig care au pus bazele teoriei p-locale ale blocurilor şi reprezentărilor. Alperin şi Brouè au introdus perechile Brauer, iar acestea au fost folosite de Brouè şi Puig în studiul blocurilor nilpotente. O trecere în revistă a principalelor rezultate şi a problemelor deschise din teoria reprezentărilor modulare se găseşte în [25].

J. L. Alperin, în [1], prezintă aspecte ale coomologiei grupurilor care apar în teoria reprezentărilor modulare. Urmând această linie şi acest îndemn din titlul articolului "Cohomology is representation theory", au apărut o multitudine de studii care aplică algebra omologică în teoria reprezentărilor şi invers. O tratare generală noilor căi şi metode din teoria reprezentărilor modulare apare în [4].

În 1999, M. Linckelmann a scris 2 articole [18] şi [19], în care defineşte şi studiază proprietăţile algebrei de coomologie asociată unui bloc, definit în mod analog cu algebra de coomologie a unui grup prin metoda elementelor stabile din [11]. Linckelmann studiază mai departe şi varietăţi asociate algebrei de coomologie a unui bloc stabilind o stratificare de tip Quillen similară stratificării obţinute de G. S. Avrunin şi L. L. Scott în [3], respectiv de inventatorul acestei abordări, D. Quillen în [28] şi [29].

În această teză vom aborda algebra de coomologie a unui grup finit şi algebra de coomologie al unui bloc al unui grup finit. Vom aplica metoda lui M. Linckelmann de scufundare a algebrei de coomologie a unui grup finit în algebra de coomologie Hochschild a algebrei grupale, prin intermediul unui morfism de inducţie generalizat pe care-l vom analiza în mod explicit.

Vom defini algebra de coomologie a unui bloc al unui subgrup normal al unui grup G, G-stabil, folosind perechi Brauer generalizate si vom demonstra rezultatele similare obţinute de Linckelmann în [18]. Într-o anumită situaţie pentru blocul considerat vom deduce rezultate noi legate de varietăţile asociate algebrei de coomologie a blocului definită de Linckelmann si algebra de coomologie definită de autor folosind perechile Brauer generalizate.

Teza este structurată după cum urmează. În *Capitolul 1* vom stabili notaţii, noţiuni şi rezultate de bază pe care le vom folosi pe parcursul întregii lucrări. Principalele obiective acoperite în acest capitol sunt: algebra simetrică, forma simetrică, elemente stabile în coomologia grupurilor, coomologia Hochschild a algebrei simetrice, blocuri ale algebrelor grupale, perechi Brauer, grupuri punctate şi coomologia blocurilor. Principalele surse folosite sunt: [5], [6], [12], [37] pentru algebra omologică şi [18], [23], [36] pentru teoria reprezentărilor modulare iar [13] pentru grupuri finite.

Capitolul 2 este dedicat caracterizării elementelor stabile stabile în coomologia Hochschild a algebrelor grupale. Vom arăta că sub anumite ipoteze, rezultate stabilite de M. Linckelmann în [18] rămân valabile şi într-un context mai general al morfismului diagonal generalizat cu domeniul algebra de coomologie a centralizatorului în grupul iniţial G, al unui reprezentant al unei clase de conjugare.

§2.1. În acest paragraf definim transferul normalizat T_X asociat unui complex mărginit de $A-B$-bimodule X, între $\mathrm{HH}^*(B)$ şi $\mathrm{HH}^*(A)$ unde A, B sunt două R-algebre simetrice. Totodată vom defini mulţimea elementelor X-stabile în $\mathrm{HH}^*(A)$, notată cu $\mathrm{HH}^*_X(A)$ şi vom da proprietăţi satisfăcute de T_X pe $\mathrm{HH}^*_X(A)$, care este chiar o algebră graduată. În finalul paragrafului vom reaminti scufundarea algebrei de coomologie a unui grup finit G în subalgebra elementelor M-stabile ale $\mathrm{HH}^*_M(RG)$, unde $M = RG$ ca $RG - RH$-bimodul iar H este un subgrup al G.

§2.2. O parte din rezultatele anterioare le vom explicita pentru cazul algebrelor grupale, dând în mod explicit definiţia transferului şi a morfismului de inducţie diagonală δ_G. Aceste obiective au fost obţinute de către autor în [32].

§2.3. Tot în [32] autorul defineşte explicit morfismul de tip inducţie diagonală notat $\gamma^G_{x_i}$ de la $\mathrm{H}^*(C_G(x_i), R)$ în $\mathrm{HH}^*(RG)$, unde x_i este un reprezentant al unei clase de conjugare a lui G. În continuare vom demonstra compatibilitatea lui $\gamma^G_{x_i}$ cu restricţiile şi transferurile în coomologia grupurilor.

§2.4. Continuând linia paragrafului 2.3. din acelaşi articol [32], vom stabili o situaţie de lucru pe care o notăm (†), situaţie în care Propoziţia 4.8. din [18] rămâne valabilă pentru $\gamma^G_{x_i}$. Ba mai mult dacă $x_i = 1$ obţinem chiar Propoziţia 4.8. Paragrafele 2.2, 2.3 şi 2.4 conţin rezultate originale publicate de autor în [32].

Pe parcursul *capitolului 3* vom lucra cu k un corp comutativ, algebric închis, de caracteristică p, G este un grup finit cu N un subgrup normal al său iar c un bloc al kN care este G-stabil. Vom defini şi vom analiza, folosind perechi Brauer generalizate, algebra de coomologie generalizată a blocului c şi un morfism de restricţie de la această algebră la algebra de coomologie obişnuită a blocului c.

§3.1. În acest paragraf vom reaminti rezultatul principal din [18], şi anume Teorema 5.6, care ne arată scufundarea algebrei de coomologie al unui bloc într-o subalgebră de elemente stabile a coomologiei Hochschild a blocului respectiv.

§3.2. Vom defini (c, G)-perechi Brauer (perechi Brauer generalizate) şi o relaţie de ordine pe acestea bazându-ne pe [15]. Vom stabili legătura între (c, G)-defect grupuri şi defect grupuri punctate pe G-algebra kN şi vom defini categoria Brauer generalizată, notată $\mathcal{F}_{(P,e_P)}(G, N, c)$, unde (P, e_P) este o (c, G)-pereche Brauer generalizată. Dacă N este egal cu G obţinem categoria Brauer obişnuită.

§3.3. Vom stabili o situaţie de lucru notată cu $(*)$, care există pentru blocul c şi care ne spune că putem găsi întotdeauna un defect grup punctat Q_δ al $N_{\{c\}}$ cu $Q_\delta \leq P_\gamma$, unde P_γ este un defect grup punctat al $G_{\{c\}}$. Folosind categoria Brauer generalizată putem să definim algebra de coomologie "generalizată" a lui c asociată lui P_γ notată $\mathrm{H}^*(G, N, c, P_\gamma)$, iar în situaţia $(*)$ avem un morfism de restricţie, pe care-l denumim morfismul de *restricţie în coomologia blocurilor* şi-l notăm $res_{N,c}^{G,N,c}$. În continuare vom demonstra teorema principală a acestui paragraf, Teorema 3.3.11, care ne arată că proprietăţile din [18, Teorem 5.6] rămân valabile şi pentru algebra de coomologie generalizată. În finalul paragrafului, introducem o relaţie de incluziune normală pe (c, G)-perechi Brauer şi demonstrăm Teorema a treia principală a lui Brauer (Teorema 3.3.12) pentru perechi Brauer generalizate. În principal aceasta ne spune că dacă $c = c_0$ este blocul principal al lui N atunci (c_0, G)-defect grupurile sunt p-subgrupurile Sylow ale lui G.

§3.4. Sub ipoteza situaţiei $(*)$ din paragraful 3.3 vom determina proprietăţi ale morfismului de restricţie din coomologia blocurilor prin intermediul unui morfism de transfer definit de la algebra de coomologie Hochschild a lui kGc la algebra de coomologie Hochschild a ideal blocului kNc. Rezultatul fundamental al acestui paragraf este Teorema 3.4.10, care stabileşte compatibilitatea $res_{N,c}^{G,N,c}$ prin intermediul lui T_X unde $X = kGc$, luat ca şi $kNc - kGc$-bimodul.

§3.5. În acest paragraf vom analiza varietatea algebrei de coomologie generalizată a blocului c asociată unui kGc-modul finit generat U, notată cu $V_{G,N,c}(U)$. În general, considerând algebra de coomologie obişnuită a blocului c, M. Linckelmann a studiat varietatea asociată algebrei $\mathrm{H}^*(N, c, Q_\delta)$ în [19]. Păstrând notaţiile şi presupunerile din Teorema 3.4.10, vom demonstra că $V_{N,c}(U) = (r^*_{G,N,c})^{-1}(V_{G,N,c}(U))$. Paragrafele

3.4 şi 3.5 se bazează în principal pe rezultate originale obţinute de autor în [35].

În *Capitolul 4* vom defini un functor izomorf cu functorul $\mathrm{Hom}_{kG}(k, -)$ care ne permite să avem o altă abordare a definiţiei coomologiei grupurilor finite. Coomologia blocurilor nu are, deocamdată o abordare globală, adică prin functorul derivat la dreapta (sau stânga) a unui anumit functor, din cauză că bloc algebra nu este o algebră cu augmentare. Rezultatele din capitolul 4 pot reprezenta punctul de plecare pentru o astfel de abordare, care este realizată de altfel de autor în [31]. În acest capitol considerăm G un grup finit, P un p-subgrup Sylow al lui G iar k un corp de caracteristică p.

§4.1. Fie A, B două kG-module. Rezultatul principal al acestui paragraf este izomorfismul dintre $\mathrm{Hom}_{kG}(A, B)$ şi k-submodulul elementelor în $\mathrm{Hom}_{kP}(A, B)$, definit în Definiţia 4.1.2. Acesta va fi notat cu $\mathrm{Hom}_{kP}^{st}(A, B)$.

§4.2. Vom defini un functor F_G de la categoria $\mathrm{Mod}(kG)$ în categoria $\mathrm{Mod}k$ prin $F_G(A) = \mathrm{Hom}_{kP}(k, A)$, pentru orice kG-modul A. Acesta este izomorf cu $\mathrm{Hom}_{kG}(k, -)$. Obţinem în final izomorfismul $R^n F_G(k) \cong \mathrm{H}^n(G, k)$. Paragrafele 4.1, 4.2 se bazează în totalitate pe articolul [33].

◇

Sunt recunoscător domnului Profesor Andrei Mărcuş pentru ajutorul şi răspunsurile date la diferite întrebări apărute pe parcursul obţinerii rezultatelor din teză. Îi mulţumesc pentru răbdarea sa şi îndrumarea spre această zonă a interacţiunii dintre reprezentările grupurilor finite şi algebra omologică. Mulţumesc de asemenea Catedrei de Algebră de la Universitatea "Babeş-Bolyai" şi Catedrei de Matematică de la Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca pentru atmosfera caldă şi prietenoasă din ambele catedre.

În final le mulţumesc părinţilor mei, fraţilor şi surioarei mele care m-au ajutat şi mă ajută în diferite moduri.

Capitolul 1

Preliminarii

În acest capitol vom prezenta noţiunile şi proprietăţile de bază ale coomologiei Hochschild pentru algebrele simetrice, ale coomologiei ordinare a grupurilor finite cât şi rezultatele principale ale blocurilor algebrelor grupale, pe care de acum înainte le vom numi blocurile grupurilor finite sau, pe scurt, blocuri. Vom încheia capitolul cu prezentarea coomologiei blocurilor, definită de Markus Linckelmann în anul 1999 în articolul [18]. În acest capitol (şi pe parcursul întregii lucrări, dacă nu se specifică altceva), toate algebrele şi inelele sunt asociative cu unitate şi toate modulele le considerăm module la stânga, finit generate.

1.1 Coomologia Hochschild a algebrelor simetrice

În acest paragraf prezentăm pe scurt: noţiunea de *algebră simetrică*, doi functori adjuncţi în general, noţiunea de *algebră de coomologie Hochschild aplicată algebrei simetrice* şi vom încheia cu prezentarea *morfismului de transfer* între două algebre de coomologie Hochschild pentru algebre simetrice. În prima parte vom defini două perechi de functori adjuncţi asociate unui bimodul peste algebre simetrice şi vom defini unităţile şi counităţile corespunzătoare. În partea a doua a paragrafului ne vom ocupa de rezultate asemănătoare dar în cadrul mai general al *complexelor de lanţuri mărginite*, de bimodule peste algebre simetrice şi vom defini transferul între coomologia Hochschild a două algebre simetrice, asociat unui astfel de complex mă rginit. Totodată vom pune accentul pe algebra grupală a unui grup finit, caz particular de algebră simetrică şi vom da explicit *unitatea şi counitatea* care apar în definirea morfismului de transfer.

În continuarea paragrafului, considerăm R un inel comutativ, A, B, C sunt R-algebre simetrice iar X un complex de lanţuri mărginit (cu un număr finit de componente nenule), de $A-B$-bimodule, proiective ca A-module la stânga şi B-module la dreapta.

1.1.1. Perechea de functori adjuncţi $(X \otimes_B -, X^* \otimes_A -)$. Morfismele de unitate şi counitate ale functorilor adjuncţi $(X \otimes_B -, X^* \otimes_A -)$ sunt morfismele de complexe de $B-B$-bimodule, respectiv $A-A$-bimodule

$$\varepsilon_X : B \to X^* \otimes_A X, \quad \eta_X : X \otimes_B X^* \to A.$$

1.1.2. Perechea de functori adjuncţi $(X^* \otimes_A -, X \otimes_B -)$. Morfismele de unitate şi counitate ale functorilor adjuncţi $(X^* \otimes_A -, X \otimes_B -)$ sunt morfismele de complexe de $A-A$-bimodule, respectiv $B-B$-bimodule

$$\varepsilon_{X^*} : A \to X \otimes_B X^*, \quad \eta_{X^*} : X^* \otimes_A X \to B.$$

Rezultatele anterioare cât şi cele ce vor urma includ cazul în care $X = M$ este considerat ca şi complex de $A-B$-bimodule concetrat în gradul 0 (adică $X_0 = M$ iar restul componentelor sunt 0). În continuare vom detalia de ce algebra grupală este algebră simetrică (vezi [18, Exemplul 2.6]). Mai departe vom considera H un subgrup al G şi $M = RG$ ca şi $RG - RH$-bimodul. R-dualul M^* al lui M este izomorf cu ${}_{RH}RG_{RG}$. În particular avem că $M^* \otimes_{RG} M$ este izomorf cu RG ca şi $RH - RH$-bimodul. Folosind aceste rezultate obţinem morfismele de adjuncţie asociate lui M şi M^* (vezi [18, Exemplul 2.6]).

1.1.3. Coomologia Hochschild a unei R-algebre A. Conform [37, Capitolul 9, Corolar 9.1.5] avem următoare definiţie a coomologiei Hochschild a unei algebre. *Coomologia Hochschild a unei R-algebre A* este algebra

$$\mathrm{HH}^*(A) = \mathrm{Ext}^*_{A \otimes A^0}(A).$$

Conform unor rezultate standard din algebra omologică, în cazul în care X este proiectiv ca şi A-modul la stânga şi ca B-modul la dreapta, obţinem că complexul $X^* \otimes_A \mathcal{P}_A \otimes X$ este o rezoluţie proiectivă a lui $X^* \otimes_A X$ în categoria abeliană a complexelor mărginite de $A-B$-bimodule. Obţinem mai departe că morfismul de adjuncţie $\varepsilon_X : B \longrightarrow X^* \otimes_A X$ liftează la un morfism de complexe, unic până la omotopie pe care îl notăm la fel

$$\varepsilon_X : \mathcal{P}_B \longrightarrow X^* \otimes_A \mathcal{P}_A \otimes_A X.$$

Analog vom avea : $\eta_X, \varepsilon_{X^*}, \eta_{X^*}$.

Definiţia 1.1.4 (Definiţia 2.9, [18]). Fie A, B două R-algebre simetrice, $s \in A^*$, $t \in A^*$ formele simetrice, ${}_AX_B$ un complex mărginit de bimodule proiective ca şi module la stânga şi la dreapta. *Transferul asociat lui* X este unicul morfism liniar graduat

$$t_X : \mathrm{HH}^*(B) \longrightarrow \mathrm{HH}^*(A),$$

care, pentru orice $n \geq 0$, trimite clasa de omotopie $[\xi]$ a lui $\xi : \mathcal{P}_B \longrightarrow \mathcal{P}_B[n]$ în clasa de omotopie $t_X[\xi] = [\eta_X[n] \circ (Id_X \otimes \xi \otimes Id_{X^*}) \circ \varepsilon_{X^*}]$, dată de compunerea de morfisme de complexe

$$\mathcal{P}_A \xrightarrow{\quad \varepsilon_{X^*} \quad} X \otimes_B \mathcal{P}_B \otimes_B X^* \xrightarrow{Id_X \otimes \xi \otimes Id_{X^*}} X \otimes_B \mathcal{P}_B[n] \otimes X^* \xrightarrow{\quad \eta_X[n] \quad} \mathcal{P}_A[n] .$$

1.2 Coomologia grupurilor finite

Coomologia grupurilor finite se poate defini atât algebric cât şi topologic iar cele două definiţii sunt echivalente. Definiţia coomologiei grupurilor, algebrică şi rezultatele legate de aceasta urmează în principal linia din [5], însă redăm în această secţiune abordarea lui Markus Linckelmann din [18]. În această secţiune considerăm G un grup finit, R un inel comutativ iar algebra grupală RG admite o structură de $RG-RG$-bimodul dată de înmulţirea din RG. Totodată menţionăm că orice $RG-RG$-bimodul M admite o structură de $R(G \times G)$-modul cu $(x, y) \in G \times G$ acţionează pe $m \in M$ ca şi xmy^{-1} (şi viceversa).

Definiţia 1.2.1. Se numeşte *algebra de coomologie al lui* G *cu coeficienţi în* R algebra

$$\mathrm{H}^*(G,R) = \mathrm{Ext}^*_{RG}(R,R),$$

unde R are structura de RG-modul trivial. Explicit $\mathrm{Ext}^*_{RG}(R,R) = \bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{Ext}^n_{RG}(R,R)$, cu înmulţirea în inel dată de produsul cupă (dacă folosim cocicluri) iar

$$\mathrm{Ext}^n_{RG}(R,R) = \mathrm{H}^n(\mathrm{Hom}_{RG}(\mathcal{P}_R, R)),$$

unde $\mathcal{P}_R$ o rezoluţie proiectivă a lui R ca şi RG-modul trivial.

Vom folosi totuşi în definiţia coomologiei grupurilor în locul cociclurilor, clasele de echivalenţă omotopică de morfisme de complexe între rezoluţii, aceasta datorită uşurinţei de a lucra cu compuneri de morfisme de complexe în loc de produsul cupă. În concluzie de acum înainte

$$\mathrm{H}^n(G,R) \cong \mathrm{Hom}_{K(RG)}(\mathcal{P}_R, \mathcal{P}_R[n]).$$

1.2.2. Complexul $\mathrm{Ind}^{G\times G}_{\Delta G}(\mathcal{P}_R)$ este o rezoluţie projectivă a lui RG, deci putem indentifica $\mathrm{Ind}^{G\times G}_{\Delta G}(\mathcal{P}_R) \cong \mathcal{P}_{RG}$, unde $\mathcal{P}_{RG}$ este o rezoluţie proiectivă a lui RG ca $R(G\times G)$-modul sau ca $RG - RG$-bimodul (după cum e mai convenabil).

Propoziţia 1.2.3 (Propoziţia 4.5,[18]). *Fie G un grup finit şi $\mathcal{P}_R$ o rezoluţie proiectivă a RG-modulului trivial R. Funcţia care trimite $\tau \in \mathrm{Hom}_{C(RG)}(\mathcal{P}_R, \mathcal{P}_R[n])$ în $\mathrm{Ind}^{G\times G}_{\Delta G}(\tau)$ induce un morfism injectiv de R-algebre*

$$\delta_G : \mathrm{H}^*(G,R) \longrightarrow \mathrm{HH}^*(RG), \quad \delta_G([\tau]) = [\mathrm{Ind}^{G\times G}_{\Delta G}(\tau)].$$

Morfismul δ_G din propoziţia anterioară îl vom numi "*morfismul inducţie diagonală*". Restricţia şi transferul pentru coomologia grupurilor sunt compatibile cu transferul definit între coomologia Hochschild a algebrelor grupale prin intermediul morfismului diagonal din Propoziţia 1.2.3, iar aceste 2 rezultate vor fi amintite în acest paragraf conform [18, Propoziţia 4.6, Propoziţia 4.7].

1.3 Blocuri ale algebrelor grupale, perechi Brauer şi grupuri punctate

În această secţiune vom prezenta rezultatele principale ale blocurilor algebrelor grupale. Ne interesează mai ales proprietăţile legate de defect grupuri şi perechi Brauer cât şi abordarea cu grupuri punctate ale blocurilor. Sursele iniţiale pentru aceste rezultate sunt articolele lui J. Alperin şi M. Broué, respectiv M. Broué şi L. Puig adică [2] şi [9]. Toate acestea se găsesc sistematizate în [36], ale cărei notaţii le vom adopta. În prima parte a paragrafului vom aborda *idempotenţii* şi *blocurile* unei algebre grupale cât şi noţiunile de *G-algebră* şi de *grupuri punctate*. Iar în a doua parte a acestui paragraf ne vom ocupa de proprietăţile blocurilor, într-o ordine diferită faţă de cea din [36], amintind din când în când de contextul general al grupurilor punctate asociate blocurilor.

Fie G un grup finit, k un corp comutativ de caracteristică p, care divide ordinul lui G iar A o G-algebră. Vom reaminti pe scurt în acest paragraf: *morfismul urmă relativ* Tr_H^G cu H un subgrup al lui G; *grupuri punctate*; *incluziunea* grupurilor punctate; *morfismul Brauer* Br_P^A, unde P e un p-subgrup al lui G; *perechi b-Brauer*, unde b este bloc al kG; *incluziunea* perechilor b-Brauer; *blocul principal*, notat de obicei cu b_0.

Proprietăţile defect grupului blocului principal au fost stabilite în Teorema a treia principală a lui Brauer pe care o amintim în teză conform [36, Teorema 40.17].

1.4 Coomologia blocurilor grupurilor finite

Prima parte a acestei secţiuni descrie sistemele de fuziune ale p-grupurilor care au ca şi exemple de bază: *sistemul de fuziune asociat unui p-subgrup Sylow* al unui grup şi cel *asociat unui bloc* al unui algebre grupale peste un grup finit. Definiţia originală a fost dată de către L. Puig (care le-a numit sisteme pline Frobenius), ele fiind dezvoltate de către Broto, Levi şi Oliver în [8] (denumite acolo sisteme de fuziune saturate). Noi vom adopta noţiunea de *sistem de fuziune* şi rezultatele din [22]. Menţionăm că în ultimii ani teoria sistemele de fuziune (sistemele de fuziune saturate) reprezintă un domeniu în plină dezvoltare care arată interacţiuni strânse între teoria grupurilor şi topologia algebrică. Majoritatea proprietăţilor sistemelor de fuziune, au fost sistematizate de inventatorul acestora, L. Puig în [27]. În continuare vom reaminti noţiunea cea mai importantă a acestei lucrări cea de *algebră de coomologie a unui bloc*, introdusă de M. Linckelmann în [18]. Vom relua totodată câteva proprietăţi de bază a acestei algebre.

1.4.1. Sistemul de fuziune asociat unui bloc. Fie b un bloc al lui kG şi (P, e) o b-pereche Brauer maximală. Pentru orice Q, un subgrup al lui P există un unic bloc e_Q al $kC_G(Q)$ astfel încât $(Q, e_Q) \leq (P, e)$. Notăm cu $\mathcal{F}_{(P,e)}(G, b)$ categoria pe P ale cărei morfisme sunt morfismele de grupuri $\varphi : Q \to R$ pentru care există $x \in G$ cu ${}^x(Q, e_Q) \leq (R, e_R)$ (echivalent ${}^x e_Q = e_{{}^xQ}$) astfel încât $\varphi(u) = xux^{-1}$, pentru orice $u \in Q$. Conform [22, Teorema 2.4] avem că $\mathcal{F}_{(P,e)}(G, b)$ este un sistem de fuziune pe P. Dacă b este blocul principal, conform Teoremei a treia a lui Brauer obţinem că $\mathcal{F}_{(P,e)}(G, b) = \mathcal{F}_P(G)$, unde $\mathcal{F}_P(G)$ este sistemul de fuziune pe P cu morfismele de la Q la R induse de conjugarea cu elemente $x \in G$ astfel încât ${}^xQ \leq R$.

Dăm în continuare definiţia algebrei de coomologie asociată unui bloc.

Definiţia 1.4.2 (Definiţia 5.1, [18])**.** Fie b un bloc al lui kG şi P_γ un defect grup punctat al lui $G_{\{b\}}$. Se numeşte *algebra de coomologie a blocului b asociată cu P_γ* subalgebra

$$\mathrm{H}^*(G, b, P_\gamma)$$

al lui $\mathrm{H}^*(P, k)$, ce constă în toate elementele $[\zeta] \in \mathrm{H}^*(P, k)$ ce satisfac $res^P_Q([\zeta]) = res_\varphi([\zeta])$, pentru orice subgrup Q în P şi orice $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{(P,e_P)}(G,b)}(Q, P)$.

Capitolul 2

Elemente stabile în coomologia Hochschild a algebrei grupale

Capitolul al doilea este dedicat aplicării unor rezultate anterioare în cazul algebrei grupale. Vom defini noţiunea de element stabil în algebra de coomologie Hochschild şi vom explicita morfismele de adjuncţie şi de transfer pentru algebra grupală, definite în paragraful 1.1. În paragraful 2.3 vom detalia folosind limbajul morfismelor de complexe generalizarea morfismului inducţie diagonală definit în [30] cu cocicluri. Vom demonstra un rezultat nou care ne arată că imaginea unui astfel de morfism (generalizare de inducţie diagonală) este inclusă în subalgebra elementelor stabile din codomeniu. Obţinem astfel un rezultat similar celui obţinut de M. Linckelmann în [18]. Paragrafele 2.3, 2.4 conţin rezultate originale publicate de autor în [32].

2.1 Elemente stabile în coomologia Hochschild a algebrelor simetrice

Prezentăm pe scurt noţiuni şi rezultate generale legate de caracterizarea elementelor stabile în coomologia Hochschild a algebrelor simetrice şi studiem legătura lor cu morfismele de transfer.

Definiţia 2.1.1. Fie A, B două R-algebre simetrice cu formele simetrice $s \in A^*, t \in B^*$ şi X un complex mărginit de $A - B$-bimodule cu componente proiective ca şi module la stânga şi la dreapta.

i) Elementul $\pi_X = (\eta_X \circ \varepsilon_{X^*})(1_A) \in Z(A)$, imaginea lui 1_A faţă de compunerea:

$$A \xrightarrow{\varepsilon_{X^*}} X \otimes_B X^* \xrightarrow{\eta_X} A$$

se numeşte *elementul proiectiv relativ la X.*

ii) Dacă π_X este inversabil în $Z(A)$ notăm cu $T_X : \mathrm{HH}^*(B) \longrightarrow \mathrm{HH}^*(A)$ morfismul liniar graduat definit de $T_X([\tau]) = \pi_X^{-1} t_X([\tau]), \quad \tau \in \mathrm{HH}^*(B)$, pe care-l numim *transferul normalizat asociat lui X.*

iii) Un element $[\zeta] \in \mathrm{HH}^*(A)$ se numeşte *X-stabil* dacă există $[\tau] \in \mathrm{HH}^*(B)$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{Z}$, pozitiv următoarea diagramă este comutativă până la o omotopie

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}_A \otimes_A X \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\zeta_n \otimes Id_X"] & X \otimes_B \mathcal{P}_B \arrow[d, "Id_X \otimes \tau_n"] \\ \mathcal{P}_A[n] \otimes_A X \arrow[r, "\cong"] & X \otimes_B \mathcal{P}_B[n] \end{tikzcd} , \tag{2.1.1}$$

unde ζ_n, τ_n sunt componentele de grad n ale ζ, τ iar săgeţile orizontale sunt echivalenţele de omotopie naturală $\mathcal{P}_A \otimes_A X \cong X \otimes_B \mathcal{P}_B$ care liftează izomorfismele naturale $A \otimes_A X \cong X \otimes_B B$. Notăm cu $\mathrm{HH}^*_X(A)$ mulţimea elementelor X-stabile în $\mathrm{HH}^*(A)$.

În [18] există o serie de rezultate care ne dau proprietăţi elementelor stabile. Este vorba de o lemă care ne dă condiţii echivalente cu condiţia 2.1.1 de definire a unui element stabil şi o propoziţie care stabileşte că morfismul de transfer asociat unui bicomplex X are proprietatea că duce elemente stabile în elemente stabile.

Încheiem acest paragraf cu trei rezultate intens folosite pe parcursul acestei lucrări şi pe care le reamintim: [18, Corolarul 3.8], [18, Exemplul 3.9], [18, Propoziţia 4.8] .

2.2 Morfismul de transfer între algebrele de coomologie Hochschild ale algebrelor grupale

Principalul scop al acestui paragraf este de a da în mod explicit, folosind definiţii pe elemente, caracterizarea morfismelor de unitate şi counitate asociate lui $M = RG$ şi $M^* = RG$ ca şi $RG - RH$-bimodul, respectiv $RH - RG$-bimodul, unde H e un subgrup al grupului finit G. În acelaşi mod vom explicita morfismele de transfer t_M şi t_{M^*}.

Considerăm $\mathcal{P}_R$ o rezoluţie proiectivă a lui R ca RG-modul trivial. Deoarece RG este liber ca RH-modul la stânga (de bază un sistem de reprezentanţi ai claselor la dreapta ale lui H în G) avem că $\mathrm{Res}_H^G\mathcal{P}_R$ rămâne o rezoluţie proiectivă a lui R ca RH-modul trivial. Deci orice element $[\tau] \in \mathrm{H}^n(H, R)$ poate fi reprezentat de un morfism de lanţuri $\tau : \mathrm{Res}_H^G\mathcal{P}_R \longrightarrow \mathrm{Res}_H^G\mathcal{P}_R[n]$. Conform 1.2.2, pe orice element $[\tau] \in \mathrm{HH}^n(RG)$ îl considerăm reprezentat de un morfism de lanţuri $\tau : \mathrm{Ind}_{\Delta G}^{G\times G}\mathcal{P}_R \longrightarrow \mathrm{Ind}_{\Delta G}^{G\times G}\mathcal{P}_R[n]$. Considerăm $\mathrm{Ind}_{\Delta H}^{H\times H}R$ ca şi $RH - RH$-bimodul prin

$$h_1 \cdot [(x, y) \otimes_{R\Delta H} 1_R] \cdot h_2 = (h_1 x, h_2^{-1} y) \otimes_{R\Delta H} 1_R,$$

unde $h_1, h_2, x, y \in H$.

Explicităm unitatea ε_{M^*} şi counitatea η_M astfel încât avem definiţia detaliată a transferului t_M:

Definiţia 2.2.1. *Transferul asociat lui M* este unicul morfism liniar graduat

$$t_M : \mathrm{HH}^*(RH) \longrightarrow \mathrm{HH}^*(RG),$$

care trimite clasa omotopiei $[\tau]$, a morfismului de lanţuri

$$\tau : \mathrm{Ind}_{\Delta H}^{H\times H}\mathcal{P}_R \longrightarrow \mathrm{Ind}_{\Delta H}^{H\times H}\mathcal{P}_R[n]$$

în clasa omotopiei $[\eta_M[n] \circ (Id_M \otimes_{RH} \tau \otimes_{RH} Id_{M^*}) \circ \varepsilon_{M^*}]$, pentru orice $n \geq 0$.

În mod similar vom caracteriza liftările la rezoluţii ε_M şi η_{M^*}.

Definiţia 2.2.2. *Transferul asociat lui* M^* este unicul morfism liniar graduat

$$t_{M^*} : \mathrm{HH}^*(RG) \longrightarrow \mathrm{HH}^*(RH),$$

care trimite clasa omotopiei $[\tau]$, a morfismului de lanţuri

$$\tau : \mathrm{Ind}_{\Delta G}^{G\times G}\mathcal{P}_R \longrightarrow \mathrm{Ind}_{\Delta G}^{G\times G}\mathcal{P}_R[n]$$

în clasa omotopiei $[\eta_{M^*}[n] \circ \tau \circ \varepsilon_M]$, pentru orice $n \geq 0$.

2.2.3. Explicitarea morfismului "inducţie diagonală δ_G". Conform Propoziţiei 1.2.3 există morfismul injectiv de R-algebre

$$\delta_G : \mathrm{H}^*(G, R) \longrightarrow \mathrm{HH}^*(RG), \delta_G([\tau]) = [\mathrm{Ind}_{\Delta G}^{G\times G}(\tau)],$$

unde $[\tau] \in \mathrm{H}^n(G, R)$ corespunde la $\tau : \mathcal{P}_R \longrightarrow \mathcal{P}_R[n]$.

2.3 Generalizarea morfismului de inducţie diagonală

Folosind limbajul cociclurilor S.F. Siegel şi S.W. Witherspoon dau o descompunere aditivă a algebrei de coomologie a unui grup (care acţionează prin automorfisme peste un al doilea grup) cu coeficienţi în algebra grupală. De fapt ei explicitează izomorfismul ce determină aceasta descompunere iar în cazul egalităţii celor două grupuri şi a acţiunii de conjugare obţinem descompunerea din [6, Teorema 2.11.2,] extinsă la algebre graduate. În acest paragraf vom caracteriza, folosind limbajul morfismelor de complexe, morfismele injective de algebre care apar în [30, Lema 4.2], notate acolo cu γ_i. În continuarea acestui capitol pentru G un grup finit alegem $\{x_i \mid i \in \{1, \ldots, r\}\}$ un sistem de reprezentanţi ai celor r clase de conjugare ale lui G, cu un reprezentant fixat x_i, pentru $i \in \{1, \ldots, r\}$ un indice ales oarecare.

Dacă $[\tau] \in \mathrm{H}^n(C_G(x_i), R)$ este reprezentat de morfismul de lanţuri de complexe

$$\tau : \mathrm{Res}_{C_G(x_i)}^{G}\mathcal{P}_R \longrightarrow \mathrm{Res}_{C_G(x_i)}^{G}\mathcal{P}_R[n]$$

definim următorul morfism de lanţuri între rezoluţiile proiective ale lui RG ca $R(G\times G)$-modul

$$\gamma^G_{x_i}(\tau):\operatorname{Ind}^{G\times G}_{\Delta G}\mathcal{P}_R\longrightarrow\operatorname{Ind}^{G\times G}_{\Delta G}\mathcal{P}_R[n],$$

$$\gamma^G_{x_i}(\tau)((x,y)\otimes_{R\Delta G}z)=(x,y)\sum_{g\in[G/C_G(x_i)]}(gx_i,g)\otimes_{R\Delta G}\tau(g^{-1}z)\qquad(2.3.1)$$

pentru $x,y\in G, z\in\mathcal{P}_R$.

Propoziţia 2.3.1. *i) Pentru orice τ morfism de lanţuri ca mai sus, funcţia $\gamma^G_{x_i}(\tau)$ este bine definită şi este morfism de lanţuri.*

ii) Pentru orice clasă $[\tau]\in\mathrm{H}^n(C_G(x_i),R)$ avem că $\gamma^G_{x_i}([\tau])=[\gamma^G_{x_i}(\tau)]$ este independentă de alegerea reprezentanţilor.

Propoziţia 2.3.1 ne permite să dăm următoarea definiţie a morfismului de R-algebre graduate din (2.3.1).

Definiţia 2.3.2. Fie G un grup finit şi x_i un reprezentant al unei clase de conjugare a lui G. Morfismul de R-algebre

$$\gamma^G_{x_i}:\mathrm{H}^*(C_G(x_i),R)\longrightarrow\mathrm{HH}^*(RG)$$

este unicul morfism liniar graduat $\gamma^G_{x_i}([\tau])=[\gamma^G_{x_i}(\tau)]$, unde $[\tau]\in\mathrm{H}^n(C_G(x_i),R)$ este reprezentat de un morfism de lanţuri $\tau:\operatorname{Res}^G_{C_G(x_i)}\mathcal{P}_R\longrightarrow\operatorname{Res}^G_{C_G(x_i)}\mathcal{P}_R[n]$. Acest morfism se numeşte *morfismul generalizat de inducţie diagonală relativ la x_i*.

Este clar că dacă $x_i=1$ elementrul neutru al lui G atunci $C_G(1)=G$ şi conform 2.2.3 obţinem $\gamma^G_1=\delta_G$. Următoarea propoziţie este o adaptare a [18, Propoziţia 4.7] la morfismul generalizat de inducţie diagonală. Se observă, conform celor anterioare că dacă luăm $x_i=1$ obţinem chiar propoziţia respectivă.

Propoziţia 2.3.3. *Fie G un grup finit şi x_i un reprezentant al unei clase de conjugare a lui G, H un subgrup al lui G cu proprietatea că $x_i\in H$. Atunci x_i este un* *reprezentant al clasei de conjugare a lui H, $C_H(x_i) \leq C_G(x_i)$ şi următoarea diagramă este comutativă*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^*(C_H(x_i), R) \arrow[r, "\mathrm{tr}_{C_H(x_i)}^{C_G(x_i)}"] \arrow[d, "\gamma_{x_i}^H"] & \mathrm{H}^*(C_G(x_i), R) \arrow[d, "\gamma_{x_i}^G"] \\ \mathrm{HH}^*(RH) \arrow[r, "t_M"] & \mathrm{HH}^*(RG) \end{tikzcd} .$$

2.4 Elemente stabile în coomologia Hochschild a algebrei grupale

În acest paragraf pe lângă ipotezele anterioare pentru majoritatea rezultatelor vom lucra sub ipoteza următoare:

SITUAŢIA (†). *Fie G un grup finit, H un subgrup al G şi x_i un element al H, un reprezentant al unei clase de G-conjugare. Presupunem că există un sistem de reprezentanţi ai claselor la stânga ale $C_H(x_i)$ în H care rămâne sistem de reprezentanţi ai claselor la stânga ale $C_G(x_i)$ în G.*

Problema care apare acum este dacă există grupuri aflate în situaţia (†). Vom da în continuare un exemplu de grup şi de subgrup aflat în această situaţie.

Exemplul 2.4.1. Fie G grupul diedral de ordin $4n$ notat cu D_{2n}, unde n este un număr natural impar. Avem descrierea explicită

$$D_{2n} = \{1, x, x^2, \ldots, x^{2n-1}, y, xy, x^2y, \ldots, x^{2n-1}y\}.$$

Alegem $x_i = y$ şi $H = \{1, y, x^2, x^4, \ldots, x^{2n-2}, x^2y, x^4y, \ldots, x^{2n-2}y\}$ un subgrup al G.

Mai mult după cum se poate deduce din Exemplul 2.4.1 avem următoarea lemă.

Lema 2.4.2. *Dacă suntem în situaţia (†) atunci orice sistem de reprezentanţi ai claselor la stânga ale $C_H(x_i)$ în H este un sistem sistem de reprezentanţi ai claselor la stânga ale $C_G(x_i)$ în G.*

În situaţia (†) vom avea că şi $\gamma_{x_i}^G$ este compatibil cu o anumită restricţie.

Propoziţia 2.4.3. *Dacă suntem în situaţia* (†) *atunci următoarea diagramă este comutativă*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^*(C_G(x_i),R) \arrow[r, "\mathrm{res}^{C_G(x_i)}_{C_H(x_i)}"] \arrow[d, "\gamma^G_{x_i}"] & \mathrm{H}^*(C_H(x_i),R) \arrow[d, "\gamma^H_{x_i}"] \\ \mathrm{HH}^*(RG) \arrow[r, "t_{M^*}"] & \mathrm{HH}^*(RH) \end{tikzcd} .$$

Demostrăm în următoarea teoremă, care este rezultatul principal al acestui paragraf, că în situaţia (†) avem o scufundare similară cu [18, Propoziţia 4.8] $\mathrm{Im}\gamma^G_{x_i} \subset \mathrm{HH}^*_M(RG)$, unde M este $RG - RH$-bimodulul regular.

Teorema 2.4.4. *În situaţia* (†) *următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

i) *Pentru orice număr natural* n, *şi orice morfism de lanţuri* $\tau \in \mathrm{Hom}_{C(RG)}(\mathcal{P}_R, \mathcal{P}_R[n])$ *avem că următoarea diagramă este o omotopie comutativă*

$$\begin{tikzcd} RG \otimes_{RH} \mathrm{Ind}^{H\times H}_{\Delta_H}(\mathcal{P}_R) \otimes_{RH} RG \arrow[r, "\eta_M"] \arrow[d, "Id_M \otimes_{RH} \gamma^H_{x_i}(\tau) \otimes_{RH} Id_{M^*}"] & \mathrm{Ind}^{G\times G}_{\Delta G}(\mathcal{P}_R) \arrow[d, "\gamma^G_{x_i}(\tau)"] \\ RG \otimes_{RH} \mathrm{Ind}^{H\times H}_{\Delta_H}(\mathcal{P}_R[n]) \otimes_{RH} RG \arrow[r, "\eta_M[n]"] & \mathrm{Ind}^{G\times G}_{\Delta G}(\mathcal{P}_R[n]) \end{tikzcd} .$$

ii) $\mathrm{Im}\,\gamma^G_{x_i} \subset \mathrm{HH}^*_M(RG)$.

Capitolul 3

Morfismul de restricţie in coomologia blocurilor grupurilor finite

Abordăm în acest capitol algebra de coomologie a unui bloc, definită de M. Linckelmann în [18], într-un mod similar cu coomologia grupurilor, folosind metoda "Cartan-Eilenberg a elementelor stabile". Vom folosi însă limbajul sistemelor de fuziune amintit în paragraful 1.4. Pe parcursul întregului capitol vom considera k un corp algebric închis de caracteristică p (un număr prim) şi G un grup finit. Fie totodată N un subgrup normal al G şi c un bloc al lui kN care este G-stabil, faţă de acţiunea de conjugare. În această situaţie, folosind rezultate observate de R. Kessar şi R. Stancu în [15], vom defini *algebra de coomologie "generalizată" a blocului* c şi un *morfism de restricţie* la algebra de coomologie obişnuită a blocului c. Vom analiza acest morfism de restricţie prin intermediul morfismelor de transfer între coomologia Hochschild a algebrei kGc şi algebra de coomologie obişnuită a blocului c, ca bloc a lui kN.

Primul paragraf al acestui capitol prezintă pe scurt rezultatele de bază obţinute de M. Linckelmann în [18] legate de coomologia blocurilor şi scufundarea acesteia în subalgebra elementelor stabile a algebrei de coomologie Hochschild a blocului considerat. Paragraful al doilea conţine rezultate originale bazate pe proprietăţi ale perechilor

Brauer generalizate, obţinute de autor în [34] şi [35]. În paragraful al treilea ne vom ocupa de coomologia blocurilor generalizată şi de proprietăţi ale acesteia. Paragrafele patru şi cinci descriu compatibilitatea morfismului de restricţie cu morfismul transfer dintre algebrele de coomologie Hochschild în anumite situaţii, cât şi unele proprietă ţi ale varietăţilor asociate coomologiei blocurilor generalizată. Ultimele trei paragrafe se bazează pe rezultate originale obţinute de autor în [35].

3.1 Elemente stabile în coomologia Hochschild a blocurilor

Reamintim în acest paragraf, fără demonstraţie rezultatul principal din [18], care demonstrează scufundarea algebrei de coomologie al unui bloc în subalgebra elementelor stabile din algebra de coomologie Hochschild a blocului respectiv. Pentru anumite tipuri de blocuri scufundarea aceasta este studiată în [26]. De fapt vom da demonstraţiile acestor rezultate în paragraful 3.3, într-un caz mai general, imitând demonstraţiile lui Linckelmann din [18].

3.2 Perechi Brauer generalizate şi grupuri punctate

În acest paragraf prezentăm proprietăţile perechilor Brauer generalizate, care sunt asociate unui bloc al unui subgrup normal în grupul mai mare G. Ele sunt similare perechilor Brauer, însă în această situaţie se pot construi prin subgrupuri ale lui G. În aceste ipoteze, perechile Brauer generalizate formează un sistem de fuziune care are ca şi subsistem sistemul de fuziune asociat blocului folosind perechile Brauer obişnuite din subgrupul normal. Vom da câteva proprietăţi ce exprimă legătura perechilor Brauer generalizate cu grupurile punctate şi vom încheia cu Teorema a treia principală a lui Brauer pentru perechile Brauer generalizate. Majoritatea rezultatelor se bazează pe rezultate originale obţinute de autor în [34] şi [35].

Până la sfârşitul capitolului vom considera N un subgrup normal al lui G, un bloc c al lui kN , care este G-stabil şi k un corp comutativ, algebric închis. Notăm cu

$A = kG$ ca şi G-algebră interioară, $A_1 = kN$ ca şi G-algebră (neinterioară) iar kN are structura obişnuită de N-algebră interioară. Remarcăm că atât $N_{\{c\}}$ cât şi $G_{\{c\}}$ sunt grupuri punctate pe A_1.

3.2.1. Morfismul Brauer pentru A_1. Pentru orice p-subgrup Q al lui G, proiecţia canonică de la kN în $kC_N(Q)$ induce un morfism de algebre surjectiv de la $(kN)^Q$ în $kC_N(Q)$, *morfismul Brauer pentru* A_1, notat Br_Q^N. Explicit $\mathrm{Br}_Q^N(x) = x$ dacă $x \in C_N(Q)$ şi $\mathrm{Br}_Q^N(x) = 0$ dacă $x \notin C_N(Q)$.

Definiţia 3.2.2. O (c, G)-*pereche Brauer (pereche Brauer generalizată)* este o pereche (Q, e_Q) unde Q este un p-subgrup al lui G astfel încât $\mathrm{Br}_Q^N(c) \neq 0$ şi e_Q este un bloc al $kC_N(Q)$ astfel încât $\mathrm{Br}_Q^N(c)e_Q \neq 0$. Dacă $G = N$, atunci obţinem că o (c, G)-pereche Brauer devine o c-pereche Brauer obişnuită.

Definiţia 3.2.3. Dacă (R, e_R) şi (Q, e_Q) sunt două (c, G)-perechi Brauer, spunem că (Q, e_Q) este *inclusă* în (R, e_R) şi notăm $(Q, e_Q) \leq (R, e_R)$, dacă $Q \leq R$ şi pentru orice idempotent primitiv $i \in (kN)^R$ astfel încât $\mathrm{Br}_R^N(i)e_R \neq 0$ avem că $\mathrm{Br}_Q^N(i)e_Q \neq 0$.

3.2.4. (c, G)-defect grupuri. Conform [9, Teorema 1.14] ştim că G acţionează tranzitiv pe mulţimea (c, G)-perechilor Brauer maximale. Echivalent, toate (c, G)-perechile Brauer maximale sunt G-conjugate. Dacă (P, e_P) este o (c, G)-pereche Brauer maximală atunci P se numeşte (c, G)-*defect grup*, iar atunci când $N = G$ obţinem că P este defect grupul lui c.

Remarcăm că atât $N_{\{c\}}$ cât şi $G_{\{c\}}$ sunt grupuri punctate pe A_1, cu proprietatea că $N_{\{c\}} \leq G_{\{c\}}$. Ne aflăm astfel în ipotezele [16, Propoziţia 5.3], pe care o aplicăm obţinând următoarea situaţie de lucru.

3.2.5. Defect grupuri punctate pe A_1. P_γ este defect grup punctat al lui $G_{\{c\}}$ pe A_1 dacă şi numai dacă $\overline{P} = PN/N$ este un p-subgrup Sylow al lui $\overline{G} = G/N$ si există Q_δ un defect grup punctat al $N_{\{c\}}$ pe kN ca şi N-algebră astfel încât $Q_\delta \leq P_\gamma$. În acest caz $Q = P \cap N$.

Propoziţia 3.2.6. *Fie P_γ un defect grup punctat al $G_{\{c\}}$ pe A_1. Atunci există o unică (c, G)-pereche Brauer (P, e_P) astfel încât $\mathrm{Br}_P^N(i)e_P \neq 0$, pentru orice $i \in \gamma$. Mai mult (P, e_P) este o (c, G)-pereche Brauer maximală, deci P este un (c, G)-defect grup.*

Definiţia 3.2.7 (Definiţia 3.3, [15])**.** Fie N un subgrup normal al lui G, c un bloc G-stabil al lui kN şi (P, e_P) o (c, G)-pereche Brauer maximală. Pentru un subgrup Q al lui P fie e_Q unicul bloc al $kC_N(Q)$ astfel încât $(Q, e_Q) \leq (P, e_P)$. Notăm cu $\mathcal{F}_{(P,e_P)}(G, N, c)$ categoria pe P cu morfismele $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{(P,e_P)}(G,N,c)}(Q, R)$ date de mulţimea

$$\{\varphi : Q \longrightarrow R \mid \varphi(u) = gug^{-1}, \forall u \in Q, g \in G,^g (Q, e_Q) \leq (R, e_R)\}.$$

$\mathcal{F}_{(P,e_P)}(G, N, c)$ se numeşte *categoria Brauer generalizată* şi este sistem de fuziune conform [15, Teorema 3.4]. Dacă $N = G$ obţinem sistemul de fuziune asociat blocului c al kG şi notat $\mathcal{F}_{(P,e_P)}(G, c)$, conform 1.4.1.

În propoziţia următoare păstrăm notaţiile şi situaţia de lucru dată de 3.2.5.

Propoziţia 3.2.8. *Fie P_γ un defect grup punctat al lui $G_{\{c\}}$ pe A_1 şi $Q_\delta = (P \cap N)_\delta \leq P_\gamma$ defect grupul punctat corespunzător lui $N_{\{c\}}$, conform Observaţiei 3.2.5. Atunci există o unică (c, G)-pereche Brauer maximală (P, e_P) astfel încât $\mathrm{Br}_P^N(i)e_P \neq 0$, pentru orice $i \in \gamma$, şi o unică c-pereche Brauer maximală (Q, e_Q) astfel încât $\mathrm{Br}_Q^N(j)e_Q \neq 0$, pentru orice $j \in \delta$. Mai mult avem că $(Q, e_Q) \leq (P, e_P)$ şi $\mathcal{F}_{(Q,e_Q)}(N, c)$ este un subsistem normal în $\mathcal{F}_{(P,e_P)}(G, N, c)$.*

Lema 3.2.9. *Fie c un bloc G-stabil al kN şi P_γ un defect grup punctat al $G_{\{c\}}$ cu $i \in \gamma$. Atunci morfismul de $kGc - kGc$-bimodule*

$$kGi \otimes_{kP} ikG \longrightarrow kGc$$

dat de înmulţirea în kGc, scindează.

În ipoteza 3.2.5 fie $A_\delta = jAj$ unde $j \in (ckN)^Q$ este un idempotent primitiv astfel încât $\mathrm{Br}_Q^N(j) \neq 0$. Atunci A_δ este o k-subalgebră a lui A iar Q-algebra interioară jA_1j se numeşte *algebra sursă* a N-algebrei interioare cA_1. A_γ este P-algebra interioară $ikGi$, unde $i \in \gamma$. Cu aceste notaţii avem următoare propoziţie, care poate fi obţinută ca o consecinţă a [24, Propoziţia 3.2]. Vom da însă o demonstraţie diferită.

Propoziţia 3.2.10. *Dacă P_γ este un defect grup punctat al $G_{\{c\}}$ pe A_1 atunci A_γ ca şi P-algebră interioară este Morita echivalentă cu $A_{\{c\}}$.*

În [24], A. Mărcuş a observat că rezultatele lui M. Linckelmann [20, 7.1, 7.7] se generalizează pentru cazul algebrelor grupale răsucite. Rezultate asemănătoare sunt tratate şi în [17]. În cazul nostru avem următoarele două propoziţii, ale căror demonstraţii urmează linia rezultatelor lui Linckelmann.

Propoziţia 3.2.11. *Fie P_γ un defect grup punctat al lui $G_{\{c\}}$ pe A_1 iar i un idempotent sursă. Pentru orice două subgrupuri R, S ale lui P şi orice sumand direct indecompozabil W al lui $ikGi$ ca şi $kR - kS$-bimodul există un element $x \in G$ şi $\varphi : T \to S$ cu $\varphi(u) = x^{-1}ux$, pentru orice $u \in T$, unde $T = R \cap {}^xS$ astfel încât $W \cong k[RxS] \cong kR \otimes_{kT^\varphi} (kS)$.*

Corolarul 3.2.12. *Orice sumand direct indecompozabil al lui $ikGi$ ca şi $kP - kP$-bimodul este de forma $kP \otimes_{kT^\varphi} (kP)$ unde $\varphi : T \to P$ cu $\varphi(u) = x^{-1}ux$, pentru orice $u \in T$ iar $T = P \cap {}^xP$.*

Propoziţia 3.2.13. *Fie P_γ un defect grup punctat al lui $G_{\{c\}}$ pe A_1 iar i un idempotent sursă. Fie două subgrupuri R, S ale lui P. Dacă $\varphi : T \to S$ este un morfism* *de grupuri astfel încât $kR - kS$-bimodulul $kR \otimes_{kT^{\varphi}} (kS)$ este sumand direct indecompozabil al lui $ikGi$ atunci φ este injectiv şi $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{(P,e_P)}(G,N,c)}(T,S)$.*

3.3 Coomologia blocurilor generalizată

În acest paragraf, folosind rezultate obţinute în paragraful anterior, putem să stabilim o situaţie de lucru în care definiţia coomologiei blocului c folosind perechi Brauer generalizate este posibilă. Această definiţie este similară coomologiei blocului c, folosind perechile Brauer obişnuite, ca şi p-subgrupuri în N. Totodată în această situaţie este posibilă definirea morfismului de restricţie între cele două coomologii. Pentru blocurile principale, dupa cum ne aşteptam, această restricţie devine morfismul de restricţie obişnuit între coomologia grupului G şi cea a lui N. În finalul paragrafului vom demonstra, că în situaţia noastră, rezultatele din paragraful 3.1, ce leagă coomologia blocului c de coomologia Hochschild a bloc algebrei kNc, rămân în mod natural valabile.

Conform 3.2.5 şi Propoziţiei 3.2.8 în următoarele paragrafe vom lucra sub ipotezele următoarei situaţii:

Situaţia $(*)$. *Fie G un grup finit, N un subgrup normal al lui G şi c un bloc G-stabil al kN. Fie P_γ un defect grup punctat al $G_{\{c\}}$ pe A_1 şi $Q_\delta = (P \cap N)_\delta \leq P_\gamma$ defect grupul punctat corespunzător al $N_{\{c\}}$. Atunci există o unică pereche (c, G)-Brauer maximală (P, e_P) astfel încât $\mathrm{Br}_P^N(i)e_P \neq 0$, pentru orice $i \in \gamma$, şi o unică pereche c-Brauer maximală (Q, e_Q) astfel încât $\mathrm{Br}_Q^N(j)e_Q \neq 0$, pentru orice $j \in \delta$. Mai mult avem că $(Q, e_Q) \leq (P, e_P)$.* În mod similar, în situaţia $(*)$, putem defini coomologia blocului c generalizată, care dacă $N = G$ devine coomologia blocului obişnuită $\mathrm{H}^*(N, c, Q_\delta)$.

Definiţia 3.3.1. *Algebra de coomologie generalizată al blocului c al lui N asociată cu P_γ* este subalgebra

$$\mathrm{H}^*(G, N, c, P_\gamma)$$

a algebrei $\mathrm{H}^*(P, k)$ care constă în elementele $[\zeta] \in \mathrm{H}^*(P, k)$ ce satisfac condiţia de stabilitate $res_\varphi[\zeta] = res_R^P[\zeta]$, pentru orice subgrup R al lui P şi orice morfism de grupuri

$$\varphi : R \to P \texttt{ în } \mathcal{F}_{(P,e_P)}(G,N,c).$$

Deoarece toate defect grupurile lui $G_{\{c\}}$ sunt G-conjugate, rezultă că algebra anterioară este, până la un izomorfism independentă de alegerea lui P_γ.

Propoziţia 3.3.2. *În situaţia (∗), pentru orice* $[\zeta] \in \mathrm{H}^*(G,N,c,P_\gamma)$ *avem că*

$$res_Q^P([\zeta]) \in \mathrm{H}^*(N,c,Q_\delta).$$

Folosind Propoziţia 3.3.2, putem defini în continuare morfismul de restricţie de la coomologia generalizată a blocului c la coomologia blocului c.

Definiţia 3.3.3. În situaţia (∗) definim *restricţia în coomologia blocurilor*

$$res_{N,c}^{G,N,c} : \mathrm{H}^*(G,N,c,P_\gamma) \longrightarrow \mathrm{H}^*(N,c,Q_\delta),$$

prin $res_{N,c}^{G,N,c}([\zeta]) = res_Q^P([\zeta])$, pentru orice $[\zeta] \in \mathrm{H}^*(G,N,c,P_\gamma)$.

3.3.4. Algebra de multiplicitate; modulul de multiplicitate. Considerăm $B = kNc$, care este o G-algebră primitivă (unitatea lui B, adică c este idempotent primitiv al lui B^G, deci B^G este inel local). Totodată B este localizarea lui $G_{\{c\}}$ în A_1 iar P_γ este defect al lui B. Reamintim că $S(\gamma) = B^P/m_\gamma$ este o k-algebră simplă numită *algebra de multiplicitate*, unde $m_\gamma = J(B^P)$ este unicul ideal maximal al B^P astfel încât $\gamma \nsubseteq m_\gamma$. Atunci $S(\gamma) \simeq \mathrm{End}_k(V(\gamma))$, unde $V(\gamma)$ este un B^P-modulul simplu numit *modulul de multiplicitate.*

În următoarele paragrafe notăm cu $\overline{N} = N_G(P_\gamma)/P$ şi putem considera $\overline{C} = C_N(P)/Z(P) \cap N$. Observăm că $\overline{C} = C_N(P)/P \cap C_N(P) \simeq PC_N(P)/P$, care este un subgrup al lui $\overline{N}$.

Lema 3.3.5. *În condiţiile 3.3.4 este adevărat că modulul de multiplicitate* $V(\gamma)$ *este simplu şi projectiv ca şi* $k\overline{C}$*-modul. Mai mult, avem că* p *nu divide* $\mid \overline{N}/\overline{C} \mid$.

Propoziţia 3.3.6. *Fie P_γ un defect grup punctat al lui $G_{\{c\}}$ şi (P, e_P) unica (c, G)-pereche Brauer maximală cu proprietatea că $\mathrm{Br}_P^N(i)e_P \neq 0$. Atunci rezultă că $Z(P) \cap N$ este un defect grup punctat al e_P. In particular e_P este bloc nilpotent al $kC_N(P)$.*

Dacă $G = N$ obţinem binecunoscutul rezultat că $Z(P)$ este defect grup al e_P ca şi bloc al $kC_G(P)$ iar e_P este bloc nilpotent.

Propoziţia 3.3.7. *Fie P_γ un defect grup punctat al $G_{\{c\}}$ pe A_1 şi (P, e_P) unica (c, G)-pereche Brauer astfel încât $\mathrm{Br}_P^N(i)e_P \neq 0$ pentru orice $i \in \gamma$. Atunci P_γ este unicul grup punctat pe A_1 cu proprietatea anterioară şi mai mult avem că $N_G(P, e_P) = N_G(P_\gamma)$. În această situaţie avem că $N_G(P, e_P)/PC_N(P) \cong \overline{N}/\overline{C}$.*

Propoziţia 3.3.8. *Fie N un subgrup normal al lui G, fie c un bloc G-stabil iar P_γ un defect grup punctat al $G_{\{c\}}$ şi $i \in \gamma$. Considerăm $ikGi$ ca şi $kP - kP$-bimodul iar $[\zeta] \in \mathrm{H}^*(G, N, c, P_\gamma)$.*

i) Avem că $t_{ikGi}(\delta_P([\zeta])) = \frac{dim_k(ikGi)}{|P|}\delta_P([\zeta])$; în particular $\pi_{ikGi} = \frac{dim_k(ikGi)}{|P|}1_{kP}$.

ii) Pentru orice număr natural n următoarea diagramă este o omotopie comutativă:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}_{kP} \arrow[r, "\varepsilon_{ikGi}"] \arrow[d, "\delta_P(\zeta_n)"] & (ikGi) \otimes_{kP} \mathcal{P}_{kP} \otimes_{kP} (ikGi) \arrow[d, "Id\otimes\delta_P(\zeta_n)\otimes Id"] \\
\mathcal{P}_{kP}[n] \arrow[r, "\varepsilon_{ikGi}[n]"] & (ikGi) \otimes_{kP} \mathcal{P}_{kP}[n] \otimes_{kP} (ikGi)
\end{tikzcd} ,$$

unde ζ_n este componenta de grad n a lui ζ. În particular $\delta_P([\zeta])$ este $ikGi$-stabil.

Observaţia 3.3.9. Fie N un subgrup normal al unui grup finit G, fie c un bloc G-stabil al kN şi P_γ un defect grup punctat al $G_{\{c\}}$ cu $i \in \gamma$. Atunci există un izomorfism de $kP - kGc$-bimodule $(kGi)^* \cong ikG$.

Aplicăm [18, 6.6] în cazul particular al $A = kGc, B = kP$ ca şi k-algebre simetrice cu formele simetrice obişnuite s, respectiv t şi $M = kGi$, obţinem caracterizări ale unităţilor şi counităţilor în acest caz.

Lema 3.3.10. *Fie N un subgrup normal al lui G, fie c un bloc G-stabil iar P_γ un defect grup punctat al $G_{\{c\}}$ şi $i \in \gamma$. Cu identificarea prin izomorfismul din Observaţia 3.3.9 şi deoarece conform Propoziţiei 3.2.10 înmulţirea în kGc induce un izomorfism $ikG \otimes_{kGc} kGi \cong ikGi$ rezultă că morfismele de adjuncţie asociate cu kGi şi dualul său ikG sunt date după cum urmează:*

$\varepsilon_{kGi} : kP \longrightarrow ikGi$ *duce* $u \in P$ *în* ui;

$\eta_{kGi} : kGi \otimes_{kP} ikG \longrightarrow kGc$ *indus de înmulţirea în* kGc;

$\varepsilon_{ikG} : kGc \longrightarrow kGi \otimes_{kP} ikG$ *duce* $a \in kGc$ *în* $\displaystyle\sum_{x\in[G/P]} axi \otimes ix^{-1}$;

$\eta_{ikG} : ikGi \longrightarrow kP$ *duce* $b \in ikGi$ *în* $\displaystyle\sum_{u\in P} s(bu^{-1})u$.

Mai mult, avem că $\pi_{kGi} = \mathrm{Tr}_P^G(i)$ *şi* $\pi_{ikG} = s(i)1_{kP} = \frac{dim_k(ikG)}{|G|}1_{kP}$.

În continuare vom demonstra rezultatul principal al acestui capitol, care ne spune în esenţă că şi algebra de coomologie generalizată a unui bloc G-stabil se scufundă prin morfismul diagonal într-o subalgebră de elemente stabile din algebra de coomologie Hochschild a lui kGc. Rezultatul este asemănător cu [18, Teorema 5.6].

Teorema 3.3.11. *Fie N un subgrup normal al lui G, fie c un bloc G-stabil iar P_γ un defect grup punctat al $G_{\{c\}}$ şi $i \in \gamma$. Fie (P, e_P) (c, G)-perechea Brauer maximală asociată şi considerăm kGi şi ikG ca şi $kGc - kP$ respectiv $kP - kGc$-bimodule.*

i) Avem că $\pi_{kGi} = \mathrm{Tr}_P^G(i) \in Z(kGc)^\times$ *şi* $\pi_{ikG} = \frac{dim_k(ikG)}{|G|}1_{kP} \in k^*1_{kP}$.

ii) Dacă $[\zeta] \in \mathrm{H}^*(G, N, c, P_\gamma)$ *atunci* $\delta_P([\zeta])$ *este* ikG*-stabil în* $\mathrm{HH}^*(kP)$.

iii) Morfismul $T_{kGi} \circ \delta_P$ *induce un morfism injectiv de* k*-algebre graduate*

$$\mathrm{H}^*(G, N, c, P_\gamma) \xrightarrow{\delta_P} \mathrm{HH}^*_{ikG}(kP) \xrightarrow{T_{kGi}} \mathrm{HH}^*_{kGi}(kGc)$$

Încheiem capitolul cu Teorema a treia principală a lui Brauer în cazul (c, G)-perechilor Brauer. Acest rezultat este rezultatul principal demonstrat de autor în [34], iar demonstraţia imită în mare măsură demonstraţia din [36, Teorema 40.17]; vom folosi o relaţie de "normală" de incluziune între (c, G)-perechi Brauer pentru a demonstra această teoremă.

Teorema 3.3.12. *Fie $c = c_0$ blocul principal al kN, unde N este subgrup normal al G iar Q este orice p-subgrup al G. Atunci avem că:*

a) Blocul principal c_0 este G-stabil.

b) $\mathrm{Br}_Q^N(c_0)$ este un idempotent primitiv în $Z(kC_N(Q))$ şi este blocul principal al $kC_N(Q)$.

c) (Q, e_Q) este o (c_0, G)-pereche Brauer dacă şi numai dacă e_Q este blocul principal al $kC_N(Q)$.

d) (c_0, G)-defect grupurile sunt p-subgrupurile Sylow ale lui G.

3.4 Proprietăţi ale morfismului de restricţie în coomologia blocurilor

În acest paragraf vom analiza proprietăţi ale morfismului de restricţie în coomologia blocurilor, definit în paragraful 3.3. Aflându-ne în situaţia $(*)$ vom încerca să înţelegem acest morfism de restricţie prin morfismul de transfer între algebrele de coomologie Hochschild ale lui kGc şi ale ideal blocului kNc.

Mai întâi vom puncta anumite notaţii şi rezultate care reies din paragrafele 3.1 şi 1.1. Fie A, B, C trei R-algebre simetrice, X un complex de $A-B$-bimodule finit generate, proiective ca şi A-module la stânga şi B-module la dreapta iar Y un complex de $B-C$-bimodule, proiective ca B-module la stânga şi C-module la dreapta. Notăm de acum încolo că $[\zeta] \in \mathrm{HH}^*(A)$ este X-stabil cu $[\zeta] \otimes_A 1_X = 1_X \otimes_B [\tau]$, unde $[\tau] \in \mathrm{HH}^*(B)$ ce satisface condiţia din Definiţia 2.1.1.

Propoziţia 3.4.1. *Cu ipotezele anterioare avem că:*

i) $\pi_{X\otimes_B Y} = t^0_X(\pi_Y)$.

ii) Dacă X' *este un sumand direct al* X *atunci* $\mathrm{HH}^*_{X^*}(B) \subset \mathrm{HH}^*_{X'^*}(B)$. *Mai mult dacă* $\pi_X, \pi_{X'}$ *sunt inversabile atunci morfismul de transfer normalizat* $T_{X'}$ *coincide cu* T_X *pe* $\mathrm{HH}^*_{X^*}(B)$.

Următoarea propoziţie rezultă conform ideilor din [14].

Propoziţia 3.4.2. *Dacă* $\pi_X, \pi_Y, \pi_{X\otimes_B Y}$ *sunt inversabile atunci* $T_X \circ T_Y$ *coincide cu* $T_{X\otimes_B Y}$ *pe* $\mathrm{HH}^*_{Y^*\otimes_B X^*}(C)$.

3.4.3. Caz particular de complex în situaţia $(*)$. Fie $A = kNc$, $B = kGc$, şi $X = ckGc = kGc$ ca şi $A - B$-bimodul cu $X^* = ckGc = ckG$ ca şi $B - A$-bimodul. Fie $M = kP$ ca şi $kP - kQ$-bimodul cu $M^* = kP$ respectiv $kQ - kP$-bimodul. Ştim că $\pi_M = [P : Q]1_{kP} \in Z(kP)$ nu este inversabil iar $\pi_{M^*} = 1_{kQ} \in Z(kQ)^\times$.

Propoziţia 3.4.4. *În ipotezele 3.4.3 următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

i) $\pi_X = c, \quad \pi_{X^*} = [G : N]c$.

ii) $\pi_X \in Z(kNc)$ *este inversabil.* π_{X^*} *este inversabil în* $Z(kGc)$ *dacă şi numai dacă* p *nu divide* $[G : N]$.

În situaţia $(*)$ deoarece $Q_\delta \leq P_\gamma$ alegem $i \in \gamma$ şi $j \in \delta$ astfel încât $j = ij = j\,i$. În continuare paragrafului alegem $Y = kGi$ ca şi $B - kP$-bimodul iar $Z = kNj$ ca şi $A - kQ$-bimodul. Atunci avem următoarele descrieri:

$$ikGj = ikG \otimes_B X^* \otimes_A kNj = Y^* \otimes_B X^* \otimes_A Z;$$

$$jkGi = Z^* \otimes_A X \otimes_B Y.$$

Lema 3.4.5. *Următoarele afirmaţii au loc:*

a) $\mathrm{HH}^*_{ikGj}(kP) \subset \mathrm{HH}^*_{Y^* \otimes_B X^*}(kP)$.

b) $T_Y(\mathrm{HH}^*_{Y^* \otimes_B X^*}(kP)) \subset \mathrm{HH}^*_{X^*}(kGc)$.

Lema 3.4.6. *Cu notaţiile anterioare, următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

a) $kQ - kQ$*-bimodulul* $jkNj$ *este sumand direct al* $ikGj$.

b) $A - kP$*-bimodulul* $X \otimes_B Y$ *este sumand direct al* $Z \otimes_{kQ} jkGi$.

c) Avem că M *este izomorf cu un sumand direct al* $ikGj$ *ca şi* $kP - kQ$*-bimodul.*

3.4.7. O diagramă comutativă dată de restricţia în coomologia blocurilor. Conform afirmaţiei c) din Lema 3.4.6 vom identifica M cu un sumand direct al $ikGj$. Deoarece $\pi_{M^*} = 1_{kQ}$ transferul normalizat T_{M^*} este t_{M^*}. Presupunând că suntem în situaţia $(*)$, atunci conform [18, Propoziţia 4.7] următoarea diagramă de morfisme de k-algebre graduate este comutativă:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^*(G,N,c,P_\gamma) \arrow[r, "\delta_P"] \arrow[d, "res^{G,N,c}_{N,c}"] & \mathrm{HH}^*(kP) \arrow[d, "T_{M^*}"] \\
\mathrm{H}^*(N,c,Q_\delta) \arrow[r, "\delta_Q"] & \mathrm{HH}^*(kQ)
\end{tikzcd}$$

Vom obţine o diagramă puţin diferită în următoarea observaţie, unde în mod abuziv notăm cu T_{M^*} morfismul surjectiv R_{M^*}.

Observaţia 3.4.8. Cu presupunerile din 3.4.7 următoarea diagramă de morfisme de k-algebre graduate este comutativă:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^*(G,N,c,P_\gamma) \arrow[r, "\delta_P"] \arrow[d, "res^{G,N,c}_{N,c}"] & \mathrm{HH}^*_M(kP) \arrow[d, "T_{M^*}"] \\
\mathrm{H}^*(N,c,Q_\delta) \arrow[r, "\delta_Q"] & \mathrm{HH}^*_{M^*}(kQ)
\end{tikzcd}$$

Propoziţia 3.4.9. *Presupunem că* $\delta_P(\mathrm{H}^*(G,N,c,P_\gamma)) \subseteq \mathrm{HH}^*_{ikGj}(kP)$*, unde* $ikGj$ *este* $kP-kQ$*-bimodul. Atunci următoarea diagramă de morfisme de* k*-algebre graduate este comutativă:*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^*(G,N,c,P_\gamma) \arrow[r, "\delta_P"] \arrow[d, "res^{G,N,c}_{N,c}"] & \mathrm{HH}^*_{ikGj}(kP) \cap \mathrm{HH}^*_M(kP) \arrow[d, "T_{M^*}"] \\ \mathrm{H}^*(N,c,Q_\delta) \arrow[r, "\delta_Q"] & \mathrm{HH}^*_{jkNj}(kQ) \cap \mathrm{HH}^*_{M^*}(kQ) \end{tikzcd} .$$

Teorema 3.4.10. *În situaţia (*) alegem* $i \in \gamma$ *şi* $j \in \delta$ *astfel încât* $j = ij = ji$*. Presupunem că* $\delta_P(\mathrm{H}^*(G,N,c,P_\gamma)) \subset \mathrm{HH}^*_{ikGj}(kP)$*. Atunci următoarea diagramă de morfisme de* k*-algebre graduate este comutativă:*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^*(G,N,c,P_\gamma) \arrow[r, "T_{kGi}\circ\delta_P"] \arrow[d, "res^{G,N,c}_{N,c}"] & \mathrm{HH}^*_{X^*}(kGc) \arrow[d, "T_X"] \\ \mathrm{H}^*(N,c,Q_\delta) \arrow[r, "T_{kNj}\circ\delta_Q"] & \mathrm{HH}^*(kNc) \end{tikzcd} .$$

Dacă blocul c este blocul principal al kN atunci $\delta_P(\mathrm{H}^*(G,N,c,P_\gamma)) \subset \mathrm{HH}^*_{ikGj}(kP)$, proprietatea din Teorema 3.4.10 are loc; în acest caz diagrama de mai sus este comutativă.

3.5 Varietăţi în coomologia blocurilor generalizată

În acest paragraf vom urma notaţiile şi presupunerile din Teorema 3.4.10. Vom reaminti, pentru algebra de coomologie generalizată asociată unui bloc, câteva proprietăţi ale varietăţii algebrice asociate, acestei algebre graduate. Principalele articole în care se studiază varietatea asociată algebrei de coomologie obişnuită a unui bloc sunt: [19], [21], [7]. Vom încheia cu o teoremă care leagă varietăţile asociate unui modul prin intermediul restricţiei în coomologia blocurilor.

3.5.1. Varietăţi asociate modulelor în cazul coomologiei blocurilor generalizată.

Algebra de coomologie a blocurilor generalizată $\mathrm{H}^*(G,N,c,P_\gamma)$ este o algebră finit generată, graduat comutativă. Notăm spectrul de ideale maximale al său cu $V_{G,N,c}$, iar acesta se numeşte în general *varietate* a acestei algebre. Fie U un kGc-modul finit generat şi fie $I^*_{G,N,c,P_\gamma}(U)$ nucleul compunerii de morfisme de k-algebre graduate

$$\mathrm{H}^*(G,N,c,P_\gamma) \xrightarrow{T_{kGi}\circ\delta_P} \mathrm{HH}^*(kGc) \xrightarrow{\alpha_U} \mathrm{Ext}^*_{kGc}(U,U)\ ,$$

unde α_U este functorul indus de $-\otimes_{kGc} U$. Varietatea $V_{G,N,c}(U)$ este definită ca fiind subvarietatea lui $V_{G,N,c}$, ce constă din idealele maximale ce conţin $I^*_{G,N,c,P_\gamma}(U)$. Notăm tot cu U structura lui U ca şi kNc-modul şi cu I^*_{N,c,Q_δ} nucleul compunerii

$$\mathrm{H}^*(N,c,Q_\delta) \xrightarrow{T_{kNj}\circ\delta_Q} \mathrm{HH}^*(kNc) \xrightarrow{\alpha_U} \mathrm{Ext}^*_{kNc}(U,U)\ .$$

Varietatea $V_{N,c}(U)$ este subvarietatea lui $V_{N,c}$ care constă în toate idealele maximale ce conţin I^*_{N,c,Q_δ}. Varietatea coomologică $V_G(U)$ asociată lui U, introdusă de Carlson în [10], este definită ca fiind subvarietatea din spectrul de ideale maximale ale $\mathrm{H}^*(G,k)$ (notat cu V_G) determinată de $I^*_G(U)$. Aici $I^*_G(U)$ este nucleul morfismului de k-algebre graduate $\mathrm{H}^*(G,k) \longrightarrow \mathrm{Ext}^*_{kGc}(U,U)$ indus de functorul $-\otimes_k U$.

Vom demonstra în continuare o propoziţie care este un rezultat analog cu [21, Teorema 2.1] şi o lemă ce ne dă o stratificare a varietăţii $V_{G,N,c}(U)$. Cele două rezultate ne permit să demonstrăm teorema principală a acestui paragraf.

Teorema 3.5.2. *Păstrăm notaţiile şi presupunerile din Teorema 3.4.10.*

(a) Restricţia în coomologia blocurilor $res^{G,N,c}_{N,c} : \mathrm{H}^*(G,N,c,P_\gamma) \longrightarrow \mathrm{H}^*(N,c,Q_\delta)$ *induce o aplicaţie finită* $(res^{G,N,c}_{N,c})^*$, *pe care o notăm cu* $r^*_{G,N,c} : V_{N,c} \longrightarrow V_{G,N,c}$.

b) Pentru orice kGc-modul finit generat U, avem că

$$V_{N,c}(U) = (r^*_{G,N,c})^{-1}(V_{G,N,c}(U)).$$

Capitolul 4

Definiţie echivalentă a coomologiei grupurilor finite

În acest capitol considerăm G un grup finit, k un corp de caracteristică p iar P un subgrup Sylow al lui G. Sistemul de fuziune al lui P în G este definit conform 1.4.1. În paragraful întâi al acestui capitol vom obţine un rezultat asemănător cu scufundarea coomologiei unui grup finit în submodulul elementelor stabile din coomologia unui subgrup Sylow al său, dar pentru morfisme de kG-module. În al doilea paragraf vom demonstra un izomorfism al functorului Hom, functor exact la stânga care apare în definiţia coomologiei grupurilor, cu un nou functor definit prin elementele *stabile* în k-submodulul morfismelor de kP-module.

Capitolul se bazează în majoritate pe rezultatele obţinute de autor în [33].

4.1 Elemente stabile în modulul morfismelor

Fie A, B două kG-module. Dacă $\varphi : H \longrightarrow G$ este un morfism de grupuri finite, unde H, G sunt două grupuri, atunci există *restricţia prin* φ

$$res_\varphi : \mathrm{Hom}_{kG}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{kH}(A, B) \quad f \mapsto res_\varphi(f),$$

unde $res_\varphi(f)$ este f considerat ca şi morfism de RH-module. Structura de RH-modul este dată prin φ (i.e. $ha = \varphi(h)a$, pentru $a \in A$ şi $h \in H$).

Mai întâi demonstrăm o propoziţie similară cu [12, Corolarul 4.2.7]

Propoziţia 4.1.1. *Fie P un p-subgrup Sylow al lui G şi A, B două kG-module. Atunci f este în* $\mathrm{Im}res_P^G$ *dacă şi numai dacă*

$$res_{P\cap {}^gP}^{P}(f) = res_{P\cap {}^gP}^{{}^gP}(g^*(f)), \quad \forall g \in G. \tag{4.1.1}$$

Definiţia 4.1.2. Un morfim $f \in \mathrm{Hom}_{kP}(A, B)$ care satisface condiţia (4.1.1) se numeşte *stabil.* Notăm cu $\mathrm{Hom}_{kP}^{st}(A, B)$ k-submodulul de morfisme stabile.

Deoarece $\mathrm{Tr}_P^G \circ res_P^G = [G : P]id$ iar $[G : P]$ este inversabil în k, conform Propoziţiei 4.1.1 obţinem următorul corolar.

Corolarul 4.1.3. *Cu ipotezele anterioare următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

1) $\mathrm{Hom}_{kG}(A, B)$ *este izomorf cu k-submodulul elementelor stabile* $\mathrm{Hom}_{kP}^{st}(A, B)$.

2) $\mathrm{Hom}_{kP}^{st}(A, B) = \{f \in \mathrm{Hom}_{kP}(A, B) \mid res_R^P(f) = res_\varphi(f), \forall \varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_P(G)}(R, P)\}$.

4.2 O definiţie algebrică echivalentă a coomologiei grupurilor finite

Este cunoscută definiţia coomologiei grupurilor $\mathrm{H}^n(G, k) = \mathrm{R}^n\mathrm{Hom}_{kG}(k, -)(k)$ ca şi al n-lea functor derivat la dreapta al functorului covariant Hom, care este în acest caz functorul exact la stânga, covariant şi aditiv

$$\mathrm{Hom}_{kG}(k, -) : \mathrm{Mod}(kG) \longrightarrow \mathrm{Mod}k.$$

Folosind Corolarul 4.1.3 vom defini un nou functor $F_G : \mathrm{Mod}(kG) \longrightarrow \mathrm{Mod}k$.

4.2.1. Un functor izomorf cu $\mathrm{Hom}_{kG}(k, -)$.

Dacă A este un kG-modul notăm cu $F_G(A)$ k-submodulul elementelor stabile în $\mathrm{Hom}_{kP}(k, A)$, adică

$$F_G(A) = \{f \in \mathrm{Hom}_{kP}(k, A) \mid res_R^P(f) = res_\varphi(f), \forall \varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_P(G)}(R, P)\}.$$

Dacă $\partial : A \longrightarrow B$ este un morfism de kG-module definim prin $F_G(\partial)$ morfismul de k-module

$$F_G(\partial) : F_G(A) \longrightarrow F_G(B), \quad F_G(\partial)(f) = \partial \circ f.$$

Rezultă că (este uşor de verificat) că F_G este un functor aditiv covariant. Corolarul 4.1.3 ne permite să obţinem izomorfismul natural de functori $F_G \cong \mathrm{Hom}_{kG}(k, -)$, care implică că F_G este un functor exact la stânga.

Importanţa următoarei propoziţii apare din izomorfismul din demonstraţie. De fapt speranţa noastră este că această abordare ne va permite să tratăm la fel şi coomologia blocurilor. Însă acest lucru ve constitui interesul unor studii viitoare ale autorului.

Fie $\mathrm{H}^n_{st}(\mathcal{F}_P(G))$ submodulul elementelor stabile în $\mathrm{H}^n(P, k)$, care conform [12, Corolarului 4.2.7] este izomorf cu $\mathrm{H}^n(G, k)$.

Propoziţia 4.2.2. *Există izomorfismul bine definit de k-module*

$$\psi : \mathrm{R}^n F_G(k) \longrightarrow \mathrm{H}^n_{st}(\mathcal{F}_P(G)),$$

cu $\psi(f + \mathrm{Im}F_G(\delta^{n-1})) = [f]$, pentru orice $f \in \mathrm{Ker}F_G(\delta^n)$.

Este uşor de verificat acum următorul corolar.

Corolarul 4.2.3. *Există izomorfismul de k-module $R^n F_G(k) \cong \mathrm{H}^n(G, k)$.*

Bibliografie

[1] J. L. Alperin, *Cohomology is representation theory*, Proceedings of the Symposium in Pure Mathematics **47** (1987), no. 1, 3–11.

[2] J. L. Alperin and M. Broué, *Local methods in block theory*, The Annals of Mathematics **110** (1979), no. 1, 143–157.

[3] G. S. Avrunin and L. L. Scott, *Quillen stratification for modules*, Inv. Math **66** (1982), 277–286.

[4] D. J. Benson, *Modular Representation Theory:New Trends and Methods*, Lecture Notes in Math, Springer 1081, 1984.

[5] ———, *Representations and Cohomology I*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[6] ———, *Representations and Cohomology II*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[7] D. J. Benson and M. Linckelmann, *Vertex and source determine the block variety of an indecomposable module*, J. Pure Appl. Algebra **197** (2005), 11–17.

[8] C. Broto, R. Levi, and L. Oliver, *The homotopy theory of fusion systems*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), 779–856.

[9] M. Broué and L. Puig, *Characters and local structures in G-algebras*, J. Algebra **63** (1980), 306–317.

[10] J. F. Carlson, *The varieties and the cohomology ring of a module*, J. Algebra **85** (1983), 104–143.

[11] H. Cartan and S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton University Press, New Jersey, 1956.

[12] L. Evens, *The Cohomology of Groups*, Clarendon Press, Oxford, New York, Tokyo, 1991.

[13] D. Gorenstein, *Finite Groups*, Chelsea Publishing Company, New York, 1980.

[14] H. Kawai and H. Sasaki, *Cohomology algebras of blocks of finite groups and Brauer correspondence*, Alg. and Repres. Theory **9** (2006), 497.

[15] R. Kessar and R. Stancu, *A reduction theorem for fusion systems of blocks*, J. Algebra **319** (2008), 806–823.

[16] B. Külshammer and L. Puig, *Extensions of nilpotent blocks*, Inventiones Mathematicae **102** (1990), 17–71.

[17] M. Linckelmann, *On derived equivalences and local structure of blocks of finite groups*, Tr. J. of Mathematics **22** (1998), 93–107.

[18] ______, *Transfer in Hochschild cohomology of blocks of finite groups*, Alg. and Repres. Theory **2** (1999), 107–135.

[19] ______, *Varieties in block theory*, J. Algebra **215** (1999), 460–480.

[20] ______, *On splendid derived and stable equivalences between blocks of finite groups*, J. Algebra **242** (2001), 819–843.

[21] ______, *Quillen stratification for block varieties*, J. Pure Appl. Algebra **172** (2002), 257–270.

[22] ______, *Simple fusion systems and the Solomon* 2*-local groups*, J. Algebra **296** (2006), no. 2, 385–401.

[23] ______, *Introduction to fusion systems*, Group Representation Theory, EPFL Press, Lausanne (2007), 79–113.

[24] A. Mărcuş, *Twisted group algebras, normal subgroups and derived equivalences*, Alg. Repres. Theory **4** (2001), 25–54.

[25] ———, *Modular Representation Theory of Finite Groups*, Editura EFES, Cluj Napoca, 2002.

[26] J. Pakianathan and S. W. Witherspoon, *Hochschild cohomology and Linckelmann cohomology for blocks of finite groups*, J. Pure Appl. Algebra **178** (2003), 87–100.

[27] L. Puig, *Frobenius Categories versus Brauer Blocks*, Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 2009.

[28] D. Quillen, *The spectrum of an equivariant cohomology ring: I*, The Annals of Math. **94** (1971), no. 3, 549–572.

[29] ———, *The spectrum of an equivariant cohomology ring: II*, The Annals of Math. **94** (1971), no. 4, 573–602.

[30] S. F. Siegel and S. W. Witherspoon, *The Hochschild cohomology ring of a group agebra*, Proc. London Math. Soc. **79** (1999), 131–157.

[31] **C. C. Todea**, *A global approach for cohomology of blocks of finite groups*, J. Algebra (trimis spre publicare).

[32] ———, *New stable elements in Hochschild cohomology algebra*, Mathematica, Tome **75** (2010), no. 1, 75–84.

[33] ———, *Remarks on definition of group cohomology of finite groups*, Automat. Comput. Appl. Math. **19** (2010), no. 1, 7–11.

[34] ———, *Remarks on generalized Brauer pairs*, Mathematica, Tome **76** (2011), no. 1.

[35] ———, *Restriction between cohomology algebras of blocks of finite groups*, Alg. and Repres. Theory (acceptat) (2011).

[36] J. Thévenaz, *G-algebras and Modular Representation Theory*, Clarendon Press, Oxford, 1995.

[37] C. A. Weibel, *An Introduction to Homological Algebra*, Cambridge University Press, 1994.