Cuprins

Prefaţă

O ramură a matematicii cu largi aplicaţii în diferite domenii ale ştiinţei şi tehnicii, la care şcoala românească de matematică a adus contribuţii importante este Analiza complexă. Analiza complexă, se ocupă în special cu funcţiile analitice de variabilă complexă. Deoarece părţile reale şi imaginare ale funcţiei analitice trebuie să satisfacă ecuaţia lui Laplace , analiza complexă este aplicată pe larg în probleme bi-dimensionale din fizică.

"Teoria funcţiilor de o variabilă complexă" îmbină raţionamentul matematic, cu intuiţia geometrică şi este una din ramurile clasice ale matematicii ce are rădăcini în secolul 19 şi chiar mai devreme.. Teoria geometrică a funcţiilor analitice, are la bază noţiunea de reprezentare conformă, care constituie modelul ideal al transformărilor geometrice în plan. Un rezultat important ce stă la baza acestei teorii îl reprezintă teorema lui Riemann de reprezentare conformă. Nume importante ce au dezvoltat această disciplină sunt Euler, Gauss, Riemann, Cauchy, Weierstrass şi mulţi alţii în secolul 20.

Funcţiile univalente s-au dovedit a fi cele mai interesante funcţii de studiat, primele condiţii necesare şi suficiente de univalenţă exprimate cu ajutorul coeficienţilor au fost obţinute în 1931 de către Gh. Călugăreanu. În jurul anului 1907 apare prima lucrare semnificativă care aparţine matematicianului P. Koebe.

În teoria geometrică a funcţiilor un rol deosebit îl ocupă subordonările diferenţiale cunoscute şi sub numele de "metoda funcţiilor admisibile", teorie iniţiată de S.S. Miller şi P.T. Mocanu. Folosind metoda subordonărilor diferenţiale s-au demonstrat pe o cale mult mai simplă anumite rezultate clasice din acest domeniu , extinderi ale acestora , precum şi rezultate noi.

Recent Acad. P. T. Mocanu şi Prof. S. S. Miller au introdus noţiunea de superordonare diferenţială, noţiune duală a celei de subordonare diferenţială.

Noţiunea de tare subordonare a fost introdusă de J. A. Antonino şi S. Romaguera, iar noţiunea de tare superordonare a fost introdusă de Georgia Oros după modelul teoriei subordonărilor diferenţiale, în anul 2009.

Prezenta lucrare conţine cinci capitole din care primul capitol prezintă noţiunile, definiţiile, proprietăţile şi teoremele de caracterizare folosite pe parcursul întregii lucrări. În paragrafele acestui prim capitol prezentăm generalităţi, rezultate cunoscute despre clasa funcţiilor univalente. După cum urmează enumerăm proprietăţi ale unor clase speciale de funcţiilor univalente : clasa funcţiilor stelate, clasa funcţiilor convexe, clasa funcţiilor α -convexe, funcţii analitice cu parte reală pozitivă şi funcţii a căror derivată are parte reală pozitivă. În celelalte paragrafe ale capitolului întâi am prezentat noţiuni ca : subordonare, subordonare diferenţială, tare subordonare, superordonare diferenţială, tare superordonare cu anumite proprietăţi şi teoreme de caracterizare cunoscute.

Celelalte patru capitole conţin rezultate originale publicate deja sau în curs de publicare. Astfel capitolul al doilea conţine rezultate obţinute în cadrul subordonărilor diferenţiale din trei lucrări publicate. Aceste rezultate originale au fost obţinute cu ajutorul operatorilor diferenţiali Sălăgean, Ruscheweyh şi a operatorului liniar Dziok-Srivastava.

Capitolul al treilea prezintă rezultate originale obţinute în cadrul tare subordonărilor diferenţiale, care conţine o lucrare publicată în numărul dedicat domnului profesor doctor Gr. St. Sălăgean coordonatorul prezentei lucrări în cadrul revistei Studia Univ. Babeş-Bolyai, Mathematica, la împlinirea vârstei de 60 ani. Folosim operatorul diferenţial Sălăgean pentru funcţii din clasa $A^*_{n\zeta}$ şi obţinem tare superordonări noi.

Capitolul patru exemplifică trei lucrări originale în domeniul tare superordonărilor pentru clase diferite de funcţii univalente, publicate deja sau în curs de publicare. Astfel am obţinut tare superordonări noi, cele mai bune subordonante, tare superordonări diferenţiale de ordinul întâi , cele mai bune subordonante ale acestora şi lanţuri de subordonare.

În capitolul cinci prezentăm alte rezultate cunoscute pentru funcţii analitice cu coeficienţi negativi, teoreme de caracterizare, noţiunea de convoluţie sau produs Hadamard şi noţiunea de ordin de consistenţă. În continuare am enumerat rezultatele originale obţinute împreună cu Prof. univ. dr. Gr. Şt. Sălăgean, conducătorul ştiinţific al tezei de doctorat, legat de ordinul de consistenţă al funcţii analitice cu coeficienţi negativi.

Aduc pe această cale sincerele mele mulţumiri, recunoştinţă şi stimă Prof. univ. dr. Gr. Şt. Sălăgean pentru colaborarea şi îndrumarea în cercetarea ştiinţifică din aceşti ani, pentru sprijinul acordat şi pentru informaţiile oferite în toată această perioadă. De asemenea mulţumesc întregului Colectiv de Analiză Complexă din cadrul Facultăţii de Matematică şi Informatică a Universităţii Babeş-Bolyai Cluj-Napoca, pentru observaţiile constructive şi pentru participare şi susţinere la toate proiectele, referatele şi prezentările mele din aceşti ani.

Mulţumesc cu sinceritate pentru încurajarea permanentă, sprijinul oferit în toţi aceşti ani, încrederea care mi-a fost acordată şi pentru actuala şi viitoarea perioadă de colaborare, domnului Prof. univ. dr. Gheorghe Oros, Universitatea din Oradea.

Doresc să mulţumesc colegelor din Oradea cu care am avut şi sper că voi avea o colaborare ştiinţifică desăvârşită, doamnei lect. univ. dr. Georgia Irina Oros, lect. univ. dr.Adriana Cătaş şi doamnei as. drd. Roxana Şendruţiu.

În toată această perioadă n-a lipsit sprijinul copiilor şi părinţilor mei, cărora le datorez mii de mulţumiri pentru susţinere, înţelegere şi ajutorul acordat.

Capitolul 1

Generalităţi

1.1 Funcţii univalente. Definiţii, notaţii şi proprietăţi

În acest paragraf sunt expuse noţiuni generale cunoscute despre funcţii univalente, definiţii şi notaţii precum şi proprietăţi ale clasei funcţiilor olomorfe şi univalente în discul unitate (U notată cu S).

Vom nota:

(1.1.1) $$U(z_0; r) = \{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| < r\},$$

discul centrat în $z_0 \in \mathbb{C}$ de rază $r > 0$,

(1.1.2) $$\dot{U}(z_0; r) = U(z_0; r) \setminus \{z_0\},$$

discul punctat de centru z_0 şi aceeaşi rază r,

(1.1.3) $$\overline{U}(z_0; r) = \{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| \leq r\},$$

discul închis de centru z_0 şi rază r şi

(1.1.4) $$\partial U(z_0; r) = \{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| = r\},$$

frontiera lui $U(z_0; r)$ sau cercul de centru z_0 şi rază r.

Pentru $a \in \mathbb{C}$ şi $n \in \mathbb{N}^*$ notăm

$$(1.1.5) \qquad H[a,n] = \{f \in H(U): \ f(z) = a + a_n z^n + \dots\}.$$

Cu $H(U \times \overline{U})$ notăm clasa funcţiilor analitice în $U \times \overline{U}$,iar

$$(1.1.6) \qquad \begin{aligned} H^*[a,n,\xi] = \{f \in H(U \times \overline{U}) \mid f(z,\zeta) \\ = a + a_n(\zeta)z^n + a_{n+1}(\zeta)z^{n+1} + \dots, \ z \in U, \ \zeta \in \overline{U}\}, \end{aligned}$$

cu $a_k(\zeta)$ funcţii olomorfe în $\overline{U}$, $k \geq n$

$$(1.1.7) \qquad A_n = \{f \in H(U): \ f(z) = z + a_{n+1}z^{n+1} + \dots\},$$

iar $A = A_1$,

$$(1.1.8) \quad A^*_{n\zeta} = \{f \in H(U \times \overline{U}) \mid f(z,\zeta) = z + a_{n+1}(\zeta)z^{n+1} + \dots, \ z \in U, \ \zeta \in \overline{U}\},$$

cu $a_k(\zeta)$ funcţii olomorfe în $\overline{U}$, $k \geq n$,pentru $n = 1$, $A^*_{n\zeta} = A^*_\zeta$,

$$(1.1.9) \qquad S^*_\zeta = \{f \in H^*[a,n,\xi]: \ \mathrm{Re}\,\frac{zf'(z)}{f(z)} > 0, \ z \in U, \ \text{pentru toţi } \zeta \in \overline{U}\},$$

clasa funcţiilor stelate,

$$(1.1.10) \quad K^*_\zeta = \{f \in H^*[a,n,\xi]: \ \mathrm{Re}\,\frac{zf''(z,\zeta)}{f'(z,\zeta)} + 1 > 0, \ z \in U, \ \text{pentru toţi } \zeta \in \overline{U}\},$$

clasa funcţiilor convexe,

$$(1.1.11) \qquad S = \{f \in A: \ f \text{ univalentă în } U\},$$

clasa funcţiilor olomorfe şi univalente, normate cu condiţiile:

$$(1.1.12) \qquad f(0) = 0, \quad f'(0) = 1,$$

cu $f \in H_u(U)$ care au dezvoltarea în serie de puteri

$$(1.1.13) \qquad f(z) = z + a_2 z^2 + \dots, \quad z \in U.$$

Studiul funcţiilor meromorfe şi univalente se poate face paralel cu clasa S.

Notăm cu Σ clasa funcţiilor φ meromorfe cu unicul pol (simplu) $\zeta = \infty$ şi univalente în exteriorul discului unitate $U^- = \{\zeta \in \mathbb{C}_\infty \mid \zeta > 1\}$ care au dezvoltarea în serie Laurent de forma:

$$\varphi(\zeta) = \zeta + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\zeta} + \ldots + \frac{\alpha_n}{\zeta^n} + \ldots, \quad |\zeta| > 1.$$

Teorema 1.1.1 (teorema ariei) [26] *Dacă* $\varphi(\zeta) = \zeta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\zeta^n}$ *este o funcţie din clasa* Σ, *atunci prin aria lui* $E(\varphi)$ *unde*

$$E(\varphi) = \mathbb{C} \setminus \varphi(U^-) \tag{1.1.14}$$

vom înţelege aria în sensul de măsură Lebesgue bidimensională:

$$E(\varphi) = \pi \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} n|\alpha_n|^2 \right) \geq 0 \tag{1.1.15}$$

adică $\sum_{n=1}^{\infty} n|\alpha_n|^2 \leq 1$.

Teorema 1.1.2 (teorema lui Bieberbach relativ la coeficientul a_2) [26]
Dacă $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k \in S$ *atunci* $|a_2| \leq 2$. *Egalitatea* $|a_2| = 2$ *are loc dacă şi numai dacă* f *este de forma*

$$K_\sigma(z) = \frac{z}{(1 + e^{i\sigma} z)^2} \tag{1.1.16}$$

(K_σ *se numeşte funcţia lui Koebe).*

Conjectura 1.1.1 (conjectura lui Bieberbach) [26] *Dacă funcţia* $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ *aparţine clasei* S, *atunci* $|a_n| \leq n$, $n = 2, 3, \ldots$.

Teorema 1.1.3 [26] *Dacă* $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$, $f \in S$, *atunci* $|a_3 - a_2^2| \leq 1$, *delimitarea fiind exactă.*

Dacă f *este impară,* $|a_3| \leq 1$, *iar egalitatea are loc dacă şi numai dacă* f *este de forma*

$$f(z) = \frac{z}{1 + e^{i\sigma} z^2}, \quad \sigma \in \mathbb{R}.$$

Teorema 1.1.4 (teorema de acoperire Koebe, Bieberbach) [15] *Fie* $f \in S$. *Atunci* $f(U) \supseteq U_{1/4}$.

Corolarul 1.1.1 [15] *Clasa* S *este o submulţime compactă a lui* $H(U)$.

1.2 Clasa funcţiilor stelate

Definiţia 1.2.1 [26] Fie $f \in H(U)$ o funcţie cu proprietatea $f(0) = 0$. Spunem că funcţia f este stelată în U în raport cu originea (sau stelată) dacă f este o funcţie univalentă în U şi $f(U)$ este un domeniu stelat în raport cu originea.

Teorema 1.2.1 (teorema de univalenţă pe frontieră) [26] *Fie* D *un domeniu* $D \subset \mathbb{C}$ *şi* $f \in H(D)$ *o funcţie continuă pe* $\overline{D}$. *Dacă* f *este o funcţie injectivă pe* ∂D *atunci* f *este injectivă pe* D.

Teorema 1.2.2 (teorema de caracterizare analitică a stelarităţii) [26] *Fie* $f \in H(U)$ *cu* $f(0) = 0$. *Atunci funcţia* f *este stelată dacă şi numai dacă* $f'(0) \neq 0$ *şi*

$$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} > 0, \quad z \in U. \tag{1.2.1}$$

Definiţia 1.2.2 [26] Notăm cu S^* clasa funcţiilor $f \in A$ care sunt stelate şi normate în discul unitate:

$$S^* = \left\{ f \in A : \operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} > 0, \ z \in U \right\}. \tag{1.2.2}$$

Teorema 1.2.3 (teorema de delimitare a coeficienţilor funcţiilor din S^*) *Dacă* $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$ *funcţie aparţinând clasei* S^*, *atunci*

$$|a_n| \leq n, \quad n = 2, 3, \ldots$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă f *este funcţia lui Koebe.*

1.3 Clasa funcţiilor convexe

Definiţia 1.3.1 [26] Funcţia $f \in H(U)$ se numeşte convexă în U (sau convexă) dacă f este univalentă în U şi $f(U)$ este un domeniu convex.

Teorema 1.3.1 (teorema de caracterizare analitică a convexităţii) [26] *Dacă $f \in H(U)$, funcţia f este convexă dacă şi numai dacă $f'(0) \neq 0$ şi*

$$\operatorname{Re} \frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1 > 0, \quad z \in U. \tag{1.3.1}$$

Teorema 1.3.2 (teorema de dualitate a lui Alexander) *Funcţia f este convexă în U dacă şi numai dacă funcţia $F(z) = zf'(z)$ este stelată în U.*

Definiţia 1.3.2 [26] K reprezintă clasa funcţiilor $f \in A$ convexe şi normate în discul unitate,

$$K = \left\{ f \in A : \ \operatorname{Re} \frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1 > 0, \ z \in U \right\}. \tag{1.3.2}$$

Teorema 1.3.3 (teorema de delimitare a coeficienţilor funcţiilor din K) [26] *Dacă funcţia $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$ aparţine clasei K, atunci*

$$|a_n| \leq 1, \quad n = 2, 3, \ldots$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă f este de forma

$$f(z) = \frac{z}{1 + e^{i\sigma} z}, \quad \sigma \in \mathbb{R}. \tag{1.3.3}$$

1.4 Clasa funcţiilor alfa-convexe (Funcţii Mocanu)

Intenţionând să se găsească o legătură între noţiunile de convexitate şi stelaritate în anul 1969 P. T. Mocanu introduce noţiunea de funcţie alfa-convexă.

Definiţia 1.4.1 [26],[25] Fie $f \in A$ o funcţie care respectă condiţia

$$\frac{f(z)f'(z)}{z} \neq 0, \quad z \in U$$

şi fie numărul $\alpha \in \mathbb{R}$. Funcţia f se numeşte α-convexă în discul unitate U (sau α-convexă) dacă $\operatorname{Re} J(\alpha, f; z) > 0$, $z \in U$ adică:

$$J(\alpha, f; z) = (1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)} + \alpha\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1\right). \tag{1.4.1}$$

Definiţia 1.4.2 [26] Definim drept mulţimea

$$M_\alpha = \left\{ f \in A : \ \frac{f(z)f'(z)}{z} \neq 0, \ \operatorname{Re} J(\alpha, f; z) > 0, \ z \in U \right\}, \tag{1.4.2}$$

clasa funcţiilor α-convexe în discul unitate U.

Teorema 1.4.1 (teorema de stelaritate a funcţiilor α-convexe)

1. *Fie $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in M_\alpha$. Atunci $f \in S^*$ adică*

$$M_\alpha \subset S^*.$$

2. *Dacă $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât $0 \leq \dfrac{\beta}{\alpha} < 1$, atunci*

$$M_\alpha \subset M_\beta.$$

3. *$M_\infty = \{id\}$, unde $id(z) = z$, $z \in U$.*

1.5 Funcţii analitice cu parte reală pozitivă

Proprietăţile funcţiilor analitice cu parte reală pozitivă au un rol important în paragrafele următoare fiind în strânsă legătură cu noţiunea de subordonare care va fi prezentată în capitolele ce urmează.

Definiţia 1.5.1 [26] 1. Prin clasa funcţiilor lui Carathéodory (a funcţiilor cu parte reală pozitivă) înţelegem clasa

$$P = \{p \in H(U) : \ p(0) = 1, \ \operatorname{Re} p(z) > 0, \ z \in U\}.$$

2. Prin clasa funcţiilor Schwarz înţelegem clasa

$$B = \{\varphi \in H(U) : \ \varphi(0) = 0, \ |\varphi(z)| < 1, \ z \in U\}.$$

Teorema 1.5.1 (teorema lui Carathéodory asupra coeficienţilor funcţiilor din clasa P) [26] *Dacă $p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots + p_n z^n + \ldots$ aparţine clasei P atunci $|p_n| \leq 2$, $n \geq 1$, egalitatea fiind atinsă pentru funcţia $p(z) = \dfrac{1+\lambda z}{1-\lambda z}$, $|\lambda| = 1$.*

1.6 Subordonare

Definiţia 1.6.1 [26] Fie $f, g \in H(U)$. Spunem că funcţia f este subordonată funcţiei g şi vom nota $f \prec g$ sau $f(z) \prec g(z)$, dacă există o funcţie $w \in H(U)$ cu $w(0) = 0$ şi $|w(z)| < 1$, $z \in U$ adică $w \in B$ astfel încât

$$f(z) = g[w(z)], \quad z \in U.$$

Teorema 1.6.1 [26] *Fie $f, g \in H(U)$ şi să presupunem că g este univalentă în U. Atunci $f \prec g$ dacă şi numai dacă $f(0) = g(0)$ şi $f(U) \subseteq g(U)$.*

Corolarul 1.6.1 (principiul subordonării al lui Lindelöf) [26] *Fie funcţiile $f, g \in H(U)$ astfel încât g este univalentă în U.*

1. Dacă $f(0) = g(0)$ şi $f(U) \subseteq g(U)$ atunci $f(\overline{U}_r) \subseteq g(\overline{U}_r)$, $0 < r < 1$.

2. Egalitatea $f(\overline{U}_r) = g(\overline{U}_r)$ pentru un $r < 1$ are loc dacă şi numai dacă $f(U) = g(U)$ (sau $f(z) = g(\lambda z)$, $|\lambda| = 1$).

1.7 Funcţii a căror derivată are parte reală pozitivă

Teorema 1.7.1 (criteriul de univalenţă Noshiro, Warschawschi, Wolff) [26] *Dacă funcţia f este olomorfă în domeniul convex $D \subset \mathbb{C}$ şi dacă există un număr $\gamma \in \mathbb{R}$ astfel încât*

$$\operatorname{Re}[e^{i\gamma} f'(z)] > 0, \quad z \in D$$

atunci funcţia este univalentă în D.

Definiţia 1.7.1 [26] Vom nota cu R clasa funcţiilor normate uzual a căror derivată este pozitivă în discul unitate, adică

$$R = \{f \in A;\ \operatorname{Re} f'(z) > 0,\ z \in U\}.$$

Teorema 1.7.2 (teorema de deformare pentru clasa R) [26] *Dacă funcţia*

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in U,$$

aparţine clasei R, atunci au loc următoarele delimitări exacte

$$|a_n| \leq \frac{2}{n}$$

$$\frac{1-r}{1+r} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{1-r}, \quad |z| = r$$

$$-r + 2\log(1+r) \leq |f(z)| \leq -r - 2\log(1-r), \quad |z| = r.$$

Funcţia extremală este de forma

$$f(z) = -z - \frac{2}{\lambda}\log(1 - \lambda z), \quad |\lambda| = 1.$$

1.8 Subordonări diferenţiale

Inegalităţile diferenţiale pentru funcţii reale au fost extinse la funcţii complexe, care au dat naştere unei noi teorii, teoria subordonărilor diferenţiale. S. S. Miller şi P. T. Mocanu au iniţiat această teorie în lucrările [22], [19].

Metoda subordonării diferenţiale (sau metoda funcţiilor admisibile), o expunere detaliată a ei poate fi găsită în [26] , [19] şi în [22].

Definiţia 1.8.1 [26] 1. Fie $\psi : \mathbb{C}^3 \times U \to \mathbb{C}$ şi fie funcţia h univalentă în U. Dacă funcţia $p \in H[a, n]$ verifică subordonarea diferenţială

$$\psi(p(z), zp'(z), z^2 p''(z); z) \prec h(z), \quad z \in U \tag{1.8.1}$$

atunci funcţia p se numeşte (a, n) soluţia subordonării diferenţiale (1.8.1) sau pe scurt, soluţie a subordonării diferenţiale (1.8.1).

2. Subordonarea (1.8.1) se numeşte subordonare diferenţială de ordinul doi, iar funcţia q univalentă în U, se numeşte (a, n) dominantă a soluţiilor subordonării diferenţiale (1.8.1), sau mai simplu, dominantă a subordonării diferenţiale (1.8.1), dacă $p(z) \prec q(z)$ oricare ar fi funcţia p care satisface (1.8.1).

3. O dominantă $\widetilde{q}$ astfel încât $\widetilde{q}(z) \prec q(z)$ oricare ar fi dominanta q pentru (1.8.1) se numeşte cea mai bună (a, n) dominantă, sau pe scurt cea mai bună dominantă a subordonării diferenţiale (1.8.1).

Lema 1.8.1 (lema lui I. S. Jack, S. S. Miller, P. T. Mocanu) [26] *Fie* $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ *cu* $0 < r_0 < 1$ *şi fie* $f(z) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \ldots$ *o funcţie continuă în* $\overline{U}(0; r_0)$ *şi analitică în* $U(0; r_0) \cup U\{z_0\}$ *cu* $f(z) \not\equiv 0$ *şi* $n \geq 1$. *Dacă*

$$|f(z_0)| = \max\{|f(z)| : \ z \in \overline{U}(0; r_0)\}$$

atunci există un număr real m, $m \geq n$, *astfel încât*

(i) $\dfrac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)} = m$

şi

(ii) $\mathrm{Re}\, \dfrac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)} + 1 \geq m.$

Definiţia 1.8.2 [26] Vom nota cu Q mulţimea funcţiilor q care sunt olomorfe şi injective pe $\overline{U} \setminus E(q)$, unde

$$E(q) = \left\{ \zeta \in \partial U : \ \lim_{z \to \zeta} q(z) = \infty \right\}$$

şi în plus $q'(\zeta) \neq 0$ pentru $\zeta \in \partial U \setminus E(q)$.

Mulţimea $E(q)$ se numeşte mulţime de excepţie.

Funcţiile $q_1(z) = z$ şi $q_2(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$ sunt exemple pentru aceste două cazuri.

În demonstrarea teoremei fundamentale pe care se bazează metoda subordonărilor diferenţiale , pe lângă Lema 1.8.1 mai sunt necesare şi următoarele două leme.

Lema 1.8.2 (S. S. Miller, P. T. Mocanu) [21], [26] *Fie* $q \in Q$ *cu* $q(0) = a$ *şi fie funcţia* $p \in H[a, n]$, $p(z) \not\equiv a$ *şi* $n \geq 1$. *Dacă* $p(z) \not\prec q(z)$ *atunci există punctele* $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ *şi* $\zeta_0 \in \partial U \setminus E(q)$ *şi un număr* $m \geq n \geq 1$ *astfel încât* $p(U(0; r_0)) \subset q(U)$ *şi*

(i) $p(z_0) = q(\zeta_0)$

(ii) $z_0 p'(z_0) = m \zeta_0 q'(\zeta_0)$

(iii) $\mathrm{Re}\, \dfrac{z_0 p''(z_0)}{p'(z_0)} + 1 \geq m \mathrm{Re}\, \dfrac{\zeta_0 q''(\zeta_0)}{q'(\zeta_0)} + 1.$

Definiţia 1.8.3 [26], [24] Fie $\Omega \subset \mathbb{C}$, fie funcţia $q \in Q$ şi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Vom nota cu $\Psi_n[\Omega, q]$ clasa funcţiilor $\psi : \mathbb{C}^3 \times U \to \mathbb{C}$ care satisfac condiţia

$$\text{(A)} \qquad \psi(r, s, t; z) \notin \Omega$$

atunci când

$$r = q(\zeta), \quad s = m\zeta q'(\zeta), \quad \mathrm{Re}\left[\frac{t}{s} + 1\right] \geq m\mathrm{Re}\left[\frac{\zeta q''(\zeta)}{q'(\zeta)} + 1\right],$$

unde $z \in U$, $\zeta \in \partial U \setminus E(q)$ şi $m \geq n$.

Mulţimea $\Psi_n[\Omega, q]$ se numeşte clasa funcţiilor admisibile, iar condiţia (A) se numeşte condiţie de admisibilitate.

Teorema 1.8.1 [26], [19], [24] *Fie funcţia univalentă $h \in H_u(U)$ şi fie $\psi : \mathbb{C}^3 \times U \to \mathbb{C}$. Presupunem că ecuaţia diferenţială*

$$\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) = h(z) \tag{1.8.2}$$

are o soluţie q, cu $q(0) = a$, şi că una din următoarele condiţii este verificată:

(i) $q \in Q$ şi $\psi \in \Psi[h, q]$;

(ii) q este univalentă în U şi $\psi \in \Psi[h, q_\rho]$ pentru un anumit $\rho \in (0, 1)$;

(iii) q este univalentă în U şi există un $\rho_0 \in (0, 1)$ astfel încât $\psi \in \Psi[h_\rho, q_\rho]$ pentru orice $\rho \in (\rho_0, 1)$.

Dacă funcţia $p \in H[a, 1]$ iar funcţia

$$\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) \in H(U)$$

atunci

$$\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) \prec h(z) \Rightarrow p(z) \prec q(z)$$

şi funcţia q este cea mai bună dominantă a subordonării.

Teorema 1.8.2 [26], [19], [24] *Fie funcţia univalentă $h \in H_u(U)$ şi fie $\psi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$. Presupunem că ecuaţia diferenţială*

$$\psi(q(z), nzq'(z), n(n-1)zq'(z) + n^2z^2q''(z)) = h(z) \tag{1.8.3}$$

are o soluţie q, cu $q(0) = a$ şi că una din următoarele condiţii este verificată:

(i) $q \in Q$ şi $\psi \in \Psi_n[h, q]$;

(ii) q este univalentă în U şi $\Psi_n[h, q_\rho]$ pentru un anumit $\rho \in (0, 1)$;

(iii) q este univalentă în U şi există un $\rho_0 \in (0, 1)$ astfel încât $\psi \in \Psi_n[h_\rho, q_\rho]$ pentru orice $\rho \in (\rho_0, 1)$.

Dacă funcţia $p \in H[a, n]$ iar funcţia $\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) \in H(U)$ atunci

$$\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) \prec h(z) \Rightarrow p(z) \prec q(z)$$

şi funcţia q este cea mai bună (a, n) dominantă a subordonării.

1.9 Tare subordonări diferenţiale. Definiţii şi proprietăţi

$H_u(U, \overline{U}) = \{f \in H^*[a, n; \xi] : f(z, \xi)$ univalentă în U pentru $\xi \in \overline{U}\}$ este clasa funcţiilor univalente în U pentru toţi $\xi \in \overline{U}$ (vezi (1.1.6)).

Definiţia 1.9.1 [37] Fie $H(z, \xi)$ analitică în $U \times \overline{U}$ şi $f(z, \xi)$ analitică în $U \times \overline{U}$ pentru toţi $\xi \in \overline{U}$ şi $f(z, \xi) \in H_u(U)$.

Funcţia $H(z, \xi)$ spunem că este tare subordonată lui $f(z, \xi)$ şi notăm $H(z, \xi) \prec\prec f(z, \xi)$, dacă pentru fiecare $\xi \in \overline{U}$, $H(z, \xi)$ este subordonată lui $f(z, \xi)$, în funcţie de z.

1.10 Superordonări diferenţiale. Generalităţi şi proprietăţi

Definiţia 1.10.1 [6] Fie $\varphi : \mathbb{C}^3 \times U \to \mathbb{C}$ şi fie h analitică în U. Dacă p şi $\varphi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z)$ este univalentă în U şi satisface superordonarea diferenţială de ordinul doi

$$h(z) \prec \varphi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z), \tag{1.10.1}$$

atunci p se numeşte soluţia superordonării diferenţiale. Funcţia analitică q se numeşte subordonată a soluţiilor superordonării diferenţiale, sau mai simplu subordonată dacă $q \prec p$ pentru toţi p care satisfac (1.10.1). O subordonată univalentă $\widetilde{q}$ care satisface $q \prec \widetilde{q}$ pentru toate subordonatele q din (1.10.1) se spune că este cea mai bună subordonată. Cea mai bună subordonată este unică, abstracţie făcând de o rotaţie în U.

Teorema 1.10.1 [6] *Fie $\Omega \subset \mathbb{C}$, fie $q \in H[a,n]$ şi fie $\varphi \in \phi_n[\Omega, q]$. Dacă $p \in Q(a)$ şi $\varphi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z)$ este univalentă în U, atunci*

$$\Omega \subset \{\varphi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) : \ z \in U\} \tag{1.10.2}$$

implică $q(z) \prec p(z)$.

Teorema 1.10.2 [6] *Fie $q \in H[a,n]$, fie h analitică şi $\varphi \in \phi_n[h, q]$. Dacă $p \in Q(a)$ şi $\varphi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z)$ este univalentă în U, atunci*

$$h(z) \prec \varphi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) \tag{1.10.3}$$

implică $q(z) \prec p(z)$.

Teorema 1.10.3 [6] *Fie h analitică în U şi $\varphi : \mathbb{C}^3 \times U \to \mathbb{C}$. Presupunem că ecuaţia diferenţială*

$$\varphi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) = h(z) \tag{1.10.4}$$

are soluţia $q \in Q(a)$. Dacă $\varphi \in \phi[h, q]$, $p \in Q(a)$ şi $\varphi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z)$ este univalentă în U, atunci

$$h(z) \prec \varphi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) \tag{1.10.5}$$

implică $q(z) \prec p(z)$ şi q este cea mai bună subordonată.

1.11 Tare superordonări. Definiţii şi proprietăţi

Definiţia 1.11.1 [41] (vezi Definiţia 1.9.1) Fie $H(z,\xi)$ o funcţie analitică în $U \times \overline{U}$ şi fie $f(z)$ o funcţie analitică şi univalentă în U. Funcţia $f(z)$ este tare subordonată lui $H(z,\xi)$, sau $H(z,\xi)$ se spune că este tare superordonată lui $f(z)$, scriem $f(z) \prec\prec H(z,\xi)$, dacă $f(z)$ este subordonată lui $H(z,\xi)$ în funcţie de z, pentru toţi $\xi \in \overline{U}$. Dacă $H(z,\xi)$ este o funcţie univalentă în U, pentru toţi $\xi \in \overline{U}$, atunci $f(z) \prec\prec H(z,\xi)$ dacă şi numai dacă $f(0) = H(0,\xi)$ pentru toţi $\xi \in \overline{U}$ şi $f(U) \subset H(U \times \overline{U})$.

Definiţia 1.11.2 [41] Fie $\varphi : \mathbb{C}^3 \times U \times \overline{U} \to \mathbb{C}$ şi h o funcţie analitică în U. Dacă p şi $\varphi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z, \xi)$ sunt funcţii univalentă în U pentru toţi $\xi \in \overline{U}$ şi satisfac tare superordonarea diferenţială (de ordinul doi)

$$h(z) \prec\prec \varphi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z, \xi) \tag{1.11.1}$$

atunci funcţia p se numeşte soluţie a tare superordonării diferenţiale. Funcţia analitică q se numeşte subordonantă a soluţiei a tare superordonării diferenţiale, sau mai simplu subordonantă dacă $q \prec p$ pentru toţi p care satisfac (1.11.1). Subordonanta univalentă $\widetilde{q}$ care satisface $q \prec \widetilde{q}$ pentru toate subordonantele q din (1.11.1) se spune că este cea mai bună subordonantă. Această cea mai bună subordonantă este unică abstracţie făcând de o rotaţie în U.

Capitolul 2

Subordonări diferenţiale

2.1 O clasă de funcţii univalente definită cu ajutorul operatorului diferenţial Sălăgean

În acest paragraf utilizăm operatorul S^n, introducem o clasă de funcţii olomorfe $S_n(\beta)$ şi obţinem câteva subordonări diferenţiale.

Lemele prezentate folosesc la demonstrarea rezultatelor.

Lema 2.1.1 [10] *Fie h o funcţie convexă, cu $h(0) = a$ şi fie $\gamma \in \mathbb{C}^*$ un număr complex cu $\operatorname{Re}\gamma \geq 0$. Dacă funcţia $p \in H[a, n]$ şi*

$$p(z) + \frac{1}{\gamma} zp'(z) \prec h(z) \quad (z \in U)$$

atunci

$$p(z) \prec q(z) \prec h(z) \quad (z \in U)$$

unde

$$q(z) = \frac{\gamma}{nz^{\gamma/n}} \int_0^z h(t) t^{\frac{\gamma}{n}-1} dt \quad (z \in U).$$

Funcţia q este convexă în U şi este cea mai bună dominantă.

Lema 2.1.2 [30] *Fie $\operatorname{Re} r > 0$ şi fie*

$$w = \frac{k^2 + |r|^2 - |k^2 - r^2|}{4k\operatorname{Re} r}.$$

Fie h o funcţie analitică în U cu $h(0) = 1$ şi presupunem că

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zh''(z)}{h'(z)} + 1\right) > -w.$$

Dacă

$$p(z) = 1 + p_n z^n + p_{n+1} z^{n+1} + \ldots$$

este analitică în U şi

$$p(z) + \frac{1}{r} zp'(z) \prec h(z),$$

atunci $p(z) \prec q(z)$, unde q este soluţia ecuaţiei diferenţiale

$$q(z) + \frac{n}{r} zq'(z) = h(z), \quad q(0) = 1,$$

dată de

$$q(z) = \frac{r}{nz^{r/n}} \int_0^z t^{\frac{r}{n}-1} h(t)dt.$$

De asemenea funcţia q este cea mai bună dominantă.

Definiţia 2.1.1 [49] Pentru $f \in A$, $n \in \mathbb{N} = 0, 1, 2, ...$, operatorul $S^n f$ este definit astfel $S^n : A \to A$

$$\begin{aligned}
&S^0 f(z) = f(z)\\
&S^1 f(z) = zf'(z)\\
&\ldots\\
&S^{n+1} f(z) = z[S^n f(z)]', \ z \in U.
\end{aligned}$$

Observaţia 2.1.1 [30] Dacă $f \in A$,

$$f(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty} a_j z^j$$

atunci

$$S^n f(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty} j^n a_j z^j, \quad z \in U.$$

Definiţia 2.1.2 [30] Dacă $0 \leq \beta < 1$ şi $n \in \mathbb{N}$, fie $S_n(\beta)$ clasa funcţiilor $f \in A$, care satisfac inegalitatea:

$$\mathrm{Re}\,(S^n f)'(z) > \beta, \quad z \in U.$$

Teorema 2.1.1 [57] *Clasa de funcţii univalente $S_n(\beta)$ este convexă.*

Teorema 2.1.2 [57] *Fie q o funcţie convexă din U, $q(0) = 1$ şi fie*

$$h(z) = q(z) + \frac{1}{c+2} zq'(z), \quad z \in U,$$

unde c este un număr complex, cu $\operatorname{Re} c > -2$.

Dacă $f \in S_n(\beta)$ şi $F = I_c(f)$, este dat de operatorul integral

$$F(z) = I_c(f)(z) = \frac{c+2}{z^{c+1}} \int_0^z t^c f(t)dt, \quad \operatorname{Re} c > -2 \tag{2.1.1}$$

atunci

$$[S^n f(z)]' \prec h(z), \quad z \in U \tag{2.1.2}$$

implică

$$[S^n F(z)]' \prec q(z), \quad z \in U,$$

şi acest rezultat este exact.

Teorema 2.1.3 [57] *Fie $\operatorname{Re} c > -2$ şi*

$$w = \frac{1 + |c+2|^2 - |c^2 + 4c + 3|}{4\operatorname{Re}(c+2)}. \tag{2.1.3}$$

Fie h o funcţie analitică în U cu $h(0) = 1$ şi presupunem că

$$\operatorname{Re} \frac{zh''(z)}{h'(z)} + 1 > -w.$$

Dacă $f \in S_n(\beta)$ şi $F = I_c(f)$, unde F este definit de (2.1.1), atunci

$$[S^n f(z)]' \prec h(z), \quad z \in U \tag{2.1.4}$$

implică

$$[S^n F(z)]' \prec q(z), \quad z \in U,$$

unde q este soluţia ecuaţiei diferenţiale

$$q(z) + \frac{1}{c+2} zq'(z) = h(z), \quad h(0) = 1,$$

dat de

$$q(z) = \frac{c+2}{z^{c+2}} \int_0^z t^{c+1} h(t)dt, \quad z \in U.$$

De asemenea q este cea mai bună dominantă.

2.2 Subordonări diferenţiale obţinute utilizând operatorul liniar Dziok-Srivastava

Folosim proprietăţile operatorului liniar Dziok-Srivastava obţinem subordonări diferenţiale cu ajutorul funcţiilor din clasa A.

Pentru două funcţii din clasa A

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k \quad \text{şi} \quad g(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} b_k z^k,$$

convoluţia sau produsul Hadamard al lui f şi g este definit astfel

$$(f * g)(z) := z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k b_k z^k.$$

Pentru $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, 3, \ldots, l$ şi $\beta_j \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$, $j = 1, 2, \ldots, m$, funcţia hipergeometrică generalizată este definită astfel

$$_lF_m(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \ldots (\alpha_l)_n}{(\beta_1)_n \ldots (\beta_m)_n} \cdot \frac{z^n}{n!}$$

$$(l \leq m + 1,\ m \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\})$$

unde $(a)_n$ este simbolul Pochhammer definit astfel

$$(a)_n : \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ a(a+1)\ldots(a+n-1), & n \in \mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\} \end{cases}$$

Corespunzător funcţiei

$$h(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m; z) = z \cdot {}_lF_m(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m; z).$$

Operatorul Dziok-Srivastava ([7], [8], [44]) este

$$H_m^l(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m; z)$$

$$= h(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m; z) * f(z)$$

$$= z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_{n-1}(\alpha_2)_{n-1} \ldots (\alpha_l)_{n-1}}{(\beta_1)_{n-1}(\beta_2)_{n-2} \ldots (\beta_l)_{n-1}} \cdot a_n \cdot \frac{z^n}{(n-1)!}.$$

Pentru simplitate scriem

$$\alpha_1' = (\alpha_2, \ldots, \alpha_l; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$$

şi notăm

$$H_m^l[\alpha_1, \alpha_1']f(z) = H_m^l(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m; z).$$

Se ştie din [19] că

$$\alpha_1 H_m^l[\alpha_1 + 1, \alpha_1']f(z) = z\{H_m^l[\alpha_1, \alpha_1']f(z)\}' + (\alpha_1 - 1)H_m^l[\alpha_1, \alpha_1']f(z). \tag{2.2.1}$$

Teorema 2.2.1 [58] *Fie $l, m \in \mathbb{N}$, $l \leq m + 1$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, \ldots, l$ şi $\beta_j \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$, $j = 1, 2, 3, \ldots, m$, $f \in A$ şi operatorul liniar Dziok-Srivastava $H_m^l[\alpha_1, \alpha_1']f(z)$ este dat de (2.2.1).*

Dacă este verificată subordonarea diferenţială

$$\{H_m^l[\alpha_1 + 1, \alpha_1']f(z)\}' \prec h(z), \quad z \in U, \ \operatorname{Re} \alpha_1 > 0, \tag{2.2.2}$$

unde h este o funcţie convexă, atunci

$$[H_m^l[\alpha_1, \alpha_1']f(z)]' \prec q(z),$$

unde

$$q(z) = \frac{\alpha_1}{z^{\alpha_1}} \int_0^z h(t) t^{\alpha_1 - 1} dt,$$

q este o funcţie convexă şi cea mai bună dominantă.

Teorema 2.2.2 [58] *Fie $l, m \in \mathbb{N}$, $l \leq m + 1$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, \ldots, l$, $\beta_j \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$, $j = 1, 2, \ldots, m$ fie $f \in A$ şi $H_m^l[\alpha_1, \alpha_1']f(z)$ operatorul liniar Dziok-Srivastava dat de (2.2.1).*

Dacă notăm

$$H_m^l[\alpha_1, \alpha_1']f(z) = q(z),$$

atunci

$$q'(z) \prec h(z)$$

şi următoarea subordonare are loc

$$(2.2.3) \qquad \{H_m^l[\alpha_1, \alpha_1']f(z)\}' \prec h(z), \quad z \in U, \ \operatorname{Re} \alpha_1 > 0,$$

de unde rezultă

$$\frac{q(z)}{z} \prec \frac{1}{z}\int_0^z h(t)dt,$$

adică

$$\frac{H_m^l[\alpha_1, \alpha_1']f(z)}{z} \prec q(z) = \frac{1}{z}\int_0^z h(t)dt.$$

2.3 Studiul unei clase de funcţii univalente definite cu ajutorul operatorului diferenţial Ruscheweyh

Cu ajutorul operatorului D^n, în acest paragraf introducem o clasă de funcţii olomorfe $M_n(h)$, h fiind o funcţie convexă şi obţinem câteva subordonări. De asemenea arătăm că pentru $h(z) \equiv \alpha$, $0 \leq \alpha < 1$ şi $z \in U$, mulţimea $M_n(\alpha)$ este convexă şi obţinem subordonări diferenţiale noi folosind operatori integrali.

Lema 2.3.1 [1, Lema 1.4] *Fie q o funcţie convexă în U cu $q(0) = 1$ şi fie* $\operatorname{Re} c > 0$. *Fie*

$$h(z) = q(z) + \frac{n}{c}zq'(z).$$

Dacă $p(z) = 1 + p_n z^n + p_{n_1} z^{n+1} + \dots$ este analitică în U şi

$$p(z) + \frac{1}{c}zp'(z) \prec h(z),$$

atunci

$$p(z) \prec q(z)$$

şi q este cea mai bună dominantă.

Definiţia 2.3.1 (St. Ruscheweyh [48]) Pentru $f \in A$, $n \in \mathbb{N}$, operatorul D^n este definit astfel $D^n : A \to A$

$$D^0 f(z) = f(z)$$
$$(n+1)D^{n+1} f(z) = z[D^n f(z)]' + nD^n f(z), \; z \in U,$$

acesta fiind operatorul diferenţial Ruscheweyh.

Observaţia 2.3.1 [29] Dacă $f \in A$, $f(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty} a_j z^j$, atunci

$$D^n f(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty} C_{n+j-1}^{n} a_j z^j, \quad z \in U.$$

Definiţia 2.3.2 Pentru $h \in K$ şi $n \in \mathbb{N}$, considerăm $M_n(h)$ clasa funcţiilor $f \in A$ care satisfac inegalitatea:

$$[D^n f(z)]' \prec h(z), \quad z \in U.$$

Dacă $h(z) = h_\alpha(z) = \dfrac{1 + (2\alpha - 1)z}{1 + z}$, atunci notăm cu $M_n(\alpha)$ clasa $M_n(h_\alpha)$.

Teorema 2.3.1 [59] *Mulţimea $M_n(\alpha)$ este convexă, $0 \le \alpha < 1$.*

Teorema 2.3.2 [59] *Fie q o funcţie convexă în U, cu $q(0) = 1$ şi fie*

$$h(z) = q(z) + \frac{1}{c+2} z q'(z), \quad z \in U$$

unde c este un număr complex, cu $\operatorname{Re} c > -2$.

Dacă $f \in M_n(h)$ şi $F = I_c(f)$, unde

$$F(z) = I_c(f)(z) = \frac{c+2}{z^{c+1}} \int_0^z t^c f(t)dt, \quad \operatorname{Re} c > -2, \tag{2.3.1}$$

atunci

$$[D^n f(z)]' \prec h(z), \quad z \in U, \tag{2.3.2}$$

implică

$$[D^n F(z)]' \prec q(z), \quad z \in U,$$

şi acest rezultat este exact.

Teorema 2.3.3 [59] *Fie c un număr complex cu $\operatorname{Re} c > -2$ şi fie*

$$w = \frac{1 + |c+2|^2 - |c^2 + 4c + 3|}{4\operatorname{Re}(c+2)}. \tag{2.3.3}$$

Fie h o funcţie analitică în U, cu $h(0) = 1$ şi presupunem

$$\operatorname{Re} \frac{zh''(z)}{h'(z)} + 1 > -w.$$

Dacă $f \in M_n(h)$ şi $F = I_c(f)$, unde funcţia F este definită de (2.3.1), atunci

$$[D^n f(z)]' \prec h(z), \quad z \in U, \tag{2.3.4}$$

implică

$$[D^n F(z)]' \prec q(z), \quad z \in U,$$

unde q este soluţia ecuaţiei diferenţiale

$$q(z) + \frac{1}{c+2} zq'(z) = h(z), \quad h(0) = 1,$$

dat de

$$q(z) = \frac{c+2}{z^{c+2}} \int_0^z t^{c+1} h(t) dt, \quad z \in U.$$

În plus q este cea mai bună dominantă.

Capitolul 3

Tare subordonări

3.1 Tare subordonări diferenţiale obţinute cu ajutorul operatorului diferenţial Sălăgean

În acest paragraf, utilizăm operatorul diferenţial Sălăgean, introducem o clasă de funcţii olomorfe notate $S_n^m(\alpha)$ şi obţinem câteva tare subordonări diferenţiale .

Lema 3.1.1 *[18, page 71] Fie $h(z,\zeta)$ o funcţie convexă cu $h(0,\zeta) = a$ pentru fiecare $\zeta \in \overline{U}$ şi fie $\gamma \in \mathbb{C}^*$ un număr complex cu $\operatorname{Re}\gamma \geq 0$. Dacă $p \in H^*[a,n,\zeta]$ şi*

$$p(z,\zeta) + \frac{1}{\gamma} zp'(z,\zeta) \prec\prec h(z,\zeta) \tag{3.1.1}$$

atunci $p(z,\zeta) \prec\prec q(z,\zeta) \prec\prec h(z,\zeta)$ unde

$$g(z,\zeta) = \frac{\gamma}{nz^{\gamma/n}} \int_0^z h(t,\zeta) t^{(\gamma/n)-1} dt. \tag{3.1.2}$$

Funcţia $g(z,\zeta)$ este convexă şi cea mai bună dominantă.

Lema 3.1.2 [17] *Fie $q(z,\xi)$ o funcţie convexă în U, pentru toţi $\xi \in \overline{U}$ şi fie*

$$h(z,\xi) = q(z,\xi) + n\alpha q'(z,\xi), \tag{3.1.3}$$

unde $\alpha > 0$ şi n este un întreg pozitiv. Dacă

$$p(z,\xi) = q(0,\xi) + p_n(\xi)z^n + \dots$$

este olomorfă în U, pentru toţi $\xi \in \overline{U}$ şi

$$p(z,\xi) + \alpha z p'(z,\xi) \prec\prec h(z,\xi) \tag{3.1.4}$$

atunci

$$p(z,\xi) \prec\prec q(z,\xi) \tag{3.1.5}$$

şi acest rezultat este exact.

Definiţia 3.1.1 [49] Pentru $f \in A^*_\xi$, $n \in \mathbb{N}^* \cup \{0\}$, operatorul $S^n f$ este definit astfel:

$$\begin{aligned}
&S^n : A^*_\xi \to A^*_\xi \\
&S^0 f(z,\xi) = f(z,\xi) \\
&\dots \\
&S^{n+1} f(z,\xi) = z[S^n f(z,\xi)]',\ z \in U,\ \xi \in \overline{U}.
\end{aligned}$$

Definiţia 3.1.2 [60] Dacă $\alpha < 1$ şi $m, n \in \mathbb{N}$, fie $S^n_m(\alpha)$ clasa funcţiilor $f \in A^*_{n\xi}$ care satisfac inegalitatea

$$\mathrm{Re}\,[S^m f(z,\xi)]' > \alpha. \tag{3.1.6}$$

Teorema 3.1.1 [60] *Dacă $\alpha < 1$ şi $m, n \in \mathbb{N}$, atunci*

$$S^{m+1}_n(\alpha) \subset S^m_n(\delta) \tag{3.1.7}$$

unde

$$\delta = \delta(\alpha, n, m) = (2\alpha - 1) + 1 - (2\alpha - 1)\frac{1}{n}\beta\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\beta(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt. \tag{3.1.8}$$

Teorema 3.1.2 [60] *Fie $q(z,\xi)$ o funcţie convexă cu $q(0,\xi) = 1$ şi fie $h(z,\xi)$ o funcţie astfel încât*

$$h(z,\xi) = q(z,\xi) + z q'(z,\xi). \tag{3.1.9}$$

Dacă $f \in A^*_{n\xi}$ *şi aceasta verifică subordonarea diferenţială tare*

$$[S^{m+1} f(z,\xi)]' \prec\prec h(z,\xi) \tag{3.1.10}$$

atunci

$$[S^m f(z,\xi)]' \prec\prec q(z,\xi). \tag{3.1.11}$$

Teorema 3.1.3 [60] *fie* $h \in H^*[a,n,\xi]$, *cu* $h(0,\xi) = 1$, $h'(0,\xi) \neq 0$ *care verifică inegalitatea*

$$\operatorname{Re}\left[1 + \frac{zh''(z,\xi)}{h'(z,\xi)}\right] > -\frac{1}{2(m+1)}, \quad m \geq 0. \tag{3.1.12}$$

Dacă $f \in A^*_{n\xi}$ *şi verifică tare subordonarea diferenţială*

$$[S^{m+1} f(z,\xi)]' \prec\prec h(z,\xi), \quad z \in U \tag{3.1.13}$$

atunci

$$[S^m f(z,\xi)]' \prec\prec q(z,\xi),$$

unde

$$q(z,\xi) = \frac{1}{nz^{\frac{1}{n}}} \int_0^z t^{\frac{1}{n}-1} h(t,\xi) dt.$$

Funcţia q *este convexă şi este cea mai bună dominantă.*

Teorema 3.1.4 [60] *Fie* $q(z,\xi)$ *o funcţie convexă cu* $q(0,\xi) = 1$ *şi*

$$h(z,\xi) = q(z,\xi) + zq'(z,\xi). \tag{3.1.14}$$

Dacă $f \in A^*_{n\xi}$ *şi verifică tare subordonarea diferenţială*

$$[S^m f(z,\xi)]' \prec\prec h(z,\xi), \quad z \in U,\ \xi \in \overline{U} \tag{3.1.15}$$

atunci

$$\frac{S^m f(z,\xi)}{z} \prec\prec q(z,\xi). \tag{3.1.16}$$

Capitolul 4

Tare superordonări

4.1 Cea mai bună subordonantă a unei tare superordonări diferenţiale

Obiectivul acestui paragraf este de a obţine cea mai bună subordonantă a unei tare superordonări diferenţiale.

Lema 4.1.1 [31, Teorema 2] *Fie $q \in H[a,n]$, fie h analitică în U şi $\varphi \in \phi_n[h,q]$. Dacă $p \in Q(a)$ şi $\varphi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z, \xi)$ univalentă în U pentru toţi $\xi \in \overline{U}$, atunci*

$$h(z) \prec\prec \varphi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z, \xi), \quad z \in U, \ \xi \in \overline{U}$$

implică

$$q(z) \prec p(z), \quad z \in U.$$

Teorema 4.1.1 [32] *Fie h şi q univalente în U, cu $q(0) = a$ şi $q_\rho(z) = q(\rho z)$ şi $h_\rho(z) = h(\rho z)$. Fie $\varphi : \mathbb{C}^3 \times U \times \overline{U} \to \mathbb{C}$ care satisface una din următoarele condiţii:*

(i) $\varphi \in \phi_n[h, q_\rho]$, pentru un anumit $\rho \in (0,1)$, sau

(ii) există $\rho_0 \in (0,1)$ astfel că $\varphi \in \phi_n[h_\rho, q_\rho]$, pentru toţi $\rho \in (\rho_0, 1)$.

Dacă $p \in H[a,n]$, $\varphi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z, \xi)$ este univalentă în U pentru toţi $\xi \in \overline{U}$ şi

$$h(z) \prec\prec \varphi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z, \xi), \quad z \in U, \ \xi \in \overline{U}, \tag{4.1.1}$$

atunci

$$q(z) \prec p(z), \quad z \in U.$$

Teorema 4.1.2 [32] *Fie h univalentă în U şi $\varphi : \mathbb{C}^3 \times U \times \overline{U} \to \mathbb{C}$. Presupunând că ecuaţia diferenţială*

$$\varphi(q(z), zq'(z), z^2q''(z); z) = h(z) \tag{4.1.2}$$

are soluţia q cu $q(0) = a$ şi una din următoarele condiţii este satisfăcută:

(i) $q \in Q$ şi $\varphi \in \phi[h, q]$, sau

(i) q este univalentă în U şi $\varphi \in \phi[h, q_\rho]$ pentru un anumit $\rho \in (0, 1)$, sau

(iii) q este univalentă în U şi există $\rho_0 \in (0, 1)$ astfel încât $\varphi \in \phi[h_\rho, q_\rho]$ pentru toţi $\rho \in (\rho_0, 1)$.

Dacă $p \in H[a, 1]$ şi $\varphi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z, \xi)$ este univalentă în U, pentru toţi $\xi \in \overline{U}$ şi dacă p satisface

$$h(z) \prec\prec \varphi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z, \xi), \quad z \in U,\ \xi \in \overline{U}, \tag{4.1.3}$$

atunci

$$q(z) \prec p(z), \quad z \in U,$$

şi q este cea mai bună subordonantă.

Teorema 4.1.3 [32] *Fie h o funcţie univalentă în U şi $\varphi : \mathbb{C}^3 \times U \times \overline{U} \to \mathbb{C}$. Presupunem că ecuaţia diferenţială*

$$\varphi(q(z), nzq'(z), n(n-1)zq'(z) + n^2z^{2n}q''(z)) = h(z) \tag{4.1.4}$$

are soluţia q, cu $q(0) = a$ şi una din următoarele condiţii este satisfăcută:

(i) $q \in Q$ şi $\varphi \in \phi_n[h, q]$,

(ii) q este univalentă în U şi $\varphi \in \phi_n[h, q_\rho]$, pentru un anumit $\rho \in (0, 1)$, sau

(iii) q este univalentă în U şi există $\rho_0 \in (0, 1)$ astfel încât $\varphi \in \phi_n[h_\rho, q_\rho]$ pentru toţi $\rho \in (\rho_0, 1)$.

Dacă $p \in H[a,n]$, $\varphi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z, \xi)$ *este univalentă în* U *pentru toţi* $\xi \in \overline{U}$ *şi* p *satisface*

$$h(z) \prec\prec \varphi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z, \xi), \quad z \in U,\ \xi \in \overline{U}, \tag{4.1.5}$$

atunci

$$q(z) \prec p(z)$$

şi q *este cea mai bună subordonantă.*

4.2 O nouă cea mai bună subordonantă a unei tare superordonări diferenţiale

În acest paragraf se prezintă obţinerea celei mai bune subordonante pentru o anumită tare superordonare diferenţială.

Lema 4.2.1 [34] *Fie* $(q, \cdot, \xi) \in Q$ *cu* $q(0,\xi) = a$ *şi*

$$p(z,\xi) = a + a_n(\xi)z^n + a_{n+1}(\xi)z^{n+1} + \dots$$

analitică în $U \times \overline{U}$ *cu* $p(z,\xi) \not\equiv a$ *şi* $n \geq 1$. *Dacă* $p(\cdot,\xi)$ *nu este subordonată lui* $q(\cdot,\xi)$, *atunci există punctele* $z_0 = r_0e^{i\theta_0} \in U$ *şi* $\zeta_0 \in \partial U \setminus E(q)$ *şi* $m \geq n \geq 1$ *pentru care* $p(U_{r_0} \times \overline{U}_{r_0}) \subset q(U \times \overline{U})$.

(i) $p(z_0,\xi) = q(z_0,\xi)$

(ii) $z_0p'(z_0,\xi) = m\zeta_0q'(\zeta_0,\xi)$ *şi*

(iii) $\operatorname{Re}\dfrac{z_0p''(z_0,\xi)}{p'(z_0,\xi)} + 1 \geq m\left[\operatorname{Re}\dfrac{\zeta_0q''(\zeta_0,\xi)}{q'(\zeta_0,\xi)} + 1\right]$.

Teorema 4.2.1 [33] *Fie* $\Omega_\xi \in \mathbb{C}$, *fie* $q(\cdot,\xi) \in H^*[a,n,\xi]$ *şi fie* $\varphi \in \phi_n[\Omega_\xi, q(\cdot,\xi)]$. *Dacă* $p(\cdot,\xi) \in Q(a)$ *şi* $\varphi(p(z,\xi), zp'(z,\xi), z^2p''(z,\xi); z,\xi)$ *este univalentă în* U *pentru toţi* $\xi \in \overline{U}$, *atunci*

$$\Omega_\xi \subset \{\varphi(p(z,\xi), zp'(z,\xi), z^2p''(z,\xi); z,\xi)\}, \tag{4.2.1}$$

implică

$$q(z,\xi) \prec\prec p(z,\xi), \quad z \in U,\ \xi \in \overline{U}.$$

Considerăm situaţia specială când $h(z,\xi)$ este analitică în $U\times\overline{U}$ şi $h(U\times\overline{U}) = \Omega_\xi \neq \mathbb{C}$. Atunci Teorema 4.2.1 devine

Teorema 4.2.2 [33] *Fie $q(z,\xi) \in H[a,n,\xi]$,fie $h(z,\xi)$ analitică în $U\times\overline{U}$ şi fie $\varphi \in \phi_n[h(z,\xi), q(z,\xi)]$. Dacă $p(z,\xi) \in Q(a)$ şi $\varphi(p(z,\xi), zp'(z,\xi), z^2p''(z,\xi); z,\xi)$ este univalentă în U pentru toţi $\xi \in \overline{U}$, atunci*

$$h(z,\xi) \prec\prec \varphi(p(z,\xi), zp'(z,\xi), z^2p''(z,\xi); z,\xi)$$

implică

$$q(z,\xi) \prec\prec p(z,\xi), \quad z\in U,\ \xi\in\overline{U}.$$

Teorema 4.2.3 [33] *Fie $h(z,\xi)$ şi $q(z,\xi)$ două funcţii univalente în U pentru toţi $\xi \in \overline{U}$, cu $q(0,\xi) = a$, $q_\rho(z,\xi) = q(\rho z,\xi)$ şi $h_\rho(z,\xi) = h(\rho z,\xi)$. Fie $\varphi : \mathbb{C}^3\times U\times\overline{U} \to \mathbb{C}$ care satisface una din condiţiile*

(i) $\varphi \in \phi_n[h(z,\xi), q_\rho(z,\xi)]$, pentru un anumit $\rho\in(0,1)$, sau

(ii) există $\rho_0 \in (0,1)$ astfel încât $\varphi \in \phi_n[h_\rho(z,\xi), q_\rho(z,\xi)]$ pentru toţi $\rho\in(\rho_0,1)$.

Dacă $p(z,\xi) \in H^*[a,n,\xi]$, $\varphi(p(z,\xi), zp'(z,\xi), z^2p''(z,\xi); z,\xi)$ este univalentă în U pentru toţi $\xi\in\overline{U}$ şi

$$h(z,\xi) \prec\prec \varphi(p(z,\xi), zp'(z,\xi), z^2p''(z,\xi); z,\xi), \quad z\in U,\ \xi\in\overline{U}, \tag{4.2.2}$$

atunci

$$q(z,\xi) \prec\prec p(z,\xi), \quad z\in U,\ \xi\in\overline{U}.$$

Teorema 4.2.4 [33] *Fie $h(z,\xi)$ o funcţie univalentă în U pentru toţi $\xi\in\overline{U}$ şi fie $\varphi : \mathbb{C}^3\times U\times\overline{U}\to\mathbb{C}$. Presupunem că această ecuaţie diferenţială*

$$\varphi(q(z,\xi), zq'(z,\xi), z^2q''(z,\xi); z,\xi) = h(z,\xi), \quad z\in U,\ \xi\in\overline{U} \tag{4.2.3}$$

are soluţia $q(z,\xi)$, cu $q(0,\xi) = a$ şi una din următoarele condiţii sunt satisfăcute:

(i) $q(z,\xi)\in Q$ şi $\varphi\in\phi[h(z,\xi), q(z,\xi)]$

(ii) $q(z,\xi)$ este univalentă în U pentru toţi $\xi\in\overline{U}$ şi $\varphi\in\phi[h(z,\xi), q_\rho(z,\xi)]$, pentru un anumit $\rho\in(0,1)$ sau

(iii) $q(z,\xi)$ *univalentă în* U *pentru toţi* $\xi \in \overline{U}$ *şi există* $\rho_0 \in (0,1)$ *astfel încât*

$$\varphi \in \phi[h_\rho(z,\xi)q_\rho(z,\xi)] \text{ pentru toţi } \rho \in (\rho_0, 1).$$

Dacă $p(z,\xi) \in H^*[a,1,\xi]$ *şi* $\varphi(p(z,\xi), zp'(z,\xi), z^2p''(z,\xi); z,\xi)$ *este univalentă în* U *pentru toţi* $\xi \in \overline{U}$ *şi*

$$(4.2.4) \qquad h(z,\xi) \prec\prec \varphi(p(z,\xi), zp'(z,\xi), z^2p''(z,\xi); z,\xi), \quad z \in U,\ \xi \in \overline{U},$$

atunci

$$q(z,\xi) \prec\prec p(z,\xi), \quad z \in U,\ \xi \in \overline{U}$$

şi $q(z,\xi)$ *este cea mai bună subordonantă.*

Teorema 4.2.5 [33] *Fie funcţia* $h(z,\xi)$ *univalentă în* U *şi fie* $\varphi : \mathbb{C}^3 \times U \times \overline{U} \to \mathbb{C}$. *Presupunem că ecuaţia diferenţială*

$$(4.2.5) \qquad \varphi(q(z,\xi), nzq'(z,\xi), n(n-1)zq'(z,\xi) + n^2z^{2n}q''(z,\xi)) = h(z,\xi)$$

are soluţia $q(z,\xi)$, *cu* $q(0,\xi) = a$ *şi una din următoarele condiţii este satisfăcută:*

(i) $q(z,\xi) \in Q$ *şi* $\varphi \in \phi_n[h(z,\xi), q(z,\xi)]$

(ii) $q(z,\xi)$ *este univalentă în* U *pentru toţi* $\xi \in U$ *şi* $\varphi \in \phi_n[h(z,\xi), q_\rho(z,\xi)]$ *pentru un anumit* $\rho \in (0,1)$, *sau*

(iii) $q(z,\xi)$ *univalentă în* U *pentru toţi* $\xi \in \overline{U}$ *şi există* $\rho_0 \in (0,1)$ *astfel încât* $\varphi \in \phi_n[h_\rho(z,\xi), q_\rho(z,\xi)]$ *pentru toţi* $\rho \in (\rho_0, 1)$.

Dacă $p(z,\xi) \in H^*[a,n,\xi]$, $\varphi(p(z,\xi), zp'(z,\xi), z^2p''(z,\xi); z,\xi)$ *este univalentă în* U *pentru toţi* $\xi \in \overline{U}$ *şi* $p(z,\xi)$ *satisface*

$$(4.2.6) \qquad h(z,\xi) \prec\prec \varphi(p(z,\xi), zp'(z,\xi), z^2p''(z,\xi); z,\xi), \quad z \in U,\ \xi \in \overline{U}$$

atunci

$$q(z,\xi) \prec\prec p(z,\xi), \quad z \in U,\ \xi \in \overline{U}$$

şi $q(z,\xi)$ *este cea mai bună subordonantă.*

4.3 Tare superordonări diferenţiale de ordinul întâi

În acest paragraf studiem tare superordonări diferenţiale de ordinul întâi în cazuri mai speciale.

Lema 4.3.1 [20, T. 2.6.h, p. 67],[43], [5] *Dacă* $L_y : A_\xi^* \to A_\xi^*$ *este operatorul integral definit astfel*

$$L_y[f(z), \xi] = F(z, \xi) = \frac{\gamma + 1}{z^\gamma} \int_0^z f(z, \xi) t^{\gamma - 1} dt$$

şi $\operatorname{Re} \gamma \geq 0$, *atunci*

(i) $L_\gamma[S^*] \subset S^*$

(ii) $L_\gamma[K^*] \subset K^*$.

Definiţia 4.3.1 [45, p. 157], [20, p. 4] Funcţia $L : U \times \overline{U} \times [0, \infty) \to \mathbb{C}$ este un lanţ de tare subordonare (sau lanţ Loewner) dacă $L(z, \xi; t)$ este analitică şi univalentă în U pentru $\xi \in \overline{U}$, $t \geq 0$, $L(z, \xi; t)$ este o funcţie continuu diferenţiabilă de t pe $[0, \infty)$ pentru toţi $z \in U$, $\xi \in \overline{U}$ şi $L(z, \xi; s) \prec\prec L(z, \xi, t)$ unde $0 \leq s \leq t$.

Următoarea lemă prezintă condiţia de suficienţă pentru $L(z, \xi; t)$ pentru a fi un lanţ de tare subordonare.

Lema 4.3.2 [45, p. 159], [20, p. 4] *Funcţia*

$$L(z, \xi; t) = a_1(\xi, t) z + a_2(\xi, t) z^2 + \ldots$$

cu $a_1(\xi, t) \neq 0$ *pentru* $\xi \in \overline{U}$, $t \geq 0$ *şi* $\lim\limits_{t \to \infty} |a_1(\xi, t)| = \infty$ *este un lanţ de tare subordonare dacă*

$$\operatorname{Re} z \cdot \frac{\partial L(z, \xi; t)/\partial z}{\partial L(z, \xi; t)/\partial t} > 0, \quad z \in U, \ \xi \in \overline{U}, \ t \geq 0.$$

Lema 4.3.3 [35, Th. 2] *Fie* $h(\cdot, \xi)$ *analitică în* $U \times \overline{U}$, $q(\cdot, \xi) \in H^*[a, n, \xi]$, $\varphi : \mathbb{C}^2 \times U \times \overline{U} \to \mathbb{C}$ *şi presupunem că*

$$\varphi(q(z, \xi), tzq'(z, \xi); \zeta, \xi) \in h(U \times \overline{U}), \tag{4.3.1}$$

pentru $z \in U$, $\zeta \in \partial U$, $\xi \in \overline{U}$ *şi* $0 < t \leq \dfrac{1}{n} \leq 1$. *Dacă* $p(\cdot, \xi) \in Q(a)$ *şi* $\varphi(p(z,\xi), zp(z,\xi); z, \xi)$ *este univalentă în* U, *pentru toţi* $\xi \in \overline{U}$ *atunci*

$$h(z,\xi) \prec\prec \varphi(p(z,\xi), zp'(z,\xi); z, \xi)$$

implică

$$q(z,\xi) \prec\prec p(z,\xi), \quad z \in U,\ \xi \in \overline{U}.$$

În plus dacă $\varphi(p(z,\xi), zp'(z,\xi); z,\xi) = h(z,\xi)$, $\xi \in \overline{U}$ *are o soluţie univalentă* $q(\cdot,\xi) \in Q(a)$, *atunci* $q(\cdot,\xi)$ *este cea mai bună subordonantă.*

Teorema 4.3.1 [36] *Fie* $h_1(z,\xi)$ *convexă în* U, *pentru toţi* $\xi \in \overline{U}$ *cu* $h_1(0,\xi) = a$, $\gamma \neq 0$ *cu* $\operatorname{Re}\gamma > 0$ *şi* $p \in H^*[a,1,\xi] \cap Q$. *Dacă* $p(z,\xi) + \dfrac{zp'(z,\xi)}{\gamma}$ *este univalentă în* U, *pentru toţi* $\xi \in \overline{U}$,

$$h_1(z,\xi) \prec\prec p(z,\xi) + \frac{zp'(z,\xi)}{\gamma} \tag{4.3.2}$$

şi

$$q_1(z,\xi) = \frac{\gamma}{z^\gamma}\int_0^z h_1(t,\xi)t^{\gamma-1}dt, \tag{4.3.3}$$

atunci

$$q_1(z,\xi) \prec\prec p(z,\xi), \quad z \in U,\ \xi \in \overline{U}.$$

Funcţia $q_1(z,\xi)$ *este convexă şi este cea mai bună subordonantă.*

Teorema 4.3.2 [36] *Fie* $q(z,\xi)$ *convexă în* U, *pentru toţi* $\xi \in \overline{U}$ *şi fie* $h(z,\xi)$ *definită astfel*

$$q(z,\xi) + \frac{zq'(z,\xi)}{\gamma} = h(z,\xi), \quad z \in U,\ \xi \in \overline{U} \tag{4.3.4}$$

cu $\operatorname{Re}\gamma > 0$. *Dacă* $p(z,\xi) \in H^*[a,1,\xi] \cap Q$, $p(z,\xi) + \dfrac{zp'(z,\xi)}{\gamma}$ *este univalentă în* U, *pentru toţi* $\xi \in \overline{U}$ *şi aceasta satisface*

$$h(z,\xi) \prec\prec p(z,\xi) + \frac{zp'(z,\xi)}{\gamma}, \quad z \in U,\ \xi \in \overline{U} \tag{4.3.5}$$

atunci

$$q(z,\xi) \prec\prec p(z,\xi), \quad z \in U,\ \xi \in \overline{U},$$

unde

$$q(z,\xi) = \frac{\gamma}{z^{\gamma}} \int_0^z h(t,\xi) t^{\gamma-1} dt, \quad z \in U,\ \xi \in \overline{U}.$$

Funcţia q este cea mai bună subordonantă.

Teorema 4.3.3 [36] *Fie $h(z,\xi)$ stelată în U, pentru toţi $\xi \in \overline{U}$, cu $h(0,\xi) = 0$. Dacă $p(z,\xi) \in H^*[0,1;\xi] \cap Q$ şi $zp'(z,\xi)$ este univalentă în U, pentru toţi $\xi \in \overline{U}$, atunci*

$$h(z,\xi) \prec\prec zp'(z,\xi) \tag{4.3.6}$$

implică

$$q(z,\xi) \prec\prec p(z,\xi), \quad z \in U,\ \xi \in \overline{U},$$

unde

$$q(z,\xi) = \int_0^z h(t,\xi) t^{\gamma-1} dt. \tag{4.3.7}$$

Funcţia q este convexă şi este cea mai bună subordonantă.

Capitolul 5

Ordinul de consistenţă a convoluţiei

5.1 Funcţii analitice cu coeficienţi negativi

În acest paragraf enumerăm câteva rezultate deja cunoscute legate de funcţiile univalente cu coeficienţi negativi.

Notăm

$$\mathcal{N} = \left\{ f \in A : \; f(z) = z - \sum_{j=2}^{\infty} a_j z^j, \; a_j \geq 0, \; j \geq 2 \right\}.$$

Observaţia 5.1.1 [54] (i) Notăm cu T subfamilia lui S conţinând funcţii de forma

$$f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n \geq 0,$$

adică $T = S \cap \mathcal{N}$.

(ii) Notăm cu $T^* = T \cap S^*$ şi T_1^* familiile alcătuite din funcţii care sunt din T (respectiv stelate) şi satisfac

$$|(zf'/f) - 1| \leq 1, \quad z \in U.$$

Teorema 5.1.1 [54] *Pentru* $f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$, $a_n \geq 0$, *următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) $\sum_{n=2}^{\infty} na_n \leq 1$;

(ii) $f \in T$;

(iii) $f \in T^*$;

(iv) $f \in T_1^*$;

(v) $f' \neq 0,\ z \in U$;

(vi) $\mathrm{Re}\, f' > 0,\ z \in U$.

Definim clasele $T_n(\alpha)$, $\alpha < 1$, $n \in \mathbb{N}$, prin

$$T_n(\alpha) = \left\{ f \in \mathcal{N} :\ \mathrm{Re}\, \frac{S^{n+1} f(z)}{S^n f(z)} > \alpha,\ z \in U \right\}.$$

Pentru funcţiile din aceste clase avem următoarea teoremă de caracterizare.

Teorema 5.1.2 [52], [13] *Fie f o funcţie din $\mathcal{N}$,*

$$f(z) = z - \sum_{j=2}^{\infty} a_j z^j.$$

Funcţia $f \in T_n(\alpha)$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha < 1$ dacă şi numai dacă

$$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{j^n (j - \alpha)}{1 - \alpha} \leq 1.$$

În caz particular, $T_0(0) = T^*$ este clasa funcţiilor stelate cu coeficienţi negativi, iar $T_1(0)$ este clasa funcţiilor convexe cu coeficienţi negativi.

Investigăm natura lui $h(z) = f(z) * g(z)$, date de faptul că $f(z)$ şi $g(z)$ sunt membrii clasei $T_n(\alpha)$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha < 1$.

Teorema 5.1.3 [53] *Dacă $f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$, $a_n \geq 0$, $g(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n$, $b_n \geq 0$ sunt elemente ale clasei $T_n(\alpha)$, atunci*

$$h(z) = f(z) * g(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n b_n z^n$$

este un element al clasei $T_n\left(\frac{2 - \alpha^2}{3 - 2\alpha}\right)$. Rezultatul este cel mai bun posibil.

5.2 Ordinul de consistenţă al convoluţiei funcţiilor analitice cu coeficienţi negativi

În acest paragraf vom prezenta câteva rezultate cunoscute legate de determinarea ordinului de consistenţă al funcţiilor univalente din clasa A prezentate în lucrarea [3]. În continuare enumerăm rezultate originale, care prezinta determinarea ordinul de consistenţă al convoluţiei funcţiilor analitice cu coeficienţi negativi, pentru diferite subclase ale acestora, din lucrarea [51].

Definiţia 5.2.1 [49] Dacă $\alpha \in [0, 1)$ şi fie $n \in \mathbb{N}$; definim clasa $\mathcal{S}_n(\alpha)$ al funcţiilor *n-stelate de ordinul* α astfel

$$\mathcal{S}_n(\alpha) = \left\{ f \in A : \operatorname{Re} \frac{S^{n+1} f(z)}{S^n f(z)} > \alpha, \ z \in U \right\}. \tag{5.2.1}$$

Notăm $\mathcal{S}_n$ clasa $\mathcal{S}_n(0)$. Apoi notăm prin $\mathcal{S}_0 = \mathcal{ST}$ clasa funcţiilor stelate şi $\mathcal{S}_1 = \mathcal{CV}$ este clasa funcţiilor convexe.

Definiţia 5.2.2 [3] Dacă $f, g \in A$, atunci definim convoluţia integrală astfel

$$(f \otimes g)(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{a_j b_j}{j} z^j.$$

Definiţia 5.2.3 [3] Considerăm operatorul integral Sălăgean (vezi [3], [2], [49]) $I^s : A \to A$, $s \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$\mathcal{I}^s f(z) = \mathcal{I}^s \left(z + \sum_{j=2}^{\infty} a_j z^j \right) = z + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{a_j}{j^s} z^j. \tag{5.2.2}$$

Definiţia 5.2.4 [3] Fie $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ şi $\mathcal{Z}$ subclase ale lui A. Spunem că tripletul $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ este S-închis în raport cu convoluţia dacă există numărul $S = S(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ astfel încât

$$\begin{aligned} S(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}) &= \min\{s \in \mathbb{R} : \ I^s(f * g) \in \mathcal{Z}, \ \text{pentru orice } f \in \mathcal{X} \text{ şi } g \in \mathcal{Y}\} \\ &= \min\{s \in \mathbb{R} : \ I^s(\mathcal{X} * \mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{Z}\}, \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

unde I^s este operatorul integral Sălăgean. Numărul $S(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ se numeşte ordinul de consistenţă al convoluţiei pentru tripletul $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$.

U. Bednarz şi J. Sokol în lucrarea [3] obţin ordinul de consistenţă al convoluţiei pentru anumite clase de funcţii univalente (funcţii stelate, convexe, uniform-stelate sau uniform-convexe). Ca exemplu , autorii au demonstrat urmatoărea teoremă

Teorema 5.2.1 [3] *Am obţinut următoarele ordine de consistenţă ale convoluţiei:*

(i) $S(S^*, S^*, S^*) = 1$;

(ii) $S(K, K, S^*) = -1$;

(iii) $S(K, S^*, S^*) = 0$;

(iv) $S(S^*, S^*, K) = 2$;

(v) $S(K, K, K) = 0$;

(vi) $S(K, S^*, K) = 1$.

Produsul Hadamard modificat sau $\circledast$-convoluţia a două funcţii f şi g din $\mathcal{N}$ de forma

$$f(z) = z - \sum_{j=2}^{\infty} a_j z^j \text{ and } g(z) = z - \sum_{j=2}^{\infty} b_j z^j, \quad a_j,\ b_j \geq 0, \tag{5.2.4}$$

este funcţia $(f \circledast g)$ definită în (vezi [53])

$$(f \circledast g)(z) = z - \sum_{j=2}^{\infty} a_j b_j z^j.$$

Analog Definiţiei 5.2.4 definim **ordinul de $\circledast$-convoluţie consistentă** al tripletului ($\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$), unde $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ şi $\mathcal{Z}$ sunt submulţimi ale lui $\mathcal{N}$, notăm $S_\circledast$ astfel

$$S_\circledast(\mathcal{X},\, \mathcal{Y},\, \mathcal{Z}) = \min\{s \in \mathbb{R} : \mathcal{I}^s(f \circledast g) \in \mathcal{Z},\ \forall f \in \mathcal{X},\ \forall g \in \mathcal{Y}\}. \tag{5.2.5}$$

În aceast paragraf obţinem rezultate similare ca cele din Teorema 5.2.1 dar considerând clasa $\mathcal{T}_n$, şi pentru $\circledast$-convoluţie.

Considerăm următoarea caracterizare a clasei $\mathcal{T}_n$

Teorema 5.2.2 *Fie* $n \in \mathbf{N}$ *şi fie* $f \in \mathcal{N}$ *o funcţie de forma (**??**); atunci* f *aparţine clasei* $\mathcal{T}_n$ *dacă şi numai dacă*

$$\sum_{j=2}^{\infty} j^{n+1} a_j \leq 1\,.$$

Rezultatul este exact şi funcţiile extremale sunt

$$f_j(z) = z - \frac{1}{j^{n+1}} z^j \ , \ j \in \{2, 3, ...\}. \tag{5.2.6}$$

Teorema 5.2.3 *Dacă* $f \in \mathcal{T}_{n+p}$ *şi* $g \in \mathcal{T}_{n+q}$*, atunci* $\mathcal{I}^s(f \circledast g) \in T_{n+r}$*, unde* p*,* q*,* r*,* $n \in \mathbb{N}$ *şi*

$$s = r - p - q - n - 1. \tag{5.2.7}$$

Rezultatul este exact.

Teorema 5.2.4 *Fie* p*,* q*,* r*,* $n \in \mathbb{N}$ *şi let* s *dat de (5.2.7); atunci ordinul de* $\circledast$*-de consistenţă al convoluţiei este*

$$S_{\circledast}(\mathcal{T}_{n+p}, \mathcal{T}_{n+q}, \mathcal{T}_{n+r}) = s = r - p - q - n - 1. \tag{5.2.8}$$

Corolarul 5.2.1 *Obţinem urmatoarele rezultate pentru ordinul de* $\circledast$*-consistenţa al convoluţiei*

(a) $S_{\circledast}(\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_0, \mathcal{T}_0) = -1,$

(b) $S_{\circledast}(\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1) = 0,$

(c) $S_{\circledast}(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_0, \mathcal{T}_0) = -2,$

(d) $S_{\circledast}(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_0) = -3,$

(e) $S_{\circledast}(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1) = -1,$

(f) $S_{\circledast}(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_1) = -2.$

Notăm astfel $\mathcal{T}_0 = \mathcal{ST} \bigcap \mathcal{N}$ şi $\mathcal{T}_1 = \mathcal{CV} \bigcap \mathcal{N}$ şi este uşor de comparat rezultatele primei teoreme cu cele ale Corolarului 5.2.1.

Bibliografie

[1] H. Al-Amiri and P. T. Mocanu, *On certain subclasses of meromorphic close-to-convex functions*, Bull. Math. Soc. Sc. Math. Romanie, Tome 38 (86), Nr. 1-2, 1994, 1-15.

[2] C. M. Bălăeţi, *An integral operator associated with differential superordinations*, An. Stiint. Univ. "Ovidius", Constanţa Ser. Mat. 17(2009),no.3,37-44.

[3] U. Bednarz, J. Sokol, *On order of convoluion consistence of the analytic functions*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Mathematica, 55, 2010, no.3.

[4] L. De Branges, *A proof of the Bieberbach conjecture*, Acta Math. J., **154**(1985), 137-152.

[5] D. V. Breaz, *Operatori integrali pe spaţii de funcţii univalente*, Ed. Academiei Române, Bucureşti,(2004), 120-148.

[6] T. Bulboacă, *Differential subordinations and superordinations. Recent results*, Casa Cărţii de Ştiinţă, Cluj-Napoca, 2005, pg. 97-147.

[7] J. Dziok, H. M. Srivastava, *Classes of analytic functions associated with the generalized hypergeometric function*, Appl. Math. Comput., **103**(1999), 1-13.

[8] J. Dziok, H. M. Srivastava, *Certain subclasses of analytic functions associated with the generalized hypergeometric function*, Integral Transform. Spec. Funct., **14**(2003), 7-18.

[9] V. P. Gupta and P. K. Jain, *Certain classes of univalent functions with negative coefficients*, Bull. Austral. Math. Soc. 14 (1976), 409-416.

[10] D. J. Hallenbeck and S. Ruscheweyh, *Subordination by convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc., **52**(1975), 191-195.

[11] P. Hamburg, P. Mocanu, N. Negoescu, *Analiză matematică* (*Funcţii complexe*), Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982, pg. 143-151.

[12] A. Holhoş, G. S. Sălăgean, *Integral properties of certain classes of analytic functions with negative coefficients*, Pu.M.A. 15 (2004), no. 2-3, (2005), 171-177. MR 2182004.

[13] M. D. Hur and Ge M. Oh, *On certain class of analytic functions with negative coefficients*, Pusan Kyongnam Math. J., **5**(1989), 69-80.

[14] I. S. Jack, *Functions starlike and convex of order α*, J. London Math.Soc., **3**(1971), 469-474.

[15] G. Kohr, P. T. Mocanu, *Capitole speciale de analiză complexă*, Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 2005, pg. 123-159.

[16] K. Loewner, *Undersuchunger über die Verzerrung bei Konformen Abbidungen des Einheitskreises $|z| < 1$, die durchh Funktionen mit nichtverschwin dender Ableitung geliefert werden*, S. B. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig Berichte, **69**(1917), 89-106.

[17] S. S. Miller, P. T. Mocanu, *On some classes of first-order differential subordinations*, Michigan Math. J., **32**(1985), no. 2, 185-195.

[18] S. S. Miller, P. T. Mocanu, *Differential Subordinations. Theory and Applications*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 225, Marcel Dekker, New York, 2000.

[19] S. S. Miller, P. T. Mocanu, *Differential subordinations and univalent functions*, Michigan Math. J., **28**(1981), 157-171.

[20] S. S. Miller and P. T. Mocanu, *Differential subordinations. Theory and applications*, Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, Inc., New York, 2000.

[21] S. S. Miller, P. T. Mocanu, *The theory and applications of second-order differential subordinations*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Math., 34, **4**(1989), 3-33.

[22] S. S. Miller, P. T. Mocanu, *Second order differential inequalities in the complex plane*, J. Math. Anal. Appl., **65**(1978), 298-305.

[23] S. S. Miller, P. T. Mocanu, *Subordinants of differential superordinations*, Complex Variables, **48(10)**(2003), pg. 815-826.

[24] S. S. Miller, P. T. Mocanu, *Differential subordinations and inequalities in the complex plane*, J. Diff. Eqn., **67**(1987), pg. 199-211.

[25] P. T. Mocanu, *Une propriété de convexité généralisée dans la théorie de la représentation conforme*, Mathematica. (Cluj), **11(34)**(1969), 127-133.

[26] P. T. Mocanu, T. Bulboacă, Gr. St. Sălăgean, *Teoria geometrică a funcţiilor univalente*, Casa Cărţii de Ştiinţă, Cluj-Napoca, 1999.

[27] R. Nevanlinna, *Über die Konforme Abbildung Sterngebieten*, Översikt av Finska Vet. Soc., Förh. (A), No. 6, **63**(1921).

[28] R. Nevanlina, *Über die Schlichten Abbildungen des Einheitkreises*, Översikt av Finska Vet. Soc., Förh. (A), No. 7, **62**(1920), 1-14.

[29] Gh. Oros, G. I. Oros, *A class of holomorphic function II*, Libertas Mathematics, vol. XXIII (2003), 65-68.

[30] Gh. Oros and G. I. Oros, *A class of holomorphic function II*, Libertas Math., **23**(2003), 65-68.

[31] G. I. Oros, *Strong differential superordination*, Acta Universitatis Apulensis, **19**(2009), 101-106.

[32] Gh. Oros, Adela Olimpia Tăut, *Best subordinants of the strong differential superordination*, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, **38(3)**(2009), 293-298.

[33] Gh. Oros, Adela Olimpia Tăut, R. Şendruţiu, *On a new best subordinant of the strong differential superordination*, to appear.

[34] G. I. Oros, *On a new strong differential subordination* (to appear).

[35] Gh. Oros, *Briot-Bouquet strong differential superordination and sandwich theorems* Mathematical Reports, Vol. 12(62), No. 3(2010).

[36] Gh. Oros, R. Şendruţiu, Adela Olimpia Tăut, *First-order strong differential superordinations* (to appear).

[37] Georgia Irina Oros, Gheorghe Oros, *Strong differential subordination*, Turkish Journal of Mathematics, **32**(2008).

[38] Georgia Irina Oros, *Sufficient conditions for univalence obtained by using first order nonlinear strong differential subordinations* (to appear).

[39] Georgia Irina Oros, *Sufficient conditions for univalence obtained by using second order linear strong differential subordinations*, Turkish Journal of Mathematics 34 (2010) , pp.13 - 20, doi:10.3906/mat-0810-6, ISSN 1300-0098, Electronic ISSN 1303-6149.

[40] Georgia Irina Oros, Gheorghe Oros, *Second order nonlinear strong differential subordinations*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, **16**(2009), 171-178.

[41] Georgia Irina Oros, *Strong differential superordination* Acta Universitatis Apulensis, No.19/ 2009 pp.101-106.

[42] Georgia Irina Oros, *On a new strong differential subordination* (to appear).

[43] G. I. Oros, *Utilizarea subordonărilor diferenţiale în studiul unor clase de funcţii univalente*, Casa Cărţii de Stiinţă,Cluj Napoca, (2008).

[44] S. Owa, *On the distortion theorems*, I. Kyungpook Math. J., **18**(1978), 53-59.

[45] Ch. Pommerenke, *Univalent Functions*, Van der Hoeck and Ruprecht, Göttingen, 1975.

[46] M. S. Robertson, *A remark on the odd schlicht functions*, Bull. Amer. Math. Soc., **42**(1936), pg. 366-370.

[47] M. S. Robertson, *Analytic function starlike in one direction*, Amer. J. Math., **58**(1936), 465-472.

[48] S. Ruscheweyh, *New criteria for univalent functions*, Proc. Amer. Math. Soc., **49**(1975), 109-115.

[49] G. S. Sălăgean, *Subclasses of univalent functions*, Complex Analysis, Fifth Romanian Finish Seminar, Part 1 (Bucharest, 1981), 362-372, Lecture Notes in Math., 1013, Springer, Berlin, 1983.

[50] G.S. Sălăgean, *On univalent functions with negative coefficients*, "Babes-Bolyai" Univ., Res. Sem., Prep. 7/1991, 47-54.

[51] G. S. Sălăgean and A.O. Tăut *On the order of convolution consistence of the analytic functions with negative coefficients*, (to appear).

[52] G. S. Sălăgean, *Classes of univalent functions with two fixed points*, Babeş-Bolyai University, Res. Sem., Itin. Sem., Prep. **6**(1984), 181-184.

[53] A. Schild, H. Silverman, *Convolutions of univalent functions with negative coefficients*, Annales Univ. Mariae Curie-Sklodowska, Lublin, Polonia, 1975, 99-106.

[54] H. Silverman, *A survey with open on univalent functions whose coefficients are negative*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 1991, 1099-1120.

[55] H. Silverman, *Univalent functions with negative coefficients*, Proc. Amer. Math. Soc., 51 (1975), 109-116.

[56] H. Silverman, *A survey with open on univalent functions whose coefficients are negative*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 1991, 1099-1120.

[57] Adela Olimpia Tăut, G. I. Oros, R. Şendruţiu, *On a class of univalent functions defined by Sălăgean differential operator*, Banach J. Math. Anal.

[58] Adela Olimpia Tăut, *Differential subordinations obtained using Dziok-Srivastava linear operator*, Acta Universitatis Apulensis, **18**(2009), 79-86.

[59] Adela Olimpia Tăut, *The study of a class of univalent functions defined by Ruscheweyh differential operator*, Journal of Mathematics and Applications, **31**(2009), 107-115.

[60] Adela Olimpia Tăut, *Some strong differential subordinations obtained by Sălăgean differential operator*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Mathematica, Volume LV, Number 3, (2010), 221-228.