UNIVERSITATEA "BABEŞ-BOLYAI" CLUJ-NAPOCA

FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Ioana-Camelia Tişe

# ECUAŢII ÎN SPAŢII DE FUNCŢII MULTIVOCE

Conducător ştiinţific
Prof. Dr. Adrian Petruşel

Cluj-Napoca

2010

# Cuprins

**Introducere** **5**

**1 Preliminarii** **9**

1.1 Funcţionale pe spaţiul părţilor unui spaţiu metric . . . . . . . . . . . . . . . . 9

1.2 Operatori multivoci . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 9

1.3 Derivabilitatea şi integrabilitatea operatorilor multivoci . . . . . . . . . . . . 9

1.4 Operatori Picard şi operatori slab Picard . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 10

**2 Mulţimi semifixe pentru contracţii multivoce** **11**

2.1 Mulţimi semifixe pentru operatori multivoci . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 11

2.2 Mulţimi semifixe pentru $\varphi$-contracţii multivoce . . . . . . . . . . . . . . . . . . 14

**3 Ecuaţii integrale în spaţii de funcţii multivoce** **21**

3.1 Ecuaţii integrale în spaţii de funcţii multivoce . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 22

3.2 Problema lui Cauchy pentru ecuaţii diferenţiale în spaţii de funcţii multivoce 27

3.3 Ecuaţii funcţional-integrale în spaţii de funcţii multivoce . . . . . . . . . . . . 29

**4 Proprietăţi calitative ale soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale în spaţii de funcţii multivoce** **33**

4.1 Proprietăţii obţinute prin leme de tip Gronwall . . . . . . . . . . . . . . . . . . 33

4.2 Dependenţa de date a soluţiei ecuaţiilor diferenţiale în spaţii de funcţii multivoce 38

**Bibliografie** **39**

**Cuvinte cheie:** spaţiu metric, spaţii de funcţii multivoce, operatori multivoci, derivabilitate, integrabilitate, operatori Picard, operatori slab Picard, mulţimi semifixe, $\varphi$ - contracţii multivoce, ecuaţii integrale, ecuaţii funcţional-integrale, ecuaţii diferenţiale.

# Introducere

Tema acestei teze de doctorat este legată de studiul ecuaţiilor în spaţii de funcţii multivoce. Mai precis, după un studiu al ecuaţiilor operatoriale de mulţime în context metric şi prezentarea unor teoreme de existenţă a mulţimilor fixe şi semifixe pentru operatori de mulţime, în cea de-a doua parte a tezei studiem proprietăţi calitative (existenţă, unicitate, dependenţă de date, stabilitate Ulam-Hyers-Rassias), pentru ecuaţii diferenţiale şi ecuaţii integrale în spaţii de funcţii multivoce. Studiul este motivat atât de actualitatea temei (41 articole şi 17 cărţi în ultimii 10 ani) cât şi de importanţa ei: numeroase probleme din matematica aplicată reducându-se la studiul unor astfel de ecuaţii în spaţii de funcţii multivoce.

Lucrarea este structurată pe patru capitole, urmată de lista bibliografică.

În primul capitol, intitulat Preliminarii, sunt prezentate noţiuni şi rezultate de bază necesare în prezentarea celorlalte capitole ale acestei lucrării. Am folosit în realizarea acestui capitol următoarele surse bibliografice: J.-P. Aubin, A. Cellina [4], M. C. Anisiu [1], [2], K. Deimling [23], [24], J.-P. Aubin, H. Frankowska [5], M. Kisielewicz [44], G. Beer [9], S. Hu şi N.S. Papageorgiou [40], J. Dugundji, A. Granas [37], A. Petruşel [66], I. A. Rus [75], [77].

În al doielea paragraf al primului capitol prezentăm concepte şi rezultate de bază din teoria operatorilor multivoci. Noţiunile şi rezultatele prezentate apar în lucrările clasice cum ar fi: J.-P. Aubin, H.Frankovska [5], G. Beer [9], C. Berge [10], C. Castaing, M. Valadier [13], F.S. De Blasi [19], L. Górniewicz [35], L. Górniewicz [36], C. J. Himmelberg [38], S. Hu, N. S. Papageorgiou [40], V. Lakshmikantham, T. Gnana Bhaskar, J. Vasundhara Devi [49], A. Petruşel, G. Petruşel [70], I.A. Rus, A. Petruşel, G. Petruşel [86], etc..

În al treielea paragraf al primului capitol, Derivabilitatea şi integrabilitatea operatorilor multivoci, noţiuni considerate de mulţi autori în lucrările lor: J.-P. Aubin, H.Frankovska [5], H.T. Banks, M.Q. Jacobs [8], F. S. De Blasi [19], G.N. Galanis, T.G. Bhaskar, V. Lakshmikantham and P.K.Palamides [31], V. Lakshmikantham, T. Gnana Bhaskar, J. Vasundhara Devi [49], în diferite moduri în funcţie de aplicaţiile în care intervin acestea. Scopul acestui paragraf este de a prezenta conceptul de derivabilitate şi integrabilitate pentru operatori multivoci. În sensul dat în 1967 de Hukuhara [41], [42] (cel care a dat o definiţie a derivabilităţi pentru operatori multivoci).

În al patrulea paragraf al primului capitol sunt prezentate noţiuni şi rezultate fundamentale din teoria operatorilor Picard şi operatorilor slab Picard.

Capitolul doi, se intitulează Mulţimi semifixe pentru contracţii multivoce. În acest capitol sunt prezentate rezultate privind existenţa, unicitatea mulţimilor semifixe pentru operatori de mulţime ce satisfac unele condiţii de tip contractiv, precum şi unele ipoteze de tip topologic. Rezultatele din acest capitol extind unele rezultate prezentate în lucrările lui A.J. Brandao [12], A. Constantin [16], H. Covitz, S.B. Nadler jr.[17], F.S. De Blasi [19], [20], [21], [22], M. Frigon [27], [28], S. Kakutani [43], V. Lakshmikantham, A.N. Tolstonogov [47], V. Lakshmikantham, T. Gnana Bhaskar, J. Vasundhara Devi [49], A. Muntean [60].

Astfel, în primul paragraf, Mulţimi semifixe pentru operatori multivoci, sunt prezentate câteva din noţiunile esenţiale relativ la mulţimile semifixe pentru operatorii de mulţime, noţiuni introduse de F.S. De Blasi în lucrările [21], [22].

Apoi, în a doua parte a capitolului, în paragraful Mulţimi semifixe pentru $\varphi$- contracţii multivoce, sunt demonstrate mai multe rezultate privind existenţa mulţimilor semifixe în cazul $\varphi$-contracţiilor de mulţime. Rezultate aparţinând autorului din acest capitol sunt Teorema 2.2.2, Teorema 2.2.3, Teorema 2.2.4 şi ele sunt cuprinse în lucrarea I.C. Tişe [96]. În ultima parte este prezentată proprietatea de stabilitate Ulam-Hyers generalizată în Teorema 2.2.1 şi Teorema 2.2.5 ce sunt cuprinse în lucrarea I.C. Tişe [100].

Capitolul trei, se indituleazā Ecuaţii integrale în spaţii de funcţii multivoce, sunt prezentate rezultate de existenţă, unicitate şi dependenţă de date a soluţilor pentru ecuaţii integrale şi ecuaţii diferenţiale în spaţii de funcţii multivoce şi aplicaţii ale acestora.

În primul paragraf, Ecuaţii intregrale în spaţii de funcţii multivoce, sunt prezentate relativ la ecuaţiile integrale în spaţii de funcţii multivoce, teoreme de existenţă şi unicitate a soluţiei ecuaţiilor şi de dependenţă continuă de date. Contribuţiile aduse sunt: Teorema 3.1.2, Teorema 3.1.3, Teorema 3.1.5, Teorema 3.1.6, acestea sunt conţinute în lucrarea I.C. Tişe [98].

În a doua parte a capitolului prezentăm noţiunea de problemă Cauchy pentru ecuaţii diferenţiale în spaţii de funcţii multivoce şi obţinem rezultate de existenţă şi unicitate pentru această problemă prin tehnica punctului fix. Rezultatele proprii în acest sens sunt Teorema 3.2.2, Teorema 3.2.3 din lucrarea I.C.Tişe [99].

În ultima parte a capitolului, în paragraful Ecuaţii funcţional-integrale în spaţii de funcţii multivoce, discutăm cazul unor ecuaţii funcţional-integrale, relativ la care demonstrăm rezultate de existenţă şi unicitate a solujei. Contribuţiile aduse sunt Teorema 3.3.1, Teorema 3.3.2, Teorema 3.3.3 cuprinse şi în lucarea I.C. Tişe [99].

Sunt prezentate şi rezultate de stabilitate Ulam-Hyers-Rassias în sens generalizat pentru ecuaţiile integrale în spaţii de funcţii multivoce în: Teorema 3.1.4, Teorema 3.1.7, Teorema 3.3.4, cuprinse în lucarea I.C. Tişe [100].

Capitolul patru, se intitulează Proprietăţi calitative ale soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale în spaţii de funcţii multivoce. Primul paragraf al acestui capitol este dedicat pentru leme de tip Gronwall şi teoreme de comparaţie, iar în următorul paragraf discutăm dependenţa continuă de date a soluţiei ecuaţiilor diferenţiale în spaţii de funcţii multivoce.

Contribuţiile proprii din acest capitol sunt Teorema 4.1.1, Teorema 4.1.2, Teorema 4.1.4, Teorema 4.1.5, Teorema 4.2.1, rezultate care sunt cuprinse în lucrările I.C Tişe [95], [97].

În concluzie contribuţiile din această teză apar, în principal în următoarele lucrări:

**I.C. Tişe**, *Data dependence of the solutions for set differential equations*, Carpathian J. Math., 23 (2007), No. 1-2, 192-195;

**I.C. Tişe**, *Semifixed sets for multivalued $\varphi$-contractions*, Creative Math.& Inf., 17 (2008), No. 3, 516-520;

**I.C. Tişe**, *Gronwall lemmas and comparison theorems for the Cauchy problem associated to a set differential equation*, Studia Universitatis Babes-Bolyai Mathematica, 54 (2009), No. 3, 161-169;

**I.C. Tişe**, *Set integral equations in metric spaces*, Mathematica Moravica, 13 (2009), 95-102;

**I.C. Tişe**, *A fixed point approach for functional-integral set equations*, acceptat spre publicare în Demonstratio Mathematica, Vol. 44 (2011), No. 2, va apărea;

**I.C. Tişe**, *Ulam-Hyers-Rassias stability for set integral equations*, trimisă spre publicare.

În final, doresc să aduc mulţumiri conducătorului meu ştiinţific, prof. univ. dr. Adrian Petruşel, pentru îndrumarea atentă şi încurajarea permanentă de care m-am bucurat pe parcusrsul stagiul meu de doctorat, membrilor Catedrei de Matematică aplicată. Formarea mea s-a făcut la Facultatea de Matematică şi Informatică din Universitatea "Babeş-Bolyai" Cluj-Napoca, le mulţumesc încă o dată tuturor profesorilor mei.

Cluj-Napoca, 2010.

# Capitolul 1

# Preliminarii

## 1.1 Funcţionale pe spaţiul părţilor unui spaţiu metric

## 1.2 Operatori multivoci

## 1.3 Derivabilitatea şi integrabilitatea operatorilor multivoci

Derivabilitatea pentru operatori multivoci este prezentată de mulţi autori în lucrările lor: J.-P. Aubin, H.Frankovska [5], H.T. Banks, M.Q. Jacobs [8], F. S. De Blasi [19], G.N. Galanis, T.G. Bhaskar, V. Lakshmikantham and P.K.Palamides [31], V. Lakshmikantham, T. Gnana Bhaskar, J. Vasundhara Devi [49], în diferite moduri în funcţie de aplicaţiile în care intervin acestea.

Scopul acestui paragraf este de a prezenta conceptul de derivabilitate în sensul lui Hukuhara. Menţionăm de asemenea că un concept de diferenţiabilitate pentru o mulţime nevidă şi compactă dintr-un spaţiu de funcţii continue a fost dat de Bridgland 1970, de asemenea Banks şi Jacobs definesc în 1970 o noţiune de diferenţiabilitate pentru operatori multivoci între spaţii normate şi prezintă o serie de rezultate asemănatoare calculului diferenţial obişnuit, a se vedea [8].

În 1967 Hukuhara [41], [42] a dat o definiţie a derivabilităţi pentru operatori multivoci.

**Definiţia 1.3.1** *(Hukuhara [41]) Fie $X$ un spaţiu Banach şi $A, B \in P_{cp,cv}(X)$ se numeşte diferenţa mulţimilor $A$ şi $B$ (notată $A - B$) o mulţime $C \in P_{b,cl,cv}(X)$ (dacă ea există) cu proprietatea $C + B = A$.*

Această definiţie în timp a primit numele de diferenţa Hukuhara.

**Definiţia 1.3.2** *(Hukuhara [41]) Fie $I \subset \mathbb{R}$ şi $F : I \to P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ opertator multivoc. Atunci $F$ se numeşte H-diferenţiabil (diferenţiabil în sens Hukuhara) în $t_0 \in I$, dacă există $D_H F(x_0) \in P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ astfel încât limitele:*

$$\lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{F(t_0 + \Delta t) - F(t_o)}{\Delta t} \tag{1.3.1}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{F(t_0) - F(t_0 - \Delta t)}{\Delta t} \tag{1.3.2}$$

*să existe şi să fie egale ambele cu $D_H F(t_0)$.*

Implicit în definiţia lui $D_H F(t_0)$ se presupune că există diferenţele $F(t_o + \Delta t) - F(t_0)$, $F(t_0) - F(t_0 - \Delta t)$ pentru toţi $\Delta t > 0$ suficient de mici.

## 1.4 Operatori Picard şi operatori slab Picard

# Capitolul 2

# Mulţimi semifixe pentru contracţii multivoce

Dedicăm acest capitol stabilirii unor rezultate privind existenţa (eventual unicitatea) mulţimilor semifixe pentru operatori de mulţime ce satisfac unele condiţii de tip contractiv, precum şi unele ipoteze de tip topologic. Rezultatele din acest capitol extind unele rezultate prezentate în lucrările lui A.J. Brandao [12], A. Constantin [16], H. Covitz, S.B. Nadler jr.[17], F.S. De Blasi [19], [20], [21], [22], M. Frigon [27], [28], S. Kakutani [43], V. Lakshmikantham, A.N. Tolstonogov [47], V. Lakshmikantham, T. Gnana Bhaskar, J. Vasundhara Devi [49], A. Muntean [60].

Astfel, prima parte a capitolului prezintă câteva din noţiunile esenţiale relativ la mulţimile semifixe pentru operatorii de mulţime, noţiuni introduse de F.S. De Blasi în lucrările [21], [22]. Apoi, în a doua parte a capitolului demonstrăm mai multe rezultate privind existenţa mulţimilor semifixe în cazul $\varphi$-contracţiilor de mulţime. Rezultate aparţinând autorului din acest capitol sunt Teorema 2.2.2, Teorema 2.2.3, Teorema 2.2.4 şi ele sunt cuprinse în lucrarea I.C. Tişe [96]. În ultima parte este prezentată proprietatea de stabilitate Ulam-Hyers generalizată în Teorema 2.2.1 şi Teorema 2.2.5 ce sunt cuprinse în lucrarea I.C. Tişe [100].

## 2.1 Mulţimi semifixe pentru operatori multivoci

În acest paragraf vom prezenta noţiunea de mulţimi semifixe pentru operatori multivoci, noţiune introdusă de F.S. De Blasi.

Fie $(X, ||\cdot||)$ un spaţiu Banach real şi $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ două familii nevide de submulţimi a lui $X$ şi fie $P(\mathcal{B})$ o familie nevidă de submulţimi a lui $\mathcal{B}$.

Adunarea şi înmulţirea cu scalari nenegativi din $P_{cp,cv}(X)$, pentru $A, B \in P_{cp,cv}(X)$ şi $\lambda \geq 0$ sunt introduse astfel:

$$A + B = \{a + b | a \in A, \quad b \in B\},$$

$$\lambda A = \{\lambda a | a \in A\}.$$

În mod evident avem că $A + B, \quad \lambda A \in P_{cp,cv}(X)$.

Mai mult, dacă $A, B, C \in P_{cp,cv}(X)$ şi $\lambda, \quad \mu \geq 0$ avem:

(i) $A + \{0\} = A$, unde 0 notează elementul nul al spaţiului Banach $X$;

(ii) $A + B = B + A$;

(iii) $A + (B + C) = (A + B) + C$;

(iv) $1 \cdot A = A$;

(v) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$;

(vi) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;

(vii) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.

Observaţie, proprietăţile de mai sus, cu excepţia lui (vii) rămân valabile şi în spaţiul $P_{cp}(X)$.

**Definiţia 2.1.1** *O mulţime $\mathcal{A} \subset P_{cp,cv}(X)$ se numeşte convexă dacă oricare ar fi $A, B \in \mathcal{A}$ şi $t \in [0, 1]$, implică $(1 - t)A + tB \in \mathcal{A}$.*

Fie $X$ un spaţiu Banach. Spaţiul $P_{cp}(P_{cp}(X))$ se poate înzestra cu metrica Pompeiu-Hausdorff $\mathcal{H}$ indusă de metrica $H$ din $P_{cp}(X)$,

$$\mathcal{H}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) := max\{e(\mathcal{A}, \mathcal{B}), e(\mathcal{B}, \mathcal{A})\},$$

unde $e(\mathcal{A}, \mathcal{B}) := \sup_{A \in \mathcal{A}} \inf_{B \in \mathcal{B}} H(A, B),$, iar $e(\mathcal{B}, \mathcal{A}) := \sup_{B \in \mathcal{B}} \inf_{A \in \mathcal{A}} H(B, A)$.

**Observaţia 2.1.1** $P_{cp,cv}(P_{cp,cv}(X)) \subset P_{cp}(P_{cp}(X))$.

**Definiţia 2.1.2** *Fie $(X, \mathcal{H})$ un spaţiu metric. Un operator multivoc $\phi : X \to P_{cp}(P_{cp}(X))$, se numeşte semicontinuu superior (respectiv semicontinuu inferior) dacă pentru oricare ar fi $x_0 \in X$ şi $\varepsilon > 0$ există $V$ o vecinătate deschisă a lui $x_0$ astfel încât $\mathcal{H}(\phi(x), \phi(x_0)) < \varepsilon$ (respectiv $\mathcal{H}(\phi(x_0), \phi(x)) < \varepsilon$), oricare ar fi $x \in V$.*

*$\phi$ este continuă dacă este semicontinuu superior şi semicontinuu inferior.*

Fie $(X, ||\cdot||)$ un spaţiu normat. Pentru $A, B \in P_{cp}(X)$ notăm:

$$D(A,B) = inf\{||a-b|| \; |a \in A, b \in B\}.$$

Au loc următoarele proprietăţi pentru $\lambda \in \mathbb{R}$ şi $A, A', B, B' \in P_{cp}(X)$:

1. $D(A,B) = D(B,A)$;
2. $D(A,B) = 0$ dacă şi numai dacă $A \cap B \neq \emptyset$;
3. $D(\lambda A, \lambda B) = |\lambda| D(A,B)$;
4. $D(A,B) \leq D(A',B') + H(A,A') + H(B,B')$;
5. $H(A,B) \leq diam(A) + diam(B) + D(A,B)$.
6. funcţia $D$ este continuă pe $P_{cp}(X) \times P_{cp}(X)$ şi are loc relaţia:

$$|\sup_{B\in\mathcal{B}} D(A,B) - \sup_{B\in\mathcal{B}} D(A',B)| \leq H(A,A').$$

Pentru $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in P_{cp}(P_{cp}(X))$, definim funcţionala

$$\Delta(\mathcal{A},\mathcal{B}) = max\{f(\mathcal{B},\mathcal{A}), f(\mathcal{A},\mathcal{B})\},$$

$$\text{unde } f(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \inf_{A\in\mathcal{A}} \sup_{B\in\mathcal{B}} D(A,B) \text{ şi } f(\mathcal{B},\mathcal{A}) = \inf_{B\in\mathcal{B}} \sup_{A\in\mathcal{A}} D(B,A).$$

Se observă că, dacă $\Delta(\mathcal{A},\mathcal{B}) = 0$ atunci există $A' \in \mathcal{A}$ şi $B' \in \mathcal{B}$ astfel încât $A' \cap B \neq \emptyset$, oricare ar fi $B \in \mathcal{B}$ şi $B' \cap A \neq \emptyset$, oricare ar fi $A \in \mathcal{A}$.

În continuare, în această secţiune vom prezenta câteva rezultate asupra existenţei mulţimilor semifixe pentru operatori multivoci cu valori compacte şi convexe, pentru $\mathfrak{X}$ un spacţiu Banach, de forma

$$\phi : P_{cp,cv}(\mathfrak{X}) \longrightarrow P_{cp,cv}(P_{cp,cv}(\mathfrak{X})).$$

**Definiţia 2.1.3** *Fie $\phi : \mathcal{A} \to P(\mathcal{B})$. O mulţime $A \in \mathcal{A}$ se numeşte mulţime semifixă pentru operatorul multivoc $\phi$ dacă există $F \in \phi(A)$ care satisface una din relaţiile:*

$$A \subset F, \;\; A \supset F \;\; sau \;\; A \cap F \neq \emptyset.$$

*De asemenea, prin definiţie, $A \in \mathcal{A}$ se numeşte mulţime fixă a lui $\phi$ dacă $A \in \phi(A)$.*

**Propoziţia 2.1.1** *(F.S. De Blasi[22]) Fie $\mathcal{A}$ o submulţime nevidă, compactă, convexă a lui $P_{cp,cv}(\mathfrak{X})$, şi fie $\phi : \mathcal{A} \to P_{cp,cv}(P_{cp,cv}(\mathfrak{X}))$ un operator multivoc semicontinuuu superior astfel încât $\phi(X) \subset \mathcal{A}$, pentru oricare ar fi $X \in \mathcal{A}$. Atunci există cel puţin o mulţime $A \in \mathcal{A}$ astfel încât $A \in \phi(A)$.*

**Teorema 2.1.1** *(F.S. De Blasi[22]) Fie $\mathcal{A}$ o submulţime nevidă, compactă, convexă a lui $P_{cp,cv}(\mathfrak{X})$ şi fie $\phi : \mathcal{A} \to P_{cp,cv}(P_{cp,cv}(\mathfrak{X}))$ un operator multivoc semicontinuu superior care satisface următoarea condiţie:*

*(i) pentru oricare ar fi $X \in \mathcal{A}$, există o mulţime $F \in \phi(X)$ astfel încât $F \cap (\bigcup_{Z \in \mathcal{A}} Z) \neq \emptyset$.*

*Atunci există cel puţin o mulţime $A \in \mathcal{A}$ şi există $F \in \phi(A)$ astfel încât:*

$$A \cap F \neq \emptyset. \tag{2.1.1}$$

**Teorema 2.1.2** *(F.S. De Blasi[22]) Fie $\mathcal{A}$ o submulţime nevidă, compactă, convexă a lui $P_{cp,cv}(\mathfrak{X})$, $\phi : \mathcal{A} \to P_{cp,cv}(P_{cp,cv}(\mathfrak{X}))$ un operator multivoc semicontinuu superior care pentru oricare ar fi $X \in \mathcal{A}$, există o mulţime $F \in \phi(X)$ şi $Z \in \mathcal{A}$ astfel încât: $F \cap (\bigcup_{Z \in \mathcal{A}} Z) \neq \emptyset$ şi $Z \subset F$ (respectiv $Z \supset F$).*

*Atunci există cel puţin o mulţime $A \in \mathcal{A}$ şi există $F \in \phi(A)$ astfel încât:*

$$A \subset F \ (\text{respectiv } A \supset F). \tag{2.1.2}$$

## 2.2 Mulţimi semifixe pentru $\varphi$-contracţii multivoce

În prima parte a acestui paragraf vom prezenta o teorie a teoremei metrice de punct fix Matkowski-Rus ([54], [81]) pentru $\varphi$-contracţii. Apoi, folosind acest rezultat vom enunţa câteva teoreme de existenţă a mulţimilor semifixe în cazul $\varphi$-contracţii multivoce de mulţime. Rezultatele obţinute extind unele teoreme date de F. S. De Blasi în lucrările [21], [22], M. Frigon [29], M. Frigon, A. Granas [30].

**Definiţia 2.2.1** *(I.A. Rus [77]) O funcţie $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ este funcţie de comparaţie dacă:*

*(i) $\varphi$ este monoton crescătoare;*

*(ii) $(\varphi^n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ converge la 0, oricare ar fi $t > 0$.*

**Definiţia 2.2.2** *(I.A. Rus [77]) Fie $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ o funcţie de comparaţie, spunem că este:*

*(i) funcţie de comparaţie strictă dacă $t - \varphi(t) \to \infty$, pentru $t \to \infty$;*

*(ii) funcţie de comparaţie tare dacă $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi^n(t) < \infty$, pentru oricare ar fi $t > 0$.*

**Observaţia 2.2.1** *Dacă $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ este o funcţie de comparaţie atunci $\varphi(0) = 0$ şi $\varphi(t) < t$, pentru oricare ar fi $t > 0$.*

**Exemplu 2.2.1** *(I.A. Rus [77]) Funcţiile $\varphi_1 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\varphi_1(t) = at$ (unde $a \in ]0, 1[$) şi $\varphi_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\varphi_2(t) = \frac{t}{1+t}$ sunt funcţii de comparaţie.*

Fie $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ o funcţie de comparaţie. Notăm

$$\varphi_\eta := sup\{t \in \mathbb{R}_+ | \ \ t - \varphi(t) \leq \eta\}.$$

**Definiţia 2.2.3** *(I.A. Rus [82]) Fie $(X, d)$ un spaţiu metric. Atunci, operatorul $A : X \to X$ se numeşte $\varphi$-contracţie dacă $\varphi$ este o funcţie de comparaţie şi*

$$d(A(x), A(y)) \leq \varphi(d(x, y)), \ \textit{oricare ar fi } x, y \in X.$$

Prezentăm în continuare conceptul de stabilitate Ulam-Hyers în sens generalizat.

Dacă $A : X \to X$ este operator definit pe spaţiul metric $(X, d)$, să considerăm ecuaţia de punct fix:

$$x = A(x), \ x \in X \tag{2.2.3}$$

şi pentru $\varepsilon > 0$ inecuaţia

$$d(y, A(y)) \leq \varepsilon. \tag{2.2.4}$$

**Definiţia 2.2.4** *(I.A. Rus [82]) Ecuaţia (2.2.3) se numeşte Ulam-Hyers stabilă în sens generalizat dacă există o funcţie $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ crescătoare, continuă în 0 şi având proprietatea că $\psi(0) = 0$, astfel încât oricare ar fi $\varepsilon > 0$ şi pentru orice soluţie $y^* \in X$ a inecuaţiei (2.2.4) există o soluţie $x^* \in X$ a ecuaţiei de punct fix (2.2.3) astfel încât*

$$d(y^*, x^*) \leq \psi(\varepsilon).$$

*Dacă există $c > 0$ astfel că $\psi(t) := ct$, oricare ar fi $t \in \mathbb{R}_+$, atunci ecuaţia (2.2.3) se numeşte Ulam-Hyers stabilă.*

**Teorema 2.2.1** *(J. Matkowski [54], I.A. Rus [81], I.C. Tişe [100])*
*Fie $(X, d)$ un spaţiu metric complet şi $A : X \to X$ o $\varphi$-contracţie. Atunci:*

*(i)* $F_A = \{x_A^*\}$ *şi* $A^n(x) \to x_A^*$ *pentru* $n \to \infty$, *oricare ar fi* $x \in X$, *i.e.,* $A$ *este operator Picard.*

*(ii)* $F_A = F_{A^n} = \{x_A^*\}$, *oricare ar fi* $n \in \mathbb{N}^*$, *i.e.,* $A$ *este operator Bessaga.*

*(iii) Dacă $\varphi$-funcţie de comparaţie tare, notăm* $\alpha_n := \sum\limits_{k=0}^{n-1} \varphi^k(t)$ *şi* $s(d(x, A(x))) := \sum\limits_{k \geq 0} \varphi^k(t)$ *atunci* $d(A^n(x), x_A^*) \leq s(t) - \alpha_n$, *oricare ar fi* $x \in X$ *şi* $n \in \mathbb{N}^*$.

*(iv) Dacă în plus $\varphi$ este funcţie de comparaţie strictă atunci* $d(x, x_A^*) \leq \varphi_{d(x,A(x))}$, *oricare ar fi* $x \in X$.

*(v)* $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} d(A^n(x), A^{n+1}(x)) \leq s(d(x, A(x)))$, *oricare ar fi* $x \in X$.

*(vi)* *Avem că* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} d(A^n(x), x_A^*) \leq s(d(x, x_A^*))$, *oricare ar fi* $x \in X$.

*(vii)* *Dacă în plus funcţia* $\psi(t) = t - \varphi(t)$ *are proprietatea* $\psi(u_n) \to 0$, *pentru* $n \to \infty$ *rezultă* $u_n \to 0$, *când* $n \to \infty$ *şi dacă* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ *astfel încât* $d(x_n, A(x_n)) \to 0$, $n \to \infty$ *atunci* $x_n \to x_A^* \in F_A$, *pentru* $n \to \infty$, *adică problema de punct fix este bine pusă.*

*(viii)* *Fie* $(x_n) \subseteq X$ *astfel încât* $(d(x_{n+1}, A(x_n)))_{n\in\mathbb{N}}$ *este convergent la 0. Atunci există* $x \in X$ *astfel încât* $d(x_n, A^n(x)) \to 0$, *pentru* $n \to \infty$ *(adică operatorul* $A$ *are proprietatea de umbrire la limită).*

*(ix)* *Dacă* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ *şir mărginit atunci* $A^n(x_n) \to x_A^*$, *pentru* $n \to \infty$.

*(x)* *Presupunem că* $\varphi$ *este funcţie de comparaţie strictă. Fie* $B : X \to X$ *pentru care există* $\eta > 0$ *astfel încât* $d(A(x), B(x)) \leq \eta$ *oricare ar fi* $x \in X$. *Atunci* $x_B^* \in F_B$ *rezultă* $d(x_A^*, x_B^*) \leq \varphi_\eta$.

*(xi)* *Dacă* $\varphi$*-funcţie de comparaţie strictă,* $A_n : X \to X$, $A_n \overset{unif}{\to} A$, $n \to \infty$. *Fie* $x_n \in F_{A_n}$, $n \in \mathbb{N}$ *şi fie* $\{x_A^*\} = F_A$. *Atunci* $x_n \to x_A^*$ *pentru* $n \to \infty$.

*(xii)* *Dacă* $(X, ||\cdot||)$ *este spaţiu Banach,* $1_X$ *operatorul identitate,* $d(x, y) = ||x - y||$ *atunci* $1_X - A : X \to X$ *este surjectiv.*

*(xiii)* *Dacă în plus funcţia* $\psi(t) = t - \varphi(t)$ *este strict crecătoare şi surjectivă, atunci ecuaţia de punct fix*

$$x = A(x), \quad x \in X$$

*este Ulam-Hyers stabilă în sens generalizat.*

**Observaţia 2.2.2** *Dacă alegem* $\varphi(t) := at$ *(unde* $a \in [0, 1)$*) atunci afirmaţia (iii) din teorema de mai sus conduce la Teorema 1.1. din I.A. Rus [81]. Mai precis, deoarece*

$$\begin{aligned} d(A^n(x), x_A^*) &\leq \sum_{k\geq 0} \varphi^k(d(x, A(x))) - \sum_{k=0}^{n-1} \varphi^k(d(x, A(x))) \\ &= \sum_{k\geq 0} a^k d(x, A(x)) - \sum_{k=0}^{n-1} a^k d(x, A(x)) \\ &= d(x, A(x))\frac{1}{1-a} - d(x, A(x))\frac{a^n - 1}{a - 1} = \frac{a^n}{1-a} d(x, A(x)). \end{aligned}$$

*rezultă că* $d(A^n(x), x_A^*) \leq \frac{a^n}{1-a} d(x, A(x))$, *pentru oricare ar fi* $x \in X$ *şi* $n \in \mathbb{N}^*$.

**Observaţia 2.2.3** *Teorema de mai sus extinde unele rezultate de acest tip date în: A. Petrusel, I.A. Rus [72], A. Petruşel, A. Sîntămărian [73], I.A. Rus, S. Mureşan [84], I.A. Rus, A. Petruşel and A. Sîntămărian [85], J. Saint-Raymond [88].*

**Definiţia 2.2.5** *Spaţiul metric* $(X, d)$ *este precompact (total mărginit) dacă şi numai dacă oricare ar fi* $\varepsilon > 0$ *există o acoperire finită* $(F_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ *a lui* $X$ *astfel încât pentru oricare ar fi* $A \subseteq F_i$ *avem* $diam(A) < \varepsilon$. *Notăm faptul că* $F$ *depinde de* $\varepsilon$.

**Observaţia 2.2.4** *Spaţiul precompact este mărginit, dar invers nu este adevărat, în general.*

**Observaţia 2.2.5** *Într-un spatiu metric complet o mulţime* $Y$ *este precompactă dacă şi numai dacă este relativ compactă (adică* $\overline{Y}$ *este compactă).*

Enunţăm în continuare câteva teoreme de existenţă a mulţimilor semifixe pentru cazul $\varphi$-contracţii de mulţime.

**Definiţia 2.2.6** *(F.S. De Blasi[22]) Un operator multivoc* $\phi : \mathcal{A} \to P_{cp}(P_{cp}(\mathfrak{X}))$ *se numeşte tare compact dacă imaginea sa* $\phi(\mathcal{A})$ *este precompactă în* $P_{cp}(P_{cp}(\mathfrak{X}))$.

Deoarece $P_{cp}(\mathfrak{X})$ este spaţiu metric complet, rezultă că $\phi$ este un operator multivoc tare compact dacă şi numai dacă $\overline{\phi(\mathcal{A})}$ este compactă în $P_{cp}(\mathfrak{X})$.

**Definiţia 2.2.7** *(I.C. Tişe [96]) Fie* $\mathcal{A}$ *o submulţime din* $P_{cp}(P_{cp}(\mathfrak{X}))$. *Atunci* $\phi : \mathcal{A} \to P_{cp}(P_{cp}(\mathfrak{X}))$ *spunem că este* $\varphi$*-contracţie de mulţime dacă* $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *este funcţie de comparaţie şi*

$$\Delta(\phi(X), \phi(Y)) \leq \varphi(D(X, Y)), \ \textit{oricare ar fi } X, Y \in \mathcal{A}.$$

Un prim rezultat principal este:

**Teorema 2.2.2** *(I.C. Tişe [96]) Fie* $\mathfrak{X}$ *un spaţiu Banach,* $\mathcal{A}$ *o submulţime închisă din* $P_{cp}(P_{cp}(\mathfrak{X}))$ *şi fie* $\phi : \mathcal{A} \to P_{cp}(P_{cp}(\mathfrak{X}))$ *un operator multivoc tare compact (adică* $\phi(\mathcal{A})$ *este relativ compactă) şi semicontinuu superior, astfel încât* $\phi(X) \subset \mathcal{A}$ *pentru oricare ar fi* $X \in \mathcal{A}$.
*Presupunem că există o funcţie de comparaţie* $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *astfel încât are loc relaţia:*

$$\Delta(\phi(X), \phi(Y)) \leq \varphi(D(X, Y)) \ \textit{pentru oricare ar fi } X, Y \in \mathcal{A}. \tag{2.2.5}$$

*Atunci există* $A \in \mathcal{A}$ *şi există* $F \in \phi(A)$ *astfel încât:*

$$A \cap F \neq \emptyset. \tag{2.2.6}$$

Un alt rezultat:

**Teorema 2.2.3** *(I.C. Tişe [96]) Fie* $\mathfrak{X}$ *un spaţiu Banach,* $\mathcal{A} \subset P_{cp}(\mathfrak{X})$ *şi* $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ *continuă care satisface următoarele condiţii:*

*(i)* $\phi(\mathcal{B})$ *este precompact în* $\mathcal{A}$ *pentru oricare mulţime mărginită* $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$;

*(ii) există $M > 0$ astfel încât $diam(\phi(X)) \leq M$, pentru oricare ar fi $X \in \mathcal{A}$.*

*(iii) există o funcţie de comparaţie $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ astfel încât funcţia $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\psi(t) = t - \varphi(t)$ este strict crescătoare, surjectivă şi satisface urmatoarea relaţie:*

$$D(\phi(X), \phi(Y)) \leq \varphi(D(X,Y)) \text{ oricare ar fi } X, Y \in \mathcal{A}. \tag{2.2.7}$$

*Atunci există $A \in \mathcal{A}$ astfel încât $A \cap \phi(A) \neq \emptyset$.*

Vom folosi în continuare teorema de punct fix a lui J. Matkowski şi I.A. Rus aşa cum este ea enunţată în Teorema 2.2.1 (i).

Relativ la rezultatele anterioare vom prezenta în ceea ce urmează o aplicaţie la studiul unei ecuaţii integrale în spaţii de funcţii multivoce.

Fie $\mathbf{B}_r := \{X \in P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n) | diam(X) \leq r\}$, unde $r > 0$.

Mulţimea $\mathbf{B}_r$ înzestrată cu metrica Pompeiu-Hausdorff, este convexă şi completă.

Fie $I = [a, b]$, fie $F : I \times I \times \mathbf{B}_r \to \mathbf{B}_{r/2}$, şi fie o mulţime $A \in \mathbf{B}_{r/2}$.

Considerăm ecuaţia integrală

$$X(t) = A + \int_a^b F(t, s, X(s))ds. \tag{2.2.8}$$

Printr-o soluţie a ecuaţiei (2.2.8) întelegem o funcţie continuă $X : I \to \mathbf{B}_r$, care satisface (2.2.8) oricare ar fi $t \in I$.

**Teorema 2.2.4** *(I.C. Tişe [96]) Fie $F : I \times I \times \mathbf{B}_r \to \mathbf{B}_{r/2}$ continuă, presupunem că există o funcţie de comparaţie $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ şi o funcţie $p : I \times I \to \mathbb{R}_+$ astfel încât:*

$$H(F(t, s, X), F(t, s, Y)) \leq p(t, s)\varphi(H(X, Y))$$

*pentru oricare ar fi $t, s \in I$, $X, Y \in \mathbf{B}_r$, unde $\max\limits_{t \in I} \int_a^b p(t, s) \leq 1$.*
*Atunci, pentru fiecare $A \in \mathbf{B}_{r/2}$ ecuaţia integrală (2.2.8) are o unică soluţie $X(\cdot, A) : I \to \mathbf{B}_r$ care depinde în mod continuu de $A$.*

**Definiţia 2.2.8** *(I.C. Tişe [100]) Fie $F : [a, b] \times [a, b] \times P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n) \to P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ şi $A \in P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$. Ecuaţia integrală:*

$$X(t) = A + \textstyle\int_a^b F(t, s, X(s))ds, \quad t \in [a, b] \tag{2.2.8}$$

*se numeşte Ulam-Hyers stabilă în sens generalizat dacă există o funcţie $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ crescătoare, continuă în 0 şi având proprietatea $\psi(0) = 0$ astfel încât oricare ar fi $\varepsilon > 0$ şi oricare ar fi $Y^* \in C([a, b], P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n))$ o soluţie a inecuaţiei:*

$$H(Y(t), A + \int_a^b F(t, s, Y(s))ds) \leq \varepsilon, \quad t \in [a, b]$$

*există o soluţie $X^*$ a ecuaţiei (2.2.8) astfel încât avem*

$$||X^* - Y^*||_{C([a,b],P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n))} \leq \psi(\varepsilon).$$

*Dacă există $c > 0$ astfel încât $\psi(t) = ct$ atunci ecuaţia (2.2.8) se numeşte Ulam-Hyers stabilă.*

**Teorema 2.2.5** *(I.C. Tişe [100]) În ipotezele Teoremei 2.2.4, în plus presupunem că funcţia $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\psi(t) = t - \varphi(t)$ este strict crescătoare şi surjectivă. Atunci ecuaţia integrală (2.2.8) este Ulam-Hyers stabilă în sens generalizat.*

# Capitolul 3

# Ecuaţii integrale în spaţii de funcţii multivoce

Scopul acestui capitol este de a prezenta rezultate de existenţă, unicitate şi dependenţă de date a soluţiilor pentru ecuaţii integrale şi ecuaţii diferenţiale în spaţii de funcţii multivoce.

Există în literatură destul de puţine lucrări ce studiază ecuaţiile integrale în spaţii de funcţii multivoce, dar numeroase lucrări studiază probleme asociate ecuaţiilor diferenţiale în spaţii de funcţii multivoce. Astfel deseori studiul unor probleme Cauchy asociate unor ecuaţii diferenţiale în spaţii de funcţii multivoce sunt abordate prin intermediul studiului unei ecuaţii integrale echivalente în spaţii de funcţii multivoce. În esenţă aceasta este şi abordarea pe care o propunem şi în această lucrare pentru cazul problemei Cauchy studiate, din această perspectivă studiul ecuaţiilor integrale în spaţii de funcţii multivoce este esenţial.

În prima parte prezentăm, relativ la ecuaţiile integrale în spaţii de funcţii multivoce, teoreme de existenţă şi unicitate a soluţiei şi de dependenţă continuă de date. Contribuţiile autorului sunt: Teorema 3.1.2, Teorema 3.1.3, Teorema 3.1.5, Teorema 3.1.6, ele fiind publicate în lucrarea I.C. Tişe [98].

În a doua parte a capitolului, prezentăm noţiunea de problemă Cauchy pentru o ecuaţie diferenţială în spaţii de funcţii multivoce şi obţinem rezultate de existenţă şi unicitate pentru această problemă prin tehnica punctului fix. Rezultatele proprii în acest sens sunt Teorema 3.2.2 şi Teorema 3.2.3 din lucrarea I.C. Tişe [99].

În ultima parte a capitolului discutăm cazul unor ecuaţii funcţional-integrale în spaţii de funcţii multivoce, relativ la care demonstrăm din nou rezultate de existenţă şi unicitate a soluţiei. Contribuţiile proprii sunt Teorema 3.3.1, Teorema 3.3.2, Teorema 3.3.3, cuprinse în lucarea I.C. Tişe [99].

Sunt prezentate şi rezultat de stabilitate Ulam-Hyers-Rassias în sens generalizat pentru ecuaţiile integrale în: Teorema 3.1.4, Teorema 3.1.7, Teorema 3.3.4, cuprinse în lucarea I.C. Tişe [100].

Rezultatele obţinute în acest capitol extind şi generalizează unele teoreme date în lucrarile lui: A. J. Brandao Lopes Pinto, F. S. De Blasi, F. Iervillino [12], A. Cernea [14], F. S. De Blasi [22], T. Gnana Bhaskar, J. Vasundhara Devi [33], C.J. Himmelberg, F.S. Van Vieck [39], V. Lakshmikantham, T. Gnana Bhaskar, J. Vasundhara Devi [48], [49], N Lungu [50], [51], N. Lungu, I.A. Rus [52], V. Lupulescu [53], D. O'Regan, A. Petruşel [64], A. Petruşel [67], [68], A. Petruşel, G. Petruşel, G. Moţ [71], R. Precup [74], I.A. Rus, A. Petrusel, G. Petrusel [87].

## 3.1 Ecuaţii integrale în spaţii de funcţii multivoce

Vom studia în acest paragraf următoarele ecuaţii integrale în spaţii de funcţii multivoce:

$$X(t) = \int_a^b K(t, s, X(s))ds + X_0(t), \quad t \in [a, b] \tag{3.1.1}$$

$$X(t) = \int_a^t K(t, s, X(s))ds + X_0(t), \quad t \in [a, b], \tag{3.1.2}$$

unde $K : [a, b] \times [a, b] \times P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n) \to P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ este un operator continuu, iar $X_0 \in C([a, b], P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n))$.

O soluţie a ecuaţiilor integrale în spaţii de funcţii multivoce (3.1.1) şi (3.1.2) este o funcţie contiunuă $X : [a, b] \to P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ care satisface (3.1.1) respectiv (3.1.2), oricare ar fi $t \in [a, b]$.

Reamintim unele rezultate auxiliare necesare pe parcursul capitolului.

**Lema 3.1.1** *(A. Petruşel [66]) Fie $X$ spaţiu Banach. Atunci $H(A+C, B+D) \leq H(A, B) + H(C, D)$, oricare ar fi $A, B, C, D \in P(X)$.*

**Teorema 3.1.1** *(V. Lakshmikantham [49]) Fie $F, G : [a, b] \to P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ operatorii integrabili Aumann. Atunci*

$$H\left(\int_a^b F(t)dt, \int_a^b G(t)dt\right) \leq \int_a^b H(F(t), G(t))dt.$$

Considerăm pe spaţiul $C([a, b], P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n))$, metrica:

$$H_*^C(X, Y) := \max_{t \in [a,b]} H(X(t), Y(t)).$$

Atunci perechea $(C([a,b], P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)), H_*^C)$ formează un spaţiu metric complet.

Un prim rezultat este o teoremă de existenţă şi unicitate a soluţiei ecuaţiei integrale (3.1.1).

**Teorema 3.1.2** *(I.C. Tişe [98])*

*Fie $K : [a,b] \times [a,b] \times P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n) \to P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ un operator multivoc. Presupunem că :*

*(i) $K$ este continuă pe $[a,b] \times [a,b] \times P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ şi $X_0 \in C([a,b], P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n))$;*

*(ii) $K(t,s,\cdot)$ este Lipschitz, i.e. există $L_K \geq 0$ astfel încât:*

$$H(K(t,s,A), K(t,s,B)) \leq L_K H(A,B),$$

*oricare ar fi $A, B \in P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ şi oricare ar fi $t, s \in [a,b]$;*

*(iii) $L_K(b-a) < 1$.*

*Atunci ecuaţia integrală*

$$X(t) = \int_a^b K(t,s,X(s))ds + X_0(t)$$

*are o unică soluţie.*

Un rezultat de dependenţă de date a soluţiei ecuaţiei integrale (3.1.1) este următorul.

**Teorema 3.1.3** *(I.C. Tişe [98]) Fie $K_1, K_2 : [a,b] \times [a,b] \times P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n) \to P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$, continue şi $X_0, Y_0 \in C([a,b], P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n))$. Considerăm următoarele ecuaţii:*

$$X(t) = \int_a^b K_1(t,s,X(s))ds + X_0(t), \tag{3.1.3}$$

$$Y(t) = \int_a^b K_2(t,s,Y(s))ds + Y_0(t). \tag{3.1.4}$$

*Presupunem:*

*(i) există $L_{K_1} \geq 0$ astfel încât*

$$H(K_1(t,s,A), K_1(t,s,B)) \leq L_{K_1} H(A,B),$$

*oricare ar fi $A, B \in P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$, $t, s \in [a,b]$ şi $L_{K_1}(b-a) < 1$ (notăm prin $X^*$ unica soluţie a ecuaţiei (3.1.3));*

*(ii) există $\eta_1, \eta_2 > 0$ astfel încât:*

(a) $H(K_1(t,s,U),K_2(t,s,U)) \leq \eta_1$, *oricare ar fi* $(t,s,U) \in [a,b]\times[a,b]\times P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$,

(b) $H(X_0(t),Y_0(t)) \leq \eta_2$, *oricare ar fi* $t \in [a,b]$;

(iii) *există* $Y^* \in C([a,b],P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n))$ *o soluţie a ecuaţiei (3.1.4).*

*Atunci*

$$H_*^C(X^*,Y^*) \leq \frac{\eta_2 + \eta_1(b-a)}{1 - L_{K_1}(b-a)}.$$

Un rezultat auxiliar este:

**Lema 3.1.2** *(I.A.Rus [83])Fie* $h \in C([a,b],\mathbb{R}_+)$ *şi* $\beta > 0$ *cu* $\beta(b-a) < 1$. *Dacă* $u \in C([a,b],\mathbb{R}_+)$ *satisface*

$$u(t) \leq h(t) + \beta\int_a^b u(s)ds, \text{ oricare ar fi } t \in [a,b],$$

*atunci*

$$u(t) \leq h(t) + \beta(1-\beta(b-a))^{-1}\int_a^b h(s)ds, \text{ oricare ar fi } t \in [a,b].$$

În continuare un rezultat de stabilitate Ulam-Hyers-Rassias în sens generalizat pentru ecuaţia integrală (3.1.1).

**Teorema 3.1.4** *(I.C. Tişe [100]) Considerăm ecuaţia (3.1.1).*
*Presupunem că:*

(i) $K : [a,b]\times[a,b]\times P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n) \to P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ *este un operator multivoc continuu şi* $X_0 \in C([a,b],P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n))$;

(ii) $K(t,s,\cdot)$ *este Lipschitz, i.e. există* $L_K \geq 0$ *astfel încât:*

$$H(K(t,s,A),K(t,s,B)) \leq L_K H(A,B),$$

*oricare ar fi* $A,B \in P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ *şi oricare ar fi* $t,s \in [a,b]$;

(iii) $L_K(b-a) < 1$;

(iv) $\varphi \in C([a,b],(0,+\infty))$.

*Atunci ecuaţia integrală (3.1.1) este Ulam-Hyers-Rassias stabilă în sens generalizat, i.e., dacă* $X \in C([a,b],P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n))$ *are proprietatea*

$$H(X(t),\int_a^b K(t,s,X(s))ds) \leq \varphi(t), \text{ oricare ar fi } t \in [a,b]$$

*atunci există $c_\varphi > 0$ astfel încât*

$$H(X(t), X^*(t)) \leq c_\varphi \cdot \varphi(t), \text{ oricare ar fi } t \in [a,b]$$

*(unde $X^*$ notează unica soluţie a ecuaţiei (3.1.1) obţinută conform Teoremei 3.1.2).*

Teorema următoare, este un rezultat de existenţă şi unicitate a soluţiei ecuaţiei integrale (3.1.2).

Considerăm $C([a,b], P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n))$ şi metrica de tip Bielecki definită astfel:

$$H_*^B(X,Y) := \max_{t\in[a,b]} [H(X(t), Y(t))e^{-\tau(t-a)}], \quad \text{unde} \quad \tau > 0 \text{ este arbitrar.}$$

Perechea $(C([a,b], P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)), H_*^B)$ formează un spaţiu metric complet.

**Teorema 3.1.5** *(I.C. Tişe [98]) Considerăm ecuaţia integrală (3.1.2).Fie $K : [a,b] \times [a,b] \times P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n) \to P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ un operator multivoc şi $X_0 \in C([a,b], P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n))$. Presupunem că:*

*(i) $K$ este continuă pe $[a,b] \times [a,b] \times P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$;*

*(ii) $K(t,s,\cdot)$ este Lipschitz, adică există $L_K \geq 0$ astfel încât*

$$H(K(t,s,A), K(t,s,B)) \leq L_K H(A,B),$$

*oricare ar fi $A, B \in P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ şi $t, s \in [a,b]$.*

*Atunci ecuaţia integrală (3.1.2),*

$$X(t) = \int_a^t K(t,s,X(s))ds + X_0(t)$$

*are o unică soluţie.*

**Observaţia 3.1.1** *Rezultate de acest tip, sunt obţinute şi prin alte tehnici, pentru ecuaţia de tip Hammersteins apare în lucrarea [94].*

Un rezultat de dependenţă de date este:

**Teorema 3.1.6** *(I.C. Tişe [98])*

*Fie $K_1, K_2 : [a,b] \times [a,b] \times P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n) \to P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ contiunue, $X_0, Y_0 \in C([a,b], P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n))$.*

*Considerăm următoarele ecuaţii integrale:*

$$X(t) = \int_a^t K_1(t,s,X(s))ds + X_0(t) \tag{3.1.5}$$

$$(3.1.6) \qquad Y(t) = \int_a^t K_2(t,s,Y(s))ds + Y_0(t).$$

*Presupunem că:*

*(i)* $H(K_1(t,s,A), K_1(t,s,B)) \leq L_{K_1} H(A,B)$, *oricare ar fi* $A, B \in P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ *şi* $t, s \in [a,b]$, *unde* $L_{K_1} \geq 0$ *(notăm prin* $X^*$ *unica soluţie a ecuaţiei (3.1.5));*

*(ii) există* $\eta_1, \eta_2 > 0$, *astfel încât:*

  *(a)* $H(K_1(t,s,U), K_2(t,s,U)) \leq \eta_1$, *oricare ar fi* $(t,s,U) \in [a,b] \times [a,b] \times P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$,

  *(b)* $H(X_0(t), Y_0(t)) \leq \eta_2$, *oricare ar fi* $t \in [a,b]$;

*(iii) există* $Y^*$ *o soluţie a ecuaţiei (3.1.6).*

*Atunci*

$$H_*^B(X^*, Y^*) \leq \frac{\eta_2 + \eta_1(b-a)}{1 - \frac{L_{K_1}}{\tau}} \text{ (unde } \tau \text{ este ales astfel } \tau > L_{K_1}).$$

Un alt rezultat auxiliar.

**Lema 3.1.3** *(I.A.Rus [83]) Fie* $J$ *un interval din* $\mathbb{R}$, $t_0 \in J$ *şi* $h, k, u \in C(J, \mathbb{R}_+)$. *Dacă*

$$u(t) \leq h(t) + \left| \int_{t_0}^t k(s)u(s)ds \right|, \text{ oricare ar fi } t \in J,$$

*atunci*

$$u(t) \leq h(t) + \left| \int_{t_0}^t h(s)k(s)e^{\left|\int_s^t k(\sigma)d\sigma\right|}ds \right|, \text{ oricare ar fi } t \in J.$$

În continuare un rezultat de stabilitate Ulam-Hyers-Rassias în sens generalizat pentru ecuaţia integrală (3.1.2).

**Teorema 3.1.7** *(I.C. Tişe [100]) Considerăm ecuaţia (3.1.2).*
*Presupunem că:*

*(i)* $K : [a,b] \times [a,b] \times P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n) \to P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ *este un operator multivoc continuu şi* $X_0 \in C([a,b], P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n))$;

*(ii)* $K(t,s,\cdot)$ *este Lipschitz, i.e. există* $L_K \geq 0$ *astfel încât:*

$$H(K(t,s,A), K(t,s,B)) \leq L_K H(A,B),$$

  *oricare ar fi* $A, B \in P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ *şi oricare ar fi* $t, s \in [a,b]$;

*(iii) există* $\varphi \in C([a,b], (0,+\infty))$ *şi* $\eta_\varphi > 0$ *astfel încât* $\int_a^t \varphi(s)ds \leq \eta_\varphi \cdot \varphi(t)$ *oricare ar fi* $t \in [a,b]$.

*Atunci ecuaţia integrală (3.1.2) este Ulam-Hyers-Rassias stabilă în sens generalizat, i.e., dacă $X \in C([a,b], P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n))$ are proprietatea*

$$H(X(t), \int_a^t K(t,s,X(s))ds) \leq \varphi(t), \text{ oricare ar fi } t \in [a,b]$$

*atunci există $c_\varphi > 0$ astfel încât*

$$H(X(t), X^*(t)) \leq c_\varphi \cdot \varphi(t), \text{ oricare ar fi } t \in [a,b],$$

*(unde $X^*$ notează unica soluţie a ecuaţiei (3.1.2) obţinută conform Teoremei 3.1.5).*

## 3.2 Problema lui Cauchy pentru ecuaţii diferenţiale în spaţii de funcţii multivoce

În acest paragraf vom prezenta o aplicaţie a teoremelor din secţiunea anterioară la existenţa, unicitatea şi aproximarea soluţiei problemei Cauchy.

Considerăm problema Cauchy relativ la o ecuaţie diferenţială în spaţii de funcţii multivoce:

$$\left\{ \begin{array}{r} D_H U = F(t,U), \ t \in J \\ U(t_0) = U^0 \end{array} \right. \tag{3.2.7}$$

unde $U^0 \in P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$, $t_0 \geq 0$, $J = [t_0, t_0 + a]$, $a > 0$,

$F \in C(J \times P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n), P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n))$ şi $D_H$ este derivata Hukuhara a lui $U$.

Considerăm următoarele ecuaţii în spaţii de funcţii multivoce:

$$U(t) = U^0 + \int_{t_0}^t D_H(U(s))ds, \ t \in J, \tag{3.2.8}$$

$$U(t) = U^0 + \int_{t_0}^t F(s, U(s))ds, \ t \in J. \tag{3.2.9}$$

**Definiţia 3.2.1** *(V. Lakshmikantham [49]) $U \in C^1(J, P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n))$ este soluţie a problemei (3.2.7)$\Longleftrightarrow$ $U$ satisface (3.2.7) oricare ar fi $t \in J$.*

**Lema 3.2.1** *(V. Lakshmikantham [49]) Dacă $U \in C^1(J, P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n))$, atunci* (3.2.7) $\Longleftrightarrow$ (3.2.8) $\Longleftrightarrow$ (3.2.9).

Vom considera pe $C(J, P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n))$ metricile $H_*^C$ şi $H_*^B$ definite astfel:

$$H_*^C(U,V) := \max_{t \in J} H(U(t), V(t)),$$

$$H_*^B(U,V) := \max_{t\in J}[H(U(t),V(t))e^{-\tau(t-t_0)}],\ \tau > 0.$$

Perechile $(C(J, P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)), H_*^C)$ şi $(C(J, P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)), H_*^B)$ formează câte un spaţiu metric complet, iar metricile $H_*^C$, $H_*^B$ sunt echivalente.

În continuare o teoremă globală de existenţă a problemei Cauchy asociată ecuaţiei diferenţiale de mulţime.

**Teorema 3.2.1** *(I.C. Tişe [99]) Considerăm problema (3.2.7) unde* $F : J \times P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ *un operator continuu şi* $U_0 \in P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$.

*Presupunem că* $F(t,\cdot)$ *este Lipschitz, i.e. există* $L \geq 0$, *astfel încât:*

$H(F(t,U), F(t,V)) \leq LH(U,V)$ *oricare ar fi* $U, V \in P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ *şi* $t \in J$.

*Atunci problema (3.2.7) are o unică soluţie* $U^*$ *şi* $U^*(t) = \lim_{n\to\infty} U_n(t)$ *oricare ar fi* $t \in J$, *unde* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C(J, P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n))$ *este definit recurent de relaţia:*

$$\left\{\begin{array}{r} U_{n+1}(t) = U^0 + \int_{t_0}^t F(s, U_n(s))ds,\ n \in \mathbb{N} \\ U^0 \in P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n). \end{array}\right. \tag{3.2.10}$$

Un rezultat, local de existenţă pentru problema Cauchy unei ecuaţii diferenţiale în spaţii de funcţii multivoce este următorul.

**Teorema 3.2.2** *(I.C. Tişe [99]) Considerăm ecuaţia* $D_H U = F(t,U)$ *şi* $\Omega \subset \mathbb{R}\times P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ *o mulţime deschisă. Fie* $F : \Omega \subset \mathbb{R} \times P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n) \to P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ *continuu. Presupunem că, oricare ar fi* $t$, *operatorul* $F(t,\cdot)$ *este L-Lipschitz cu constanta* $L > 0$.

*Atunci oricare ar fi* $(t_0, U^0) \in \Omega$ *există o unică soluţie a problemei Cauchy (3.2.7), soluţie* $U^* : [t_0, t_0 + h] \to P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ *unde* $h := min\{a, \frac{b}{M}\}$, *iar* $a, b > 0$ *şi* $M > 0$ *sunt astfel încât* $\overline{\Omega}_{a,b} := [t_0, t_0 + a] \times \overline{B}(U^0, b) \subset \Omega$ *şi* $||F(t,U)||_H \leq M$, *oricare ar fi* $(t,U) \in \overline{\Omega}_{a,b}$.

Utilizând Teorema de caracterizare pentru operatori slab Picard putem demonstra următoarea teoremă asupra mulţimii soluţiilor unei ecuaţii diferenţiale în spaţii de funcţii multivoce.

**Teorema 3.2.3** *(I.C. Tişe [99]) Considerăm ecuaţia*

$$D_H U = F(t,U),\quad t \in [a,b] \tag{3.2.11}$$

*unde* $F : [a,b] \times P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n) \to P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ *este un operator continuu. Presupunem că* $F(t,.)$ *este L-Lipschitz oricare ar fi* $t \in [a,b]$.

*Atunci:*

*(i) operatorul* $G : C([a,b], P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)) \to C([a,b], P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n))$ *definit*

$$GU(t) = U(a) + \int_a^t F(s, U(s))ds$$

*este operator slab Picard;*

(ii) *mulţimea $S$ a soluţiilor ecuaţiei (3.2.11) este infinită.*

**Observaţia 3.2.1** *Rezultatele generalizează rezultatele lui F.S. De Blasi [18].*

## 3.3 Ecuaţii funcţional-integrale în spaţii de funcţii multivoce

Fie $E$ un spaţiu Banach şi următorii operatori:
$Q : C([a,b], P_{cp,cv}(E)) \to C([a,b], P_{cp,cv}(E))$,
$G \in C([a,b] \times P_{cp,cv}(E)^3, P_{cp,cv}(E))$ şi
$K \in C([a,b] \times [a,b] \times P_{cp,cv}(E), P_{cp,cv}(E))$.
Vom studia urmatoarea ecuaţie functional-integrală:

$$X(t) = G(t, Q(X)(t), X(t), X(a)) + \int_a^t K(t,s,X(s))ds, t \in [a,b]. \tag{3.3.12}$$

Printr-o soluţie a ecuaţiei de mai sus, înţelegem o funcţie $X \in C([a,b], P_{cp,cv}(E))$ care satisface relaţia (3.3.12), oricare ar fi $t \in [a,b]$.

În continuare, considerăm spaţiul Banach $C([a,b], P_{cp,cv}(E))$ cu norma $H_*^B$.

În ceea ce priveşte ecuaţia (3.3.12) presupunem că:

(i) există $L > 0$ astfel încât

$$H(Q(X)(t), Q(Y)(t)) \leq LH(X(t), Y(t)),$$

oricare ar fi $X, Y \in C([a,b], P_{cp,cv}(E))$, $t \in [a,b]$;

(ii) există $L_1 > 0, L_2 > 0$ astfel încât
$H(G(t,U_1,V_1,W), G(t,U_2,V_2,W)) \leq L_1 H(U_1,U_2) + L_2 H(V_1,V_2)$,
oricare ar fi $t \in [a,b], U_i, V_i, W \in P_{cp,cv}(E), i \in \{1,2\}$;

(iii) $L_1 L + L_2 < 1$;

(iv) există $L_3 > 0$ astfel încât

$$H(K(t,s,U), K(t,s,V)) \leq L_3 H(U,V),$$

oricare ar fi $t, s \in [a,b]$ şi $U, V \in P_{cp,cv}(E)$;

(v) $G(a, Q(X)(a), X(a), X(a)) = X(a)$, oricare ar fi $X \in C([a,b], P_{cp,cv}(E))$.

Folosind din nou Teorema de caracterizare, avem următorul rezultat.

**Teorema 3.3.1** *(I.C. Tişe [99]) Considerăm ecuaţia (3.3.12) şi presupunem că condiţiile (i)-(v) au loc. Dacă $S \subset C([a,b], P_{cp,cv}(E))$ este mulţimea soluţiilor ecuaţiei, atunci $card(S) = card(P_{cp,cv}(E))$ şi prin urmare mulţimea $S$ a soluţiilor ecuaţiei (3.3.12) este infinită.*

O teoremă de dependenţă de date pentru ecuaţia (3.3.12).

**Teorema 3.3.2** *(I.C. Tişe [99]) Considerăm ecuaţiile*

$$X(t) = G_1(t, Q_1(X)(t), X(t), X(a)) + \int_a^t K_1(t, s, X(s))ds, t \in [a,b], \tag{3.3.13}$$

$$X(t) = G_2(t, Q_2(X)(t), X(t), X(a)) + \int_a^t K_2(t, s, X(s))ds, t \in [a,b] \tag{3.3.14}$$

*unde operatorii $G_1, G_2, Q_1, Q_2, K_1, K_2$ satisfac condiţiile (i)-(v).*

*Fie $S_1$ o mulţime a soluţiei ecuaţiei (3.3.13) şi $S_2$ o mulţime a soluţiei a ecuaţiei (3.3.14). Presupunem că există $\eta_1, \eta_2, \eta_3 > 0$, astfel încât:*

*(a)* $H(G_1(t, U_1, U_2, U_3), G_2(t, U_1, U_2, U_3)) \leq \eta_1$ *oricare ar fi* $t \in [a,b]$, $U_1, U_2, U_3 \in P_{cp,cv}(E)$,

*(b)* $H_*^C(Q_1(X), Q_2(X)) \leq \eta_2$, *oricare ar fi* $X \in C([a,b], P_{cp,cv}(E))$

*(c)* $H(K_1(t, s, U), K_2(t, s, U)) \leq \eta_3$, *oricare ar fi* $t, s \in [a,b]$, $U \in P_{cp,cv}(E)$.

*Atunci*

$$H_*^B(S_1, S_2) \leq [\eta_1 + \eta_2 L_1 + (b-a)\eta_3] \cdot max\{c_1, c_2\}$$

*unde* $c_i := \frac{1}{1-L_{A_i}}$ *cu* $L_{A_i} == L_1^i L^i + L_2^i + \frac{L_3^i}{\tau}$, $i \in \{1, 2\}$.

**Observaţia 3.3.1** *Rezultatele de mai sus extind rezultatele din cazul univoc dat de I.A. Rus [76].*

În ultima parte a acestei secţiuni vom studia problema Cauchy pentru o ecuaţie funcţional-integrală în spaţii de funcţii multivoce care apare în biomatematică.

Fie

$$(3.3.15)\qquad \begin{cases} X(t)=\int_{t-\tau}^{t}F(s,X(s))ds,\ t\in[0,T] \\ X(t)=\varphi(t),\ t\in[-\tau,0] \end{cases}$$

unde $F:[-\tau,T]\times P_{cp,cv}(\mathbb{R}_+)\to P_{cp,cv}(\mathbb{R}_+)$, $\varphi:[-\tau,0]\to P_{cp,cv}(\mathbb{R}_+)$ sunt operatori continui. De asemenea, presupunem că $\varphi(0)=\int_{-\tau}^{0}F(s,\varphi(s))ds$.

Astfel are loc următoarea teoremă:

**Teorema 3.3.3** *(I.C. Tişe [99]) Considerăm problema Cauchy (3.3.15).*
*Presupunem că:*

*(i)* $F:[-\tau,T]\times P_{cp,cv}(\mathbb{R}_+)\to P_{cp,cv}(\mathbb{R}_+)$, $\varphi:[-\tau,0]\to P_{cp,cv}(\mathbb{R}_+)$ *este continuă;*

*(ii)* $\varphi(0)=\int_{-\tau}^{0}F(s,\varphi(s))ds$;

*(iii) există* $k\in L^1[-\tau,T]$ *astfel încât* $H(F(s,A),F(s,B)\le k(s)H(A,B)$, *oricare ar fi* $A,B\in P_{cp,cv}(\mathbb{R}_+)$ *şi* $s\in[-\tau,T]$.

*Atunci problema (3.3.15) are o soluţie unică.*

În continuare un rezultat de stabilitate Ulam-Hyers-Rassias în sens generalizat.

**Teorema 3.3.4** *(I.C. Tişe [100]) Fie ecuaţia*

$$(3.3.16)\qquad X(t)=\int_{t-\tau}^{t}F(s,\varphi(s))ds,\ \text{unde } \tau>1,\quad t,s\in[-\tau,T].$$

*Presupunem că:*

*(i)* $F:[-\tau,T]\times P_{cp,cv}(\mathbb{R}_+)\to P_{cp,cv}(\mathbb{R}_+)$, *este continuu;*

*(ii) există* $k\in L^1[-\tau,T]$ *astfel încât* $H(F(s,A),F(s,B)\le k(s)H(A,B)$, *oricare ar fi* $A,B\in P_{cp,cv}(\mathbb{R}_+)$ *şi* $s\in[-\tau,T]$;

*(iii)* $\varphi\in C((-\tau,T),P_{cp,cv}(\mathbb{R}_+))$;

*(iv) există* $\lambda_\varphi>0$ *astfel încât:* $\int_{t-\tau}^{t}\varphi(s)ds\le\lambda_\varphi\cdot\varphi(t)$.

*Atunci ecuaţia integrală (3.3.16) este Ulam-Hyers-Rassias stabilă în sens generalizat relativ la* $\varphi$, *i.e., există* $c_{F,\varphi}>0$ *astfel încât pentru orice soluţie* $Y\in C^1([-\tau,T],P_{cp,cv}(\mathbb{R}_+))$ *a inecuaţiei*

$$H(Y(t),\int_{t-\tau}^{t}F(s,Y(s))ds)\le\varphi(t),\ \text{oricare ar fi } t\in[-\tau,T]$$

*care are proprietatea că* $Y(0)=\int_{-\tau}^{0}F(s,Y(s))ds$, *există o soluţie* $X^*\in C^1([-\tau,T],P_{cp,cv}(\mathbb{R}_+))$ *a ecuaţiei (3.3.16) astfel încât:*

$$H(Y(t),X^*(t))\le c_{F,\varphi}\cdot\varphi(t),\ \text{oricare ar fi } t\in[0,T].$$

**Observaţia 3.3.2** *Rezultatele de mai sus extind rezultatele din cazul univoc dat în R. Precup [74], J. Vasundhara Devi, A.S Vatsala [102].*

# Capitolul 4

# Proprietăţi calitative ale soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale în spaţii de funcţii multivoce

În acest capitol sunt prezentate unele proprietăţi calitative pentru mulţimea soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale în spaţii de funcţii multivoce. Primul paragraf al acestui capitol este dedicat pentru leme de tip Gronwall şi teoreme de comparaţie, iar în următorul paragraf discutăm dependenţa continuă de date a soluţiei ecuaţiilor diferenţiale în spaţii de funcţii multivoce.

Contribuţiile proprii din acest capitol sunt Teorema 4.1.1, Teorema 4.1.2, Teorema 4.1.4, Teorema 4.1.5, Teorema 4.2.1, rezultate care sunt cuprinse în lucrările I.C Tişe [95], [97].

Rezultatele obţinute în acest capitol extind şi generalizează unele teoreme date în prealabil în lucrarile: J.P. Aubin, H. Frankovska [5], A. J. Brandao Lopes Pinto, F. S. De Blasi, F. Iervillino [12], C. Chifu, G. Petruşel [15], A. Filippov [25], G. N. Galanis, T. G. Bhaskar, V. Lakshmikantham [32], M. Hukuhara [42], N.D. Phua, L.T. Quang, T.T. Tung [62], D. O'Regan, R. Precup [63], A. Petruşel [65], I.A. Rus [76], [79], [80], M.A. Şerban [92], N.N. Tu, T.T. Tung [101].

## 4.1 Proprietăţii obţinute prin leme de tip Gronwall

Considerăm următoarea problemă Cauchy asociată unei ecuaţii diferenţiale în spaţii de funcţii multivoce:

$$
\begin{cases} D_H U = F(t,U), \ t \in J \\ \qquad\qquad U(t_0) = U^0 \end{cases} \tag{4.1.1}
$$

unde $U^0 \in P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$, $t_0 \geq 0$, $J = [t_0, t_0 + a]$, $a > 0$, $D_H$ derivata Hukuhara a lui $U$ şi $F : J \times P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n) \to P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ operator multivoc continuu.

Reamintim că, printr-o soluţie a problemei (4.1.1) înţelegem o funcţie $U : J \to P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ continuă şi diferenţiabilă ce satisface (4.1.1) pentru orice $t \in J$.

Asociem problemei (4.1.1) urmatoarea ecuaţie integrală:

$$
U(t) = U^0 + \int_{t_0}^{t} F(s, U(s))ds, \ \ t \in J \tag{4.1.2}
$$

unde integrala care apare este Hukuhara (vezi [42]).

**Lema 4.1.1** *(V. Lakshmikantham [49]) Dacă $U : J \to P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ este continuu diferenţiabilă, atunci avem:*

$$
U(t) = U^0 + \int_{t_o}^{t} D_H U(s)ds, \ \ t \in [a,b].
$$

**Lema 4.1.2** *(V.Lakshmikantham [49]) Problema (4.1.1) şi ecuaţia (4.1.2) sunt echivalente.*

Pe $C(J, P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n))$ considerăm metrica $H_*^B$ definită prin:

$$
H_*^B(U,V) := \max_{t \in [t_0, t_0+a]} [H(U(t), V(t))e^{-\tau(t-t_0)}], \ \tau > 0.
$$

Avem că $(C(J, P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)), H_*^B)$ este spaţiu metric complet.

Teorema de existenţă şi unicitate a soluţiei problemei (4.1.1), obţinută în capitolul 3 este următoarea.

**Teorema 4.1.1** *(I.C. Tişe [97]) Considerăm problema (4.1.1) şi*
*$F : J \times P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ un operator multivoc.*
*Presupunem că:*

*(i) $F$ este continuu pe $J \times P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ şi $U^0 \in P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$;*

*(ii) $F(t,\cdot)$ este Lipschitz, adică există $L \geq 0$ astfel încât*

$$
H(F(t,U), F(t,V)) \leq LH(U,V)
$$

*oricare ar fi $U, V \in P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ şi $t \in J$.*

*Atunci problema (4.1.1) are o unică soluţie $U^*$ şi $U^*(t) = \lim_{n\to\infty} U_n(t)$, unde $U_n \in C(J, P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n))$ este definită recurent de relaţia:*

$$\begin{cases} U_{n+1}(t) = U^0 + \int_{t_0}^{t} F(s, U_n(s))ds, \ n \in \mathbb{N} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad U^0 \in P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n). \end{cases}$$

Considerăm următoarele ecuaţii integrale:

$$U(t) = U^0 + \int_{t_0}^{t} D_H(U(s))ds, \ t \in J \tag{4.1.3}$$

$$U(t) = U^0 + \int_{t_0}^{t} F(s, U(s))ds, \ t \in J. \tag{4.1.4}$$

**Lema 4.1.3** *(V.Lakshmikantham [49]) Dacă $U \in C^1(J, P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n))$, atunci* (4.1.1) $\Longleftrightarrow$ (4.1.3) $\Longleftrightarrow$ (4.1.4).

Considerăm pe $P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ relaţia de ordine " $\leq_m$ " definită prin:

$$U, V \in P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n) : U \leq_m V \Longleftrightarrow U \subseteq V.$$

**Definiţia 4.1.1** *Un operator $F(t, \cdot) : J \times P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n) \to P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$, este crescător dacă:*

$$A, B \in P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n), \ A \leq_m B \Rightarrow F(t, A) \leq_m F(t, B), \ \textit{oricare ar fi } t \in J.$$

Definim pe $C(J, P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n))$ o relaţie de ordine " $\leq$ ":

$$X, Y \in C(J, P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)), \ X \leq Y \Leftrightarrow X(t) \leq_m Y(t), \ \text{oricare ar fi } t \in J.$$

Spaţiul $(C(J, P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)), H_*^B, \leq)$ este un L-spaţiu ordonat.

Fie $(X, d, \leq)$ un spaţiu metric ordonat şi $T : X \to X$ un operator.

Notăm:

$(UF)_T := \{x \in X | Tx \leq x\}$ mulţimea suprapunctelor fixe pentru T;

$(LF)_T := \{x \in X | Tx \geq x\}$ mulţimea subpunctelor fixe pentru T.

În ceea ce urmează vom prezenta lema abstractă de tip Gronwall:

**Lema 4.1.4** *(I. A. Rus [78]) Fie $(X, d, \leq)$ un L-spaţiu ordonat şi $T : X \to X$ un operator. Presupunem că:*

*(i) $T$ este operator Picard;*

*(ii) $T$ este crescător.*

*Atunci* $(LF)_T \leq x_T^* \leq (UF)_T$, *unde* $x_T^*$ *este unicul punct fix al operatorului* $T$.

Dorim să aplicăm lema abstractă problemei Cauchy (4.1.1).

**Teorema 4.1.2** *(I.C. Tişe [97]) Fie problema Cauchy (4.1.1).*
*Presupunem că:*

*(i)* $F(t,\cdot) : J \times P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n) \to P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ *este L-Lipschitz oricare ar fi* $t \in J$;

*(ii)* $F(t,\cdot) : J \times P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n) \to P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ *operator monoton crescător oricare ar fi* $t \in J$;

*(iii)* $F$ *este continuă pe* $J \times P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ *şi* $U^0 \in P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$.

*Atunci avem:*

$$(LS)_{(1)} \leq U^* \leq (US)_{(1)}$$

*unde* $U^*$ *este unica soluţie a problemei (4.1.1) şi* $(LS)_{(1)}$ *respectiv* $(US)_{(1)}$ *reprezintă mulţimea subsoluţie respectiv mulţimea suprasoluţiei problemei (4.1.1).*

În ceea ce urmeaza vom prezenta teorema abstractă de comparaţie.

**Teorema 4.1.3** *(I. A. Rus [78]) Fie* $(X, d, \leq)$ *un L-spaţiu ordonat şi* $T_1, T_2 : X \to X$ *doi operatori. Presupunem că:*

*(i)* $T_1$ *şi* $T_2$ *sunt operatori Picard;*

*(ii)* $T_1$ *este crescător;*

*(iii)* $T_1 \leq T_2$.

*Atunci* $x \leq T_1 x \Rightarrow x \leq x_{T_2}^*$.

Are loc următoarea teoremă.

**Teorema 4.1.4** *(I.C. Tişe [97]) Fie* $F, G : J \times P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n) \to P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$. *Considerăm următoarele două probleme Cauchy:*

(4.1.5)
$$\begin{cases} D_H U = F(t, U), \ t \in J \\ U(t_0) = U^0 \end{cases}$$

(4.1.6)
$$\begin{cases} D_H V = G(t, V), \ t \in J \\ V(t_0) = V^0 \end{cases}$$

*unde* $U^0, V^0 \in P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$, $t_0 \geq 0$, $J = [t_0, t_0 + a]$, $a > 0$.
*Presupunem că:*

*(i) $F$ este continuă pe $J \times P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ şi $F(t,\cdot)$ este Lipschitz;*

*(ii) $G$ este continuă pe $J \times P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$, $V^0 \in P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ şi $G(t,\cdot)$ este Lipschitz;*

*(iii) $F(t,\cdot)$ este crescătoare pentru oricare ar fi $t \in J$;*

*(iv) $F \subseteq G$.*

*Atunci $D_H U \leq_m F(t,U) \Longrightarrow U \leq V^*$ unde $V^*$ este unica soluţie a problemei (4.1.6).*

În continuare prezentăm lema abstractă Gronwall pentru operatori slab Picard.

**Lema 4.1.5** *(I. A. Rus [78]) Fie $(X, d, \leq)$ un L-spaţiu ordonat şi $T : X \to X$ un operator. Presupunem că:*

*(i) $T$ este operator slab Picard;*

*(ii) $T$ este crescător.*

*Atunci*

*(a) $x \leq Tx \Rightarrow x \leq T^\infty x$;*

*(b) $x \geq Tx \Rightarrow x \geq T^\infty x$;*

*(b) dacă există $x \in (LF)_T$ şi $y \in (UF)_T$ astfel încât $x \leq y$ atunci*
*$x \leq T(x) \leq ... \leq T^n(x) \leq ... \leq T^\infty(x) \leq T^\infty(y) \leq ... \leq T^n(y) \leq ... \leq T(y) \leq y$.*

Vom aplica lema abstractă de comparaţie de mai sus la problema Cauchy (4.1.1).

**Teorema 4.1.5** *(I.C. Tişe [97]) Considerăm ecuaţia*

$$D_H U = F(t,U), \quad t \in J \tag{4.1.7}$$

*Presupunem că:*

*(i) $F(t,.) : J \times P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n) \to P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ este Lipschitz, oricare ar fi $t \in J$;*

*(ii) $F(t,.) : J \times P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n) \to P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ este crescătoare, oricare ar fi $t \in J$;*

*(iii) $F$ este continuă pe $J \times P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$.*

*Atunci*

*(i) dacă $V$ este subsoluţie a ecuaţiei (4.1.7) $\Rightarrow V \leq U_V^*$;*

*(ii) dacă $V$ este suprasoluţie a ecuaţiei (4.1.7) $\Rightarrow V \geq U_V^*$,*

*unde $U_V^*$ este limita uniformă a şirului definit recurent astfel*

$$\begin{cases} U_{n+1}(t) = V(t_0) + \int_{t_0}^{t} F(s, U_n(s))ds, \ t \in J \\ U(t_0) = V; \end{cases}$$

*(iii) dacă $U_1, U_2 \in C^1(J, P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n))$ sunt două soluţii pentru (4.1.7) astfel încât $U_1(t_0) \leq_m U_2(t_0)$ atunci $U_1 \leq U_2$.*

## 4.2 Dependenţa de date a soluţiei ecuaţiilor diferenţiale în spaţii de funcţii multivoce

Considerăm problemele Cauchy:

$$\begin{cases} D_H U = F(t, U) \\ U(a) = U^0 \end{cases} \tag{4.2.8}$$

$$\begin{cases} D_H U = G(t, U) \\ U(a) = V^0 \end{cases} \tag{4.2.9}$$

unde $F : [a, b] \times P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n) \to P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ este un operator multivoc continuu, $U^0, V^0 \in P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$.

Considerăm, pe $C([a, b], P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n))$ metrica $H_*^C$ definită astfel:

$$H_*^C(U, V) := \max_{t \in [a,b]} H(U(t), V(t)).$$

Perechea $(C([a, b], P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)), H_*^C)$ este spaţiu Banach.

Un rezultat de dependenţă de date pentru soluţia problemei Cauchy (4.2.8) este următorul:

**Teorema 4.2.1** *(I.C. Tişe [95]) Fie $F, G : [a, b] \times P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n) \to P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$, continue. Considerăm problemele Cauchy (4.2.8) şi (4.2.9). Presupunem:*

*(i) există $k_1 > 0$ astfel încât $H(F(t, U), F(t, V)) \leq k_1 H(U, V)$, oricare ar fi $U, V \in P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$, oricare ar fi $t \in [a, b]$. Notăm prin $U_F^*$ unica soluţie a problemei* (4.2.8)*;*

*(ii) Există $\eta_i > 0$, $i = 1, 2$ astfel încât:*
*$H(F(t, U), G(t, U)) \leq \eta_1$, oricare ar fi $(t, U) \in [a, b] \times P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$*
*şi $H(U^0, V^0) \leq \eta_2$;*

*(iii) Există $U_G^*$ o soluţie a problemei* (4.2.9).

*Atunci*

$$H_*^C(U_F^*, U_G^*) \leq \frac{\eta_2 + \eta_1(b-a)}{1 - k_1(b-a)}.$$

**Observaţia 4.2.1** *Rezultate asemănătoare în cazul unor ecuaţii diferenţiale impulsive în spaţii de funcţii multivoce apar în lucrarea [56].*

# Bibliografie


[1] M.C. Anisiu, *Some properties of the fixed points set for multifunctions*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Mathematica, 25(1980), 77-79.

[2] M.C. Anisiu, *Point-to-set mappings. Continuity*, Seminar on Fixed Point Theory, Babeş-Bolyai Univ., (1981), 1-100.

[3] J.-P. Aubin, *Viability Theory,* Birkhauser, Basel, 1991.

[4] J.-P. Aubin, A. Cellina, *Differential Inclusions*, Springer, Berlin, 1984.

[5] J.-P. Aubin, H.Frankovska: *Set-Valued Analysis*, Birkhauser, Basel, 1990.

[6] J.-P. Aubin, J. Siegel, *Fixed points and stationary points of dissipative multivalued maps*, Proc. Amer. Math. Soc., 78 (1980), 391-398.

[7] R.J. Aumann, *Integrals of set-valued functions*, J. Math. Anal. Appl. 12 (1965), 1-12.

[8] H.T. Banks, M.Q. Jacobs, *A differential calculus for multifunctions*, J.Math. Anal. Appl., 29 (1970), 246-272.

[9] G. Beer, *Topologies on Closed and Closed Convex Sets*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1993.

[10] C. Berge, *Espaces topologiques. Fonctions multivoques*, Dunod, Paris, 1959.

[11] G. Bouligand, *Sur la semi-continuité d'inclusions et quelques sujets connexes*, Enseignement Mathématique, 31 (1932), 14-22.

[12] A.J. Brandao Lopes Pinto, F.S. De Blasi, F. Iervillino, *Uniqueness and Existence Theorems for Differential Equations with Compact Convex Valued Solutions*, Boll. Unione Mat. Ital., IV. Ser. 3 (1970), 47-54.

[13] C. Castaing, M. Valadier, *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*, Springer, Berlin, 1977.

[14] A. Cernea, *Incluziuni diferenţiale şi aplicaţii*, Editura Univ. Bucureşti, 2000.

[15] C. Chifu, G. Petruşel, *Existence and data dependence of fixed points for contractive type multivalued operators*, Fixed Point Theory and Applications, 2007, 1-8.

[16] A. Constantin, *Stability of solution set of differential equations with multivalued right-hand side*, J. Diff. Eq., 114 (1994), 243-252.

[17] H. Covitz, S.B. Nadler jr., *Multivalued contraction mappings in ge-neralized metric spaces*, Israel J. Math., 8 (1970), 5-11.

[18] F. S. De Blasi, F. Iervolino, *Equazioni differenziali con soluzioni a valore compatto convesso*, Boll. Un. Mat. Ital., 4 (1969),491-501.

[19] F.S. De Blasi, *On the differentiablity of multifunctions*, Pacific. Math., 66 (1976), 67-81.

[20] F.S. De Blasi, P.Gr. Georgiev, *Kakutani-Fan's fixed point theorem in hyperspaces*, Tokyo J. Math. 24 (2001), No. 2, 331-342.

[21] F.S. De Blasi, G. Pianigiani, *Approximate selections in $\varphi$-convex metric spaces and topological degree*, Topol. Methods Nonlinear Anal., 24 (2004), No. 2, 347-375.

[22] F.S. De Blasi, *Semifixed sets of maps in hyperspaces with application to set differential equations*, Set-Valued Anal., 14 (2006), No. 3, 263-272.

[23] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer, Berlin, 1985.

[24] K. Deimling, *Multivalued Differential Equations*, W. de Gruyter 1992.

[25] A. Filippov, *Classical solutions of differential equations with multivalued right-hand side*, SIAM J. Control, 5 (1967), 609-621.

[26] M. Fréchet, *Les espaces abstraits*, Gauthier-Villars, Paris, 1928.

[27] M. Frigon, *Fixed point results for generalized contractions in gauge spaces and applications*, Proc. Amer. Math. Soc., 128 (2000), 2957-2965.

[28] M. Frigon, *Fixed point results for multivalued contractions on gauge spaces*, Set Valued Mappings with Applications in Nonlinear Analysis (R.P. Agarwal and D. O'Regan (Eds.)), Taylor & Francis, London, 2002, 175-182.

[29] M. Frigon, *Fixed point and continuation results for contractions in metric and gauge spaces*, Banach Center Publ., 77 (2007), 89-114.

[30] M. Frigon, A. Granas, *Résultats du type de Leray-Schauder pour les contractions multivoques*, Topol. Meth. Nonlinear Anal. 4 (1994), 197-208.

[31] G.N. Galanis, T.G. Bhaskar, V. Lakshmikantham, P.K. Palamides, *Set valued functions in Fréchet spaces: continuity, Hukuhara differentiability and applications to set differential equations*, Nonlinear Anal., 61 (2005), No. 4, 559-575.

[32] G. N. Galanis, T. G. Bhaskar, V. Lakshmikantham, *Set differential equations in Fréchet spaces*, J. Appl. Anal. 14 (2008), No 1, 103-113.

[33] T. Gnana Bhaskar, J. Vasundhara Devi, *Stability Criteria for Set Differential Equations*, Mathematical and Computer Modelling, 41 (2005) 1371-1378.

[34] K. Goebel, W.A. Kirk, *Topics in Metric Fixed Point Theory*, Cambridge University Press, London, 1990.

[35] L. Górniewicz, *Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999.

[36] L. Górniewicz, *Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings*, (second edition), Topological Fixed Point Theory and Its Applications, 4, Springer, Dordrecht, 2006.

[37] A. Granas, J. Dugundji, *Fixed Point Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[38] C. J. Himmelberg, *Fixed points for compact multifunctions*, J. Math. Anal. Appl., 38 (1972), 205-207.

[39] C.J. Himmelberg, F.S. Van Vieck, *Lipschitzian generalized differential equations*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 48(1973), 159-169.

[40] S. Hu, N. S. Papageorgiou, *Handbook of multivalued analysis, Vol. I and II*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997, 1999.

[41] M. Hukuhara, *Sur l'application semi-continue dont la valeur est un compact convexe*, Funkcialaj Ekvacioj, 10 (1967), 43-66.

[42] M. Hukuhara, *Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe*, Funkcialaj Ekvacioj, 10 (1967), 205-229.

[43] S. Kakutani, *A generalization of Brouwer's fixed point theorem*, Duke Math. J., 8 (1941), 457-459.

[44] M. Kisielewicz, *Differential inclusions and optimal control*, Kluwer Acad. Press, 1991.

[45] K. Kuratowski, *Les fonctions semi-continues dans l'espace des ensemles fermés*, Fund. Math, 18 (1932), 148-159.

[46] K. Kuratowski, C. Ryll-Nardzewski, *A general theorem on selectors*, Bull. Polon. Acad. Sci., 13 (1965), 397-403.

[47] V. Lakshmikantham, A.N. Tolstonogov, *Existence and interrelation between set and fuzzy differential equations*, Nonlinear Anal., 55 (2003), 225-268.

[48] V. Lakshmikantham, T. Gnana Bhaskar, J. Vasundhara Devi, *Nonlinear variation of parameters formula for set differential equations in a metric space*, Nonlinear Anal., 63 (2005), 735-744.

[49] V. Lakshmikantham, T. Gnana Bhaskar, J. Vasundhara Devi, *Theory of Set Differential Equations in Metric Spaces*, Cambridge Scientific Publishers 2006.

[50] N Lungu, *Qualitative problems in the theory of hyperbolic differential equations*, Cluj-Napoca Digital Data Publishing 2006.

[51] N. Lungu, *On some Volterra integral inequalities*, Fixed Point Theory 8 (2007), No 1, 39-45.

[52] N. Lungu, I.A. Rus, *On a functional Volterra-Fredholm integral equation, via Picard operators*, J. Math. Inequal. 3 (2009), No. 4, 519-527.

[53] V. Lupulescu, *Successive approximations to solutions of set differential equations in Banach spaces*, Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal., 15 (2008), No. 3, 391-401.

[54] J. Matkowski, *Integrable solutions of functional equations,* Dissertationes Math., 127 (1975).

[55] B. L. McAllister, *Hyperspaces and multifunctions, the first half century (1900-1950)*, Nieuw Archief Voor Wiskunde, 26 (1978), No. 3, 309-329.

[56] F. A. McRae, J. Vasundhara Devi, *Impulsive set differential equations with delay*, Appl. Anal. 84 (2005), No. 4, 329-341.

[57] E. Michael, *Continuous selections(I)*, Ann. Math., 63 (1956), 361-382.

[58] Şt. Mirică, *Control optimal şi aplicaţii,* Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1990.

[59] G. Moţ, A. Petruşel, G. Petruşel, *Topics in Multivalued Analysis and Applications to Mathematical Economics*, House of the Book of Science, 2007.

[60] A. Muntean, *Fixed Point Principles and Applications to Mathematical Economics*, Cluj University Press, Cluj-Napoca, 2002.

[61] S.B. Nadler jr., *Multivalued contraction mappings*, Pacific J. Math., 30 (1969), 475-488.

[62] N.D. Phua, L.T. Quang, T.T. Tung, *Stability criteria for set control differential equations*, Nonlinear Anal., 69 (2008) 3715-3721.

[63] D. O'Regan, R. Precup, *Fixed point theorems for set-valued maps and existence principles for integral inclusions*, J. Math. Anal. Appl., 245(2000), 594-612.

[64] D. O'Regan, A. Petruşel, *Fixed point theorems for generalized contractions in ordered metric spaces*, J. Math. Anal. Appl., 341 (2008), 1241-1252.

[65] A. Petruşel, *Operatorial Inclusions*, House of the Book of Science, 2002.

[66] A. Petruşel, *Multi-funcţii şi aplicaţii*, Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 2002.

[67] A. Petruşel, *Multivalued weakly Picard operators and applications*, Scientiae Math. Japonicae, 59 (2004), 169-202.

[68] A. Petruşel, *Fixed points and integral inclusions*, Revue d'Analyse Numerique et de Theorie de l'Approximation, 35 (2006), 183-188.

[69] A. Petruşel, G. Moţ, *Multivalued Analysis and Mathematical Economics*, House of the Book Science, Cluj-Napoca, 2004.

[70] A. Petruşel, G. Petruşel, *Selection theorems for multivalued generalized contractions*, Math. Moravica, 9 (2005), 43-52.

[71] A. Petruşel, G. Petruşel, G. Moţ, *Topics in Nonlinear Analysis and Applications to Mathematical Economics*, House of the Book Science, Cluj-Napoca, 2007.

[72] A. Petrusel, I.A. Rus, *Well-posedness of the fixed point problem for multivalued operators*, Applied Analysis and Differential Equations (O. Carja and I. I. Vrabie eds.), World Scientific 2007, pp. 295-306.

[73] A. Petruşel, A. Sîntămărian, *Single-valued and multi-valued Caristi type operators*, Publ. Math. Debrecen, 60 (2002), 167-177.

[74] R. Precup, *Methods in Nonlinear Integral Equations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.

[75] I.A. Rus, *Principii şi aplicaţiii ale teoriei punctului fix*, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1979.

[76] I.A. Rus, *On a class of functional-integral equations*, Seminaire de la Theorie de la Meilleure Approximation Convexite et Optimisation, Cluj-Napoca 2000, 279-288.

[77] I.A. Rus, *Generalized Contractions and Applications*, Cluj University Press, 2001.

[78] I.A. Rus, *Picard operators and applications*, Scientia Math. Japonicae, 58 (2003), 191-219.

[79] I. A. Rus, *Fixed points, upper and lower fixed points: abstract Gronwall lemmas*, Carpathian J. Math., 20 (2004), No.1, 125-134.

[80] I.A. Rus, *Fixed Point Structures Theory*, Cluj University Press, Cluj-Napoca, 2006.

[81] I.A. Rus, *The theory of a metrical fixed point theorem: theoretical and applicative relevances*, Fixed Point Theory 9 (2008), No. 2, 541-559.

[82] I.A. Rus, *Remarks on Ulam Stability of the Operatorial Equations*, Fixed Point Theory 10 (2009), No. 2, 305-320.

[83] I.A. Rus,*Gronwall Lemma Approach to the Hyers-Ulam-Rassias Stability of an Integral Equation*, Nonlinear Analysis and Variational Problems, 35 (2010), 147-152.

[84] I.A. Rus, S. Mureşan, *Data dependence of the fixed points set of some weakly Picard operators*, "Tiberiu Popoviciu" Itinerant Seminar of Functional Equations, Approximation and Convexity, Cluj-Napoca, 2000, 201-207.

[85] I.A. Rus, A. Petruşel and A. Sîntămărian, *Data dependence of the fixed point set of some multivalued weakly Picard operators*, Nonlinear Anal., 52 (2003), 1947-1959.

[86] I.A. Rus, A. Petruşel, G. Petruşel, *Fixed Point Theory 1950-2000: Romanian Contributions*, House of the Book of Science Cluj-Napoca, 2002.

[87] I.A. Rus, A. Petrusel, G. Petrusel, *Fixed Point Theory*, Cluj University Press, 2008

[88] J. Saint-Raymond, *Multivalued contractions*, Set-Valued Analysis, 2 (1994), 559-571.

[89] S.P. Singh, B. Watson, P. Srivastava, *Fixed Point Theory and Best Approximation: The KKM-map Principle*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997.

[90] R.E. Smithson, *Fixed points for contractive multifunctions*, Proc. A.M.S., 27(1971), 192-194.

[91] R.E. Smithson, *Multifunctions*, Nieuw Archief voor Wiskunde, 20 (1972), 31-53.

[92] M.A. Şerban, *Ecuaţii şi sisteme de ecuaţii diferenţiale*, Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 2009.

[93] E. Tarafdar, G. X.-Z. Yuan, *Set-valued contraction mapping principle*, Applied Math. Letter, 8 (1995), 79-81.

[94] M.R. Taskovic, *A Characterization of the Class of Contraction Type Mappings*, Kobe J. of Math., 2 (1985), 45-55.

[95] **I.C. Tişe**, *Data dependence of the solutions for set differential equations*, Carpathian J. Math., 23 (2007), No. 1-2, 192-195.

[96] **I.C. Tişe**, *Semifixed sets for multivalued $\varphi$-contractions*, Creative Math.& Inf., 17 (2008), No. 3, 516-520.

[97] **I.C. Tişe**, *Gronwall lemmas and comparison theorems for the Cauchy problem associated to a set differential equation*, Studia Universitatis Babes-Bolyai Mathematica, 54 (2009), No. 3, 161-169.

[98] **I.C. Tişe**, *Set integral equations in metric spaces*, Math. Moravica, 13 (2009), 95-102.

[99] **I.C. Tişe**, *A fixed point approach for functional-integral set equations*, acceptat spre publicare în Demonstratio Mathematica, Vol. 44 (2011), No. 2, va apărea.

[100] **I.C. Tişe**, *Ulam-Hyers-Rassias stability for set integral equations*, trimisă spre publicare.

[101] N.N. Tu, T.T. Tung, *Stability of set differential equations and applications*, Nonlinear Anal., 71 (2009), 1526-1533.

[102] J. Vasundhara Devi, A.S. Vatsala, *A study of set differential equations with delay*, Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A. Math. Anal. 11 (2004), No. 2-3, 287-300.

[103] H.-K. Xu, *Some recent results and problems for set-valued mappings*, Advances in Mathematics Research, Vol. 1 (2002), Nova Science Publishers Inc., 31-49.

[104] H.-K. Xu, *$\varepsilon$-chainability and fixed points of set-valued mappings in metric spaces*, Math. Japonica, 39(1994), 353-356.

[105] G. X.-Z. Yuan, *KKM Theory and Applications in Nonlinear Analysis*, Marcel Dekker, New York, 1999.

[106] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications. I. Fixed Point Theorems*, Springer Verlag, New York, 1986.