UNIVERSITATEA “BABEŞ-BOLYAI” CLUJ-NAPOCA
Facultatea de Matematică şi Informatică

LUMINIŢA–IOANA COTÎRLĂ

CLASE SPECIALE DE FUNCŢII UNIVALENTE

REZUMATUL TEZEI DE DOCTORAT

Conducător ştiinţific:
PROF. UNIV. DR. GRIGORE ŞTEFAN SĂLĂGEAN

2010

Cuprins

2000 Mathematical Subject Classification: 30C45, 30C50, 31A05, 32H02

Cuvinte şi fraze cheie: funcţie univalentă, funcţie armonică, subordonare, superordonare, dominantă, operator integral, operator diferenţial, lanţ Loewner, aplicaţie aproape stelată generalizată.

Introducere

Analiza complexă este una dintre disciplinele la care şcoala românească de matematică a adus importante contribuţii şi totodată ea este o ramură a matematicii cu largi aplicaţii în diferite domenii ale ştiinţei şi tehnicii.

Teoria geometrică a funcţiilor de o variabilă complexă reprezintă o ramură aparte a analizei complexe. Bazele acestei teorii au fost puse la inceputul secolului trecut odată cu lucrările lui P. Koebe, T.H. Gromwall şi L. Bieberbach. În 1916 L.Bieberbach enunţa celebra conjectură care îi poartă numele şi care a putut fi demonstrată doar în anul 1984 de Louis de Branges. Funcţiile analitice de o variabilă complexă constituie modelul ideal al transformărilor geometrice din plan.

La dezvoltarea acestui domeniu al matematicii, un rol deosebit l-au avut şi matematicienii români. G. Călugăreanu este creatorul şcolii româneşti de teoria funcţiilor univalente care a obţinut primele condiţii necesare şi suficiente de univalenţă exprimate cu ajutorul coeficientilor, iar P. T. Mocanu a introdus clasa funcţiilor α-convexe, a abordat problema injectivităţii funcţiilor neanalitice şi a creat împreună cu S.S. Miller binecunoscuta metodă de studiu a unor clase de funcţii univalente numită ”metoda funcţiilor admisibile”, metoda subordonărilor diferenţiale, iar mai recent teoria superordonărilor diferenţiale. Folosirea metodei subordonărilor diferenţiale are un rol important atât în demonstrarea mult mai simplă a unor rezultate cunoscute deja şi sistematizarea acestora, cât şi în obţinerea multor rezultate noi.

Dintre tratatele dedicate domeniului teoriei funcţiilor univalente amintim pe cele ale lui P. Duren, A.W. Goodman, S.S. Miller şi P. Mocanu, P. Montel, C. Pommerenke.

Lucrarea cuprinde cinci capitole şi o bibliografie conţinând 124 titluri, dintre care 12 semnate de autoare, 10 ca singur autor, iar 2 în colaborare.

Primul capitol ”Noţiuni şi rezultate preliminare” cuprinde două subcapitole. În acest capitol sunt prezentate noţiuni şi rezultate de bază, deja cunoscute, necesare pe parcursul tezei.

Al doilea capitol ”Funcţii armonice” este structurat pe trei subcapitole. În primul subcapitol sunt prezentate noţiuni şi rezultate deja cunoscute despre funcţiile armonice, urmând ca în subcapitolele doi şi trei sa fie introduse rezultate originale, privind funcţiile armonice, cu ajutorul operatorului integral Sălăgean şi operatorul Sălăgean generalizat.

Al treilea capitol ”Subordonări şi superordonări diferenţiale” este structurat pe două subcapitole. În primul subcapitol ”Noţiuni introductive. Metoda subordonărilor diferenţiale. Subordonări şi superordonări diferenţiale de tip Briot-Bouquet” sunt prezentate rezultate cunoscute cu privire la subordonări şi superordonări, urmând ca în al doilea subcapitol ”Subordonări şi superordonări diferenţiale pentru funcţii analitice definite cu ajutorul operatorului integral Sălăgean” să fie introduse noi rezultate cu ajutorul operatorului integral Sălăgean.

Capitolul al patrulea ”Clase de funcţii analitice definite prin operatori” este structurat pe două subcapitole.

În primul subcapitol sunt introduse noi clase de funcţii analitice definite cu ajutorul operatorului integral Sălăgean, precum şi anumite proprietăţi ale acestor clase de funcţii prin operatorul specificat, iar în cel de-al doilea subcapitol este introdusă o nouă subclasă de funcţii analitice cu coeficienţi negativi definită prin operatorul Ruscheweyh.

Capitolul cinci este destinat funcţiilor de mai multe variabile complexe. În acest capitol sunt prezentate aplicaţii aproape stelate generalizate asociate cu extensii ale operatorilor.

Ţin să aduc pe această cale mulţumiri conducătorului ştiinţific al lucrării, Prof.univ.dr. Grigore Ştefan Sălăgean pentru ajutorul acordat în elaborarea acestei lucrări.

De asemenea aduc mulţumiri tuturor celor care m-au sprijinit şi înţeles în munca depusă pentru elaborarea acestei lucrări, precum şi întregului colectiv de la Catedra de Teoria Funcţiilor.

1 Noţiuni şi rezultate preliminare

Acest capitol conţine două subcapitole şi prezintă rezultate elementare din teoria geometrică a funcţiilor univalente.

Definiţia 1.1.1.[51] Fie D o mulţime deschisă din planul complex $\mathbb{C}$. O funcţie complexă f se numeşte olomorfă pe D daca f este derivabilă în fiecare punct z_0 din mulţimea D. Mulţimea funcţiilor olomorfe pe D se notează cu $\mathcal{H}(D)$.

Definiţia 1.1.2.[51] O funcţie complexă f se numeşte olomorfă pe o mulţime oarecare $A \subset \mathbb{C}$, dacă există o mulţime deschisă D care include pe A astfel încât f să fie olomorfă pe D.

Definiţia 1.1.3.[51] Funcţia f se numeşte olomorfă în punctul z_0 daca există o vecinătate $V \in V(z_0)$ astfel încât f să fie derivabilă în această vecinătate.

O funcţie olomorfă pe $\mathbb{C}$ se numeşte funcţie întreagă.

Definiţia 1.1.4.[51] O funcţie olomorfă (sau meromorfă) şi injectivă pe un domeniu D din $\mathbb{C}$ se numeşte univalentă în D. Notăm cu $\mathcal{H}_u(D)$ mulţimea funţiilor univalente pe domeniul D.

Definiţia 1.1.5.[51] O funcţie olomorfă (sau meromorfă) pe un domeniu D se numeşte $p-$ valentă în acest domeniu, dacă orice valoare a sa este luată în cel mult p puncte distincte din D şi există cel puţin o valoare luată în exact p puncte distincte.

Definiţia 1.1.6.[51] Fie $f : D \to \mathbb{C}, z_0 \in D$. Spunem că funcţia f este analitică în punctul z_0 sau dezvoltabilă în serie Taylor în z_0 dacă există un disc $U(z_0, R) \subset D$ astfel încât f să fie suma unei serii Taylor, adică:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in U(z_0, R).$$

Spunem că funcţia f este analitică pe D dacă este analitică în fiecare punct al lui D.

Noţiunea de funcţie univalentă ocupă un rol central în teoria geometrică a funcţiilor analitice. Prima lucrare semnificativă, care a atras atenţia asupra studiului funcţiilor univalente aparţine lui P. Koebe [61] şi a fost publicată în 1907. În prezent există numeroase tratate şi monografii dedicate studiului funcţiilor univalente, dintre care le amintim pe cele ale lui P. Montel [89], Z. Nehari [94], L.V. Ahlfors [2], Ch. Pommerenke [100], A.W. Goodman [38], P.L. Duren [30], D.J. Hallenbeck, T. H. MacGregor [48], S.S. Miller şi P.T. Mocanu [79], I. Graham şi G. Kohr [39].

Definiţia 1.1.7. Fiind date doua domenii D şi Δ din $\mathbb{C}$, o funcţie f univalentă în D astfel ca $f(D) = \Delta$ se numeşte reprezentare conformă a domeniului D pe domeniul Δ. Domeniile D şi Δ sunt conform echivalente, dacă există o reprezentare conformă a lui D pe Δ.

În cele ce urmează folosim următoarele notaţii:

$U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ (discul unitate din planul complex);

$U_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ pentru $r \in (0, 1)$ (interiorul discului unitate din planul complex);

$U^- = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ (exteriorul discului unitate din planul complex).

Vom considera de asemenea, pentru $a \in \mathbb{C}$ şi $n \in \mathbb{N}^*$, mulţimea

$$\mathcal{H}[a,n] = \{f \in \mathcal{H}(U) : f(z) = a + a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + ...\},$$

$$\mathcal{A}_n = \{f \in \mathcal{H}(U) : f(z) = z + a_{n+1} z^{n+1} + ...\}$$

şi

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1.$$

În cel de-al doilea paragraf sunt prezentate câteva clase speciale de funcţii univalente.

A. Clasele S şi Σ

Vom nota cu $S = \{f \in A : f \in \mathcal{H}_u(U)\}$ clasa funcţiilor univalente în discul unitate şi normate, cu condiţiile $f(0) = 0$ şi $f'(0) = 1$, deci funcţiile olomorfe şi univalente în U, care au dezvoltarea în serie de puteri de forma

$$f(z) = z + a_2 z^2 + ..., |z| < 1. \tag{1.1}$$

Studiul funcţiilor meromorfe şi univalente se face în paralel cu clasa S, considerând clasele

$$\Sigma = \left\{\varphi \in \mathcal{H}_u(U^-) : \varphi(\zeta) = \zeta + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{z} + ... + \frac{\alpha_n}{z^n} + ..., |\zeta| > 1\right\}$$

şi

$$\Sigma_0 = \{\varphi \in \Sigma : \varphi(\zeta) \neq 0, \zeta \in U^-\}.$$

Observaţia 1.2.1. Este uşor de observat că unei funcţii $f \in S$ îi corespunde funcţia $\varphi(\zeta) = 1/f(1/\zeta) \in \Sigma_0$ şi reciproc, dacă $\varphi \in \Sigma_0$, atunci $f(z) = 1/\varphi(1/z) \in S$, deci între clasele S şi Σ_0 exista o bijecţie, iar clasa Σ este "mai largă" decât clasa S.

B. Clasa funcţiilor stelate

Definiţia 1.2.2.[87] Fie funcţia $f \in \mathcal{H}(U)$ cu $f(0) = 0$. Spunem că funcţia f este stelată în raport cu originea (sau pe scurt, stelată) dacă f este univalentă în U şi $f(U)$ este un domeniu stelat în raport cu originea.

Noţiunea de funcţie stelată a fost introdusă de J.Alexander [5] în 1915.

Definiţia 1.2.3.[87] Se notează cu S^* clasa funcţiilor $f \in \mathcal{A}$ care sunt stelate în discul unitate, adică

$$S^* = \left\{f \in \mathcal{A} : \mathrm{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)} > 0\right\}.$$

Avem că $S^* \subset S$.

Definiţia 1.2.4.[87] Definim clasa funcţiilor stelate de ordinul α, $\alpha < 1$, ca fiind clasa

$$S^*(\alpha) = \left\{f \in \mathcal{A} : \mathrm{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)} > \alpha, z \in U\right\}.$$

C. Clasa funcţiilor convexe

Noţiunea de funcţie convexă a fost introdusă de E. Study [118] în 1913.

Definiţia 1.2.5. Funcţia $f \in \mathcal{H}(U)$ se numeşte convexă în U (sau pe scurt, convexă) dacă f este univalentă în U şi $f(U)$ este un domeniu convex.

Teorema 1.2.6.[87]*(Teorema de caracterizare analitică a convexităţii)* Fie funcţia $f \in \mathcal{H}(U)$. Atunci f este convexă dacă şi numai dacă $f'(0) \neq 0$ şi

$$\mathrm{Re}\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1 > 0, \quad z \in U. \tag{1.2}$$

Teorema 1.2.7.[5]*(Teorema de dualitate a lui Alexander)* Funcţia f este convexă în U dacă şi numai dacă funcţia $F(z) = zf'(z)$ este stelată în U.

Definiţia 1.2.8. Se notează cu K clasa funcţiilor $f \in \mathcal{A}$ care sunt convexe şi normate în discul unitate U, adică

$$K = \big\{f \in \mathcal{A} : \mathrm{Re}\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1 > 0, \quad z \in U\big\}.$$

Definiţia 1.2.9.[87] Definim clasa funcţiilor convexe de ordinul $\alpha, \alpha < 1$, ca fiind clasa

$$K(\alpha) = \big\{f \in \mathcal{A} : \mathrm{Re}\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1 > \alpha, z \in U\big\}.$$

Avem incluziunea:$K(\alpha) \subset K$.

D. Clasa funcţiilor S_m

G. Ş. Sălăgean [111] a introdus operatorul deferenţial care permite în anumite situaţii studierea simultană a claselor de funcţii stelate şi convexe, precum şi a unor subclase ale acestora.

Definiţia 1.2.10.[111] Operatorul diferenţial Sălăgean $D^m : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, este definit astfel:

$$D^0 f(z) = f(z)$$

$$D^1 f(z) = zf'(z),$$

$$D^m f(z) = D^1(D^{m-1} f(z)), m \in \mathbb{N}^*.$$

Definiţia 1.2.11.[111] Operatorul integral Sălăgean $I^m : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, este definit astfel

$$I^0 f(z) = f(z);$$

$$I^1 f(z) = If(z) = \int_0^z f(t)t^{-1}dt;$$

$$I^m f(z) = I(I^{m-1} f(z)), f \in \mathcal{A}, m \in \mathbb{N}^*.$$

Observaţia 1.2.12. Dacă $f \in \mathcal{A}, f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, z \in U$, atunci

$$D^m f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} n^m a_n z^n, z \in U.$$

Definiţia 1.2.13.[111] Spunem că funcţia $f \in \mathcal{A}$ este $m-$ stelată, $m \in \mathbb{N}$, dacă verifică

$$\mathrm{Re}\frac{D^{m+1} f(z)}{D^m f(z)} \geq 0, \quad z \in U.$$

Vom nota cu S_m clasa acestor funcţii.

Observaţia 1.2.14. Se observă că $S_0 = S^*$ şi $S_1 = K$.

Clasa funcţiilor $m-$ stelate a fost introdusă de către G.Ş. Sălăgean in [111]. G. Ş. Sălăgean a demonstrat în aceeaşi lucrare şi incluziunile $S_{m+1} \subset S_m \subseteq S_0, m \in \mathbb{N}$, ceea ce implică $S_m \subset S$, unde $m \in \mathbb{N}$.

E. Clasa funcţiilor K_m

Definiţia 1.2.15. Fiind date două funcţii $f, g \in \mathcal{A}$, de forma $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ şi $g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n$, produsul de convoluţie (sau produsul Hadamard) al lui f şi g este definit prin

$$(f * g)(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n b_n z^n.$$

Definiţia 1.2.16.[109] Se defineşte operatorul $\mathcal{D}^m : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad m \in \mathbb{N}$, prin

$$\mathcal{D}^m f(z) = \frac{z}{(1-z)^{m+1}} * f(z) = \frac{z(z^{m-1} f(z))^{(m)}}{m!}, \quad z \in U.$$

Operatorul $\mathcal{D}^m$ a fost denumit derivata de rang m a lui Ruscheweyh de către H.S.Al-Amiri [4]. Ca şi derivata Sălăgean, acest operator permite studierea simultană a mai multor clase de funcţii.

Definiţia 1.2.17.[109] Spunem că funcţia $f \in \mathcal{A}$ aparţine clasei K_m dacă satisface inegalitatea diferenţială

$$\mathrm{Re}\frac{\mathcal{D}^{m+1} f(z)}{\mathcal{D}^m f(z)} > \frac{1}{2}, \quad z \in U.$$

Observaţia 1.2.18. Se observă că $K_0 = S^*(1/2)$ şi $K_1 = K$.

Clasele $K_m \subset \mathcal{A}$ au fost studiate de S. Ruscheweyh în [109], care a demonstrat în aceeaşi lucrare şi incluziunile $K_{m+1} \subset K_m \subseteq K_0, m \in \mathbb{N}$. Prin urmare $K_m \subset S, \forall m \in \mathbb{N}$.

F. Clasa funcţiilor spiralate

Funcţiile spiralate, introduse de L. Spacek în 1932, reprezintă o generalizare naturală a funcţiilor stelate.

Numim spirală logaritmică o curbă în planul complex de forma $w(t) = w_0 e^{-\lambda t}$,
$t \in \mathbb{R}$, unde $w_0 \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ şi $\lambda \in \mathbb{C}$ cu Re $\lambda \neq 0$.

Fără a se restrânge generalitatea se poate considera $\lambda = e^{i\gamma}$, cu $\gamma \in (-\pi/2, \pi/2)$, caz în care curba $w(t) = w_0 e^{-(cos\gamma + isin\gamma)t}, t \in \mathbb{R}$ se va numi $\gamma-$ spirală. Observăm că $0-$ spiralele sunt semidrepte ce pornesc din origine şi că pentru orice număr real γ dat, cu $|\gamma| < \pi/2$, există o $\gamma-$ spirală unică astfel ca aceasta să unească originea cu un punct dat $w_0 \in \mathbb{C}^*$.

Definiţia 1.2.19.[87] Domeniul $D \subset \mathbb{C}$, care conţine originea, se numeşte domeniu spiralat de tip γ, cu $|\gamma| < \pi/2$, dacă pentru orice punct $w_0 \in D \setminus \{0\}$ arcul de $\gamma-$ spirală ce uneşte punctul w_0 cu originea este inclus în D.

Definiţia 1.2.20.[87] Spunem că funcţia $f \in \mathcal{H}(U)$, cu $f(0) = 0$, este o funcţie spiralată de tip γ în discul unitate U dacă f este univalentă în U şi domeniul $f(U)$ este un domeniu spiralat de tip γ.

Definiţia 1.2.21.[87] Spunem că funcţia $f \in \mathcal{H}(U)$, cu $f(0) = 0$, este o funcţie spiralată dacă există un număr γ, cu $|\gamma| < \pi/2$, astfel încât f să fie spiralată de tip γ.

Definiţia 1.2.22.[87] 1. Pentru $\gamma \in (-\pi/2, \pi/2)$, se notează cu $\widehat{S}_\gamma$ clasa funcţiilor spiralate de tip γ şi normate uzual în discul unitate, adică:

$$\widehat{S}_\gamma = \big\{f \in \mathcal{A} : \mathrm{Re}\big[e^{i\gamma}\frac{zf'(z)}{f(z)}\big] > 0, \quad z \in U\big\}.$$

2. Se notează cu $\widehat{S}$ clasa funcţiilor spiralate şi normate uzual în discul unitate, adică

$$\widehat{S} = \bigcup_{\gamma \in (-\pi/2, \pi/2)} \widehat{S}_\gamma.$$

Teorema 1.2.23.[87]*(Formula de structură pentru clasa $\widehat{S_\gamma}$)* Funcţia $f \in \widehat{S_\gamma}, \gamma \in \big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big)$ dacă şi numai dacă există o funcţie $\mu \in M[0, 2\pi]$ astfel încât

$$f(z) = z \exp\big\{-2\cos\gamma e^{-i\gamma}\int_0^{2\pi} \log(1 - ze^{-it})d\mu(t)\big\}, \quad z \in U, \tag{1.3}$$

unde pentru logaritm s-a ales determinarea definită de $\log 1 = 0$.

Definiţia 1.2.24.[87] Fie $f \in \mathcal{A}$ şi $n \in \mathbb{N}$. Spunem că f este o funcţie $n-$spiralată de tip $\gamma \in (-\pi/2, \pi/2)$ dacă $D^n f(z) \neq 0, z \in U$ şi

$$\mathrm{Re}\big[e^{i\gamma}\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)}\big] > 0, z \in U,$$

unde D^n este operatorul diferenţial Sălăgean.

Notăm această clasă cu $S_{\gamma,n}$.

2 Fucţii armonice

Acest capitol este format din trei subcapitole.

În primul subcapitol sunt prezentate rezultate bine cunoscute despre funcţiile armonice.

Definiţia 2.1.1.[31] Fie $u : G \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^2 pe G. Funcţia u se numeşte armonică pe G (armonică) dacă $\Delta u \equiv 0$ unde

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{2.1}$$

Δu se numeşte laplaceianul funcţiei u, iar ecuaţia $\Delta u = 0$ se numeşte ecuaţia lui Laplace.

Teorema 2.1.2.[31]*(Principiul extremului pentru funcţii armonice)* Fie $u : G \to \mathbb{R}$ o funcţie armonică. Dacă $z_0 \in G$ este un punct de maxim (respectiv minim) al funcţiei u pe G, atunci u este constantă pe componenta conexă a lui G ce conţine punctul z_0.

Teorema 2.1.3.[31]*(Formula lui Poisson)* Fie $r > 0$ şi $u : \overline{U}(0, r) \to \mathbb{R}$ o funcţie armonică pe $U(0; R)$ şi continuă pe $\overline{U}(0; r)$. Atunci

$$u(\rho e^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 - 2\rho r\cos(\theta - \varphi) + \rho^2} u(re^{i\Theta})d\Theta, \tag{2.2}$$

pentru orice $\rho \in [0, r)$ şi $\varphi \in \mathbb{R}$.

Corolarul 2.1.4.[31] Fie $u : \overline{U}(z_0; R) \to \mathbb{R}$ o funcţie armonică pe $U(z_0; R)$ şi continuă pe $\overline{U}(z_0; R)$. Atunci

$$u(z_0 + re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\Theta - \varphi) + r^2} u(z_0 + Re^{i\Theta})d\Theta, \tag{2.3}$$

pentru orice $r \in [0, R)$ şi $\varphi \in \mathbb{R}$.

În cel de-al doilea subcapitol sunt introduse noi clase de funcţii armonice definite prin operatorul integral Sălăgean.

Se notează cu H clasa funcţiilor $f = h + \overline{g}$ care sunt armonic-univalente şi păstrează orientarea în discul unitate $U = \{z : |z| < 1\}$, pentru care funcţia $f = h + \overline{g}$ este normată şi $f(0) = h(0) = f'_z(0) - 1 = 0$.

Ahuja şi Jahangiri au definit clasa $H_p(n)$ $(p, n \in \mathbb{N})$, care este alcatuită din funcţiile $p-$valente armonice $f = h + \overline{g}$, care au orientarea păstrată în U şi h şi g sunt de forma

$$h(z) = z^p + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k+p-1} z^{k+p-1}, \qquad g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{k+p-1} z^{k+p-1}, \quad |b_p| < 1. \tag{2.4}$$

Pentru $f = h + \overline{g}$ dată prin relaţia (2.4), operatorul integral Sălăgean este definit astfel

$$I^n f(z) = I^n h(z) + (-1)^n \overline{I^n g(z)}; \quad p > n, \quad z \in U, \tag{2.5}$$

unde

$$I^n h(z) = z^p + \sum_{k=2}^{\infty} \Big(\frac{p}{k + p - 1}\Big)^n a_{k+p-1} z^{k+p-1}$$

şi

$$I^n g(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\big(\frac{p}{k+p-1}\big)^n b_{k+p-1}z^{k+p-1}.$$

Definiţia 2.2.1.[25] Pentru numerele pozitive întregi fixate n, p şi pentru $0\le\alpha<1, \beta\ge 0$ se notează cu $H_p(n+1,n,\alpha,\beta)$ clasa funcţiilor armonice multivalente de forma (2.4) care satisfac condiţia

$$\mathrm{Re}\big\{\frac{I^n f(z)}{I^{n+1}f(z)}\big\}>\beta\big|\frac{I^n f(z)}{I^{n+1}f(z)}-1\big|+\alpha. \tag{2.6}$$

Definiţia 2.2.2.[25] Subclasa $H_p^-(n+1,n,\alpha,\beta)$ este alcătuită din funcţiile $f_n=h+\overline{g_n}$ din $H_p(n,\alpha,\beta)$ pentru care h şi g sunt de forma

$$h(z)=z^p-\sum_{k=2}^{\infty}a_{k+p-1}z^{k+p-1},\quad g_n(z)=(-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{\infty}b_{k+p-1}z^{k+p-1},\quad |b_p|<1. \tag{2.7}$$

Teorema 2.2.3.[25] Fie $f=h+\overline{g}$ dată prin relaţia (2.4). Dacă

$$\sum_{k=1}^{\infty}\{\Psi(n+1,n,p,\alpha,\beta)|a_{k+p-1}|+\Theta(n+1,n,p,\alpha,\beta)|b_{k+p-1}|\}\le 2, \tag{2.8}$$

unde

$$\Psi(n+1,n,p,\alpha,\beta)=\frac{\big(\frac{p}{k+p-1}\big)^n(1+\beta)-(\beta+\alpha)\big(\frac{p}{k+p-1}\big)^{n+1}}{1-\alpha},$$

şi

$$\Theta(n+1,n,p,\alpha,\beta)=\frac{\big(\frac{p}{k+p-1}\big)^n(1+\beta)+\big(\frac{p}{k+p-1}\big)^{n+1}(\beta+\alpha)}{1-\alpha},$$

$a_p=1,\quad 0\le\alpha<1,\quad \beta\ge 0,\quad n\in\mathbb{N}$, atunci $f\in H_p(n+1,n,\alpha,\beta)$.

Următoarea teoremă demonstrează că, condiţia (2.8) este de asemenea necesară pentru funcţia $f_n=h+\overline{g}_n$, unde h şi g_n sunt de forma (2.7).

Teorema 2.2.4.[25] Fie $f_n=h+\overline{g}_n$ dată prin (2.7). Atunci $f_n\in H_p^-(n+1,n,\alpha,\beta)$ dacă şi numai dacă

$$\sum_{k=1}^{\infty}[\Psi(n+1,n,p,\alpha,\beta)a_{k+p-1}+\Theta(n+1,n,p,\alpha,\beta)b_{k+p-1}]\le 2, \tag{2.9}$$

$a_p=1, 0\le\alpha<1, n\in\mathbb{N}$.

Vom prezenta în continuare o teoremă de deformare pentru funcţiile din clasa $H_p^-(n+1,n,\alpha,\beta)$, care determină un rezultat de acoperire pentru această clasă.

Theorem 2.2.5.[25] Fie $f_n\in H_p^-(n+1,n,\alpha,\beta)$. Pentru $|z|=r<1$ avem

$$|f_n(z)|\le(1+b_p)r^p+[\Phi(n+1,n,p,\alpha,\beta)-\Omega(n+1,n,p,\alpha,\beta)b_p]r^{n+1+p}$$

şi

$$|f_n(z)|\ge(1-b_p)r^p-\{\Phi(n+1,n,p,\alpha,\beta)-\Omega(n+1,n,p,\alpha,\beta)b_p\}r^{n+p+1}$$

unde,

$$\Phi(n+1,n,p,\alpha,\beta)=\frac{1-\alpha}{\left(\frac{p}{p+1}\right)^n(1+\beta)-\left(\frac{p}{p+1}\right)^{n+1}(\beta+\alpha)},$$

$$\Omega(n+1,n,p,\alpha,\beta)=\frac{(1+\beta)+(\alpha+\beta)}{\left(\frac{p}{p+1}\right)^n(1+\beta)-\left(\frac{p}{p+1}\right)^{n+1}(\beta+\alpha)}.$$

Următorul rezultat de acoperire rezultă din partea stângă a inegalităţii din Teorema 2.2.5.

Corolarul 2.2.6. Fie $f_n \in H_p^-(n+1,n,\alpha,\beta)$, atunci pentru $|z|=r<1$ avem

$$\{w : |w<1-b_p-[\Phi(n+1,n,p,\alpha,\beta)-\Omega(n+1,n,p,\alpha,\beta)b_p]\subset f_n(U)\}.$$

Definiţia 2.2.7.[21] Pentru $0\leq\alpha<1$, $n\in\mathbb{N}$, $z\in U$, se notează cu $H_p(n,\alpha)$ familia funcţiilor armonice f de forma (2.4) pentru care

$$\mathrm{Re}\left(\frac{I^n f(z)}{I^{n+1}f(z)}\right)>\alpha. \tag{2.10}$$

Definiţia 2.2.8.[21] Se notează cu $H_p^-(n,\alpha)$ subclasa alcătuită din funcţiile armonice $f_n=h+\overline{g}_n$ din $H_p(n,\alpha)$ pentru care h şi g_n sunt de forma

$$h(z)=z^p-\sum_{k=2}^{\infty}a_{k+p-1}z^{k+p-1} \quad \text{şi} \quad g_n(z)=(-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{\infty}b_{k+p-1}z^{k+p-1} \tag{2.11}$$

unde $a_{k+p-1},b_{k+p-1}\geq 0$, $|b_p|<1$.

Definiţia 2.2.9.[23] Pentru $0\leq\alpha<1$, $n\in\mathbb{N}$, $z\in U$, $H(n,\alpha)$ este familia funcţiilor armonice f de forma (2.4), cu $p=1$ pentru care

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{I^n f(z)}{I^{n+1}f(z)}\right\}>\alpha. \tag{2.12}$$

Definiţia 2.2.10.[23] Se notează cu $H^-(n,\alpha)$ subclasa funcţiilor armonice $f_n=h+\overline{g}_n$ din $H(n,\alpha)$ pentru care h şi g_n sunt de forma

$$h(z)=z-\sum_{k=2}^{\infty}a_k z^k, \quad g_n(z)=(-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{\infty}b_k z^k, \tag{2.13}$$

unde $a_k,b_k\geq 0$, $|b_1|<1$.

Din următoarea teoremă deducem o condiţie suficientă pentru mărginirea coeficienţilor funcţiilor armonice din $H_p(n,\alpha)$.

Teorema 2.2.11.[21] Fie $f=h+\overline{g}$ dată prin (2.4). Dacă

$$\sum_{k=1}^{\infty}\{\psi(n,p,k,\alpha)|a_{k+p-1}|+\theta(n,p,k,\alpha)|b_{k+p-1}|\}\leq 2 \tag{2.14}$$

unde

$$\psi(n,p,k,\alpha)=\frac{\left(\frac{p}{k+p-1}\right)^n-\alpha\left(\frac{p}{k+p-1}\right)^{n+1}}{1-\alpha}$$

$$\theta(n,p,k,\alpha) = \frac{\left(\dfrac{p}{k+p-1}\right)^n + \alpha\left(\dfrac{p}{k+p-1}\right)^{n+1}}{1-\alpha},$$
$$a_p = 1, \quad 0 \le \alpha < 1, \quad n \in \mathbb{N},$$

atunci f are aceeaşi orientare în U şi $f \in H_p(n,\alpha)$.

Pentru $p = 1$ în Teorema 2.2.11, obţinem:

Corolarul 2.2.12.[23] Fie $f = h + \overline{g}$ dată prin (2.4) cu $p = 1$. Dacă

$$\sum_{k=1}^{\infty}\{\psi(n,k,\alpha)|a_k| + \theta(n,k,\alpha)|b_k|\} \le 2, \tag{2.15}$$

unde

$$\psi(n,k,\alpha) = \frac{(k)^{-n} - \alpha(k)^{-(n+1)}}{1-\alpha} \text{ şi } \theta(n,k,\alpha) = \frac{(k)^{-n} + \alpha(k)^{-(n+1)}}{1-\alpha},$$

$a_1 = 1, 0 \le \alpha < 1, n \in \mathbb{N}$. Atunci f are orientarea păstrată în U şi $f \in H(n,\alpha)$.

Următoarea teoremă ne arată că condiţia (2.14) este deasemenea necesară pentru funcţiile $f_n = h + \overline{g_n}$, unde h şi g_n sunt de forma (2.11).

Teorema 2.2.13.[21] Fie $f_n = h + \overline{g}_n$ dată prin relaţia (2.11). Atunci $f_n \in H_p^-(n,\alpha)$ dacă şi numai dacă

$$\sum_{k=1}^{\infty}\{\psi(n,p,k,\alpha)a_{k+p-1} + \theta(n,p,k,\alpha)b_{k+p-1}\} \le 2, \tag{2.16}$$

unde $a_p = 1, 0 \le \alpha < 1, n \in \mathbb{N}$.

Pentru $p = 1$ în Teorema 2.2.13, obţinem:

Corolarul 2.2.14.[23] Fie $f_n = h + \overline{g}_n$ dată prin relaţia (2.13). Atunci $f_n \in H^-(n,\alpha)$ dacă şi numai dacă

$$\sum_{k=1}^{\infty}\{\psi(n,k,\alpha)a_k + \theta(n,k,\alpha)b_k\} \le 2 \tag{2.17}$$

unde $a_1 = 1, 0 \le \alpha < 1, n \in \mathbb{N}$.

În continuare se determină punctele de extrem pentru învelitoarea convexă închisă din $H_p^-(n,\alpha)$, notată cu clco$H_p^-(n,\alpha)$.

Teorema 2.2.15.[21] Fie f_n dată prin relaţia (2.11). Atunci $f_n \in H_p^-(n,\alpha)$ dacă şi numai dacă

$$f_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty}[x_{k+p-1}h_{k+p-1}(z) + y_{k+p-1}g_{n_{k+p-1}}(z)],$$

unde

$$h_p(z) = z^p, \quad h_{k+p-1}(z) = z^p - \frac{1}{\psi(n,p,k,\alpha)}z^{k+p-1}, \quad k = 2,3,\ldots$$

şi

$$g_{n_{k+p-1}}(z) = z^p + (-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{\theta(n,p,k,\alpha)}\overline{z}^{k+p-1}, \quad k = 1,2,3,\ldots$$

$$x_{k+p-1} \geq 0, \quad y_{k+p-1} \geq 0, \quad x_p = 1 - \sum_{k=2}^{\infty} x_{k+p-1} - \sum_{k=1}^{\infty} y_{k+p-1}.$$

În particular, punctele de extrem pentru $H_p^-(n,\alpha)$ sunt $\{h_{k+p-1}\}$ şi $\{g_{n_{k+p-1}}\}$.

Pentru $p = 1$ în teorema 2.2.15, obţinem

Corolarul 2.2.16.[23] Fie f_n dată prin relaţia (2.13). Atunci $f_n \in H^-(n,\alpha)$ dacă şi numai dacă

$$f_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} [x_k h_k(z) + y_k g_{n_k}(z)],$$

unde

$$h(z) = z, \quad h_k(z) = z - \frac{1}{\psi(n,k,\alpha)} z^k, \quad (k = 2, 3, \dots)$$

şi

$$g_{n_k}(z) = z + (-1)^{n-1} \frac{1}{\theta(n,k,\alpha)} \overline{z}^k \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

$$x_k \geq 0, \quad y_k \geq 0, \quad x_p = 1 - \sum_{k=2}^{\infty} x_k - \sum_{k=1}^{\infty} y_k.$$

În particular, punctele de extrem ale lui $H^-(n,\alpha)$ sunt $\{h_k\}$ şi $\{g_{n_k}\}$.

Următoarea teoremă dă un rezultat de deformare pentru funcţiile din $H_p^-(n,\alpha)$, care determină un rezultat de acoperire pentru această clasă.

Teorema 2.2.17.[21] Fie $f_n \in H_p^-(n,\alpha)$. Atunci, pentru $|z| = r < 1$ avem

$$|f_n(z)| \leq (1 + b_p) r^p + \{\phi(n,p,k,\alpha) - \Omega(n,p,k,\alpha) b_p\} r^{p+1}$$

şi

$$|f_n(z)| \geq (1 - b_p) r^p - \{\phi(n,p,k,\alpha) - \Omega(n,p,k,\alpha) b_p\} r^{p+1},$$

unde

$$\phi(n,p,k,\alpha) = \frac{1-\alpha}{\left(\dfrac{p}{p+1}\right)^n - \alpha \left(\dfrac{p}{p+1}\right)^{n+1}},$$

$$\Omega(n,p,k,\alpha) = \frac{1+\alpha}{\left(\dfrac{p}{p+1}\right)^n - \alpha \left(\dfrac{p}{p+1}\right)^{n+1}}.$$

Pentru $p = 1$ în teorema 2.2.17, obţinem

Corolarul 2.2.18.[23] Fie $f_n \in H^-(n,\alpha)$. Atunci, pentru $|z| = r < 1$ avem

$$|f_n(z)| \leq (1 + b_1) r + \{\phi(n,k,\alpha) - \Omega(n,k,\alpha) b_1\} r^{n+1}$$

şi

$$|f_n(z)| \geq (1 - b_1) r - \{\phi(n,k,\alpha) - \Omega(n,k,\alpha) b_1\} r^{n+1},$$

unde

$$\phi(n,k,\alpha)=\frac{1-\alpha}{\left(\frac{1}{2}\right)^n-\alpha\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}$$

şi

$$\Omega(n,k,\alpha)=\frac{1+\alpha}{\left(\frac{1}{2}\right)^n-\alpha\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}.$$

Următorul rezultat de acoperire rezultă din partea stângă a inegalităţii din Teorema 2.2.17.

Corolarul 2.2.19.[21] Fie $f_n \in H_p^-(n,\alpha)$, pentru $|z|=r<1$ avem

$$\{w:\ |w|<1-b_p-[\phi(n,p,k,\alpha)-\Omega(n,p,k,\alpha)b_p]\subset f_b(U)\}.$$

În cel de-al treilea paragraf sunt introduse noi clase de funcţii armonice definite prin operatorul Sălăgean generalizat.

Operatorul diferenţial Sălăgean a fost generalizat de către F.M. Al-Oboudi în lucrarea [6]. El este definit astfel: fie $f\in\mathcal{A}$ şi $m\in\mathbb{N}$, atunci considerăm

$$D_\lambda^0 f(z)=f(z);$$

$$D_\lambda^1 f(z)=(1-\lambda)f(z)+\lambda z f'(z),\quad \lambda>0;$$

$$D_\lambda^m f(z)=D_\lambda^1(D_\lambda^{m-1}f(z)).$$

Definiţia 2.3.1.[58] Pentru $0\le\alpha<1, k\in\mathbb{N},\lambda\ge 0$ şi $z\in U$, fie $H(k,\alpha)$ familia funcţiilor armonice f pentru care

$$\text{Re}\Big(\frac{D_\lambda^k f(z)}{D_\lambda^{k+1}f(z)}\Big)>\alpha. \tag{2.18}$$

Definiţia 2.3.2[58] Vom nota cu $H^-(k,\alpha)$ subclasa funcţiilor armonice $f_k=h+\overline{g_k}$ din $H^-(k,\alpha)$ pentru care h şi g_k sunt de forma

$$h(z)=z-\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n\quad,\quad g_k(z)=(-1)^{k-1}\sum_{n=2}^{\infty}b_nz^n,$$

unde $a_n,b_n\ge 0, |b_n|<1$.

Teorema 2.3.3.[58] Fie $f=h+\overline{g}$. Dacă

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{\Psi(k,n,\alpha)|a_n|+\Theta(k,n,\alpha)|b_n|\}\le 2, \tag{2.19}$$

unde

$$\Psi(k,n,\alpha)=\frac{(1+(n-1)\lambda)^k-\alpha(1+(n-1)\lambda)^{k+1}}{1-\alpha},$$

$$\Theta(k,n,\alpha)=\frac{(1+(n-1)\lambda)^k+\alpha(1+(n-1)\lambda)^{k+1}}{1-\alpha},$$

$$a_1 = 1, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad k \in \mathbb{N},$$

atunci f are aceeaşi orientare în U şi $f \in H(k, \alpha)$.

Teorema 2.3.4.[58] Fie $f_n = h + \overline{g_n}$ dată prin relaţia (2.18). Atunci $f_n \in H^-(k, \alpha)$ dacă şi numai dacă

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{\Psi(k, n, \alpha) a_n + \Theta(k, n, \alpha) b_n\} \leq 2, \tag{2.20}$$

unde $a_1 = 1, 0 \leq \alpha < 1, k \in \mathbb{N}$.

În continuare vom prezenta o teoremă de deformare pentru funcţiile din $H^-(k, \alpha)$.

Teorema 2.3.5.[58] Fie $f_n \in H^-(k, \alpha)$. Atunci, pentru $|z| = r < 1$ avem

$$|f_k(z)| \leq (1 + b_1)r + [\varphi(k, n, \alpha) - \Omega(k, n, \alpha) b_1] r^2$$

şi

$$|f_k(z)| \geq (1 - b_1)r - [\varphi(k, n, \alpha) - \Omega(k, n, \alpha) b_1] r^2$$

unde

$$\varphi(k, n, \alpha) = \frac{1 - \alpha}{(1 + \lambda)^k - \alpha(1 + \lambda)^{k+1}}$$

şi

$$\Omega(k, n, \alpha) = \frac{1 + \alpha}{(1 + \lambda)^k - \alpha(1 + \lambda)^{k+1}}.$$

Rezultatul este exact pentru funcţiile

$$f_k(z) = z + b_1 \overline{z} + [\varphi(k, n, \alpha) - \Omega(k, n, \alpha) b_1] \overline{z}^2, \quad 0 \leq b_1 < \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}, \quad z = r$$

$$f_k(z) = z - b_1 \overline{z} - [\varphi(k, n, \alpha) - \Omega(k, n, \alpha) b_1] \overline{z}^2, \quad \tfrac{1-\alpha}{1+\alpha} < b_1 < 1, \quad z = r.$$

3 Subordonări şi superordonări diferenţiale.

P.T. Mocanu şi S.S. Miller pornind de la studiul inegalităţilor diferenţiale pentru funcţii reale, au considerat inegalităţi diferenţiale pentru funcţii complexe definite în discul unitate, punând astfel bazele teoriei subordonărilor diferenţiale ([74], [75]). Teoria a fost pe urmă dezvoltată în numeroase alte lucrări. Ea s-a impus ca fiind o metodă eficientă în obţinerea unor noi rezultate sau în demonstrarea simplă şi unitară a unor rezultate cunoscute.

Recent P.T. Mocanu şi S.S. Miller în lucrarea [80] au abordat problema "duală" subordonărilor diferenţiale şi au elaborat metoda superordonărilor diferenţiale.

Acest capitol conţine două subcapitole. În primul subcapitol sunt prezentate noţiuni elementare privind metoda subordonărilor diferenţiale precum şi subordonările şi superordonările diferenţiale de tip Briot-Bouquet.

Definiţia 3.1.1. Fie $f, g \in \mathcal{H}(U)$. Spunem că funcţia f este subordonată funcţiei g sau că funcţia g este superordonată funcţiei f şi vom nota

$$f \prec g$$

sau

$$f(z) \prec g(z),$$

dacă există o funcţie Schwarz $w \in (U)$, cu $w(0) = 0$ şi $|w(z)| < 1, z \in U$ astfel încât

$$f(z) = g(w(z)), z \in U.$$

Definiţia 3.1.2. Vom nota cu $\mathcal{Q}$ clasa funcţiilor q care sunt olomorfe şi injective pe $\overline{U} \setminus E(q)$, unde

$$E(q) = \left\{\zeta \in \partial U : \lim_{z \to \zeta} q(z) = \infty\right\},$$

şi în plus $q'(\zeta) \neq 0$ pentru $\zeta \in \partial U \setminus E(q)$.

Mulţimea $E(q)$ se numeşte mulţime de excepţie.

Lema 3.1.3.[75] Fie funcţiile $q \in \mathcal{Q}, q(0) = a, p \notin \mathcal{H}[a, n], p(z) \neq a$ şi fie numărul $n \geq 1$. Dacă există punctele $z_0 \in U$ şi $\zeta_0 \in \partial U \setminus E(q)$ astfel încât $p(z_0) = q(\zeta_0)$ şi $p(U_{r_0}) \subset q(U)$, unde $r_0 = |z_0|$, atunci există un număr real $m, m \geq n$, astfel încât

$$z_0 p'(z_0) = m\zeta_0 q'(\zeta_0)$$

şi

$$\mathrm{Re}\frac{z_0 p''(z_0)}{p'(z_0)} + 1 \geq m\mathrm{Re}\left\{\frac{\zeta_0 q''(\zeta_0)}{q'(\zeta_0)} + 1\right\}.$$

Considerăm discul $U_M = \{w \in \mathbb{C} : |w| < M\}$ şi $q(z) = M \cdot \dfrac{Mz + a}{M + \overline{a}z}$ cu $M > 0$ şi $|a| < M$, atunci $q(U) = \Delta, q(0) = a, E(q) = \phi$ şi $q \in \mathcal{Q}$.

Definiţia 3.1.4.[75] Fie $\Omega \subset \mathbb{C}$, fie funcţia $q \in \mathcal{Q}$ şi $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Vom nota cu $\Psi_n[\Omega, q]$ clasa funcţiilor $\psi : \mathbb{C}^3 \times U \to \mathbb{C}$ care satisfac condiţia

$$(1') \quad \psi(r, s, t; z) \notin \Omega$$

atunci când

$$r = q(\zeta), s = m\zeta q'(\zeta), \mathrm{Re}\big[\frac{t}{s} + 1\big] \geq m\mathrm{Re}\big[\frac{\zeta q"(\zeta)}{q'(\zeta)} + 1\big],$$

unde $z \in U, \zeta \in \partial U \setminus E(q)$ şi $m \geq n$.

Mulţimea $\Psi_n[\Omega, q]$ se numeşte clasa funcţiilor admisibile, iar condiţia $(1')$ se numeşte condiţie de admisibilitate.

În cel de-al doilea subcapitol sunt prezentate subordonări şi superordonări diferenţiale pentru funcţii analitice definite cu ajutorul operatorului integral Sălăgean.
Rezultate similare folosind operatorul diferenţial Sălăgean au fost date în lucrările [93], [104].

Teorema 3.2.1.[20] Fie q o funcţie univalentă în dicul unitate U cu $q(0) = 1, \gamma \in \mathbb{C}^*$ astfel încât are loc:

$$\mathrm{Re}\left[1 + \frac{zq''(z)}{q'(z)}\right] > \max\left\{0, -\mathrm{Re}\frac{1}{\gamma}\right\}.$$

Dacă $f \in \mathcal{A}$ şi

$$\frac{I^{n+1}f(z)}{I^n f(z)} + \gamma\left\{1 - \frac{I^{n-1}f(z)I^{n+1}f(z)}{[I^n f(z)]^2}\right\} \prec q(z) + \gamma z q'(z), \tag{3.1}$$

atunci are loc

$$\frac{I^{n+1}f(z)}{I^n f(z)} \prec q(z) \tag{3.2}$$

şi q este cea mai bună dominantă a subordonării (3.2).

Vom da în continuare o aplicaţie a teoremei 3.2.1, considerând funcţia convexă particulară

$$q(z) = \frac{1 + Az}{1 + Bz}.$$

Exemplul 3.2.2.[20] Fie $A, B, \gamma \in \mathbb{C}$, $A \neq B$, astfel încât $|B| \leq 1$ şi $\mathrm{Re}\gamma > 0$. Dacă pentru $f \in \mathcal{A}$ are loc subordonarea

$$\frac{I^{n+1}f(z)}{I^n f(z)} + \gamma\left\{1 - \frac{I^{n-1}f(z) \cdot I^{n+1}f(z)}{[I^n f(z)]^2}\right\} \prec \frac{1 + Az}{1 + Bz} + \gamma\frac{(A - B)z}{(1 + Bz)^2},$$

atunci

$$\frac{I^n f(z)}{I^{n+1}f(z)} \prec \frac{1 + Az}{1 + Bz} \tag{3.3}$$

şi $q(z) = \dfrac{1 + Az}{1 + Bz}$ este cea mai bună dominantă a subordonării (3.3).

În continuare este prezentat un rezultat referitor la superordonări.

Teorema 3.2.3.[20] Fie q o funcţie convexă în discul unitate U, cu $q(0) = 1$ şi $\gamma \in \mathbb{C}$ astfel încât $\mathrm{Re}\gamma > 0$. Dacă $f \in \mathcal{A}$,

$$\frac{I^{n+1}f(z)}{I^n f(z)} \in \mathcal{H}[1,1] \cap Q,$$

$$\frac{I^{n+1}f(z)}{I^n f(z)} + \gamma\left\{1 - \frac{I^{n-1}f(z) \cdot I^{n+1}f(z)}{[I^n f(z)]^2}\right\}$$

este univalentă în U şi are loc superordonarea

$$q(z) + \gamma z q'(z) \prec \frac{I^{n+1}f(z)}{I^n f(z)} + \gamma\left\{1 - \frac{I^{n-1}f(z) \cdot I^{n+1}f(z)}{[I^n f(z)]^2}\right\}, \tag{3.4}$$

atunci

$$q(z) \prec \frac{I^{n+1}f(z)}{I^n f(z)} \tag{3.5}$$

şi q este cea mai bună subordonantă a superordonării (3.5).

Combinând rezultatele obţinute în teoremele 3.2.1 şi 3.2.3 putem da un rezultat de tip ”sandwich”.

Teorema 3.2.4.[20] Fie q_1 şi q_2 două funcţii convexe în discul unitate U, cu $q_1(0) = q_2(0) = 1$, $\gamma \in \mathbb{C}$ astfel încât $\mathrm{Re}\,\gamma > 0$. Dacă $f \in \mathcal{A}$,

$$\frac{I^{n+1}f(z)}{I^n f(z)} \in \mathcal{H}[1,1] \cap Q, \quad \frac{I^{n+1}f(z)}{I^n f(z)} + \gamma\left\{1 - \frac{I^{n-1}f(z) \cdot I^{n+1}f(z)}{[I^n f(z)]^2}\right\}$$

este univalentă în U şi

$$q_1(z) + \gamma z q_1'(z) \prec \frac{I^{n+1}f(z)}{I^n f(z)} + \gamma\left\{1 - \frac{I^{n-1}f(z) \cdot I^{n+1}f(z)}{[I^n f(z)]^2}\right\} \prec q_2(z) + \gamma z q_2'(z),$$

atunci

$$q_1(z) \prec \frac{I^{n+1}f(z)}{I^n f(z)} \prec q_2(z), \tag{3.6}$$

iar funcţiile q_1 şi q_2 sunt cea mai bună subordonantă, respectiv cea mai bună dominantă a (3.6).

Teorema 3.2.5.[20] Fie q o funcţie univalentă în discul unitate U, cu $q(0) = 1$, $\gamma \in \mathbb{C}^*$ şi presupunem că are loc

$$\mathrm{Re}\left[1 + \frac{zq''(z)}{q'(z)}\right] > \max\left\{0, -\mathrm{Re}\frac{1}{\gamma}\right\}.$$

Dacă $f \in \mathcal{A}$ şi

$$(1+\gamma)z\frac{I^n f(z)}{[I^{n+1}f(z)]^2} + \gamma z\frac{I^{n-1}f(z)}{[I^{n+1}f(z)]^2} - 2\gamma z\frac{[I^n f(z)]^2}{[I^{n+1}f(z)]^3} \prec q(z) + \gamma z q'(z), \tag{3.7}$$

atunci

$$z\frac{I^n f(z)}{[I^{n+1}f(z)]^2} \prec q(z) \tag{3.8}$$

şi q este cea mai bună dominantă a subordonării (3.8).

Dacă alegem ca dominantă q o funcţie convexă particulară de forma

$$q(z) = \frac{1+Az}{1+Bz}$$

avem următorul exemplu.

Exemplul 3.2.6.[20] Fie $A, B, \gamma \in \mathbb{C}$, $A \neq B$ astfel încât $|B| \leq 1$ şi Re$\gamma > 0$. Dacă $f \in \mathcal{A}$ verifică subordonarea

$$(1+\gamma)z\frac{I^n f(z)}{[I^{n+1}f(z)]^2} + \gamma z\frac{I^{n-1}f(z)}{[I^{n+1}f(z)]^2} - 2\gamma z\frac{[I^n f(z)]^2}{[I^{n+1}f(z)]^3}$$
$$\prec \frac{1+Az}{1+Bz} + \gamma\frac{(A-B)z}{(1+Bz)^2},$$

atunci

$$z\frac{I^n f(z)}{[I^{n+1}f(z)]^2} \prec \frac{1+Az}{1+Bz} \tag{3.9}$$

şi $q(z) = \dfrac{1+Az}{1+Bz}$ este cea mai bună dominantă a subordonării (3.9).

Teorema 3.2.7.[20] Fie q o funcţie convexă în discul unitate U, $q(0) = 1$, $\gamma \in \mathbb{C}$ astfel încât Re$\gamma > 0$. Dacă $f \in \mathcal{A}$,

$$z\frac{I^n f(z)}{[I^{n+1}f(z)]^2} \in \mathcal{H}[1,1] \cap Q,$$

$$(1+\gamma)z\frac{I^n f(z)}{[I^{n+1}f(z)]^2} + \gamma z\frac{I^{n-1}f(z)}{[I^{n+1}f(z)]^2} - 2\gamma z\frac{[I^n f(z)]^3}{[I^{n+1}f(z)]^3}$$

este univalentă în U şi are loc superordonarea

$$q(z) + \gamma z q'(z) \prec (1+\gamma)z\frac{I^n f(z)}{[I^{n+1}f(z)]^2} \tag{3.10}$$
$$+\gamma z\frac{I^{n-1}f(z)}{[I^{n+1}f(z)]^2} - 2\gamma z\frac{[I^n f(z)]^2}{[I^{n+1}f(z)]^3},$$

atunci

$$q(z) \prec z\frac{I^n f(z)}{[I^{n+1}f(z)]^2} \tag{3.11}$$

şi q este cea mai bună subordonantă a superordonării (3.11).

Deoarece am obţinut în teorema 3.2.7 şi în teorema 3.2.5 rezultate referitoare la o subordonare şi o superordonare pentru aceeaşi funcţie, putem să formulăm o teoremă de tip "sandwich".

Teorema 3.2.8.[20] Fie q_1, q_2 funcţii convexe în U, cu $q_1(0) = q_2(0) = 1$, $\gamma \in \mathbb{C}$, astfel încât Re$\gamma > 0$. Dacă $f \in \mathcal{A}$,

$$z\frac{I^n f(z)}{[I^{n+1}f(z)]^2} \in \mathcal{H}[1,1] \cap Q,$$

$$(1+\gamma)z\frac{I^n f(z)}{[I^{n+1}f(z)]^2} + \gamma z\frac{I^{n-1}f(z)}{[I^{n+1}f(z)]^2} - 2\gamma z\frac{[I^n f(z)]^2}{[I^{n+1}f(z)]^3}$$

este univalentă în U şi

$$q_1(z) + \gamma z q_1'(z) \prec (1+\gamma)z\frac{I^n f(z)}{[I^{n+1}f(z)]^2} + \gamma z\frac{I^{n-1}f(z)}{[I^{n+1}f(z)]^2} - 2\gamma z\frac{[I^n f(z)]^2}{[I^{n+1}f(z)]^3}$$

$$\prec q_2(z) + \gamma z q_2'(z),$$

atunci

$$q_1(z) \prec z\frac{I^n f(z)}{[I^{n+1} f(z)]^2} \prec q_2(z) \tag{3.12}$$

şi q_1 şi q_2 sunt cea mai bună subordonantă, respectiv cea mai bună dominantă a (3.12).

Teorema 3.2.9.[22] Fie q o funcţie univalentă în U cu $q(0) = 1$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $\delta > 0$ şi presupunem că are loc inegalitatea

$$\mathrm{Re}\left[1 + \frac{zq''(z)}{q'(z)}\right] > \max\left\{0, -\mathrm{Re}\frac{\delta}{\alpha}\right\}.$$

Dacă $f \in \mathcal{A}$ satisface subordonarea

$$(1-\alpha)\left(\frac{I^{n+1} f(z)}{z}\right)^{\delta} + \alpha\left(\frac{I^{n+1} f(z)}{z}\right)^{\delta} \cdot \frac{I^n f(z)}{I^{n+1} f(z)} \tag{3.13}$$

$$\prec q(z) + \frac{\alpha}{\delta} z q'(z),$$

atunci

$$\left(\frac{I^{n+1} f(z)}{z}\right)^{\delta} \prec q(z) \tag{3.14}$$

iar q este cea mai bună dominantă a subordonării (3.14) .

Teorema 3.2.10.[22] Fie q o funcţie convexă în U cu $q(0) = 1$, $\alpha \in \mathbb{C}$, Re $\alpha > 0$, $\delta > 0$. Dacă $f \in \mathcal{A}$ astfel încât

$$\left(\frac{I^{n+1} f(z)}{z}\right)^{\delta} \in \mathcal{H}[1,1] \cap Q,$$

$$(1-\alpha)\left(\frac{I^{n+1} f(z)}{z}\right)^{\delta} + \alpha\left(\frac{I^{n+1} f(z)}{z}\right)^{\delta} \cdot \frac{I^n f(z)}{I^{n+1} f(z)}$$

este univalentă în U şi satisface superordonarea

$$q(z) + \frac{\alpha}{\delta} z q'(z) \prec (1-\alpha)\left(\frac{I^{n+1} f(z)}{z}\right)^{\delta} + \alpha\left(\frac{I^{n+1} f(z)}{z}\right)^{\delta} \cdot \frac{I^n f(z)}{I^{n+1} f(z)}, \tag{3.15}$$

atunci

$$q(z) \prec \left(\frac{I^{n+1} f(z)}{z}\right)^{\delta} \tag{3.16}$$

şi q este cea mai bună subordonantă a superordonării (3.16).

În continuare vom prezenta un rezultat de tip sandwich.

Teorema 3.2.11.[22] Fie q_1, q_2 funcţii convexe în U cu $q_1(0) = q_2(0) = 1$, $\alpha \in \mathbb{C}$, Re $\alpha > 0$, $\delta > 0$. Dacă $f \in \mathcal{A}$ astfel încât

$$\left(\frac{I^{n+1} f(z)}{z}\right)^{\delta} \in \mathcal{H}[1,1] \cap Q$$

$$(1-\alpha)\left(\frac{I^{n+1} f(z)}{z}\right)^{\delta} + \alpha\left(\frac{I^{n+1} f(z)}{z}\right)^{\delta} \cdot \frac{I^n f(z)}{I^{n+1} f(z)}$$

este univalentă în U şi satisface

$$q_1(z) + \frac{\alpha}{\delta} z q_1'(z) \prec (1-\alpha)\left(\frac{I^{n+1}f(z)}{z}\right)^{\delta} + \alpha\left(\frac{I^{n+1}f(z)}{z}\right)^{\delta} \cdot \frac{I^n f(z)}{I^{n+1}f(z)}$$

$$\prec q_2(z) + \frac{\alpha}{\delta} z q_2'(z),$$

atunci

$$q_1(z) \prec \left(\frac{I^{n+1}f(z)}{z}\right)^{\delta} \prec q_2(z) \tag{3.17}$$

şi q_1, respectiv q_2 sunt cea mai bună subordonantă, respectiv cea mai bună dominantă a (3.17).

4 Clase de funcţii analitice definite prin operatori

Acest capitol cuprinde două subcapitole.

În primul subcapitol sunt prezentate proprietăţi ale funcţiilor analitice definite prin operatorul integral Sălăgean.

Fie $\mathcal{A}$ clasa funcţiilor f normate, de forma

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k, \tag{4.1}$$

care sunt analitice în discul unitate U.

Se notează cu Ω clasa funcţiilor $w(z)$ din U care satisfac condiţiile $w(0) = 0$ şi $|w(z)| < 1$ pentru $z \in U$.

Definiţia 4.1.1.[27] Spunem că $f(z) \in \mathcal{A}$ aparţine clasei $\mathcal{F}_n(b, M)$ dacă şi numai dacă

$$|\frac{1}{b}(\frac{I^n f(z)}{I^{n+1} f(z)} - 1) + 1 - M| < M, \tag{4.2}$$

unde $M > \frac{1}{2}$, $z \in U$ şi $b \neq 0$ este număr complex.

Ştim din [10] că $f(z) \in H_n(b, M)$ dacă şi numai dacă pentru $z \in U$

$$\frac{I^n f(z)}{I^{n+1} f(z)} = \frac{1 + [b(1+m) - m]w(z)}{1 - mw(z)},$$

unde $m = 1 - \frac{1}{M}$, $(M > \frac{1}{2})$ şi $w(z) \in \Omega$.

Printre primele lucrări consacrate funcţiilor stelate sau convexe de ordin complex amintim: [9], [91], [92].

În continuare vom determina condiţii suficiente asupra coeficienţilor funcţiilor din clasa $\mathcal{F}_n(b, M)$, estimări ale coeficienţilor şi maximizarea $|a_3 - \mu a_2^2|$ din clasa $\mathcal{F}_n(b, M)$ pentru valori complexe ale lui μ.

Teorema 4.1.2.[27] Fie funcţia $f(z)$ definită prin relaţia (4.1) . Dacă

$$\sum_{k=2}^{\infty} \{(1 - \frac{1}{k}) + |\frac{b(1+m)}{k} + m(1 - \frac{1}{k})|\} \frac{|a_k|}{k^n} \leq |b(1+m)|, \tag{4.3}$$

are loc, atunci $f(z)$ aparţine clasei $\mathcal{F}_n(b, M)$, unde $m = 1 - \frac{1}{M}$ $\quad (M > \frac{1}{2})$.

Teorema 4.1.3.[27] Fie funcţia $f(z)$ definită prin relaţia (4.1) din clasa $\mathcal{F}_n(b, M)$, $z \in U$.

a). Pentru

$$2m(1 - \frac{1}{k})\mathrm{Re}\{b\} > (1 - \frac{1}{k})^2(1 - m) - |b|^2(1 + m),$$

fie

$$N = [\frac{2m(1 - \frac{1}{k})\mathrm{Re}\{b\}}{(1 - \frac{1}{k})^2(1 - m) - |b|^2(1 + m)}], \quad k = 1, 3, ..., j - 1.$$

Atunci

$$|a_j| \leq \frac{1}{\frac{1}{j^n}(1 - \frac{1}{j})!} \prod_{k=2}^{j} |\frac{b(1+m)}{k} + (\frac{k-2}{k})m|, \tag{4.4}$$

pentru $j = 2, 3, ..., N + 2$;

(4.5) $$|a_j| \leq \frac{1}{\frac{1}{j^n}(1-\frac{1}{j})(N+1)!}\prod_{k=2}^{N+3}|\frac{b(1+m)}{k}+(\frac{k-2}{k})m|,$$

pentru $j > N + 2$.

b). Dacă

$$2m(1-\frac{1}{k})\mathrm{Re}\{b\} \leq (1-\frac{1}{k})^2(1-m) - |b|^2(1+m),$$

atunci

(4.6) $$|a_j| \leq \frac{(1+m)|b|}{\frac{1}{j^n}(1-\frac{1}{j})}, \quad pentru j \geq 2,$$

unde $m = 1 - \frac{1}{M}$ $\quad (M > \frac{1}{2})$ şi $b \neq 0$ număr complex.

Teorema 4.1.4.[27] Dacă o funcţie $f(z)$ definită prin relaţia (4.1) aparţine clasei $\mathcal{F}_n(b, M)$ şi μ este un număr complex oarecare, atunci

(4.7) $$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \frac{3^{n+1}}{2}|b(1+m)|max\{1, |d|\}$$

unde

(4.8) $$d = \frac{b(1+m)}{2 \cdot 3^{n+1}}[2^{2n+4}\mu - 3^{n+1}] - \frac{m}{2}.$$

Rezultatul este exact.

Teorema 4.1.5.[27] Dacă $f \in A$ satisface relaţia

(4.9) $$\Big|\frac{I^n f(z)}{I^{n+1}f(z)} - 1\Big|^\alpha \Big|z\big(\frac{I^n f(z)}{I^{n+1}f(z)}\big)'\Big|^\beta < (1/2)^\beta, \quad (z \in U)$$

pentru orice valori reale ale lui α şi β cu $\alpha + 2\beta \geq 0$ şi pentru orice $n \in \mathbb{N}$, atunci

$$\mathrm{Re}\big(\frac{I^n f(z)}{I^{n+1}f(z)}\big) > 0 \quad (z \in U).$$

Teorema 4.1.6.[26] Dacă $f \in A$ satisface

(4.10) $$\Big|\frac{I^n f(z)}{I^{n+1}f(z)} - 1\Big|^\alpha \Big|z\big(\frac{I^n f(z)}{I^{n+1}f(z)}\big)'\Big|^\beta < (1/2)^\beta(1-\gamma)^{\alpha+\beta} \quad (z \in U),$$

pentru anumite valori reale α, β, γ şi $n \in \mathbb{N}$ cu $\alpha + 2\beta \geq 0$ şi $0 \leq \gamma < 1$, atunci

$$\mathrm{Re}\big(\frac{I^n f(z)}{I^{n+1}f(z)}\big) > \gamma \quad (z \in U).$$

Teorema 4.1.7.[26] Dacă $f \in A$ satisface

(4.11) $$\Big|\frac{I^n f(z)}{I^{n+1}f(z)} - 1\Big|^\alpha \Big|z\big(\frac{I^n f(z)}{I^{n+1}f(z)}\big)'\Big|^\beta < (\gamma/2)^\beta \quad (z \in U)$$

pentru valorile reale α, β şi $\gamma = \beta/\alpha + \beta$, atunci

$$\mathrm{Re}\big(\frac{I^n f(z)}{I^{n+1} f(z)}\big)^{1/\gamma} > 0 \quad (z \in U).$$

Definiţia 4.1.8.[24] Vom nota $\mathcal{F}^b_{n+1,n}(A,B)$ clasa funcţiilor $f(z)$ din $\mathcal{A}$ care satisfac condiţia

$$1 + \frac{1}{b}\left(\frac{I^n f(z)}{I^{n+1} f(z)} - 1\right) \prec \frac{1+Az}{1+Bz} \quad , z \in \mathbb{U} \tag{4.12}$$

$b \neq 0$ este număr complex, A şi B sunt numere arbitrar fixate, $-1 \leq B < A \leq 1$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Vom nota Ω_1 clasa funcţiilor analitice mărginite $w(z)$ din $\mathbb{U}$ care satisfac condiţiile $w(0) = 0$ şi $|w(z)| < 1$, pentru $z \in \mathbb{U}$.

Teorema 4.1.9.[24] Fie funcţia $f(z)$ definită prin relaţia (4.1) din clasa $\mathcal{F}^b_{n+1,n}(A,B)$, $z \in \mathbb{U}$ şi fie

$$G = \frac{(A-B)^2|b|^2}{(1-\frac{1}{k})\{\frac{2B(A-B)Re\{b\}}{k} + (1-B^2)(1-\frac{1}{k})\}} \quad , k = 2, 3, ..., n-1$$

$M = [G]$(simbolul lui Gauss), şi $[G]$ partea întreagă a lui G.

(a) Dacă

$$(A-B)^2|b|^2 > (1-\frac{1}{k})\{\frac{2B(A-B)\mathrm{Re}\{b\}}{k} + (1-B^2)(1-\frac{1}{k})\},$$

atunci

$$|a_j| \leq j^n \frac{\prod_{k=2}^{j} |\frac{(A-B)b}{k} - B[(1-\frac{1}{k}) - \frac{1}{k}]|}{\prod_{k=2}^{j}(1-\frac{1}{k})}, pentru \quad j = 2, 3, ..., M+2 \tag{4.13}$$

şi

$$|a_j| \leq \frac{j^n \prod_{k=2}^{M+3} |\frac{(A-B)b}{k} - B[(1-\frac{1}{k}) - \frac{1}{k}]|}{(1-\frac{1}{j})\prod_{k=2}^{M+3}(1-\frac{1}{k})}, j > M+2. \tag{4.14}$$

(b) Dacă

$$(A-B)^2|b|^2 \leq (1-\frac{1}{k})\{\frac{2B(A-B)\mathrm{Re}\{b\}}{k} + (1-B^2)(1-\frac{1}{k})\},$$

atunci

$$|a_j| \leq \frac{j^n(A-B)|b|}{(1-\frac{1}{j})}, j \geq 2. \tag{4.15}$$

Vom prezenta în continuare o condiţie suficientă pentru ca o funcţie să aparţină clasei $\mathcal{F}^b_{n+1,n}(A,B)$.

Teorema 4.1.10.[24] Fie funcţia $f(z)$ definită prin relaţia (4.1). Dacă

$$\sum_{k=2}^{\infty}\{(1-\frac{1}{k}) + |\frac{(A-B)b}{k} - B(1-\frac{1}{k})|\}\frac{|a_k|}{k^n} \leq (A-B)|b|, \tag{4.16}$$

atunci $f(z)$ aparţine clasei $\mathcal{F}^b_{n+1,n}(A,B)$.

Folosind operatorul Ruscheweyh vom introduce o nouă subclasă de funcţii analitice cu coeficienţi negativi din discul unitate U.

Fie $T(n)$ clasa funcţiilor de forma

$$f(z)=z-\sum_{k=n+1}^{\infty}a_kz^k,\quad (a_k\geq 0,\quad n\in\mathbb{N}) \tag{4.17}$$

care sunt analitice în discul unitate U.

Definiţia 4.2.1. O funcţie $f(z)\in T(1)$ este din clasa funcţiilor stelate de ordinul α, $T^*(\alpha)$ dacă

$$\mathrm{Re}\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\}>\alpha,\quad (z\in U,\quad 0\leq\alpha<1).$$

Definiţia 4.2.2.[109] Derivata Ruscheweyh de ordinul β notată prin $D^\beta f(z)$ a funcţiei $f(z)$ din $T(n)$ este definită prin

$$D^\beta f(z)=\frac{z}{(1-z)^{1+\beta}}\circledast f(z)=z-\sum_{k=n+1}^{\infty}a_kB_k(\beta)z^k,$$

unde

$$B_k(\beta)=\frac{(\beta+1)(\beta+2)\cdot...\cdot(\beta+k-1)}{(k-1)!}.$$

Definiţia 4.2.3.[59] Vom spune că o funcţie $f\in T(n)$ este din clasa $\mathcal{J}_n(\beta,\lambda,\mu;A,B)$ dacă satisface următoarea condiţie

$$\frac{z(D^\beta f(z))'+\lambda z^2(D^\beta f(z))''}{(1-\mu)f(z)+\mu z(D^\beta f(z))'+(\lambda-\mu)z^2(D^\beta f(z))''}\prec\frac{1+Az}{1+Bz}, \tag{4.18}$$

$$(-1\leq A<B\leq 1,\quad 0\leq B\leq 1,\quad 0\leq\mu\leq 1,\quad \mu\leq\lambda\quad şi\quad \beta>-1).$$

În particular, $\mathcal{J}_1(0,0,0;-(1-2\alpha),1)\equiv T^*(\alpha)$ şi $\mathcal{J}_1(0,1,1;-(1-2\alpha),1)\equiv C(\alpha)$, clase care au fost studiate de Silverman in [112]. Clasa $\mathcal{J}_n(0,\lambda,\lambda;-(1-2\alpha),1)$ a fost studiată de Altintas în [7], iar clasele $\mathcal{J}_1(0,0,0;A,B)$ şi $\mathcal{J}_1(0,1,1;A,B)$ au fost studiate de Padmanabhan şi Ganesan [95].

Teorema 4.2.4.[59] O funcţie $f(z)\in T(n)$ dată prin relaţia (4.17) este în clasa $\mathcal{J}_n(\beta,\lambda,\mu;A,B)$ dacă şi numai dacă

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}[(k-1)[k(\mu(1+A)+\lambda(B-A))+(1-\mu)]-A(1-\mu)+k(B-A\mu)]B_k(\beta)a_k\leq B-A, \tag{4.19}$$

$$(-1\leq A<B\leq 1,\quad 0\leq B\leq 1,\quad 0\leq\mu\leq 1,\quad \mu\leq\lambda,\quad \beta>-1).$$

Rezultatul este exact pentru funcţia $f(z)$ dată prin relaţia

$$f(z)=z- \tag{4.20}$$

$$\frac{B-A}{\{n[(n+1)(\mu(1+A)+\lambda(B-A))+(1-\mu)]-A(1-\mu)+(n+1)(B-A\mu)\}B_k(\beta)}z^{n+1},$$

$n\in\mathbb{N}$.

Corolarul 4.2.5.[59] Fie $f(z)$ definită prin relaţia (4.17) din clasa $\mathcal{J}_n(\beta,\lambda,\mu;A,B)$. Atunci

$$a_k\leq\frac{B-A}{\{(k-1)[k(\mu(1+A)+\lambda(B-A))+(1-\mu)]+k(B-A\mu)-A(1-\mu)\}B_k(\beta)},$$

$(k = n+1, n+2, ..., \quad n \in \mathbb{N})$.

În continuare vom prezenta un rezultat de deformare şi acoperire pentru clasa $\mathcal{J}_n(\beta, \lambda, \mu; A, B)$.

Teorema 4.2.6.[59] Dacă $f \in \mathcal{J}_n(\beta, \lambda, \mu; A, B)$, atunci

$$r - \frac{(B-A)}{n[(n+1)(\mu(1+A)+\lambda(B-A))+(1-\mu)]+(n+1)(B-A\mu)-A(1-\mu)} r^{n+1} \leq$$

$$\leq |D^\beta f(z)| \leq$$

$$r + \frac{B-A}{n[(n+1)(\mu(1+A)+\lambda(B-A))+(1-\mu)]+(n+1)(B-A\mu)-A(1-\mu)} r^{n+1}, \tag{4.21}$$

$(|z| = r < 1)$.

Teorema 4.2.7.[59] Dacă $f \in \mathcal{J}_n(\beta, \lambda, \mu; A, B)$, atunci $f \in T^*(\delta)$, unde

$\delta = 1-$

$$-\frac{B-A}{(n[(n+1)(\mu(1+A)+\lambda(B-A))+(1-\mu)]+(n+1)(B-A\mu)-A(1-\mu))B_{n+1}(\beta)}.$$

Următoarea teoremă se referă la punctele de extrem pentru clasa $\mathcal{J}_n(\beta, \lambda, \mu; A, B)$.

Teorema 4.2.8.[59] Fie $f_n(z) = z$ şi

$$f_k(z) =$$

$$= z - \frac{B-A}{\{(k-1)[k(\mu(1+A)+\lambda(B-A))+(1-\mu)]+k(B-A\mu)-A(1-\mu)\}B_k(\beta)} z^k,$$

$k \geq n+1, \quad n \in \mathbb{N}, \quad -1 \leq A < B < 1, \quad 0 \leq B \leq 1, \quad 0 \leq \mu \leq 1, \quad \mu \leq \lambda, \quad \beta > -1$. Atunci $f(z) \in \mathcal{J}_n(\beta, \lambda, \mu; A, B)$ dacă şi numai dacă poate fi scrisă sub forma

$$f(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \eta_k f_k(z), \tag{4.22}$$

unde $\eta_k \geq 0, k \geq n$ şi $\sum\limits_{k=n}^{\infty} \eta_k = 1$.

Corolarul 4.2.9.[59] Punctele de extrem pentru clasa funcţiilor $f \in \mathcal{J}_n(\beta, \lambda, \mu; A, B)$ sunt funcţiile $f_n(z) = z$ şi

$f_k(z) =$

$$z - \frac{B-A}{\{(k-1)[k(\mu(1+A)+\lambda(B-A))+(1-\mu)]+k(B-A\mu)-A(1-\mu)\}B_k(\beta)} z^k,$$

$(k \geq n+1, \quad n \in \mathbb{N})$.

Teorema 4.2.10.[59] Pentru orice $i = 1, ..., m$, fie $f_i(z)$ definite prin

$$f_i(z) = z - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_{k,i} z^k \quad (a_{k,i} \geq 0, i = 1, ..., m, n \in \mathbb{N})$$

din clasa $\mathcal{J}_n(\beta, \lambda, \mu; A, B)$. Atunci funcţia $h(z)$ definită prin

$$h(z) = \sum_{i=1}^{m} t_i f_i(z), \quad (t_i \geq 0, (i = 1, ..., m); \quad \sum_{i=1}^{m} t_i = 1)$$

este în clasa $\mathcal{J}_n(\beta, \lambda, \mu; A, B)$.

În continuare vom prezenta un rezultat de incluziune pentru clasa $\mathcal{J}_n(\beta, \lambda, \mu; A, B)$.

Teorema 4.2.11.[59] Fie $0 \leq \mu \leq 1, \mu \leq \lambda, \beta > -1, -1 \leq A < B \leq 1, \quad 0 \leq B \leq 1$. Atunci $\mathcal{J}_n(\beta, \lambda, \mu; A, B) \subseteq \mathcal{J}_n(\beta, 0, 0; A_1, B_1)$, unde $A_1 \leq 1 - 2m, B_1 \geq \frac{A_1+m}{1-m}$ şi $m =$

$$\frac{n(B-A)}{\{n[(n+1)(\mu(1+A)+\lambda(B-A))+(1-\mu)]+(n+1)(B-A\mu)-A(1-\mu)\}B_{n+1}(\beta)}. \tag{4.23}$$

Teorema 4.2.12.[59] Fie $0 \leq \mu_1 \leq 1, 0 \leq \mu_2 \leq 1, \mu_1 \leq \mu_2 \leq \lambda_2 \leq \lambda_1, \beta > -1, n \in \mathbb{N}$. Atunci $\mathcal{J}_n(\beta, \lambda_1, \mu_1; A, B) \subseteq \mathcal{J}_n(\beta, \lambda_2, \mu_2; A, B)$.

5 Aplicaţii aproape stelate generalizate

Vom introduce în continuare noţiunea de aplicaţie aproape stelată generalizată pe discul unitate şi vom demonstra că această noţiune poate fi caracterizată în termenii lanţurilor Loewner. Vom folosi teoria lanţurilor Loewner pentru a deduce că anumite clase ale extensiilor operatorului generalizat Roper-Suffridge păstrează aproape stelaritatea generalizată.

În teoria geometrică a funcţiilor de o variabilă complexă lanţurile Loewner şi ecuaţia diferenţială Loewner sunt unelte puternice folosite în studiul funcţiilor univalente. Ecuaţia diferenţială Loewner a fost introdusă mai întâi de Loewner [72] şi Kufarev [64]. Pfaltzgraff [96] generalizează lanţuirile Loewner pentru dimensiuni mari. Contribuţiile de mai târziu permiteau generalizări pe bila unitate a spaţilui complex Banach, Poreda [101]. Cele mai bune rezultate posibile privind existenţa şi regularitatea teoriei ecuaţiilor Loewner în cazul mai multor variabile complexe, au fost obţinute de I. Graham, H. Hamada şi G. Kohr [43], I. Graham, G. Kohr şi M. Kohr [40], [41] şi I. Graham şi G. Kohr [39].

Definiţia 5.1.1. O aplicaţie $f : B^n \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^n$ este numită lanţ Loewner, dacă satisface următoarele condiţii:

(i) $f(\cdot,t)$ este olomorfă şi univalentă pe B^n, $f(0,t) = 0$ şi $Df(0,t) = e^t I$ pentru orice $t \geq 0$;

(ii) $f(\cdot,s) \prec f(\cdot,t)$ când $0 \leq s \leq t < \infty$ şi $z \in B^n$.

Condiţia de subordonare (ii) implică faptul că există o unică aplicaţie univalentă Schwarz $v = v(z,s,t)$, numită aplicaţie de tranziţie asociată lui $f(z,t)$, astfel încât

$$f(z,s) = f(v(z,s,t),t), 0 \leq s \leq t < \infty, z \in B^n.$$

În plus, normalizarea lui $f(z,t)$ implică normalizarea lui

$$Dv(0,s,t) = e^{s-t} I, 0 \leq s \leq t < \infty,$$

pentru aplicaţia de tranziţie.

Un rol important îl joacă mulţimile Caratheodory :

$$\mathcal{P} = \{p \in H(U) : p(0) = 1, \mathrm{Re} \quad p(z) > 0, z \in U\}$$

$$\mathcal{M} = \{h \in H(B^n) : h(0) = 0, Dh(0) = I, \mathrm{Re}\langle h(z), z\rangle > 0, z \in B^n\}.$$

În continuare vom introduce noţiunea de aproape stelaritate generalizată.

Definiţia 5.1.2.[28] Fie $a : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ de clasă C^∞ cu $\mu \leq \mathrm{Re}a(t) \leq 0, t \in [0,\infty)$, şi $\mu < 0$. O aplicaţie local biolomorfă normalizată $f : B^n \to \mathbb{C}^n$ este o aplicaţie aproape stelată generalizată dacă

$$\mathrm{Re}[(1 - a'(t))e^{-a(t)}\langle [Df(e^{a(t)}z)]^{-1} f(e^{a(t)}z), z\rangle] \geq -\mathrm{Re}a'(t)\|z\|^2, \tag{5.1}$$

$z \in B^n, t \in [0,\infty)$.

În cazul unei variabile complexe relaţia (5.1) devine

$$\mathrm{Re}[(1-a'(t))\frac{f(e^{a(t)}z)}{e^{a(t)}zf'(e^{a(t)}z)}] \geq -\mathrm{Re}a'(t), z \in U, t \geq 0. \tag{5.2}$$

Observaţia 5.1.3. Dacă $a'(t) = \lambda, t \in [0, \infty)$,(în Definiţia 5.1.2.) unde $\lambda \in \mathbb{C}$, Re $\lambda \leq 0$, se obţine noţinea de aproape stelaritate de ordin complex λ. Această noţine a fost introdusă recent de către M. Balaeti şi V. Nechita [14]. Pe de altă parte, dacă $a'(t) = \alpha/\alpha - 1, t \in [0, \infty)$, unde $\alpha \in [0, 1)$, obţinem noţiunea de aproape stelaritate de ordin α datorată lui Feng [33].

De asemenea, dacă $a'(t) = -1$ în Definiţia 5.1.2, obţinem noţiunea aproape stelarităţii de ordinul $1/2$.

Următorul rezultat determină o condiţie necesară şi suficientă pentru aproape stelaritatea generalizată pe U în termenii lanţurilor Loewner.

Teorema 5.1.4.[28] Fie $f : U \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă normalizată şi $a : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ o funcţie de clasă C^∞, astfel încât Re $a(t) \leq 0, t \in [0, \infty)$. Există $\mu < 0$ astfel încât Re $a(t) \geq \mu, t \geq 0$. Atunci f este o aplicaţie aproape stelată generalizată dacă şi numai dacă

$$g(z, t) = e^{t-a(t)} f(e^{a(t)}z), \quad z \in U, t \geq 0$$

este lanţ Loewner. În particular, f este o funcţie stelată (i.e., a(t)=0) dacă şi numai dacă $g(z, t) = e^t f(z)$ este lanţ Loewner.

Din Teorema 5.1.4 şi bine cunoscuta teoremă de creştere pentru clasa S (a se vedea [39], [100]) obţinem următorul corolar.

Corolarul 5.1.5.[28] Fie $f(z)$ o aplicaţie aproape stelată generalizată . Atunci

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |e^{-a(t)} f(e^{a(t)}z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}, \quad z \in U, t \geq 0.$$

Următorul rezultat demonstrează compactitatea clasei $S_g^*(B^n)$.

Teorema 5.1.6.[28] Mulţimea $S_g^*(B^n)$ este o mulţime compactă.

Următoarea definiţie se referă la noţiunea de reprezentare parametrică pentru aplicaţiile biolomorfe pe B^n. Această noţiune a fost studiată în lucrările [41], [39], [101], [102].

Definiţia 5.1.7. Fie $f \in H(B^n)$ o aplicaţie normalizată. Spunem că f are reprezentare parametrică dacă există un lanţ Loewner $f(z, t)$ pentru care $\{e^{-t} f(\cdot, t)\}_{t \geq 0}$ este o familie normată pe B^n şi $f = f(\cdot, 0)$.

Fie $S^0(B^n)$ mulţimea funcţiilor care au reprezentare parametrică pe B^n.

Numeroase proprietăţi ale operatorilor Pfaltzgraff-Suffridge şi Roper-Suffridge pot fi găsite în [40], [97], [122].

Teorema 5.1.8.[29] Fie f o aplicaţie aproape stelată generalizată. Atunci $F = \Phi_n(f)$ este de asemenea o aplicaţie aproape stelată generalizată.

Teorema 5.1.9.[29] Mulţimea $\Phi_n[S_g^*(B^n)]$ este compactă.

Bibliografie

[1] M. Acu, *Some preserving properties of the generalized Alexander operator*, General Mathematics, Vol. 10, No. 3-4(2002), 37-46.

[2] L.V. Ahlfors, *Conformal Invariants. Topics in Geometric Function Theory*, McGraw-Hill, New York, 1973.

[3] O.P. Ahuja, J.M. Jahangiri, *Multivalent harmonic starlike functions*, Ann. Univ. Marie Curie-Sklodowska Sect. A, LV 1(2001), 1-13.

[4] H.S. Al-Amiri, *On Ruscheweyh derivatives*, Ann. Polon. Math. **38**, No 1(1980), 88-94.

[5] J.W. Alexander, *Function which map the interior of the unit circle upon simple regions*, Ann. of Math. **17** (1915), 12-22.

[6] F. M. Al-Oboudi, *On univalent functions defined by generalized Sălăgean operator*, JMMS, **27**(2004), 1429-1436.

[7] O. Altintas, *On a subclasses of certain starlike functions with negative coefficients*, Math. Japan, **36**(1991), 489-495.

[8] O. Altintas, O. Ozkan, H. M. Srivastava, *Majorization by starlike functions of complex order*, Complex Variables Theory Appl., **46**(2001), 207-218.

[9] M. K. Aouf, *A generalization of starlike functions of complex order*, Huston J. of Math., **122**(1986), 155-162.

[10] M. K. Aouf, A. M. Al-Amiri, *On certain fractional operators for certain subclass of prestarlike functions defined by Sălăgean operator*, J. Fract. Calc., **22**(2002), 47-56.

[11] M. K. Aouf, H. E. Darwish, A. A. Attiya, *On a class of certain analytic functions of complex order*, Indian J.Pure Appl. Math., **32**(2001), 1443-1452.

[12] M.K. Aouf, S. Owa, M. Obradovic, *Certain classes of analytic functions of complex order and type beta*, Rend. Mat., **11**(1991), 691-714.

[13] Y. Avci, E. Zlotkiewicz, *On harmonic univalent mappings*, Ann. Univ. Marie Crie-Sklodowska, Sect. A., **44**(1991).

[14] M. Balaeti, V. Nechita, *Loewner chains and almost starlike mappings of complex order* λ, Carpathian Journal of Mathematics, va apare.

[15] L. Bieberbach, *Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln*, Preuss. Akad. Wiss. Sitzungsb., (1916),940-955.

[16] L.D. Branges, *A proof of the Bieberbach conjecture*, Acta Math. **154** (1985), 137-152.

[17] T. Bulboacă, *Classes of first order differential superordinations*, Demonstr. Math., **35**(2002), No. 2, 287-292.

[18] T. Bulboacă, *Differential Subordinations and Superordinations*, Casa Cărţii de Ştiinţă, Cluj-Napoca, 2005.

[19] J. Clunie, T. Scheil- Small, *Harmonic univalent functions*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math., **9**(1984), 3-25.

[20] **L. I. Cotîrlă**, *Differential subordination and superordination for analytic functions defined by integral operator*, Carpathian Journal of Mathematics, Vol. 25, No. **1**/(2009), pag. 49-54.

[21] **L. I. Cotîrlă**, *Harmonic multivalent functions defined by integral operator*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Mathematica, Vol. 54, No. **1**(2009), pag. 65-74.

[22] **L. I. Cotîrlă**, *A differential sandwich theorem for analytic functions defined by the integral operator*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Mathematica, Vol. 54, No. **2**(2009), pag. 13-22.

[23] **L. I. Cotîrlă**, *Harmonic univalent functions defined by an integral operator*, Acta Universitatis Apulensis, **17**(2009), pag. 95-106, ISSN. 1582-5329.

[24] **L. I. Cotîrlă**, *On a generalization class of bounded starlike functions of complex order*, Analele Universităţii de Vest, Timişoara, va apare.

[25] **L. I. Cotîrlă**, *A new class of harmonic multivalent functions defined by an integral operator*, Acta Universitatis Apulensis, No. **21**(2010), pag. 55-63, ISSN. 1582-5329.

[26] **L. I. Cotîrlă**, *Properties of analytic functions defined by an integral operator*, Demonstratio Mathematica, va apare.

[27] **L. I. Cotîrlă**, *Some properties of a new class of certain analytic functions of complex order* Studia Univ. Babeş-Bolyai, Mathematica, va apare în Vol. 54, No. **3**(2010).

[28] **L. I. Cotîrlă**, *Loewner chains and generalized almost starlike mappings*, Mathematica, va apare.

[29] **L. I. Cotîrlă**, *Generalized almost starlikeness asociated with extension operators for biholomorphic mappings*, Mathematica, va apare.

[30] P.L. Duren, *Univalent Functions*, Springer, New York, 1983.

[31] P.L. Duren, *Harmonic Mappings in the Plane*, Cambridge University Press, 2004.

[32] P.J. Eenigenburg, S.S. Miller, P.T. Mocanu, M.O. Reade, *On a Briot-Bouquet differential subordination*, General Inequalities, 3, International Series of Numerical Mathematics, Vol. **64** Birkhauser Verlag, Basel (1983), 339-348.

[33] S.X. Feng, *Some classes of holomorphic mappings in several complex variables*, University of Science and Technology of China, Doctor thesis, 2004 .

[34] G.M. Goluzin, *On the majorization principle in function theory*, Dokl. Akad., Nauk. SSSR **42** (1935), 647-649.

[35] G.M. Goluzin, *Geometric Theory of Functions of a Complex Variable*, A.M.S. Transl. of Math. Monographs, vol. **26** (1969).

[36] S. Gong, T.S. Liu, *On the Roper-Suffridge extension operator*, J.Anal Math, **88**(2002), 397-404.

[37] S. Gong, T.S. Liu, *The generalized Roper-Suffridge extension operator*, J.Math.Anal.Appl., **284**(2003), 425-434.

[38] A.W. Goodman, *Univalent Functions*, Mariner Publ. Comp., Tampa, Florida, 1983.

[39] I. Graham, G.Kohr, *Geometric function theory in one and higher dimension*, Marcel Dekker, New York , 2003.

[40] I. Graham, G. Kohr, M. Kohr, *Loewner chains and the Roper-Suffridge extension operator*, J.Math.Anal.Appl., **247**(2000), 448-465.

[41] I. Graham, G. Kohr, M. Kohr, *Loewner chains and parametric representation in several complex variables*, J.Math.Anal.Appl., **281**(2003), 425-438.

[42] I. Graham, G. Kohr, J.A. Pfaltzgraff, *Parametric representation and linear functionals associated with extension operators for biholomorphic mappings*, Rev. Roumaine Math. Pure Appl. 52(**1**)(2007), 47-68.

[43] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, *Parametric representation of univalent mappings in several complex variables*, Canad. J.Math., **54**(2002), 324-351.

[44] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, T. Suffridge, *Extension operators for locally univalent mappings*, Michigan Math.J., **50**(2002), 37-55.

[45] I. Graham, G. Kohr, *Univalent mappings associated with the Roper-Suffridge extension operator*, J.Analyse Math., **81**(2000), 331-342.

[46] I. Graham, G. Kohr, *An extension theorem and subclasses of univalent mappings in several complex variables*, Complex Variables, **47**(2002), 59-72.

[47] T. Gronwall, *Some remarks on conformal representation*, Ann. of Math. (2) **16** (1914), 72-76.

[48] D.J. Hallenberck, T.H. MacGregor, *Linear Problems and Convexity Techniques in Geometric Function Theory*, Pitman Adv. Publ. Program, Boston-London-Melbourne, 1984.

[49] D.J. Hallenbeck, St. Ruscheweyh, *Subordination by convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **52** (1975), 191-195.

[50] H. Hamada, G. Kohr, *Subordination chains and the growth theorem of spirallike mappings*, Mathematica(Cluj), 42(**65**)(2000),153-161.

[51] P. Hamburg, P.T. Mocanu, N. Negoescu, *Analiză Matematică (Funţii complexe)*, Ed. Did. şi Ped., Bucureşti, 1982.

[52] E. Hille, *Ordinary Differential Equations in the Complex Plane*, J. Wiley and Sons, New York, 1976.

[53] I.S. Jack, *Functions starlike and convex of order* α, J. London Math. Soc. **3** (1971), 469-474.

[54] J. M. Jahangiri, *Harmonic functions starlike in the unit disc*, J. Math. Anal. Appl., **235**(1999).

[55] J.M. Jahangiri, O.P. Ahuja, *Multivalent harmonic starlike functions*, Ann. Univ. Marie Curie-Sklodowska, Sect. A., **LVI**(2001), 1-13.

[56] J. M. Jahangiri, G. Murugusundaramoorthy and K. Vijaya, *Sălăgean harmonic univalent functions*, South. J. Pure Appl. Math. , **2**(2002), 77-82.

[57] I. B. Jung, Y. C. Kim and H. M. Srivastava, *The Hardy space of analytic functions associated with certain one-parameter families of integral operators*, J. Math. Anal. Appl., **176**(1993), 138-147.

[58] **A.R. Juma, L. I. Cotîrlă**, *On Harmonic univalent function defined by generalized Sălăgean derivatives*, Acta Universitatis Apulensis, va apere în nr.23/2010.

[59] **A.R. Juma, L. I. Cotîrlă**, *On a subclass of analytic functions defined by Ruscheweyh operator*, trimis spre publicare.

[60] I. B. Jung, Y. C. Kim and H. M. Srivastava, *The Hardy space of analytic functions associated with certain one-parameter families of integral operators*, J. Math. Anal. Appl., **176**(1993), 138-147.

[61] P. Koebe, *Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven*, Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen Math. Phys. (1907), 191-210.

[62] G. Kohr, *On some sufficient conditions of almost starlikeness of order* $1/2$ *in* C^n, Studia Univ.Babes-Bolyai, Mathematica, 41,(**3**)(1996), 51-55.

[63] G. Kohr, P. Liczberski, *Univalent mappings and several complex variables*, Cluj University Press, Cluj Napoca, Romania.

[64] P.P. Kufarev, *A remark on integrals of the Loewner equation*, Dokl.Akad.Nauk SSSR, (**57**)(1947), 655-656.

[65] O. S. Kwon, N. E. Cho, *Generalization of Hadamard products of certain analytic functions*, Math. Sci., Res., Hot-Line, 2(**3**)(1998), 1-8.

[66] E. Lindelöf, *Mémoire sur certaines inégalités dand la théorie des fonctions monogènes et sur quelques propriétés nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d'un point singulie essentiel*, Acta Soc. Sc. Fennicae **35** (1909), No. 7.

[67] M.S. Liu, Y.C. Zhu, *On the generalized Roper-Suffridge extension operator in Banach spaces*, Int.J.Math.Sci. (**8**)(2005).

[68] M.S. Liu, Y.C. Zhu, *Loewner chains associated with the generalized Roper-Suffridge extension operator on some domains*, J.Math.Anal.Appl., (**337**)(2008), 946-961.

[69] T.S. Liu, S. Gong, *Family of ϵ starlike mappings (I)*, Chinese Ann. Math. Ser.A, (**23**)(2002), 273-282.

[70] T.S. Liu, S. Gong, *Family of ϵ starlike mappings (II)*, Chinese Ann. Math.Ser.A , (**24**)(2003), 625-638.

[71] T.S. Liu, Q.H. Xu, *Loewner chains associated with the generalized Roper-Suffridge extension operator*, J.Math.Anal.Appl., (**322**)(2006), 107-120.

[72] K. Löewner, *Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises*, I.Math.Ann., (**89**)(1923), 103-121.

[73] S.S. Miller, *Distortion properties of alpha-starlike functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **38**, No.2 (1973), 311-318.

[74] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *Second-order differential inequalities in complex plane*, J.Math.Anal.Appl. **65**(1978), 289-305.

[75] S.S. Miller, P.T. Mocanu, Differential subordinations and univalent functions, Michig. Math. J., **28**(1981), 157-171.

[76] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *On some classes of first-order differential subordinations*, Michig. Math. J., **32** (1985), 185-195.

[77] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *The Theory and applications of second order differential subordinations*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Math. **34**, no.4 (1989), 3-33.

[78] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *Briot-Bouquet differential equations and differential subordinations*, Complex Variables, **33** (1997), 217-237.

[79] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *Differential Subordinations. Theory and Applications*, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, 2000.

[80] S.S. Miller, P.T. Mocanu, Subordinants of differential superordinations, Complex Variables, (48) (2003), 815-826.

[81] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *Briot-Bouquet differential superordinations and sandwich theorems*, J. Math. Anal. Appl., **329**, No.1 (2007), 327-335.

[82] S.S. Miller, P.T. Mocanu, M.O. Reade, *All α-convex functions are starlike*, Rev. Roum. Math. Pures Appl. **17**, No.((1972), 1395-1397.

[83] S.S. Miller, P.T. Mocanu, M.O. Reade, *All α-convex functions are univalent and starlike*, Proc. Amer. Math. Soc. **37**, No.2(1973), 553-554.

[84] P.T. Mocanu, *Une propriéte de convexité generalisée dans la théorie de la représentation conforme*, Mathematica (Cluj) **11(34)** (1969), 127-133.

[85] P.T. Mocanu, *Some integral operators and starlike functions*, Rev. Roum. Math. Pures Appl. **31**, No. 3(1986), 231-235.

[86] P.T. Mocanu, *On a class of first-order differential subordinations*, Babeş-Bolyai Univ., Fac. of Math. Res. Sem., Seminar on Mathematical Analysis, Preprint 7 (1991), 37-46.

[87] P.T. Mocanu, T. Bulboacă, G.Ş. Sălăgean, *Teoria Geometrică a Funcţiilor Analitice*, Casa Cărţii de Ştiinţă, Cluj-Napoca, 1999.

[88] P. T. Mocanu, *Three-cornered hat harmonic functions*, Complex Variables and Elliptic Equation, **12**(2009), 1079-1084.

[89] P. Montel, *Lecons sur les Fonctions Univalentes ou Multivalentes*, Gauthier-Villars, Paris, 1933.

[90] G. Murugusundaramoorthy, H. M. Srivastava, *Neighorhoods of certain classes of analytic functions of complex order*, J. Pure Appl. Math., 5**2**Article **24**(2004), 1-8(electronic).

[91] M.A. Nasr, M.K. Aouf, *Starlike functions of complex order*, J. Natur. Sci. Math., **25**(1985), 1-12.

[92] M. A. Nasr, M. K. Aouf, *Characterizations for convex functions and starlike functions of complex order in U*, Bull. Fac. Sci. Assiut Univ. A **11**(1982), Nr.2, 117-121.

[93] V. Nechita, *Differential subordinations and superordinations for analytic functions defined by the generalized Sălăgean derivative*, va apare.

[94] Z. Nehari, *Conformal Mappings*, Mc. Graw-Hill Book Comp., New York, 1952.

[95] K. S. Padmanabhan, M. S. Ganesan, *Convolution of certain classes of univalent functions with negative coefficients*, J. Pure, Appl. Math. 19(**9**), (1988), 880-889.

[96] J.A. Pfaltzgraff, *Subordination chains and univalence of holomorphic mappings in C^n*, Math.Ann., (**210**)(1974), 55-68.

[97] J.A. Pfaltzgraff, T.J. Suffridge, *An extension theorem and linear invariant families generated by starlike maps*, Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska, Sect. A, (**53**)(1999), 193-207.

[98] G. Polya, G. Szegö, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1925.

[99] C. Pommerenke, *Über die Subordination analytischer funktionen*, J.Reine Angew.Math., (**218**)(1965), 159-173.

[100] C. Pomerenke, *Univalent functions*, Vandenhoeck Ruprecht, Gottingen, 1975.

[101] T. Poreda, *On the univalent subordination chain of holomorphic mappings in Banach spaces*, Comment. Math., (**28**)(1989), 295-304.

[102] T. Poreda, *On the univalent holomorphic maps of the unit polydisc of $\mathbb{C}^n$ which have the parametric representation,II-necessary and sufficient conditions*, Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska Sect A (**41**)(1987),114-121.

[103] D.V. Prohorov, *Integral transformations in some classes of univalent functions*, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. **12**(1980), 45-49.

[104] D. Răducanu, V. Nechita, *A differential sandwich theorem for analytic functions defined by the generalized Sălăgean operator*, va apare.

[105] M.S. Robertson, *On the theory of univalent functions*, Ann. Math. 37(1936), 347-408.

[106] K. Roper, T.J. Suffridge, *Convexity properties of holomorphic mappings in $\mathbb{C}^n$*, Trans. Amer. Math. Soc. (**351**)(1999), 1803-1833.

[107] K. Roper, T.J. Suffridge, *Convex mappings on the unit ball of C^n*, J.Anal.Math., (**65**)(1995), 333-347.

[108] W. Rudin, *Function Theory in the Unit Ball of $\mathbb{C}^n$*, Springer-Verlag, New-York, 1980.

[109] S. Ruscheweyh, *New criterion for univalent functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 49 (1975), 109-115.

[110] §. Ruscheweyh, V. Singh, *On a Briot-Bouquet equation related to univalent functions*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **24** (1979), 285-290.

[111] Gr. Şt. Sălăgean, *Subclasses of univalent functions*, Complex Analysis, Fifth Romanian-Finnish Seminar, Part 1 (Bucharest, 1981), Lecture Notes in Math., vol. 1013, Springer, Berlin, 1983, 362-372.

[112] H. Silverman, *Univalent functions with negative coefficients*, Proc. Amer. Math. Soc.,**51**(1975), 109-116.

[113] H. Silverman, *Harmonic univalent functions with negative coefficients*, J. Math. Anal. Appl. **220**(1998), 283-289.

[114] H. Silverman, E. M. Silvia, *Subclasses of harmonic univalent functions*, New Zealand J. Math. **28**(1999), 275-284.

[115] N.S. Sohi, L.P. Singh, *A class of bounded starlike functions of complex order*, Indian J. Pure Appl. Math., **33**(1991), 29-35.

[116] H. M. Srivastava, S. Owa and S. K. Chatterjea, *A note on certain classes of starlike functions*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **77**(1987), 115-124.

[117] E. Strohhäcker, *Beitrage zur Theorie der schlichten Funktionen*, Math. Z. **37** (1933), 356-380.

[118] E. Study, *Vorlesungen über ausgewählte Gegenstande der Geometrie*, 2. Heft, Teubner, Leipzig und Berlin. 1913.

[119] T. Suffridge, *Some remarks on convex maps of the unit disk*, Duke Math. J. **37** (1970), 775-777.

[120] T.J.Suffridge, *Starlikeness, convexity and other geometric properties of holomorphic maps in higher dimensions*, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, New York, (**599**)(1976), 146-159.

[121] P. Wiatrowski, *The coefficients of a certain family of holomorphyc functions*, Zeszyty Nauk. Univ.Lodz Nauk. Mat-Przyrod, (Ser. 2), **39**(1971), 75-85.

[122] Q-H. Xu, T.S. Liu, *Loewner chains and a subclass of biholomorphic mappings*, J.Math.Anal.Appl.(**334**)(2007), 1096-1105.

[123] S. Yalcin, *A new class of Sălăgean-type harmonic univalent functions*, Applied Mathematics Letters, Vol. 18, **2**(2005), 191-198.

[124] Y.C. Zhu, M.S. Liu, *The generalized Roper-Suffridge extension operator in Banach spaces(II)*, J.Math.Anal.Appl., 303(**2**)(2005), 530-544.