FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
UNIVERSITATEA “BABEŞ–BOLYAI”
CLUJ-NAPOCA, ROMÂNIA

ADRIANA BRÂNDAŞ

APROXIMAREA TRAPEZOIDALĂ A NUMERELOR FUZZY

REZUMATUL TEZEI DE DOCTORAT

COORDONATOR ŞTIINŢIFIC:
PROF. UNIV. DR. PETRU BLAGA

CLUJ-NAPOCA

CUPRINS

CUVINTE CHEIE

Mulţime fuzzy, număr fuzzy, număr fuzzy triunghiular, număr fuzzy trapezoidal, ambiguitate, valoarea, interval de exepectanţă, valoarea de exepectanţă, valoare medie, entropia numerelor fuzzy, aproximare trapezoidală, aproximare ponderată, operator trapezoidal de aproximare.

INTRODUCERE

Matematica fuzzy a prins contur în a doua jumătate a secolului XX, după publicarea de către Lotfi A. Zadeh a primului articol de matematică fuzzy ([82], 1965). Acest articol a generat multe cercetări şi implicit a generat ramuri noi în matematică. Matematica fuzzy poate fi privită ca o paralelă a matematicii clasice sau ca o prelungire firească a acesteia, dar în majoritatea situaţiilor este considerată o matematică nouă şi foarte utilă în rezolvarea problemelor exprimate cu un limbaj vag.

Promotorul teoriei mulţimilor fuzzy, profesorul L. Zadeh, afirmă că matematica fuzzy este un instrument util în modelarea problemelor cu caracter negradual sau prea complexe pentru a fi modelate adecvat prin metode tradiţionale. Dacă L. Zadeh este promotorul matematicii fuzzy la nivel mondial, în ţara noastră primele idei de matematică fuzzy au pornit de la G. Moisil. Biografia lui L. Zadeh şi cercetările sale ştiinţifice sunt prezentate în lucrarea [23].

Studiul matematicii fuzzy este direcţionat pe mai multe subdomenii. Dintre acestea amintim: logica fuzzy, aritmetica fuzzy, teoria controlului fuzzy sau modelarea fuzzy. Comparativ cu celelalte domenii de cercetare, aritmetica fuzzy s-a bucurat de un mare interes doar în ultimii ani. Numerele şi mulţimile fuzzy sunt unelte folosite cu succes în arii ştiinţifice ca: probleme de decizie, ştiinţe sociale, teoria controlului, etc. Potenţialul numerelor fuzzy este recunoscut şi ilustrat în aplicaţii redate în [44] sau [54]. Practic, rezultatele obţinute folosind numerele fuzzy sunt mai bune decât cele obţinute prin metode clasice. Studiul este direcţionat spre: mulţimi şi logică fuzzy ([70], [82], [83], [84]), numere fuzzy ([21], [45], [54]), operaţii efectuate asupra numerelor fuzzy ([12], [18], [19]), proprietăţi ale acestora [42], reprezentări ale numerelor fuzzy [54], ordonarea numerelor fuzzy [22], măsuri de defuzzificare [18], aproximarea numerelor fuzzy ([9], [51], [75]), distanţa între două numere fuzzy ([74], [39]), sisteme de ecuaţii fuzzy şi ecuaţii fuzzy [73], variabile lingvistice [34] sau aplicaţii ale matematicii fuzzy [20].

Operatorii de aproximare au fost studiaţi în multe materiale: ([1], [2], [3], [9], [15], [37], [49], [48], [51], [52], [68], [78], [80], [81], [85]).

Lucrarea este structurată patru capitole. În capitolul I "Preliminarii" am introdus noţiunile teoretice elemetare pe care le vom folosi pe parcursul întregii lucrări. Plecând de la noţiunea de mulţime fuzzy am făcut o scurtă prezentare a operaţiilor ajungând apoi la elementul central al aceste lucrări: numărul fuzzy. În paragraful "**Numere reale şi intervale de numere reale ataşate numerelor fuzzy**" sunt prezentaţi cei mai folosiţi parametrii asociaţi numerelor fuzzy, cum ar fi: entropia (studiată în lucrarea [18], unde am introdus formule de calcul ale entropiei produsului şi câtului a două numere fuzzy trapezoidale.), valoarea medie, ambiguitatea sau valoarea.

Începând cu cel de-al doilea capitol prezentăm metode de aproximare trapezoidală şi ponderată a numerelor fuzzy. Aproximarea numerelor fuzzy este o metodă necesară pentru a simplifica prelucrarea datelor care conţin numere fuzzy şi poate fi privită din mai multe perspective. Deoarece sunt multe metode de aproximare şi mulţi algoritmi care fac aceste aproximări, în opinia noastră important nu este să găsim cel mai bun operator de aproximare, ci să evaluăm proprietăţile şi particularităţile unor operatori care conservă măsuri fuzzy sau mulţimi de nivel şi să găsim aplicaţii interesante ale acestor operatori. Cea mai brutală formă de aproximare este numită defuzzificare şi este un procedeu care ataşează un număr real unui număr fuzzy [43], [22]. Acest mod pe aproximare duce la mari pierderi de informaţie impotantă şi putem numi această metodă, conform [51], "aproximare de speţa I". O altă variantă de aproximare este ataşarea unui interval de numere reale unui număr fuzzy (exemplu în: [41]), deci "aproximare de speţa a II-a". O aproximare mai generoasă a numărul fuzzy este aceea cu un număr fuzzy triunghiular, deci "aproximare de speţa a III-a" (exemplu în: [11]), iar aproximarea cu un trapezoidal o vom numi "aproximare de speţa IV-a" (exemple în: [8], [9], [50], [51], [52], [53]).

Operatorii trapezoidali de aproximare a numerelor fuzzy au fost studiaţi de o mulţi de autori întrucât numerele fuzzy au multe aplicaţii în modelarea eficientă a informaţiei imprecise. Este evident că există un număr infinit de metode de aproximare a numerelor fuzzy cu numere trapezoidale. Dintre pionierii aproximării trapezoidale îl putem aminti pe Delgado care, în [37], sugerează că o aproximare trebuie să conserve cel puţin o parte dintre parametrii iniţiali ai numărului fuzzy. Este uşor de propus orice nouă metodă de aproximare trapezoidală, deoarece există o largă varietate de proprietăţi care pot fi cerute de la început a fi păstrate şi în funcţie de aceste condiţii ajungem la o nouă aproximare. În [51] autorii propun un operator trapezoidal de aproximare şi o listă de criterii pe care un operator ar trebui să le îndeplinească pentru a fi "bun".

Proprietăţile pe care trebuie să le îndeplinească un operator de aproximare conform [51] sunt următoarele:

1. Invarianţa unei mulţimilor de nivel de la suportul numărului fuzzy şi până la nucleul acestuia;
2. Invarianţa la translaţii;
3. Invarianţa la produsul cu scalari;
4. Monotonia;
5. Identitatea;
6. Criteriul de apropiere;
7. Invarianţa intervalului de expectanţă;
8. Continuitatea;
9. Compatibilitatea cu principul extinderii;
10. Invarianţa ordonării;
11. Invarinaţa corelării;
12. Invarianţa incertitudinii.

În multe lucrări care introduc operatori de aproximare, în determinarea operatorilor au fost atinse probleme de minim, deoarece pentru o cât mai bună aproximare s-a recurs la minimizarea distanţei dintre numărul fuzzy şi aproximantul său. Această problema s-a rezolvat prin aplicare metodei multiplicatorilor lui Lagrange [51] sau teorema Karush-Kuhn-Tuker [9], [53]. O altă manieră de abordare este dată în [85], unde aproximarea trapezoidală este studiată prin prisma distanţei pondetate. În [53] este abordată aproximarea trapezoidală ponderată a numerelor fuzzy care conservă intervalul de expectanţă şi sunt introduşi noi algoritmi de aproximare trapezoidală a numerelor fuzzy respectând o distanţă bazată pe funcţii bisimetrice ponderate.

În capitolul II am introdus şi studiat operatorul trapezoidal de aproximare care conservă intervalul de expectanţă şi nucleul numărului fuzzy. În deteminarea acestui operator cele patru condiţii stabilite la început pentru determinarea parametrilor operatorului de aproximare au dus la un sistem determinat cu soluţie unică. Cu toate că forma aceastui operator este foarte simplă şi uşor de obţinut avem de-a face cu un operator liniar, proprietate rar întâlnită în cadrul operatorilor de apoximare trapezoidală, deci şi o proprietate valoroasă. Pe lângă aceasta, operatorul este invariant la translaţii, respectă criteriul identităţii, conservă ordinea indusă peste mulţimea numerelor fuzzy de valoarea de expectanţă, este invariant în raport cu relaţii bazate pe valoarea de expectanţă sau intervalul de expectanţă, deci respectă o mare parte dintre criteriile enunţate în [51]. Operatorul nu conservă însă ambiguitatea numărului fuzzy şi nici valoarea acestuia. O altă proprietate studiată este continuitatea, aceasta se discută în raport cu două metrici. Pentru a reflecta utilitatea acestui operator am dat o formă de calcul pentru numerele fuzzy introduse de Bodjanova în [22] şi o serie de alte aplicaţii şi exemple: rezolvarea sistemelor de ecuaţii fuzzy, estimarea ordinului de multiplicitate pentru numere trapezoidale.

Al doilea paragraf al acestui capitolul introduce operatorul trapezoidal de aproximare care conservă intervalul de expectanţă şi suportul numărului fuzzy [26]. Dacă în cazul primului operator, toate numerele fuzzy se puteau aproxima la un număr trapezoidal, în cazul acestui operator, doar o familie de numere fuzzy se pot aproxima cu numere trapezoidale conservând proprietăţile impuse: conservarea mulţimea de nivel zero şi intervalul de expectanţă. Studiul acestui operator este făcut din punctul de vederea al unor proprietăţi importante ca: invarianţa la translaţii, liniaritatea, criteriul de identitate, conservarea unor măsuri care au la bază conservarea intervalului de expectanţă, continuitatea în raport cu diverse metrici, studiul defectului de multiplicitate.

Încheiem capitolul cu un operator de aproximare, numit operatorul de aproximare trapezoidală care conservă valoare de expectanţă şi nucleu numărului fuzzy [28]. În cazul primilor doi operatori problemele s-au redus la câte un sistem de patru ecuaţii şi patru necunoscute, în cazul acestui operator din condiţia de minimizarea a distanţei dintre numărul fuzzy şi cel trapezoidal, conservarea valorii de expectanţă şi a nucleului rezolvarea se face pe baza unei teoreme de minimizare, iar noi am ales teorema Karush-Kuhn-Tucker. Pe lângă generarea acestui operator am trecut şi la studiul proprietăţilor, dar şi la generarea unor exemple.

Capitolul III introduce operatori de aproximare care conservă valoarea, ambiguitatea şi, eventual o mulţime de nivel. Primul este operatorul care conservă ambiguitatea şi valoarea, este cel mai apropiat număr fuzzy trapezoidal de numărul fuzzy de aproximat şi este introdus în [13]. Cu toate că operatorul este introdus prin minimizarea distanţei dintre numărul fuzzy şi trapezoidalul care îl aproximează nu folosim teoreme de minimizare, ci doar numere fuzzy trapezoidale extinse. Pentru acest operator sunt studiate proprietăţile, sunt introduşi algoritmi de calcul, este demonstrată continuitatea şi sunt evidenţiate exemple şi aplicaţii. Pentru cei doi operatori care conservă ambiguitatea, valoarea şi o mulţime de nivel, introduşi în [24] şi în [29] am studiat proprietăţile şi am dat o serie de aplicaţii.

Capitolul IV studiază operatorii ponderaţi de aproximare. Întâi prezentăm operatorul ponderat care conservă suportul numărului fuzzy, introdus în [25], iar apoi prezentăm operatorul ponderat care conservă intervalul de expectanţă. În fiecare caz folosim Teorema Karush-Kuhn-Tucker.

Contribuţiile noastre originale sunt: capitolele: 2, 3, 4 şi o mare parte din paragraful 1.3.2.

1 Preliminarii

1.1 Mulţimi fuzzy

Definiţia 1 (*vezi* [*82*]) *Fie X o mulţime nevidă. O mulţime fuzzy A pe X este caracterizată de o funcţie numită funcţie de apartenenţă şi definită astfel:*

$$f_A : X \to [0,1]$$

care asociază fiecărui element din X un număr real din intervalul $[0,1]$.

1.2 Numere fuzzy

Definiţia 2 *Un număr fuzzy este o mulţime fuzzy $f_A : \mathbb{R} \to [0,1]$ care satisface următoarele condiţii (vezi [74], [46]):*
(i) f_A este semicontinuă superior;
(ii) supp $f_A = \{x \in X : f_A(x) > 0\}$ este un interval închis şi mărginit;
(iii) dacă supp $f_A = [a,d]$, atunci există a, b, c, d, unde $a \leq b \leq c \leq d$, astfel încât f_A este crescătoare pe intervalul $[a,b]$, este egală cu 1 pe intervalul $[b,c]$ şi este descrescătoare pe intervalul $[c,d]$.

Notăm cu $F(\mathbb{R})$ mulţimea numerelor fuzzy.

Pornind de la definiţia generală a numerelor fuzzy, în [54] sunt prezentate principalele clase de numere fuzzy, acestea sunt: $L-R$ numere fuzzy, numerele fuzzy trapezoidale (care sunt un caz particular de $L-R$ numere fuzzy), numerele fuzzy triunghiulare (care sunt un caz particular de numere fuzzy trapezoidale), numerele fuzzy gaussiene, numerele fuzzy cvasi-gaussiene, numerele fuzzy cvadrice, numerele fuzzy exponenţiale, numerele fuzzy cvasi-exponenţiale şi numerele fuzzy single-ton.

Definiţia 3 *Un caz particular de număr $L-R$ fuzzy introdus de Dubois şi Prade în 1981 şi descris în [43] este numărul fuzzy*

$$A(x)=\begin{cases}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n, & dacă\ x\in[a,b]\\ 1, & dacă\ x\in[b,c]\\ \left(\frac{d-x}{d-c}\right)^n, & dacă\ x\in[c,d]\\ 0, & altfel\end{cases} \tag{1}$$

Folosim notaţia $A(x)=(a,b,c,d)_n$.

Pentru numărul fuzzy dat în (1), mulţimea de nivel sau $\alpha-$tăietura numărului A:

$$A_\alpha=\left[a+\sqrt[n]{\alpha}\,(b-a)\,,d-\sqrt[n]{\alpha}\,(d-c)\right];$$

Structura aritmetică pentru matematica fuzzy a fost introdusă de Mizumoto şi Tanaka în lucrările [66] şi [67], de Dubois şi Prade prin lucrările [43], [41] şi [40], de Ma, Friderman şi Kandel prin [64]. Operaţiile algebrice care se pot defini între numerele fuzzy pot fi derivate din aşa-numitele principii de extindere [65] sau folosind mulţimile de $\alpha-$ nivel (vezi [60], [76]). În această lucrare vom folosi cea din urmă metodă.

1.3 Numere reale şi intervale de numere reale ataşate numerelor fuzzy

În aplicaţii, uneori, din motive practice, unui număr fuzzy i se atribuie o valoare reală sau un interval de numere reale. Prin acest procedeu un parametru captează informaţia relevantă a unui număr fuzzy şi duce la simplificarea reprezentării şi manevrării numerelor fuzzy. Astfel, în literatura de specialitate au fost introduşi şi folosiţi o serie de parametrii, cum ar fi: ambiguitatea, valoare, cardinalul, valoarea de expectanţă, intervalul de expectanţă sau entropia fuzzy.

În continuare, vom prezenta o parte din măsurile de defuzzificare şi parametrii ataşaţi numerelor fuzzy utilizaţi în teoria numerelor fuzzy.

1.3.1 Ambiguitatea, valoarea şi intervalul de expectanţă

În [41] pentru un număr fuzzy A, unde $\mu_A(x)$ este fuzzy convexă, semicontinuă superior şi cu suportul o mulţime închisă, unde supp $A=\{x\in X:\mu_A(x)>0\}$. α-tăieturile lui A , $\alpha\in[0,1]$ sunt definite astfel:

$$A_\alpha=\{x\in X:\mu_A(x)\geq\alpha\}.$$

Orice α-tăietură a numărului fuzzy A este un interval închis notat astfel $A_\alpha = [A_L(\alpha), A_U(\alpha)]$, unde

$$\begin{aligned} A_L(\alpha) &= \inf\{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\} \\ A_U(\alpha) &= \sup\{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\}. \end{aligned}$$

Pentru două numere fuzzy A, B cu mulţimile de nivel $A_\alpha = [A_L(\alpha), A_U(\alpha)]$ şi $B_\alpha = [B_L(\alpha), B_U(\alpha)]$, vom folosi următoarele distanţe, introduse în [48],

$$D(A,B) = \sqrt{\int_0^1 [A_L(\alpha) - B_L(\alpha)]^2 d\alpha + \int_0^1 [A_U(\alpha) - B_U(\alpha)]^2 d\alpha},$$

şi

$$d(A,B) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \{\max\{|A_L(\alpha) - B_L(\alpha)|, |A_U(\alpha) - B_U(\alpha)|\}\}.$$

În continuare, prezentăm ambiguitatea unui număr fuzzy A, notată cu $Amb(A)$ şi valoarea unui număr fuzzy A, notată cu $Val(A)$. Cei doi parametrii au fost introduşi în [37] astfel

$$Amb(A) = \int_0^1 \alpha(A_U(\alpha) - A_L(\alpha))d\alpha, \tag{2}$$

$$Val(A) = \int_0^1 \alpha(A_U(\alpha) + A_L(\alpha))d\alpha. \tag{3}$$

Intervalul de expectanţă al numărului fuzzy A, notat cu $EI(A)$ este definit în ([40], [55]) astfel:

$$EI(A) = [E_*(A), E^*(A)] = \left[\int_0^1 A_L(\alpha)\, d\alpha, \int_0^1 A_U(\alpha)\, d\alpha\right]$$

Mijlocul intervalului de expectanţă numit valoarea de expectanţă, notat cu $EV(A)$ este dat în [55] astfel:

$$EV(A) = \frac{E_*(A) + E^*(A)}{2}.$$

1.3.2 Entropia numerelor fuzzy

Până în prezent, entropia fuzzy a fost introdusă din mai multe perspective, fiecare conducând la o nouă metodă de calcul. Kaufmann, în lucrarea [59], a propus măsurarea gradului de fuzzificare a unei mulţimi fuzzy folosind distanţa dintre mulţimea fuzzy şi cea mai apropiată mulţime ne-fuzzy. Un alt mod de măsurare a entropiei a fost propus de Yager în lucrarea [77], ca distanţă dintre mulţimea fuzzy şi complementara sa. O altă abordare a entropiei este folosirea unor funcţii pentru a calcula entropia.

Trebuie remarcat faptul că entropia este o măsură care caracterizează elementele fuzzy (mulţimi sau numere fuzzy), iar interesul pentru această noţiune este tot mai crescut în ultimii ani. Acest lucru poate fi afirmat pe baza multiplelor articole din literatura de specialitate care au ca temă entropia [18], [61], [62], [76].

Fie $h : [0, 1] \to [0, 1]$ o funcţie de calcul a entropiei, care îndeplineşte următoarele proprietăţi: este crescătoare pe intervalul $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ şi descrescătoare pe intervalul $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, verifică egalităţile $h(0) = h(1) = 0$, $h\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ şi $h(u) = h(1-u)$. Aplicaţia H definită de

$$H(A) = \int_X h(A(x))dx$$

în este [76] se numeşte entropie fuzzy.

Câteva bine-cunoscute funcţii de entropie sunt definite astfel (vezi [69], [76]):

$$h_1(u) = \begin{cases} 2u, & \text{dacă } u \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ 2(1-u), & \text{dacă } u \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \end{cases} \tag{4}$$

$$h_2(u) = 4u(1-u), \tag{5}$$

$$h_3(u) = -u \ln u - (1-u)\ln(1-u), \text{ cu convenţia } 0 \ln 0 := 0, \tag{6}$$

h_3 fiind cunoscută în literatura de specialitate sub numele de funcţia lui Shannon.

Vom nota H_i entropia numerelor fuzzy relativ la funcţia de entropie h_i.

Folosind funcţiile h_i putem deduce formule simple pentru entropia fuzzy a produsului a două numere fuzzy trapezoidale.

Teorema 4 *(Teorema 4.1, [18]) Dacă A, B sunt două numere fuzzy atunci*

$$\begin{aligned} (i)\ H_1(A \cdot B) &= -\frac{1}{2}\left(a_1b_1 - a_2b_2 + a_3b_3 - a_4b_4\right); \\ (ii)\ H_2(A \cdot B) &= -\frac{2}{3}\left(a_1b_1 - a_2b_2 + a_3b_3 - a_4b_4\right); \\ (iii)\ H_3(A \cdot B) &= -\frac{1}{2}\left(a_1b_1 - a_2b_2 + a_3b_3 - a_4b_4\right). \end{aligned}$$

În continuare vom calcula entropia câtului a două numere trapezoidale. Folosind modul de definire a numerelor fuzzy trapezoidale şi funcţiile de calcul ale entropiei am determinat formule de calcul ale entropiei pentru câtul a două numere fuzzy acestea se găsesc şi în [18].

Teorema 5 *(Teorema 5.1, [18]) Dacă A, B sunt două numere fuzzy atunci*

(i)

$$\begin{aligned} H_1(A/B) &= \frac{2\left(a_2b_4 - a_1b_3\right)}{\left(b_4 - b_3\right)^2} \ln \frac{(b_3 + b_4)^2}{4b_3b_4} \\ &\quad + \frac{2(a_4b_2 - a_3b_1)}{\left(b_2 - b_1\right)^2} \ln \frac{(b_2 + b_1)^2}{4b_2b_1}. \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} H_2(A/B) &= \frac{4(a_2b_4 - a_1b_3)}{(b_4-b_3)^2}\left(\frac{b_4+b_3}{b_4-b_3}\ln\frac{b_4}{b_3} - 2\right) \\ &\quad + \frac{4(a_4b_2 - a_3b_1)}{(b_2-b_1)^2}\left(\frac{2b_2+b_1}{b_2-b_1}\ln\frac{b_1}{b_1} - 2\right). \end{aligned}$$

(iii) Dacă, în plus, $2b_3 > b_4$ *şi* $2b_1 < b_2$ *atunci*

$$\begin{aligned} H_3(A/B) = {} & \tfrac{a_2b_4-a_1b_3}{(b_4-b_3)b_4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(k+1)^2}\left(\frac{b_4-b_3}{b_4}\right)^k + \\ & + \tfrac{a_2b_4-a_1b_3}{(b_4-b_3)b_3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}k}{(k+1)^2}\left(\frac{b_4-b_3}{b_3}\right)^k + \\ & + \tfrac{a_4b_2-a_3b_1}{(b_2-b_1)b_1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}k}{(k+1)^2}\left(\frac{b_2-b_1}{b_1}\right)^k + \\ & + \tfrac{a_4b_2-a_3b_1}{(b_2-b_1)b_2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(k+1)^2}\left(\frac{b_2-b_1}{b_2}\right)^k. \end{aligned}$$

Propoziţia 6 *Dacă*

$$A \in \mathbb{T}, B \in \mathbb{T}\ .$$

Atunci

$$\begin{aligned} H_1(A \odot B) &= \frac{1}{2}(2a_2b_2 - a_2b_1 - a_1b_2 - 2a_3b_3 + a_3b_4 + a_4b_3) \\ H_2(A \odot B) &= \frac{2}{3}(2a_2b_2 - a_2b_1 - a_1b_2 - 2a_3b_3 + a_3b_4 + a_4b_3) \\ H_3(A \odot B) &= \frac{1}{2}(2a_2b_2 - a_2b_1 - a_1b_2 - 2a_3b_3 + a_3b_4 + a_4b_3). \end{aligned}$$

Propoziţia 7 *Dacă*

$$A \in \mathbb{T}, B \in \mathbb{T}$$

atunci:

$$H_i(A \odot B) = b_2H_i(A) + a_2H_i(B) - k\left[(b_4-b_3)(a_2-a_3) + (a_4-a_3)(b_2-b_3)\right]$$

unde

$$k = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{dacă } i \in \{1,3\} \\ \frac{2}{3}, & \text{dacă } i = 2. \end{cases}$$

1.4 Criterii de aproximare

Pe parcursul acestei lucrări ne propunem să aproximăm numerele fuzzy cu numere fuzzy trapezoidale. Astfel, vom introduce o serie de operatori trapezoidali definiţi pe mulţimea numerelor fuzzy cu valori în mulţimea numerelor fuzzy trapezoidale. Întrucât aproximarea trapezoidală poate fi studiată din diverse unghiuri, căutăm ca operatorii care îndeplinesc o cât mai mare parte din proprietăţile enunţate în lista de criterii din [51]. Aceste criterii sunt:

Invarianţa la translaţii, adică

$$T\left(A+z\right)=T\left(A\right)+z \tag{7}$$

pentru orice $A\in F(\mathbb{R})$;

Liniaritatea, adică

$$\begin{array}{c} T\left(\lambda A\right)=\lambda T\left(A\right) \\ T\left(A+B\right)=T\left(A\right)+T\left(B\right) \end{array} \tag{8}$$

pentru orice A, $B\in F(\mathbb{R})$ şi $\lambda\in\mathbb{R}^{*}$;

Invarianţa la tăietură de α_0-nivel, adică

$$\left(T\left(A\right)\right)_{\alpha_0}=A_{\alpha_0}, \tag{9}$$

de exemplu: invarianţa la suport sau invarianţa la nucleu.

Identitatea, adică

$$T\left(A\right)=A, \tag{10}$$

pentru orice $A\in F^{T}\left(\mathbb{R}\right)$;

Conservarea intervalul de expectanţă, adică

$$EI\left(T\left(A\right)\right)=EI\left(A\right), \tag{11}$$

pentru orice $A\in F(\mathbb{R})$;

Conservarea valorii de expectanţă, adică

$$EV\left(T\left(A\right)\right)=EV\left(A\right), \tag{12}$$

pentru orice $A\in F(\mathbb{R})$;

Invarianţa în raport cu relaţia de ordine $\succ$ definită în [77]

$$A\succ B\Leftrightarrow EV\left(A\right)\geqslant EV\left(B\right) \tag{13}$$

adică

$$A\succ B\Leftrightarrow T\left(A\right)\succ T\left(B\right) \tag{14}$$

pentru orice A, $B\in F(\mathbb{R})$;

Invarianţa în raport cu relaţia de ordine M definită în [58] astfel:

$$M\left(A,B\right)=\left\{\begin{array}{c} 0,\text{dacă }\ E^{*}(A)-E_{*}(B)<0, \\ \frac{E^{*}(A)-E_{*}(B),}{E^{*}(A)-E_{*}(B)-(E_{*}(A)-E^{*}(B))},\ \text{dacă } 0\in\left[E_{*}(A)-E^{*}(B),E^{*}(A)-E_{*}(B)\right], \\ 1,\text{dacă } E_{*}(A)-E^{*}(B)>0, \end{array}\right. \tag{15}$$

adică

$$M\left(T\left(A\right),T\left(B\right)\right)=M\left(A,B\right), \tag{16}$$

pentru orice $A, B \in F(\mathbb{R})$;

Invarianţa în raport cu măsura definită în [33], astfel:

$$w(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_A(x)dx, \tag{17}$$

adică

$$w(A) = w(T(A)), \tag{18}$$

pentru orice $A \in F(\mathbb{R})$;

Invarianţa la corelaţie, adică

$$\rho(T(A), T(B)) = \rho(A, B) \tag{19}$$

pentru orice $A, B \in F(\mathbb{R})$, unde $\rho(A, B)$ reprezintă coeficientul de corelaţie dintre numerele fuzzy A şi B, definit în [57] astfel:

$$\rho(A, B) = \frac{E_*(A)E_*(B) + E^*(A)E^*(B)}{\sqrt{(E_*(A))^2 + (E^*(A))^2}\sqrt{(E_*(B))^2 + (E^*(B))^2}}. \tag{20}$$

Monotonia, adică

$$\text{dacă } A \subset B \text{ atunci } T(A) \subset T(B). \tag{21}$$

Criteriul de apropiere

$$d(A, T(A)) \leq d(A, B), \tag{22}$$

unde d este o metrică indusă peste mulţimea numerelor fuzzy, iar $A, B \in F(\mathbb{R})$;

Continuitatea, adică

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0\ d(A, B) < \delta \Rightarrow d(T(A), T(B)) < \varepsilon, \tag{23}$$

unde d este o metrică indusă peste mulţimea numerelor fuzzy, iar $A, B \in F(\mathbb{R})$;

Prezentăm în continuare o variantă a bine-cunoscutei teoreme Karush-Kuhn-Tucker.

Teorema 8 *(Rockafellar, [71]) Fie $f, g_1, g_2, ..., g_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funcţii diferenţiabile convexe. Atunci $\bar{x}$ este soluţie a problemei de programare convexă*

$\min f(x)$

cu condiţiile: $g_i(x) \leq b_i$, unde $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$

dacă şi numai dacă există μ_i, unde $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$, astfel încât

(i) $\nabla f\left(\bar{x}\right) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \nabla g_i\left(\bar{x}\right) = 0;$

(ii) $g_i\left(\bar{x}\right) - b_i \leq 0;$

(iii) $\mu_i \geq 0;$

(iv) $\mu_i\left(b_i - g_i\left(\bar{x}\right)\right) = 0.$

2 Aproximări trapezoidale care conservă expectanţa şi o mulţime de nivel

În acest capitol introducem trei operatori de aproximare care conservă expectanţa şi o mulţime de nivel, după cum urmează: operatorul trapezoidal de aproximare care conservă intervalul de expectanţă şi nucleul, operatorul de aproximare care conservă intervalul de expectanţă şi suportul introdus în [26] şi operatorul de aproximare trapezoidală care conservă valoarea de expectanţă şi nucleul introdus în [28]. Pentru operatorii introduşi sunt studiate proprietăţi cum ar fi: invarianţa la translaţii, continuitatea în raport cu diverse metrici, criteriul identităţii, conservarea intervalului de expectanţă sau a valorii de expectanţă, invarianţa în raport cu diverse relaţii de ordine. Capitolul mai conţine şi o serie de exemple şi aplicaţii ale operatorilor introduşi, cum ar fi: rezolvarea sistemelor de ecuaţii fuzzy sau estimarea defectului de multiplicitate.

2.1 Operatorul trapezoidal care conservă intervalul de expectanţă şi nucleul

2.2 Operatorul trapezoidal care conservă intervalul de expectanţă şi suportul

Vom folosi următoarea notaţie:

$$F_{ES}(\mathbb{R})=\left\{A\in F(\mathbb{R})|\ 2\int_0^1\left[A_U\left(\alpha\right)-A_L\left(\alpha\right)\right]d\alpha\geq A_U\left(0\right)-A_L\left(0\right)\right\}$$

Teorema 9 *Dacă $A\in F_{ES}(\mathbb{R})$ atunci*

$$T\left(A\right)=\left(A_L\left(0\right),2\int_0^1A_L\left(\alpha\right)d\alpha-A_L\left(0\right),2\int_0^1A_U\left(\alpha\right)d\alpha-A_U\left(0\right),A_U\left(0\right)\right)$$

este aproximarea trapezoidală care conservă intervalul de expectanţă şi suportul.

Observaţia 10 *Dacă $A\notin F_{ES}(\mathbb{R})$ atunci nu există nici un număr fuzzy trapezoidal care să conserve intervalul de expectanţă şi suportul numărului fuzzy A.*

Exemplul 11 *Considerăm un număr fuzzy A, cu mulţimea de nivel exprimată mai jos:*

$$\begin{aligned}A_L\left(\alpha\right)&=1+\alpha^2,\\A_U\left(\alpha\right)&=3-\alpha^2,\alpha\in[0,1]\end{aligned}$$

atunci aproximarea trapezoidală care conservă suportul şi intervalul de expectanţă este:

$$T\left(A\right)=\left(1,\frac{5}{3},\frac{7}{3},3\right)$$

este numărul fuzzy trapezoidal care conservă intervalul de expectanţă şi suportul numărului fuzzy A.

Exemplul 12 *Fie A un număr fuzzy*

$$\begin{aligned} A_L(\alpha) &= 1+\sqrt{\alpha}, \\ A_U(\alpha) &= 45-35\sqrt{\alpha}, \alpha\in[0,1]. \end{aligned}$$

Deoarece

$$2\int_0^1 [A_U(\alpha)-A_L(\alpha)]\,d\alpha = 40 < 44 = A_U(0)-A_L(0)$$

obţinem că $A\notin F_{ES}(\mathbb{R})$, deci nu există un număr fuzzy trapezoidal care conservă intervalul de expectanţă şi suportul lui A.

Observaţia 13 *Dacă $A=(a,b,c,d)_n$ este un număr fuzzy dat de (1), $n\in\mathbb{R}_+^*$ şi*

$$-a+d+an-2bn+2cn-dn\geq 0,$$

atunci

$$T(A)=\left(a,\frac{2bn-an+a}{n+1},\frac{2cn-dn+d}{n+1},d\right).$$

este numărul fuzzy trapezoidal care conservă intervalul de expectanţă şi suportul numărului fuzzy A.

Exemplul 14 *Considerăm numărul fuzzy $B=(5,8,12,14)_{\frac{1}{3}}$ atunci aproximarea trapezoidală care conservă intervalul de expectanţă şi suportul numărului fuzzy B este:*

$$T(B)=\left(5,\frac{13}{2},13,14\right).$$

Principalele proprietăţi ale operatorului trapezoidal care conservă suportul numărului fuzzy şi intervalul de expectanţă sunt date în următoarea teoremă.

Teorema 15 *Operatorul trapezoidal de aproximare care conservă intervalul de expectanţă şi suportul numărului fuzzy are următoarele proprietăţi:*

(i) este invariant la translaţii, adică

$$T(A+z)=T(A)+z$$

pentru orice $A\in F_{ES}(\mathbb{R})$;

(ii) este liniar, adică

$$\begin{aligned} T(\lambda A) &= \lambda T(A) \\ T(A+B) &= T(A)+T(B) \end{aligned}$$

pentru orice $A,B\in F_{ES}(\mathbb{R})$ şi $\lambda\in\mathbb{R}^*$;

(iii) îndeplineşte criteriul de identitate, adică

$$T(A)=A,$$

pentru orice $A \in F^T(\mathbb{R})$;

(iv) conservă intervalul de expectanţă, adică

$$EI(T(A)) = EI(A),$$

pentru orice $A \in F_{ES}(\mathbb{R})$;

(v) este invariant în raport cu relaţia de ordine $\succ$ *definită în [77]*

$$A \succ B \Leftrightarrow EV(A) \geqslant EV(B)$$

adică

$$A \succ B \Leftrightarrow T(A) \succ T(B)$$

pentru orice $A,\ B \in F_{ES}(\mathbb{R})$;

(vi) este invariant în raport cu relaţia de ordine M *definită în [58] astfel:*$M(A,B) = \left\{ \begin{array}{c} 0,\ \textit{dacă}\ E^*(A) - E_*(B) < 0, \\ \frac{E^*(A)-E_*(B),}{E^*(A)-E_*(B)-(E_*(A)-E^*(B))},\ \textit{dacă}\ 0 \in [E_*(A) - E^*(B), E^*(A) - E_*(B)], \\ 1,\ \textit{dacă}\ E_*(A) - E^*(B) > 0, \end{array} \right.$ *adică*

$$M(T(A), T(B)) = M(A,B),$$

pentru orice $A, B \in F_{ES}(\mathbb{R})$;

(vii) este invariant în raport cu măsura definită în [33] astfel

$$w(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_A(x)dx,$$

adică

$$w(A) = w(T(A)),$$

pentru orice $A \in F_{ES}(\mathbb{R})$;

(viii) este invariant la corelaţie, adică

$$\rho(T(A), T(B)) = \rho(A,B)$$

pentru orice $A, B \in F_{ES}(\mathbb{R})$, *unde* $\rho(A,B)$ *reprezintă coeficientul de corelaţie dintre numerele fuzzy* A *şi* B, *definit în [57]*

$$\rho(A,B) = \frac{E_*(A)E_*(B) + E^*(A)E^*(B)}{\sqrt{(E_*(A))^2 + (E^*(A))^2}\sqrt{(E_*(B))^2 + (E^*(B))^2}}.$$

2.3 Operator trapezoidal care consevă valoarea de expectanţă şi nucleul

Teorema 16 *Dacă* A *este un număr fuzzy cu mulţimea de nivel* $A_\alpha = [A_L(\alpha), A_U(\alpha)]$, *şi* $T(A) = (t_1, t_2, t_3, t_4)$ *notează cel mai apropiat număr fuzzy trapezoidal, în raport cu metrica* D, *care conservă nucleul şi valoarea de expectanţă, atunci* *(i) Dacă*

$$\int_0^1 \left[(2-6\alpha) A_U(\alpha) + (6\alpha - 10) A_L(\alpha)\right] d\alpha + 7A_L(1) + A_U(1) < 0 \tag{24}$$

şi

$$\int_0^1 \left[A_L(\alpha) + A_U(\alpha)\right] d\alpha \geq A_L(1) + A_U(1), \tag{25}$$

atunci

$$\begin{aligned} t_1 &= t_2 = A_L(1) \\ t_3 &= A_U(1) \\ t_4 &= 2\int_0^1 A_L(\alpha)\, d\alpha + 2\int_0^1 A_U(\alpha)\, d\alpha - 2A_L(1) - A_U(1). \end{aligned}$$

(ii) Dacă

$$\int_0^1 \left[(2-6\alpha) A_L(\alpha) + (6\alpha - 10) A_U(\alpha)\right] d\alpha + A_L(1) + 7A_U(1) > 0 \tag{26}$$

şi

$$\int_0^1 \left[A_L(\alpha) + A_U(\alpha)\right] d\alpha \leq A_L(1) + A_U(1), \tag{27}$$

atunci

$$\begin{aligned} t_1 &= 2\int_0^1 A_L(\alpha)\, d\alpha + 2\int_0^1 A_U(\alpha)\, d\alpha - A_L(1) - 2A_U(1) \\ t_2 &= A_L(1) \\ t_3 &= A_U(1) \\ t_4 &= A_U(1). \end{aligned}$$

(iii) Dacă

$$\int_0^1 \left[(2-6\alpha) A_U(\alpha) + (6\alpha - 10) A_L(\alpha)\right] d\alpha + 7A_L(1) + A_U(1) \geq 0 \tag{28}$$

şi

$$\int_0^1 \left[(2-6\alpha) A_L(\alpha) + (6\alpha - 10) A_U(\alpha)\right] d\alpha + A_L(1) + 7A_U(1) \leq 0 \tag{29}$$

atunci

$$t_1 = -\frac{3}{2}\int_0^1 \alpha \left(A_L(\alpha) - A_U(\alpha)\right) d\alpha - \frac{3}{4}A_L(1) + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(5A_L(\alpha) - A_U(\alpha)\right) d\alpha - \frac{1}{4}A_U(1)$$

$$\begin{aligned} t_2 &= A_L(1) \\ t_3 &= A_U(1) \end{aligned}$$

$$t_4 = \frac{3}{2}\int_0^1 \alpha \left(A_L(\alpha) - A_U(\alpha)\right) d\alpha - \frac{1}{4}A_L(1) - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(A_L(\alpha) - 5A_U(\alpha)\right) d\alpha - \frac{3}{4}A_U(1).$$

Exemplul 17 *Fie A un număr fuzzy cu mulţimea de nivel*

$$A_\alpha = \left[1 + 99\sqrt{\alpha}, 200 - 95\sqrt{\alpha}\right],$$

atunci aproximarea trapezoidală care conservă valoarea de expectanţă şi nucleul este $T(A) = (t_1, t_2, t_3, t_4)$ şi se calculează pe baza cazului (iii) al Teoremei 16 astfel:

$$\begin{aligned}
t_1 &= -\frac{3}{2}\int_0^1 \alpha\left(A_L(\alpha) - A_U(\alpha)\right)d\alpha - \frac{3}{4}A_L(1) + \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_0^1 \left(5A_L(\alpha) - A_U(\alpha)\right)d\alpha - \frac{1}{4}A_U(1) \\
&= \frac{923}{30} \\
t_2 &= A_L(1) = 100 \\
t_3 &= A_U(1) = 105 \\
t_4 &= \frac{3}{2}\int_0^1 \alpha\left(A_L(\alpha) - A_U(\alpha)\right)d\alpha - \frac{1}{4}A_L(1) - \\
&\quad -\frac{1}{2}\int_0^1 \left(A_L(\alpha) - 5A_U(\alpha)\right)d\alpha - \frac{3}{4}A_U(1) \\
&= \frac{5174}{30}.
\end{aligned}$$

Teorema 18 *Fie $A = (a, b, c, d)_n$ şi $T(A) = (t_1, t_2, t_3, t_4)$ cel mai apropiat număr fuzzy trapezoidal care conservă nucleul şi valoarea de expectanţă a numărului A.*

(i) Dacă

$$(n-1)(d-c) + (17n+7)(b-a) < 0$$

şi

$$a - b - c + d \geq 0,$$

atunci

$$\begin{aligned}
t_1 &= t_2 = b \\
t_3 &= c \\
t_4 &= \frac{2a - 2b - c + 2d + cn}{n+1}.
\end{aligned}$$

(ii) Dacă

$$(b-a)(1-n) - (17n+7)(d-c) > 0$$

şi

$$a - b - c + d \leq 0,$$

atunci

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{2a-b-2c+2d+bn}{n+1} \\ t_2 &= b \\ t_3 &= t_4 = c \end{aligned}$$

(iii) Dacă

$$(n-1)(d-c)+(17n+7)(b-a) \geq 0$$

şi

$$(b-a)(1-n)-(17n+7)(d-c) \leq 0$$

atunci

$$t_1 = \frac{8bn^2+17an-5bn+cn-dn+7a-3b-c+d}{4(n+1)(2n+1)}$$

$$\begin{aligned} t_2 &= b \\ t_3 &= c \end{aligned}$$

$$t_4 = \frac{8cn^2-an+bn-5cn+17dn+a-b-3c+7d}{4(n+1)(2n+1)}.$$

Observaţia 19 *Operatorul trapezoidal de aproximare introdus de Teorema* 16 *nu conservă valoarea numărului fuzzy A şi nici ambiguitatea acestuia, adică, în general*

$$Amb(A) \neq Amb(T(A))$$

şi

$$Val(A) \neq Val(T(A)),$$

3 Aproximări trapezoidale care conservă ambiguitatea, valoarea şi o mulţime de nivel

3.1 Operatorul trapezoidal care conservă ambiguitatea şi valoarea

În [80], Yeh a renotat numărul fuzzy trapezoidal $T=(t_1,t_2,t_3,t_4)$ cu

$$T=[l,u,x,y]$$

unde $l,u,x,y \in \mathbb{R}$ astfel încât $x,y \geq 0, x+y \leq 2(u-l)$,

$$\begin{aligned} T_L(\alpha) &= l + x(\alpha - \frac{1}{2}), \\ T_U(\alpha) &= u - y(\alpha - \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

oricare ar fi $\alpha \in [0,1]$.

Este evident că:

$$\begin{aligned} l &= \frac{t_1+t_2}{2}, & (30)\\ u &= \frac{t_3+t_4}{2}, & (31)\\ x &= t_2-t_1, & (32)\\ y &= t_4-t_3. & (33) \end{aligned}$$

Obţinem că:

$$\begin{aligned} Amb(T) &= \frac{-6l+6u-x-y}{12}, & (34)\\ Val(T) &= \frac{6l+6u+x-y}{12}. & (35) \end{aligned}$$

Distanţa între $T=[l,u,x,y]$ şi $T'=[l',u',x',y']$ unde $,T'\in F^T(\mathbb{R})$ devine (vezi [79])

$$D^2(T,T')=(l-l')^2+(u-u')^2+\frac{1}{12}(x-x')^2+\frac{1}{12}(y-y')^2. \qquad (36)$$

Un număr fuzzy trapezoidal extins, introdus în [79], este o pereche ordonată de funcţii polinomiale cu gradul mai mic sau egal cu 1. Aproximarea trapezoidalului extins $T_e(A)=[l_e,u_e,x_e,y_e]$ a unui număr fuzzy A este trapezoidalul extins care minimizează distanţa $D(A,X)$. În [5], autorul demonstrază că $T_e(A)$ nu este întotdeauna un număr fuzzy. Numărul fuzzy $T_e(A)=[l_e,u_e,x_e,y_e]$ respectă următoarele egalităţi:

$$\begin{aligned} l_e &= \int_0^1 A_L(\alpha)d\alpha, & (37)\\ u_e &= \int_0^1 A_U(\alpha)d\alpha, & (38)\\ x_e &= 12\int_0^1(\alpha-\frac{1}{2})A_L(\alpha)d\alpha, & (39)\\ y_e &= -12\int_0^1(\alpha-\frac{1}{2})A_U(\alpha)d\alpha, & (40) \end{aligned}$$

iar numerele reale x_e şi y_e sunt pozitive (vezi [79]) şi, din definiţia numerelor fuzzy, avem că $l_e\le u_e$.

Autorul demonstrează în [78] două proprietăţi de distanţă, în ceea ce priveşte cel mai apropiat număr fuzzy trapezoidal extins $T_e(A)$ a unui număr fuzzy dat A.

Propoziţia 20 *(Propoziţia 4.2., [78]) Dacă A un număr fuzzy, atunci*

$$D^2(A,B)=D^2(A,T_e(A))+D^2(T_e(A),B)$$

pentru orice număr fuzzy trapezoidal B.

Propoziţia 21 *(Propoziţia 4.4., [78])* $D(T_e(A), T_e(B)) \leq D(A,B)$ *pentru oricare două numere fuzzy* A, B.

Observaţia 22 (*Observaţia 4,* [*13*]) *Fie* A *şi* B *două numere fuzzy şi*

$$\begin{aligned} T_e(A) &= [l_e, u_e, x_e, y_e], \\ T_e(B) &= [l'_e, u'_e, x'_e, y'_e], \end{aligned}$$

aproximările trapezoidale extinse ale lui A *şi* B*. Din (36) şi din Propoziţia 21, rezultă imediat că*

$$(l_e - l'_e)^2 + (u_e - u'_e)^2 \leq D^2(A,B)$$

şi

$$(x_e - x'_e)^2 + (y_e - y'_e)^2 \leq 12D^2(A,B).$$

Aşa că $T(A) = [l_0, u_0, x_0, y_0]$ *este o soluţie a problemei dacă şi numai dacă* $(l_0, u_0, x_0, y_0) \in \mathbb{R}^4$ *este o soluţie a problemei*

$$\min\left((l - l_e)^2 + (u - u_e)^2 + \frac{1}{12}(x - x_e)^2 + \frac{1}{12}(y - y_e)^2\right), \tag{41}$$

cu condiţiile

$$\begin{aligned} x &\geqslant 0, && (42) \\ y &\geqslant 0, && (43) \\ x + y &\leqslant 2u - 2l, && (44) \\ -6l + 6u - x - y &= -6l_e + 6u_e - x_e - y_e, && (45) \\ 6l + 6u + x - y &= 6l_e + 6u_e + x_e - y_e, && (46) \end{aligned}$$

unde l_e, u_e, x_e, y_e *sunt date de (37)-(40). Obţinem imediat că problema dată prin relaţiile (41)-(46), este echivalentă cu*

$$\min\left((x - x_e)^2 + (y - y_e)^2\right) \tag{47}$$

$$\begin{aligned} x &\geqslant 0, && (48) \\ y &\geqslant 0, && (49) \\ x + y &\leqslant 3u_e - 3l_e - \frac{1}{2}x_e - \frac{1}{2}y_e. && (50) \end{aligned}$$

În plus,

$$l = -\frac{1}{6}(x - x_e) + l_e$$

şi

$$u = \frac{1}{6}(y - y_e) + u_e.$$

Considerăm că

$$M_A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0, y \geqslant 0, x+y \leqslant 3u_e - 3l_e - \frac{1}{2}x_e - \frac{1}{2}y_e \right\},$$

iar d_E este metrica euclidiană peste $\mathbb{R}^2$ şi notăm $P_M(S)$ proiecţia ortogonală a lui $S \in \mathbb{R}^2$ pe o mulţime nevidă $M \subset \mathbb{R}^2$, respectând d_E.

Teorema 23 (*Teorema 5, [13]*) *Problema (47)-(50) are soluţie unică.*

Teorema 24 (*Teorema 7, [13]*) *Fie $A \in F(\mathbb{R}), A_\alpha = [A_L(\alpha), A_U(\alpha)], \alpha \in [0,1]$, şi $T(A) = [l_0, u_0, x_0, y_0]$ cel mai apropiat număr fuzzy trapezoidal care conservă ambiguitatea şi valoarea lui A.*

(i) Dacă

$$\int_0^1 (3\alpha - 1) A_L(\alpha) d\alpha - \int_0^1 (3\alpha - 1) A_U(\alpha) d\alpha \leq 0, \tag{51}$$

atunci

$$\begin{aligned} x_0 &= 6\int_0^1 (2\alpha - 1) A_L(\alpha) d\alpha, \\ y_0 &= -6\int_0^1 (2\alpha - 1) A_U(\alpha) d\alpha, \\ l_0 &= \int_0^1 A_L(\alpha) d\alpha, \\ u_0 &= \int_0^1 A_U(\alpha) d\alpha. \end{aligned}$$

(ii) Dacă

$$\int_0^1 (3\alpha - 1) A_L(\alpha) d\alpha + \int_0^1 (\alpha - 1) A_U(\alpha) d\alpha > 0, \tag{52}$$

atunci

$$\begin{aligned} x_0 &= -6\int_0^1 \alpha A_L(\alpha) d\alpha + 6\int_0^1 \alpha A_U(\alpha) d\alpha \\ y_0 &= 0 \\ l_0 &= 3\int_0^1 \alpha A_L(\alpha) d\alpha - \int_0^1 \alpha A_U(\alpha) d\alpha \\ u_0 &= 2\int_0^1 \alpha A_U(\alpha) d\alpha. \end{aligned}$$

(iii) Dacă

$$\int_0^1 (\alpha - 1) A_L(\alpha) d\alpha + \int_0^1 (3\alpha - 1) A_U(\alpha) d\alpha < 0, \tag{53}$$

atunci

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 0 \\
y_0 &= -6\int_0^1 \alpha A_L(\alpha)d\alpha + 6\int_0^1 \alpha A_U(\alpha)d\alpha \\
l_0 &= 2\int_0^1 \alpha A_L(\alpha)d\alpha \\
u_0 &= -\int_0^1 \alpha A_L(\alpha)d\alpha + 3\int_0^1 \alpha A_U(\alpha)d\alpha.
\end{aligned}
$$

(iv) Dacă

$$
\int_0^1 (3\alpha-1)\,A_L(\alpha)d\alpha - \int_0^1 (3\alpha-1)\,A_U(\alpha)d\alpha \quad > \quad 0 \tag{54}
$$

$$
\int_0^1 (3\alpha-1)\,A_L(\alpha)d\alpha + \int_0^1 (\alpha-1)\,A_U(\alpha)d\alpha \quad \leq \quad 0 \tag{55}
$$

şi

$$
\int_0^1 (\alpha-1)\,A_L(\alpha)d\alpha + \int_0^1 (3\alpha-1)\,A_U(\alpha)d\alpha \geq 0, \tag{56}
$$

atunci

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 3\int_0^1 (\alpha-1)\,A_L(\alpha)d\alpha + 3\int_0^1 (3\alpha-1)\,A_U(\alpha)d\alpha \\
y_0 &= -3\int_0^1 (3\alpha-1)\,A_L(\alpha)d\alpha - 3\int_0^1 (\alpha-1)\,A_U(\alpha)d\alpha \\
l_0 &= \frac{1}{2}\int_0^1 (3\alpha+1)\,A_L(\alpha)d\alpha - \frac{1}{2}\int_0^1 (3\alpha-1)\,A_U(\alpha)d\alpha \\
u_0 &= -\frac{1}{2}\int_0^1 (3\alpha-1)\,A_L(\alpha)d\alpha + \frac{1}{2}\int_0^1 (3\alpha+1)\,A_U(\alpha)d\alpha.
\end{aligned}
$$

Corolar 25 *(i) Dacă $A \in \Omega_1$, atunci*

$$
T(A) = (4I - 6L, 6L - 2I, 6U - 2S, 4S - 6U).
$$

(ii) Dacă $A \in \Omega_2$, atunci

$$
T(A) = (6L - 4U, 2U, 2U, 2U).
$$

(iii)Dacă $A \in \Omega_3$, atunci

$$
T(A) = (2L, 2L, 2L, 6U - 4L).
$$

(iv) Dacă $A \in \Omega_4$, atunci

$$
\begin{aligned}
T(A) = \; & (2I - 6U + 2S, 3L - I + 3U - S, \\
& 3L - I + 3U - S, 2I - 6L + 2S).
\end{aligned}
$$

Exemplul 26 *Considerăm numerele fuzzy A şi B cu mulţimile de nivel*

$$\begin{aligned} A_L(\alpha) &= 1+\sqrt{\alpha}, \\ A_U(\alpha) &= 4-\sqrt{\alpha}, \\ B_L(\alpha) &= 1+\sqrt{\alpha}, \\ B_U(\alpha) &= 35-31\sqrt{\alpha}. \end{aligned}$$

Observăm că $A \in \Omega_1$, iar $B \in \Omega_4$ şi aproximările lor sunt

$$\begin{aligned} T(A) &= \left(\frac{19}{15}, \frac{31}{15}, \frac{34}{15}, \frac{76}{15}\right) \\ T(B) &= \left(\frac{29}{15}, 2, 2, \frac{419}{15}\right). \end{aligned}$$

Întrucât

$$\begin{aligned} (A+B)_L(\alpha) &= 2+2\sqrt{\alpha} \\ (A+B)_U(\alpha) &= 39-32\sqrt{\alpha}, \end{aligned}$$

obţinem că

$$T(A)+T(B) = \left(\frac{48}{15}, \frac{61}{15}, \frac{64}{15}, \frac{495}{15}\right),$$

iar

$$T(A+B) = \left(\frac{38}{15}, \frac{62}{15}, \frac{73}{15}, \frac{457}{15}\right),$$

deci

$$T(A)+T(B) \neq T(A+B),$$

adică operatorul T nu este aditiv.

Teorema 27 *Dacă $A, B \in \Omega_i$, $i \in \{1,2,3,4\}$, atunci*

$$T(A)+T(B) = T(A+B).$$

3.2 Operatorul trapezoidal care conservă ambiguitatea, valoarea şi nucleul

Teorema 28 *Dacă A este un număr fuzzy cu mulţimea de nivel $A_\alpha = [A_L(\alpha), A_U(\alpha)]$ şi $\alpha \in [0,1]$, atunci*

$$\begin{aligned} T(A) &= (t_1, t_2, t_3, t_4) \\ t_1 &= 6\int_0^1 \alpha A_L(\alpha)\, d\alpha - 2A_L(1) \\ t_2 &= A_L(1) \\ t_3 &= A_U(1) \\ t_4 &= 6\int_0^1 \alpha A_U(\alpha)\, d\alpha - 2A_U(1) \end{aligned}$$

este aproximarea trapezoidală care conservă ambiguitatea, valoarea şi nucleul numărului fuzzy A.

Exemplul 29 *Fie A un număr fuzzy cu reprezentările parametrice*

$$\begin{aligned} A_L(\alpha) &= 1+\sqrt{\alpha} \\ A_U(\alpha) &= 30-27\sqrt{\alpha}. \end{aligned}$$

Aproximarea trapezoidală a lui A care conservă ambiguitatea, valoare şi nucleul este

$$T(A)=\left(\frac{7}{5},2,3,\frac{96}{5}\right)$$

Exemplul 30 *Fie A un număr fuzzy cu reprezentările parametrice*

$$\begin{aligned} A_L(\alpha) &= 1+27\sqrt{\alpha} \\ A_U(\alpha) &= 30-\sqrt{\alpha}. \end{aligned}$$

Aproximarea trapezoidală a lui A care conservă ambiguitatea, valoare şi nucleul este

$$T(A)=\left(\frac{59}{5},28,29,\frac{148}{5}\right)$$

Teorema 31 *Dacă $A=(a,b,c,d)_n$ este un număr fuzzy atunci apoximarea trapezoidală dată prin Teorema 28 este*

$$T(A)=\left(\frac{2bn+3a-2b}{2n+1},b,c,\frac{2cn+3d-2c}{2n+1}\right).$$

Exemplul 32 *Pentru un număr fuzzy $B=(5,8,12,14)_2$, numărul fuzzy trapezoidal care conservă ambiguitatea, valoarea şi nucleul lui B este*

$$T(B)=\left(\frac{31}{5},8,12,\frac{66}{5}\right).$$

deci $T(A)$ şi $T(B)$ sunt numere fuzzy trapezoidale.

Teorema 33 *Operatorul trapezoidal de aproximare introdus prin Teorema 28 îndeplineşte următoarele proprietăţi:*
(i) este invariant la translaţii;
(ii) este liniar;
(iii) îndeplineşte criteriul identităţii;

3.3 Operatorul trapezoidal care conservă ambiguitatea, valoarea şi suportul

4 Aproximarea ponderată

4.1 Operatorul ponderat care conservă suportul

Prelucrarea numerelor fuzzy este uneori dificilă, aşadar diverse metode de aproximare au fost introduse în articole recente. Fiecare metodă, fie că este vorba despre aproximarea trapezoidală [5], [9], [51], [52], [50], [49], [80], fie că este vorba despre aproximarea ponderată [4], [81] aduce unele beneficii şi proprietăţi importante.

Teorema Karush-Kuhn-Tucker este folosită în continuare pentru a introduce o aproximare ponderată, care conservă suportul unui număr fuzzy. Odată prezentată metoda de aproximare, cu cele patru cazuri posibile, sunt studiate unele dintre cele mai importante proprietăţi, cum ar fi: invarianţa la translaţii, invarianţa la produsul cu scalari, identitatea, criteriul de apropiere sau continuitatea.

Definiţia 34 *Pentru două numere fuzzy A şi B*

$$e(A,B)=\left[\int_0^1 f(\alpha)\, g^2(A_\alpha,B_\alpha)d\alpha\right]^{\frac{1}{2}}$$

se numeşte distanţa ponderată dintre numerelor fuzzy A şi B, unde

$$g^2(A_\alpha,B_\alpha)=\left[A_L(\alpha)-B_L(\alpha)\right]^2+\left[A_U(\alpha)-B_U(\alpha)\right]^2.$$

şi $f(\alpha)$ este o funcţie pozitivă şi crescătoare

$$\begin{array}{c} f:[0,1]\to\mathbb{R}, \\ f(0)=0, \\ \int_0^1 f(\alpha)\,d\alpha=\frac{1}{2}, \end{array} \tag{57}$$

iar f se numeşte funcţia pondere.

Pentru un număr fuzzy A, $A_\alpha=[A_L(\alpha),A_U(\alpha)]\,,\alpha\in[0,1]\,,$ problema de aproximare este de a găsi cel mai apropiat număr fuzzy trapezoidal $T(A)=(t_1,t_2,t_3,t_4)\,,$ care conservă suportul numărului fuzzy.

Numărul fuzzy trebuie să îndeplinească următoarele condiţii:

$$\begin{array}{c} \min e(A,T(A)) \\ t_1=A_L(0)\,,t_4=A_U(0)\,. \end{array} \tag{58}$$

Problema se reduce la determinarea a patru numere reale t_1,t_2,t_3,t_4, care verifică (58), respectă şirul de inegalităţi $t_1\le t_2\le t_3\le t_4$ şi minimizează funcţia D_f dată prin:

$$\begin{aligned} D_f(t_1,t_2,t_3,t_4) &= \int_0^1 f(\alpha)\left[A_L(\alpha)-(t_1+(t_2-t_1)\alpha)\right]^2 d\alpha+ \\ &\quad+\int_0^1 f(\alpha)\left[A_U(\alpha)-(t_4+(t_3-t_4)\alpha)\right]^2 d\alpha. \end{aligned}$$

Putem reformula problema, după cum urmează:

$$\min h(t_2,t_3)$$

unde

$$\begin{aligned}
h\left(t_2,t_3\right) &= \int_0^1 f\left(\alpha\right)A_L^2\left(\alpha\right)d\alpha - 2t_2\int_0^1 \alpha f\left(\alpha\right)A_L\left(\alpha\right)d\alpha + \\
&+t_2^2\int_0^1 \alpha^2 f\left(\alpha\right)d\alpha + 2t_2A_L\left(0\right)\int_0^1 \alpha f\left(\alpha\right)\left(1-\alpha\right)d\alpha \\
&+\int_0^1 f\left(\alpha\right)\left[A_L\left(0\right)\left(1-\alpha\right)\right]^2 d\alpha - \\
&-2\int_0^1 f\left(\alpha\right)A_L\left(\alpha\right)A_L\left(0\right)\left(1-\alpha\right)d\alpha \\
&+\int_0^1 f\left(\alpha\right)A_U^2\left(\alpha\right)d\alpha - 2t_3\int_0^1 \alpha f\left(\alpha\right)A_U\left(\alpha\right)d\alpha + \\
&+t_3^2\int_0^1 \alpha^2 f\left(\alpha\right)d\alpha - 2\int_0^1 f\left(\alpha\right)A_U\left(\alpha\right)A_U\left(0\right)\left(1-\alpha\right)d\alpha + \\
&+2t_3\int_0^1 \alpha f\left(\alpha\right)A_U\left(0\right)\left(1-\alpha\right)d\alpha + \int_0^1 f\left(\alpha\right)\left[A_U\left(0\right)\left(1-\alpha\right)\right]^2 d\alpha
\end{aligned}$$

cu condiţiile

$$\begin{aligned}
A_L\left(0\right) &\leq t_2 \\
t_2 &\leq t_3 \\
t_3 &\leq A_U\left(0\right).
\end{aligned}$$

Următorul rezultat introduce cel mai apropiat operator trapezoidal care conservă suportul numărului fuzzy.

Teorema 35 *(i) Dacă*

$$\begin{array}{c}
\int_0^1 \alpha f\left(\alpha\right)\left[A_L\left(\alpha\right)+A_U\left(\alpha\right)\right]d\alpha - \\
-A_L\left(0\right)\int_0^1 \alpha\left(1-\alpha\right)f\left(\alpha\right)d\alpha - A_U\left(0\right)\int_0^1\left(\alpha^2+\alpha\right)f\left(\alpha\right)d\alpha > 0
\end{array} \tag{59}$$

atunci

$$\begin{aligned}
t_1 &= A_L\left(0\right) \\
t_2 &= A_U\left(0\right) \\
t_3 &= A_U\left(0\right) \\
t_4 &= A_U\left(0\right).
\end{aligned}$$

(ii) Dacă

$$\begin{array}{c}
-\int_0^1 \alpha f\left(\alpha\right)\left[A_L\left(\alpha\right)+A_U\left(\alpha\right)\right]d\alpha + \\
+A_L\left(0\right)\int_0^1 \alpha\left(1+\alpha\right)f\left(\alpha\right)d\alpha + A_U\left(0\right)\int_0^1 \alpha\left(1-\alpha\right)f\left(\alpha\right)d\alpha > 0
\end{array} \tag{60}$$

atunci

$$\begin{aligned} t_1 &= A_L(0) \\ t_2 &= A_L(0) \\ t_3 &= A_L(0) \\ t_4 &= A_U(0). \end{aligned}$$

(iii) Dacă

$$\int_0^1 \alpha f(\alpha)\left[A_L(\alpha) - A_U(\alpha)\right] d\alpha \le \left[A_L(0) - A_U(0)\right] \int_0^1 \alpha f(\alpha)(1-\alpha)\, d\alpha \quad (61)$$

atunci

$$\begin{aligned} t_1 &= A_L(0) \\ t_2 &= \frac{\int_0^1 \alpha f(\alpha) A_L(\alpha)\, d\alpha - A_L(0) \int_0^1 \alpha f(\alpha)(1-\alpha)\, d\alpha}{\int_0^1 \alpha^2 f(\alpha)\, d\alpha} \\ t_3 &= \frac{\int_0^1 \alpha f(\alpha) A_U(\alpha)\, d\alpha - A_U(0) \int_0^1 \alpha f(\alpha)(1-\alpha)\, d\alpha}{\int_0^1 \alpha^2 f(\alpha)\, d\alpha} \\ t_4 &= A_U(0). \end{aligned}$$

(iv) Dacă

$$\int_0^1 \alpha f(\alpha)\left[A_L(\alpha) - A_U(\alpha)\right] d\alpha - \left[A_L(0) - A_U(0)\right] \int_0^1 f(\alpha)\, \alpha(1-\alpha)\, d\alpha > 0 \quad (62)$$

$$\begin{gathered} -\int_0^1 \alpha f(\alpha)\left[A_L(\alpha) + A_U(\alpha)\right] d\alpha + \\ + A_L(0) \int_0^1 \alpha(1+\alpha) f(\alpha)\, d\alpha + A_U(0) \int_0^1 \alpha(1-\alpha) f(\alpha)\, d\alpha \le 0 \end{gathered} \quad (63)$$

şi

$$\begin{gathered} \int_0^1 \alpha f(\alpha)\left[A_L(\alpha) + A_U(\alpha)\right] d\alpha - \\ - A_L(0) \int_0^1 \alpha(1-\alpha) f(\alpha)\, d\alpha - A_U(0) \int_0^1 \alpha(1+\alpha) f(\alpha)\, d\alpha \le 0, \end{gathered} \quad (64)$$

atunci

$$\begin{aligned} t_1 &= A_L(0) \\ t_2 &= t_3 = \frac{\int_0^1 \alpha f(\alpha)\left[A_L(\alpha) + A_U(\alpha)\right] d\alpha}{2\int_0^1 \alpha^2 f(\alpha)\, d\alpha} - \\ &\quad - \frac{\left[A_L(0) + A_U(0)\right] \int_0^1 \alpha f(\alpha)(1-\alpha)\, d\alpha}{2\int_0^1 \alpha^2 f(\alpha)\, d\alpha} \\ t_4 &= A_U(0). \end{aligned}$$

Teorema 36 *Pentru un număr fuzzy $A = (a, b, c, d)_n$ cel mai apropiat număr fuzzy trapezoidal care conservă suportul numărului A, în raport cu metrica ponderată $f(\alpha) = \alpha$, este $T(A) = (t_1, t_2, t_3, t_4)$.*

(i) Dacă

$$a - d - an + 4bn + 4cn - 7dn > 0$$

atunci

$$\begin{aligned} t_1 &= a \\ t_2 &= d \\ t_3 &= d \\ t_4 &= d. \end{aligned}$$

(ii) Dacă

$$a - d + 7an - 4bn - 4cn + dn > 0$$

atunci

$$\begin{aligned} t_1 &= a \\ t_2 &= a \\ t_3 &= a \\ t_4 &= d. \end{aligned}$$

(iii) Dacă

$$a - d - an + 4bn - 4cn + dn \leq 0$$

atunci

$$\begin{aligned} t_1 &= a \\ t_2 &= \frac{a - an + 4bn}{3n + 1} \\ t_3 &= \frac{d - dn + 4cn}{3n + 1} \\ t_4 &= d. \end{aligned}$$

(iv) Dacă

$$a - d - an + 4bn - 4cn + dn > 0$$

$$a - d - an + 4bn + 4cn - 7dn \leq 0$$

şi

$$a - d + 7an - 4bn - 4cn + dn \leq 0$$

atunci

$$\begin{aligned} t_1 &= a \\ t_2 &= t_3 = \frac{a + d - an + 4bn + 4cn - dn}{2(3n + 1)} \\ t_4 &= d. \end{aligned}$$

Exemplul 37 *Pentru un număr fuzzy* $A = (-100, 2, 10, 12)_2$ *şi funcţia pondere* $f(\alpha) = \alpha$ *aproximarea trapezoidală care conservă suportul este* $T(A) = (-100, 12, 12, 12)$ *şi se calculează folosind cazul (i) al Teoremei 36.*

Exemplul 38 *Pentru un număr fuzzy* $A = (5, 10, 20, 310)_2$ *şi funcţia pondere* $f(\alpha) = \alpha$ *aproximarea trapezoidală care conservă suportul este* $T(A) = (5, 5, 5, 310)$ *şi se calculează folosind cazul (ii) al Teoremei 36.*

Exemplul 39 *Pentru un număr fuzzy* $A = (0, 10, 20, 30)_2$ *şi funcţia pondere* $f(\alpha) = \alpha$ *aproximarea trapezoidală care conservă suportul este* $T(A) = \left(0, \frac{80}{7}, \frac{130}{7}, 30\right)$ *şi se calculează folosind cazul (iii) al Teoremei 36.*

Exemplul 40 *Pentru un număr fuzzy* $A = (-30, -10, -9, -2)_2$ *şi funcţia pondere* $f(\alpha) = \alpha$ *aproximarea trapezoidală care conservă suportul este* $T(A) = \left(-30, \frac{-60}{7}, \frac{-60}{7}, -2\right)$ *şi se calculează folosind cazul (iv) al Teoremei 36.*

4.2 Operatorul ponderat care conservă intervalul de expectanţă

Pentru o astfel de aproximare folosim funcţiile pozitive $\lambda_L, \lambda_U : [0,1] \to \mathbb{R}$ astfel încât

$$\begin{aligned} \int_0^1 \lambda_L(\alpha)\, d\alpha &> 0 \\ \int_0^1 \lambda_U(\alpha)\, d\alpha &> 0 \end{aligned}$$

numite funcţii pondere şi distanţa

$$d_\lambda(A,B) = \sqrt{\int_0^1 \lambda_L(\alpha)\left[A_L(\alpha) - B_L(\alpha)\right]^2 d\alpha + \int_0^1 \lambda_U(\alpha)\left[A_U(\alpha) - B_U(\alpha)\right]^2 d\alpha},$$

unde A, B sunt numere fuzzy cu mulţimile de nivel $A_\alpha = [A_L(\alpha), A_U(\alpha)]$ şi $B_\alpha = [B_L(\alpha), B_U(\alpha)]$, $\alpha \in [0,1]$.

Teorema 41 *Fie* A, $A_\alpha = [A_L(\alpha), A_U(\alpha)], \alpha \in [0,1]$ *un număr fuzzy şi* $T(A) = (l, u, \delta, \sigma)$ *cel mai apropiat operator de aproximare trapezoidală ponderată care conservă intervalul de expectanţă ponderat.*

(i) Dacă

$$\delta^e(1-\omega_L) + \sigma^e(1-\omega_U) - u^e + l^e \leq 0 \tag{65}$$

atunci

$$\begin{aligned} l &= l^e - \delta^e\left(\omega_L - \frac{1}{2}\right) \\ u &= u^e + \sigma^e\left(\omega_U - \frac{1}{2}\right) \\ \delta &= \delta^e \\ \sigma &= \sigma^e. \end{aligned}$$

(ii) Dacă

$$\delta^e(1-\omega_L)+\sigma^e(1-\omega_U)-u^e+l^e>0 \qquad (66)$$

$$c\delta^e(1-\omega_U)^2-d\sigma^e(1-\omega_U)(1-\omega_L)+d(u^e-l^e)(1-\omega_L)\geq 0 \qquad (67)$$

$$d\sigma^e(1-\omega_L)^2-c\delta^e(1-\omega_L)(1-\omega_U)+c(u^e-l^e)(1-\omega_U)\geq 0 \qquad (68)$$

atunci

$$\begin{aligned}
l &= l^e-\frac{c\delta^e(1-\omega_U)^2-d\sigma^e(1-\omega_U)(1-\omega_L)+d(u^e-l^e)(1-\omega_L)}{d(1-\omega_L)^2+c(1-\omega_U)^2}\left(\omega_L-\frac{1}{2}\right)\\
u &= u^e+\frac{d\sigma^e(1-\omega_L)^2-c\delta^e(1-\omega_L)(1-\omega_U)+c(u^e-l^e)(1-\omega_U)}{d(1-\omega_L)^2+c(1-\omega_U)^2}\left(\omega_U-\frac{1}{2}\right)\\
\delta &= \frac{c\delta^e(1-\omega_U)^2-d\sigma^e(1-\omega_U)(1-\omega_L)+d(u^e-l^e)(1-\omega_L)}{d(1-\omega_L)^2+c(1-\omega_U)^2}\\
\sigma &= \frac{d\sigma^e(1-\omega_L)^2-c\delta^e(1-\omega_L)(1-\omega_U)+c(u^e-l^e)(1-\omega_U)}{d(1-\omega_L)^2+c(1-\omega_U)^2}.
\end{aligned}$$

(iii) Dacă

$$c\delta^e(1-\omega_U)^2-d\sigma^e(1-\omega_U)(1-\omega_L)+d(u^e-l^e)(1-\omega_L)<0 \qquad (69)$$

atunci

$$\begin{aligned}
l &= l^e\\
u &= u^e+\frac{u^e-l^e}{1-\omega_U}\left(\omega_U-\frac{1}{2}\right)\\
\delta &= 0\\
\sigma &= \frac{u^e-l^e}{1-\omega_U}.
\end{aligned}$$

(iv) Dacă

$$d\sigma^e(1-\omega_L)^2-c\delta^e(1-\omega_L)(1-\omega_U)+c(u^e-l^e)(1-\omega_U)<0 \qquad (70)$$

atunci

$$\begin{aligned}
l &= l^e-\frac{u^e-l^e}{1-\omega_L}\left(\omega_L-\frac{1}{2}\right)\\
u &= u^e\\
\delta &= \frac{u^e-l^e}{\omega_L-1}\\
\sigma &= 0.
\end{aligned}$$

References

[1] S. Abbasbandy, M. Amirfakhrian, *The nearest trapezoidal form of a generalized left right fuzzy number*, International Journal of Approximate Reasoning, 43 (2006) 166-178.

[2] S. Abbasbandy, M. Amirfakhrian, *The nearest approximation of a fuzzy quantity in parametric form*, Applied Mathematics and Computation, 172 (2006), 624-632.

[3] S. Abbasbandy, B. Asady, *The nearest trapezoidal fuzzy number to a fuzzy quantity*, Applied Mathematics and Computation, 156 (2004), 381-386.

[4] S. Abbasbandy, T. Hajjari, *Weighted trapezoidal approximation-preserving cores of a fuzzy number*, Comput. Math. Appl., 59 (2010), 3066-3077.

[5] T. Allahviranloo, M. Adabitabar Firozja, *Note on "Trapezoidal approximation of fuzzy numbers"*, Fuzzy Sets and Systems, 158 (2007) ,755-756.

[6] K. Atanassov, *Generalized nets and their fuzziness*, AMSE Review, 2 (1985), 39-49.

[7] K. Atanassov, *Intuitionistic Fuzzy Sets*, Springer, Heidelberg, 1999.

[8] A. Ban, *The interval approximation of a fuzzy number with respect to index of fuzziness*, An. Univ. Oradea (fasc. math.), XII (2005), 25-40.

[9] A. Ban, *Approximation of fuzzy numbers by trapezoidal fuzzy numbers preserving the expected interval*, Fuzzy Sets and Systems, 159 (2008) 1327-1344.

[10] A. Ban, *On the nearest parametric approximation of a fuzzy number-Revisited*, Fuzzy Sets and Systems, 160 (2009), 3027-3047.

[11] A. Ban, *Trapezoidal and parametric approximations of fuzzy numbers-inadvertences and corrections*, Fuzzy Sets and Systems, 160 (2009), 3048-3058.

[12] A. Ban, B. Bede, *Cross product of L-R fuzzy numbers and applications*, An. Universităţii Oradea, Fasc. Matematică, Tom. IX, (2005), 5-12.

[13] A. Ban, **A. Brândaş**, L. Coroianu, C. Negruţiu, O. Nica, *Approximations of fuzzy numbers by trapezoidal fuzzy numbers preserving ambiguity and value*, Computers and Mathematics with Applications, 61 (2011), 1379-1401.

[14] A. Ban, L. Coroianu, *Continuity and additivity of the trapezoidal approximation preserving the expected interval operator*, International Fuzzy Systems Association World Congress, (2009) , 798-802.

[15] A. Ban, L. Coroianu, *Continuity of trapezoidal approximation operators*, trimis spre publicare.

[16] A. Ban, L. Coroianu, P. Grzegorzewski, *Trapezoidal approximation and agregation,* trimis spre publicare.

[17] A.I. Ban, S.G. Gal, *Defects of Properties in Mathematics. Quantitative Characterizations,* World Scientific, New Jersey, 2002.

[18] A. Ban, **A. Pelea**, *Fuzzy entropy for the product and division of trapezoidal fuzzy numbers*, An. Universităţii Oradea, Fasc. Matematică, Tom. XIV (2007), 155-174.

[19] B. Bede, J. Fodor, *Product Type Operations between Fuzzy Numbers and their Applications in Geology*, Acta Polytechnica Hungarica, 3 (2006), 123-139.

[20] P. Blaga, B. Bede, *Approximation by fuzzy B-spline series*, Journal of Applied Mathematics and Computing, 20 (2006), 157-169.

[21] S. Bodjanova, *Alpha-bounds of fuzzy numbers*, Information Sciences, 152 (2003), 237-266.

[22] S. Bodjanova, *Median value and median interval of a fuzzy number*, Information Sciences 172 (2005), 73-89.

[23] **A. Brândaş**, *"Lotfi Asker Zadeh - părintele matematicii fuzzy"*, Mate-Info.ro – versiunea electronică, 17, (2010), 1-5.

[24] **A. Brândaş**, *Approximation of fuzzy numbers by trapezoidal fuzzy numbers preserving the core, the ambiguity and the value*, Advanced Studies in Contemporary Mathematics, vol.21, no.2 (2011).

[25] **A. Brândaş**, *Weighted trapezoidal approximation of fuzzy numbers preserving the support*, acceptat spre publicare la Analele Universităţii din Oradea.

[26] **A. Brândaş**, *Trapezoidal operator which preserves the expected interval and the support*, acceptat spre publicare la Revue d'Analyse Numerique et de Theorie de l'Approximation.

[27] **A. Brândaş**, *Note on "Weighted trapezoidal approximation-preserving cores of a fuzzy numbers"*, trimis la Comput. Math. Appl.

[28] **A. Brândaş**, *Approximation of fuzzy numbers by trapezoidal fuzzy numbers preserving the core and the expected value,* acceptat la Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica.

[29] **A. Brândaş**, *Approximation of fuzzy numbers by trapezoidal fuzzy numbers preserving the support, the ambiguity and the value*, trimis spre publicare.

[30] **A. Brândaş**, *Weighted trapezoidal approximation of fuzzy numbers preserving the expected value*, trimis spre publicare.

[31] G. Cantor, *On the Power of Perfect Sets of Points*, Acta Mathematica 4, 1993.

[32] C. Carlsson, R. Fuller, *Fuzzy Reasoning in Decision Making and Optimization*, Physical - Verlag, Heidelberg, (2001).

[33] S. Chanas, *On the interval approximation of a fuzzy number*, Fuzzy Sets and Systems, 122 (2001), 353-356.

[34] A. Chandramohan, M. V. Rao, *Novel, useful, and effective definitions for fuzzy linguistic hedges*, International fuzzy sets, (2006).

[35] K.A. Chrysafis, B.K. Papadopoulos, *On theoretical pricing of options with fuzzy estimators*, J. Comput. Appl. Math. 223 (2009) 552-556.

[36] L. Coroianu, *Best Lipschitz constant of the trapezoidal approximation operator preserving the expected interval,* Fuzzy Sets Syst. (2010), doi:10.1016/j.fss.2010.10.004.

[37] M. Delgado, M. A. Vila, W. Voxman, *On a canonical representation of fuzzy numbers*, Fuzzy Sets and Systems, 93 (1998), 125-135.

[38] P. Diamond, P. Kloeden, *Metric spaces of fuzzy sets. Theory and applications,*World Scientific, Singapore, 1994.

[39] P. Diamond, P. Kloeden, *Metric spaces of fuzzy sets,* Fuzzy Sets and Systems 35 (1990), 241-249.

[40] D. Dubois, H. Prade, *Operations on fuzzy numbers*, Ins. J. Systems Sci., 9 (1978), 613-626.

[41] D. Dubois, H. Prade, *Theory and Applications*, Academic Press, New York, (1980).

[42] D. Dubois, H. Prade, *Fuzzy numbers: An overview*, Analysis of Fuzzy Information, Vol. I: Mathematics and Logic, CRC Press, Bocca Raton, Fl. (1987), 3-39.

[43] D. Dubois, H. Prade, *The mean value of a fuzzy number*, Fuzzy Sets and Systems 24 (1987), 279-300.

[44] J. Fodor, B. Bede, *Arithmetic with Fuzzy Numbers: a Comparative Overview*, SAMI 2006 conference, Herlany, (2006), 54-68.

[45] J. Fodor, B. Bede, *Recent advances in fuzzy arithmetics,* Proceedings of ICCCC I (2006), 199-208.

[46] R. Goetschel, W. Voxman, *Elementary fuzzy calculus*, Fuzzy Sets and Systems, 18 (1986), 31-43.

[47] P. Grzegorzewski, *Metrics and orders in space of fuzzy numbers*, Fuzzy Sets and Systems 97 (1998), 83-94.

[48] P. Grzegorzewski, *Nearest interval approximation of a fuzzy number*, Fuzzy Sets and Systems, 130 (2002), 321-330.

[49] P. Grzegorzewski, *New algorithms for trapezoidal approximation of fuzzy numbers preserving the expected interval*, In: Proceedings of the Twelfth International Conference of Information Proceedings and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems, IPMU'08, L. Magdalena, M. Ojeda-Aciego, J.L.Verdegay (Eds.), Spain, Torremolinos (Malaga), June 22-27, (2008) , 117-123.

[50] P. Grzegorzewski, *Trapezoidal approximations of fuzzy numbers preserving the expected interval - Algorithms and properties*, Fuzzy Sets and Systems 159 (2008), 1354-1364.

[51] P. Grzegorzewski, E. Mrówka, *Trapezoidal approximations of fuzzy numbers*, Fuzzy Sets and Systems, 153 (2005), 115-135.

[52] P. Grzegorzewski, E. Mrówka, *Trapezoidal approximations of fuzzy numbers - revisited*, Fuzzy Sets and Systems, 158 (2007), 757-768.

[53] P. Grzegorzewski, K. Pasternak Winiarska, *Weighted trapezoidal approximation of fuzzy numbers*, IFSA-EUSFLAT, (2009), 1531-1534.

[54] M. Hanss, *Applied Fuzzy Arithmetic*, Springer, Stuttgart, (2005).

[55] S. Heilpern, *The expected value of a fuzzy number*, Fuzzy Sets and Systems 47 (1992), 81-86.

[56] F. Hosseinzadeh Lotfi, T. Allahviranloo, M. Alimardani Jondabeh, L. Alizadeh, *Solving a full fuzzy linear programming using lexicography method and fuzzy approximate solution*, Appl. Math. Modelling 33 (2009) 3151-3156.

[57] W. Hung, J. Hu, *A note on the correlation of fuzzy numbers by expected interval*, Internat. J. Uncertainty Fuzziness and Knowledge-based System 9 (2001), 517-523.

[58] M. Jimenez, *Ranking fuzzy numbers through the comparison of its expected intervals,* Internat. J. Uncertainty Fuzziness and Knowledge-based System, 4 (1996), 379-388.

[59] A. Kaufmann, *Introduction to the Theory of Fuzzy Subset*, Academic Press, New York, (1975).

[60] G.J. Klir, B. Yuan, *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic Theory and Applications*, Pretince Hall, New York, 1995.

[61] A. De Luca, S. Termini, *A definition of nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory*, Inform. Control, 20 (1972), 301-312.

[62] L. Luoh , Wen-June Wang, *Easy way to get the entropy for the product of fuzzy numbers*, trimis spre publicare.

[63] J. Łukasiewicz, *On three-valued logic North–Holland*, Amsterdam, 6 (1970), 87–88.

[64] M. Ma, M. Fridman, A. Kandel, *A new fuzzy arithmetic*, Fuzzy Sets and Systems, 108 (1999), 83-90.

[65] M. Mareš, *Weak arithmetic of fuzzy numbers*, Fuzzy Sets and Systems, 91 (1997), 143-153.

[66] M. Mizumoto, K. Tanaka, *The four operations on fuzzy numbers*, Systems Comupt. Control 7 (1976), 73-81.

[67] M. Mizumoto, K. Tanaka, *Some properties of fuzzy numbers*, Advances in Fuzzy Set Theory and Application, North-Holland Amsterdam 86 (1979), 156-164.

[68] E. N. Nasibov, S. Peker, *On the nearest parametric approximation of a fuzzy number*, Fuzzy Sets and Systems 159 (2008), 1365-1375.

[69] W. Pedrycz, *Why triangular membership function?*, Fuzzy Sets and Systems, 64 (1994), 21-30.

[70] W. Pedrycz, *Shadowed sets: representing and processing fuzzy sets*, IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics, part B, 28, (1998), 103-109.

[71] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, NJ, (1970).

[72] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, (1986).

[73] E. Sanchez, *Solution of fuzzy equations with extended operations*, Fuzzy Sets and Systems, 12 (1984), 237-248.

[74] W. Voxman, *Some remarks on distances between fuzzy numbers*, Fuzzy Sets and Systems, 100 (1998), 353-365.

[75] M. Wagenknecht, *On the approximation of fuzzy numbers*, The Journal of Fuzzy Mathematics, 7 (1999), 618-621.

[76] W.-J. Wang, C.-H. Chiu, *Entropy variation on the fuzzy numbers with arithmetic operations*, Fuzzy Sets and Systems, 103 (1999), 443-455.

[77] R.R. Yager, *A procedure for ordering fuzzy subsets of the unit interval*, Inform. Sci., 24 (1981), 143-161.

[78] C.-T. Yeh, *A note on trapezoidal approximation of fuzzy numbers*, Fuzzy Sets and Systems, 158 (2007), 747-754.

[79] C.-T. Yeh, *On improving trapezoidal and triangular approximations of fuzzy numbers*, International Journal of Approximate Reasoning, 48 (2008), 297-313.

[80] C.-T. Yeh, *Trapezoidal and triangular approximations preserving the expected interval*, Fuzzy Sets and Systems, 159 (2008), 1345-1353.

[81] C-T. Yeh, *Weighted trapezoidal and triangular approximations of fuzzy numbers*, Fuzzy Sets and Systems, 160 (2009), 3059-3079.

[82] L. A. Zadeh, *Fuzzy Sets*, Informations and Control, 8 (1965), 338-353.

[83] L. A. Zadeh, *A fuzzy-set-theoretical interpretation of linguistic hedges*, Journal of Cybernetics, 2 (1972), 4-34.

[84] L. A. Zadeh, *Soft Computing and Fuzzy Logic,* IEEE Software, 6 (1994), 48-56.

[85] W. Zeng , H. Li, *Weighted triangular approximation of fuzzy numbers*, International Journal of Approximate Reasoning 46, (2007), 137-150.

[86] G.-Q. Zhang, *The convergence for a sequence of fuzzy integrals of fuzzy number-valued functions on the fuzzy set*, Fuzzy Sets and Systems, 59 (1993), 43-57.