Universitatea Babeş-Bolyai din Cluj-Napoca

Facultatea de Matematică şi Informatică

**Adela Elisabeta Capătă**

# Contribuţii la teoria problemelor vectoriale şi multivoce de echilibru

Rezumatul tezei de doctorat

Conducător de doctorat:

Prof. Dr. Wolfgang W. Breckner

Cluj-Napoca
2011

# Cuprins

# Introducere

Teoria echilibrului, care face parte din analiza neliniară, ne oferă un cadru general, unificat şi natural pentru studiul unei largi varietăţi de probleme, precum: probleme de optimizare, probleme de inegalităţi variaţionale, probleme de punct şa, probleme de complementaritate, probleme de echilibru Nash şi probleme de punct fix. Astfel probleme apar adesea în economie, finanţe, mecanică, fizică, etc.

Prima problemă de echilibru, studiată în literatură, a fost problema scalară de echilibru, care are următoarea formulare:

$$(EP) \qquad \text{găsiţi } \bar{a} \in A \text{ astfel încât } \varphi(\bar{a}, b) \geq 0 \text{ pentru orice } b \in B,$$

unde $A$ şi $B$ sunt două mulţimi nevide şi $\varphi : A \times B \to \mathbb{R}$ este o bifuncţie dată. Lucrarea de referinţă pentru studiul problemei $(EP)$ este considerată a fi cea a lui E. Blum şi W. Oettli [20]. În acea lucrare ei au folosit următoarele ipoteze: $B = A$ şi $\varphi(a, a) = 0$ pentru orice $a \in A$. În ipoteza $B = A$, A. N. Iusem şi W. Sosa [77] au prezentat şase cazuri particulare ale problemei $(EP)$ şi au subliniat faptul că mulţimea soluţiilor problemei $(EP)$ este egală cu mulţimea soluţiilor problemelor de minimizare convexă, a problemelor de punct fix, a problemelor de complementaritate, a problemelor de echilibru Nash în jocuri necooperative, a problemelor de inegalităţi variţionale şi a problemelor de minimizare vectorială, respectiv.

În ultimii ani, un interes din ce în ce mai mare a fost acordat studiului rezultatelor de existenţă ale soluţiilor problemei $(EP)$ şi ale cazurilor sale particulare (a se vedea M. Bianchi şi S. Schaible [17], G. Bigi, M. Castellani şi G. Kassay [19], D. Inoan şi J. Kolumbán [78], A. N. Iusem şi W. Sosa [77], G. Kassay şi J. Kolumbán [82], J. C. Yao [115]).

Extensia problemei scalare de echilibru la probleme vectoriale de echilibru poate fi realizată în mai multe moduri. Considerând un spaţiu liniar topologic real $Z$, un con convex $C \subseteq Z$ cu $\operatorname{int} C \neq \emptyset$ (unde $\operatorname{int} C$ reprezintă interiorul lui $C$), două mulţimi nevide $A$ şi $B$, şi o bifuncţie $\varphi : A \times B \to Z$, următoarele probleme vectoriale de echilibru pot fi formulate:

$$(WVEP) \qquad \text{găsiţi } \bar{a} \in A \text{ astfel încât } \varphi(\bar{a}, b) \notin -\operatorname{int} C \text{ pentru orice } b \in B;$$

$$(VEP) \qquad \text{găsiţi } \bar{a} \in A \text{ astfel încât } \varphi(\bar{a}, b) \notin -C \setminus \{0\} \text{ pentru orice } b \in B;$$

$$(SVEP) \qquad \text{găsiţi } \bar{a} \in A \text{ astfel încât } \varphi(\bar{a}, b) \notin C \text{ pentru orice } b \in B.$$

Notând prin $S_1$, $S_2$ şi $S_3$ mulţimea soluţiilor problemelor vectoriale de echilibru $(WVEP)$, $(VEP)$ şi $(SVEP)$, respectiv, următoarea incluziune are loc:

$$S_3 \subseteq S_2 \subseteq S_1.$$

Aceste probleme au fost introduse în literatură de Q. H. Ansari, W. Oettli şi D. Schläger [6], într-un cadru mai general, M. Bianchi, N. Hadjisavvas şi S. Schaible [17] şi W. Oettli [99].

În ultimul deceniu, un mare număr de lucrări a fost dedicat studiului existenţei soluţiilor acestor probleme vectoriale de echilibru şi ale cazurilor lor particulare. Q. H Ansari [3], Q. H. Ansari, W. Oettli şi D. Schläger [6], Q. H. Ansari şi J. C. Yao [9], M. Bianchi, G. Kasay şi R. Pini [16], G.-Y. Chen şi Q. M. Cheng [41], Y. P. Fang şi N. J. Huang [51], X. H. Gong [58], I. V. Konnov şi S. Schaible [85], W. Oettli [99] şi T. Tanaka [108] au prezentat rezultate de existenţă pentru aceste probleme utilizând teoreme de separare în spaţii infinit dimensionale, partiţia unităţii, o teoremă de punct fix a lui E. Tarafdar [109], o teoremă de puct fix de tip Fan-Browder a lui S. Park [101], lema lui Ky Fan, o duală generalizată pentru probleme de echilibru, principiul lui Ekeland, etc.

Prezenta teză de doctorat urmăreşte extinderea unor rezultate de existenţă, stabilite de G. Kassay şi J. Kolumbán [82], pentru problema scalară de echilibru, la probleme vectoriale de echilibru şi la probleme multivoce de echilibru, precum şi prezentarea unor noi rezultate de existenţă pentru problemele vectoriale de echilibru.

Teza cuprinde şase capitole.

Noţiunile matematice şi rezultatele auxiliare necesare studiului problemelor vectoriale de echilibru şi al problemelor multivoce de echilibru sunt reamintite în Capitolul 1. Secţiunea 1.1 cuprinde proprietăţi referitoare la conuri, mulţimi convexe, teoreme de separare în spaţii infinit dimensionale, precum şi diferite generalizări ale semicontinuităţii superioare a funcţiilor reale. Apoi, sunt prezentate în Secţiunea 1.2 noţiuni de convexitate slabită pentru funcţii vectoriale şi multifuncţii, precum şi caracterizări ale acestora. Secţiunea 1.3 se axează pe noţiuni specifice teoriei dualităţii lui Fenchel.

Capitolul 2 este consacrat prezentării unor condiţii suficiente pentru existenţa soluţiilor problemei vectoriale slabe de echilibru $(WVEP)$, care în majoritatea lucrărilor este studiată în ipotezele $B = A$ şi $\varphi(a, a) \in C$ pentru orice $a \in A$. Utilizn̂d teorema de separare a lui Eidelheit în spaţii infinit dimensionale, sunt obţinute în Secţiunea 2.1 rezultate de existenţă pentru $(WVEP)$. Pe baza unei definiţii asemănătoare $C$- subconvexităţii unei funcţii vectoriale şi a caracterizării acesteia, este introdus un nou concept de convexitate pentru bifuncţii vectoriale. Lucrând în cazul scalar, teorema principală ne permite recuperarea unui rezultat al lui G. Kassay şi J. Kolumbán [82] cu privire la problema scalară de echilibru $(EP)$. Având acelaşi cadru de lucru, în Secţiunea 2.2 sunt date rezultate de existenţă pentru o problemă generalizată de echilibru cu funcţii compuse. O nouă noţiune de convexitate pentru bifuncţii vectoriale ce iau valori în spaţii produs este introdusă. Secţiunea se termină cu un rezultat de existenţă dat impunând ipoteze clasice asupra mulţimilor şi funcţiilor ce intervin în formularea problemei $(GEPC)$.

Capitolul 3 este cel mai amplu capitol al acestei teze. În cadrul acestuia este studiată problema vectorială tare de echilibru $(VEP)$. Sunt obţinute rezultate de existenţă pentru soluţiile şi soluţiile proprii ale problemei $(VEP)$.

Secţiunea 3.1 prezintă condiţii suficiente pentru existenţa soluţiilor problemei $(VEP)$, utilizând teorema de separare a lui Eidelheit în spaţii infinit dimensionale, în ipoteza unui con cu interiorul nevid. Pentru a vedea ce noţiuni satisfac ipotezele rezultatului principal al acestei secţiuni, o nouă semicontinuitate superioară pentru funcţii vectoriale este definită. Se pare ca este echivalentă cu cea introdusă de W. W. Breckner şi G. Orbán [31]. În plus, utilizând tehnici de scalarizare, este obţinut un rezultat de existenţă ce generalizează Teorema 3.2 lui X. H. Gong [58]. Această îmbunătăţire constă în: sunt considerate două mulţimi diferite $A$ şi $B$, este folosită o ipoteză slăbită de convexitate, şi în locul condiţiei $\varphi(a, a) \in C$ pentru orice $a \in A$ este considerată o condiţie de supremum. În Secţiunea 3.2, sunt obţinute, cu ajutorul unei duale generalizate a problemei vectoriale tari de echilibru $(VEP)$ şi a lemei lui Ky Fan, rezultate de existenţă pentru soluţiile problemei $(VEP)$, considerând $B = A$ şi $\varphi(a, a) \in C$ pentru orice $a \in A$. Unele dintre rezultate sunt date în ipoteze de monotonie, în timp ce altele sunt date fără astfel de ipoteze.

Acestea ne permit regăsirea unor rezultate stabilite de Ky Fan [49] şi W. Oettli [99]. Secţiunea 3.3 se axează pe rezultate de existenţă ale soluţiilor proprii ale problemei $(VEP)$. Pentru un con $C$, cu interiorul vid, sunt definite conceptele de con Henig dilatator şi familie de conuri Henig dilatatoare, precum şi noi soluţii proprii eficiente. În acest fel, este depăşită problema că interiorul conului $C$ este vid. Astfel, sunt prezentate rezultate de existenţă pentru soluţii $K$-Henig slab eficiente, $K$-Henig eficiente, Henig slab eficiente, Henig eficiente, supereficiente şi global eficiente. Se arată (a se vedea Teorema 3.3.18) că un şir generalizat de soluţii $K_i$-Henig slab eficiente ale problemei $(VEP)$, unde $(K_i)_{i\in I}$ este un şir generalizat de conuri Henig dilatatoare pentru $C$, admite un subşir generalizat convergent către o soluţie a problemei $(VEP)$.

Capitolul 4 este dedicat următoarei generalizări a problemei scalare de echilibru, când funcţia scalară este înlocuită de o multifuncţie:

$$(WWMP) \qquad \text{găsiţi } \bar{a} \in A \text{ astfel încât } \varphi(\bar{a}, b) \nsubseteq -\operatorname{int} C \text{ pentru orice } b \in B,$$

unde $\varphi : A \times B \to 2^Z$ este o multifuncţie. În Secţiunea 4.1 sunt stabilite condiţii suficiente pentru existenţa soluţiilor problemei $(WWMEP)$, folosind teorema lui Eidelheit în spaţii infinit dimensionale. De asemenea, este definită o nouă noţiune de convexitate pentru multifuncţii de două variabile. Deoarce multifuncţiile de decalaj ne ajută să analizăm dacă un punct este o soluţie pentru $(WWMEP)$, în Secţiunea 4.2 sunt construite o multifuncţie de decalaj şi o funcţie de decalaj. Pentru funcţia de decalaj este folosită teoria dualităţii lui Fenchel.

Ultimele două capitole cuprind aplicaţii ale problemelor de echilibru studiate în capitolele anterioare. Cu ajutorul problemei scalare de echilibru, în Secţiunea 5.1 este obţinut un rezultat de existenţă pentru o problemă slabă de optimizare vectorială $(WVMP)$. Printr-un exemplu se arată că ipoteza de semicontinuitate din acest rezultat nu poate fi slăbită. Secţiunile 5.2 şi 5.3 se ocupă de puncte şa slabe şi de puncte şa tari ale bifuncţiilor vectoriale. Orice punct şa tare al unei bifuncţii vectoriale este un punct şa slab al bifuncţiei vectoriale, dar reciproca nu are are loc, cum arată Exemplul 5.3.2. Pentru o mai bună vedere de ansamblu asupra relaţiei dintre problemele vectoriale de echilibru şi problemele de punct şa ale bifuncţiilor vectoriale, sunt date două exemple care arată că nu orice punct şa al unei bifuncţii vectoriale este o soluţie a problemei de echilibru corespunzătoare. Utilizând tehnici de scalarizare şi perturbare, sunt obţinute rezultate de existenţă pentru puncte şa ale bifuncţiilor vectoriale (a se vedea Teorema 5.2.4 şi Teorema 5.3.5).

În Capitolul 6, sunt obţinute rezultate de existenţă pentru diferite tipuri de inegalităţi variaţionle vectoriale şi inegalităţi variaţionale multivoce de tip Minty şi Stampacchia. Rezultatele sunt date în ipoteze de convexitate, $v$-hemicontinuitate, monotonie şi pseudomonotonie. Unele rezultate de existenţă sunt noi. Unul dintre ele (şi anume Teorema 6.2.7) generalizează un rezultat stabilit de Y. P. Fang şi N. J. Huang [51]. Aceasată generalizare constă în folosirea unei condiţii de coercivitate în locul ipotezei de compactitate. Secţiunile 6.2 şi 6.3 dau răpunsuri la problema deschisă propusă de G.-Y. Chen şi S. H. Hou [42] cu privire la rezultatele de existenţă pentru inegalităţile variaţionale vectoriale tari.

Contribuţiile originale ale autoarei sunt următoarele:

Capitolul 2: Teorema 2.1.1, Definiţia 2.1.2, Propoziţia 2.1.3, Corolarul 2.1.4, Corolarul 2.1.6, Teorema 2.2.3, Definiţia 2.2.5, Teorema 2.2.6, Corolarul 2.2.7.

Capitolul 3: Teorema 3.1.1, Definiţia 3.1.3, Propoziţia 3.1.4, Propoziţia 3.1.5, Corolarul 3.1.6, Corolarul 3.1.7, Teorema 3.1.9, Corolarul 3.1.10, Propoziţia 3.2.3, Teorema 3.2.4, Corolarul 3.2.5, Observaţia 3.2.6, Corolarul 3.2.9, Corolarul 3.2.10, Definiţia 3.3.7, Teorema 3.3.11, Corolarul 3.3.12, Definiţia 3.3.14, Teorema 3.3.15, Teorema 3.3.16, Teorema 3.3.18, Exemplul 3.3.20, Teorema 3.3.24, Corolarul 3.3.25, Teorema 3.3.26, Teorema 3.3.27, Corolarul 3.3.28.

Capitolul 4: Teorema 4.1.1, Definiţia 4.1.2, Teorema 4.1.3, Teorema 4.2.2, Corolarul 4.2.4, Corolarul 4.2.5, Propoziţia 4.2.6, Teorema 4.2.8.

Capitolul 5: Propoziţia 5.1.1, Exemplul 5.1.2, Propoziţia 5.1.3, Exemplul 5.1.5, Propoziţia 5.1.6, Exemplul 5.2.3, Teorema 5.2.4, Exemplul 5.3.2, Exemplul 5.3.4, Teorema 5.3.5.

Capitolul 6: Teorema 6.1.1, Corolarul 6.1.2, Teorema 6.1.5, Exemplul 6.2.2, Propoziţia 6.2.4, Teorema 6.2.5, Exemplul 6.2.6, Teorema 6.2.7, Teorema 6.3.4, Corolarul 6.3.5, Corolarul 6.3.6, Corolarul 6.3.7, Propoziţia 6.3.8, Teorema 6.3.9, Teorema 6.3.10, Teorema 6.4.1, Teorema 6.4.3.

Aceste rezultate sunt parţial incluse în următoarele lucrări:G. Bigi, A. Capătă şi G. Kassay [18], R. I. Boţ şi A. E. Capătă [27], A. Capătă [34], [35], [36], [37], A. Capătă şi G. Kassay [38], şi A. Capătă, G. Kassay şi B. Mosoni [39].


# Mulţumiri

Doresc să-mi exprim recunoştinţa Prof. Dr. Wolfgang W. Breckner pentru că mi-a oferit şansa de a face studiile de doctorat sub îndrumarea sa, pentru ajutorul său constant, pentru supravegherea şi asistenţa sa din ultimii cinci ani.

Multe mulţumiri sunt adresate Prof. Dr. Gábor Kassay pentru conversaţiile fructuoase, continua sa supraveghere, şi sfaturile sale competente.

De asemenea, doresc să mulţumesc Prof. Dr. Gert Wanka pentru ajutorul oferit pe perioada bursei DAAD la Universitatea Tehnică din Chemnitz, precum şi Dr. habil. Radu Ioan Boţ pentru suprevegherea cercetării mele la Chemnitz.

Doresc să mulţumesc Dr. Giancarlo Bigi pentru ajutorul şi suportul său din timpul stagiilor de cercetare petrecute la Universitatea din Pisa.

Multe mulţumiri sunt adresate Deutscher Akademischer Austausch Dienst (DAAD) pentru oferirea bursei Ref. A.07/73196 în perioada 01/10/2008-31/01/2009, şi CNCSIS-ului pentru publicarea tezei mele de doctorat din grantul IDEI PN II 523/2007.

Adresez sincere mulţumiri familiei mele pentru dragostea, suportul, răbdarea, încurajările şi înţelegerea sa.

**Cuvinte cheie:** problema vectorială slabă de echilibru, problema vectorială tare de echilibru, problema multivocă de echilibru, multifuncţie de decalaj, punct şa slab al bifuncţiilor vectoriale, punct şa tare al bifuncţiilor vectoriale, inegalitate variaţională vectorială slabă de tip Minty, inegalitate variaţională vectorială tare de tip Minty, inegalitate variaţională vectorială slabă de tip Stampacchia, inegalitate variaţională vectorială tare de tip Stampacchia, inegalităţi variaţionale multivoce.

# Capitolul 1

# Noţiuni şi rezultate preliminare

Acest Capitol conţine noţiunile matematice de care avem nevoie în prezenta teză de doctorat.

## 1.1 Mulţimi convexe şi conuri convexe

Secţiunea 1.1 cuprinde noţiuni referitoare la conuri, teoreme de separare a mulţimilor convexe, şi diferite generalizări ale semicontinuităţii superioare a unei funcţii reale. Dintre acestea amintim: baza unui con, teorema de separare a lui Eidelheit, teorema de separare a lui Tukey, lema lui Ky Fan, semicontinuitatea superioară a unei funcţii vectoriale şi semicontinuitatea superioară a unei multifuncţii.

## 1.2 Funcţii ce satisfac anumite condiţii de convexitate slăbită

Secţiunea 1.2 se axează pe definiţia diferitelor noţiuni de convexitate slabită ale funcţiilor vectoriale şi ale multifuncţiilor, precum şi pe caracterizările acestora.

## 1.3 Teoria dualităţii lui Fenchel

În partea finală a acestui capitol, sunt reamintite câteva noţiuni specifice teoriei dualităţii lui Fenchel. Astfel, Secţiunea 1.3 conţine noţiunea de conjugată Fenchel-Moreau şi de produs de convoluţie infimal al funcţiilor. În plus, este amintită o teoremă recentă, cu privire la existenţa dualităţii tari dintre o problemă şi duala sa.

# Capitolul 2

# Rezultate de existenţă pentru problema vectorială slabă de echilibru

Fie $A$ o submulţime nevidă a unui spaţiu topologic $E$, fie $B$ o mulţime nevidă, fie $Z$ un spaţiu liniar topologic real şi fie $C \subseteq Z$ un con convex solid. Fiind dată o bifuncţie vectorială $\varphi : A \times B \to Z$, studiem aşa-numita *problemă vectorială slabă de echilibru*:

$(WVEP)$ găsiţi $\bar{a} \in A$ astfel încât $\varphi(\bar{a}, b) \notin -\operatorname{int} C$ pentru orice $b \in B$.

## 2.1 Rezultate de existenţă stabilite folosind teorema lui Eidelheit

Primul rezultat din această secţiune prezintă condiţii suficiente pentru existenţa soluţiilor problemei $(WVEP)$. Pentru a demonstra rezultatul se foloseşte teorema de separare a lui Eidelheit.

**Teorema 2.1.1** (A. Capătă şi G. Kassay [38]) *Fie $A$ o mulţime compactă şi fie îndeplinite următoarele condiţii de bifuncţia $\varphi : A \times B \to Z$:*

(i) *pentru fiecare $b \in B$, funcţia $\varphi(\cdot, b) : A \to Z$ este $C$-semicontinuă superior pe $A$;*

(ii) *oricare ar fi $a_1, \ldots, a_m \in A$, oricare ar fi $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$ cu $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1$, şi oricare ar fi $b_1, \ldots, b_n \in B$, există $c^* \in C^* \setminus \{0\}$ astfel încât*

$$\min_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i c^*\big(\varphi(a_i, b_j)\big) \leq \sup_{a \in A} \min_{1 \leq j \leq n} c^*\big(\varphi(a, b_j)\big);$$

(iii) *oricare ar fi $b_1, \ldots, b_n \in B$ şi oricare ar fi $c_1^*, \ldots, c_n^* \in C^*$ nu toate nule, are loc*

$$\sup_{a \in A} \sum_{j=1}^{n} c_j^*\big(\varphi(a, b_j)\big) \geq 0.$$

*Atunci problema $(WVEP)$ admite o soluţie.*

Ipoteza (ii) a Teoremei 2.1.1 este un fel de concavitate generalizată a bifuncţiei $\varphi$ în prima variabilă în raport cu conul $C$.

**Definiţia 2.1.2** (A. Capătă şi G. Kassay [38]) Spunem că o bifuncţie $\varphi : A \times B \to Z$ este:

(i) asemănător $C$-subconcavă în prima variabilă dacă, oricare ar fi $c \in \operatorname{int} C$, oricare ar fi $a_1, a_2 \in A$ şi oricare ar fi $\lambda \in [0,1]$, există $a \in A$ astfel încât

$$\varphi(a,b) \geq_C \lambda\varphi(a_1,b) + (1-\lambda)\varphi(a_2,b) - c \text{ pentru orice } b \in B;$$

(ii) asemănător $C$-subconvexă în a doua variabilă daca, oricare ar fi $c \in \operatorname{int} C$, oricare ar fi $b_1, b_2 \in B$ şi oricare ar fi $\lambda \in [0,1]$, există $b \in B$ astfel încât

$$\varphi(a,b) \leq_C \lambda\varphi(a,b_1) + (1-\lambda)\varphi(a,b_2) + c \text{ pentru orice } a \in A;$$

(iii) asemănător $C$-subconcavă – subconvexă dacă ea este asemănător $C$-subconcavă în prima variabilă şi asemănător $C$-subconvexă în a doua variabilă.

Când $Z := \mathbb{R}$ şi $C := \mathbb{R}_+$, folosim termenii de bifuncţie asemănător subconcavă, asemănător subconvexă şi asemănător subconcavă – subconvexă în loc de bifuncţie asemănător $\mathbb{R}_+$-subconcavă, asemănător $\mathbb{R}_+$-subconvexă şi asemănător $\mathbb{R}_+$-subconcavă – subconvexă, respectiv.

**Propoziţia 2.1.3** (A. Capătă şi G. Kassay [38]) *O bifuncţie $\varphi : A \times B \to Z$ este asemănător $C$-subconcavă în prima variabilă dacă şi numai dacă, oricare ar fi $c \in \operatorname{int} C$, oricare ar fi elementele $a_1, \ldots, a_m \in A$ şi oricare ar fi $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$ cu $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1$, există $a \in A$ astfel încât*

$$\varphi(a,b) \geq_C \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi(a_i,b) - c \text{ pentru orice } b \in B.$$

Folosind Propoziţia 2.1.3 şi Teorema 2.1.1, se stabileşte următorul rezultat.

**Corolarul 2.1.4** (A. Capătă şi G. Kassay [38]) *Fie $A$ o mulţime compactă şi fie îndeplinite următoarele condiţii de bifuncţia $\varphi : A \times B \to Z$:*

(i) *$\varphi$ este $C$-semicontinuă superior pe $A$ şi asemănător $C$-subconcavă în prima variabilă;*

(ii) *oricare ar fi $b_1, \ldots, b_n \in B$ oricare ar fi $c_1^*, \ldots, c_n^* \in C^*$ nu toate nule, are loc*

$$\sup_{a \in A} \sum_{j=1}^{n} c_j^*\big(\varphi(a,b_j)\big) \geq 0.$$

*Atunci problema $(WVEP)$ admite o soluţie.*

În cele ce urmează lucrăm în cazul scalar. Fie $Z := \mathbb{R}$ şi $C := \mathbb{R}_+$. Atunci, problema vectorială slabă de echilibru $(WVEP)$ devine *problema scalară de echilibru*:

$(EP)$ găsiţi $\bar{a} \in A$ astfel încât $\varphi(\bar{a},b) \geq 0$ pentru orice $b \in B$.

Teorema 2.1.1 ne permite reobţinerea unui rezultat stabilit de G. Kassay şi J. Kolumbán [82] cu privire la existenţa soluţiilor problemei $(EP)$.

**Corolarul 2.1.5** (G. Kassay şi J. Kolumbán [82]) *Fie $A$ o mulţime compactă şi fie îndeplinite următoarele condiţii de bifuncţia $\varphi : A \times B \to \mathbb{R}$:*

(i) *pentru fiecare $b \in B$, funcţia $\varphi(\cdot, b) : A \to \mathbb{R}$ este semicontinuă superior pe $A$;*

(ii) *oricare ar fi $a_1, \dots, a_m \in A$, oricare ar fi $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$ cu $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1$, şi oricare ar fi $b_1, \dots, b_n \in B$, are loc*

$$\min_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi(a_i, b_j) \leq \sup_{a\in A} \min_{1\leq j\leq n} \varphi(a, b_j);$$

(iii) *oricare ar fi $b_1, \dots, b_n \in B$ şi oricare ar fi $\mu_1, \dots, \mu_n \geq 0$ cu $\mu_1 + \cdots + \mu_n = 1$, are loc*

$$\sup_{a\in A} \sum_{j=1}^{n} \mu_j \varphi(a, b_j) \geq 0.$$

*Atunci problema $(EP)$ admite o soluţie.*

Ipoteza (iii) a Corolarului 2.1.5 este satisfăcută dacă bifuncţia $\varphi$ este asemănător subconvexă în a doua variabilă şi o condiţie suplimentară este satisfăcută, anume $\sup\limits_{a\in A} \varphi(a, b) \geq 0$ oricare ar fi $b \in B$. Luând $B = A$, atunci această ipoteză suplimentară poate fi înlocuită cu o condiţie mai tare, anume cu condiţia $\varphi(a, a) = 0$ pentru orice $a \in A$.

**Corolarul 2.1.6** (A. Capătă şi G. Kassay [38]) *Fie $A$ o mulţime compactă şi fie îndeplinite următoarele condiţii de bifuncţia $\varphi : A \times B \to \mathbb{R}$:*

(i) *pentru fiecare $b \in B$, funcţia $\varphi(\cdot, b) : A \to \mathbb{R}$ este semicontinuă superior $A$;*

(ii) *$\varphi$ este asemănător subconcavă – subconvexă;*

(iii) $\sup\limits_{a\in A} \varphi(a, b) \geq 0$ *oricare ar f $b \in B$.*

*Atunci problema $(EP)$ admite o soluţie.*

## 2.2 Rezultate de existenţă pentru problema generalizată de echilibru cu funcţii compuse

Fie $E$ şi $Y$ spaţii liniare topologice reale, ultimul fiind parţial ordonat de un con convex închis $K$, fie $A$ o submulţime nevidă a lui $E$, fie $h : A \to Y$ şi $g : Y \to \mathbb{R}$ funcţii date. Considerăm $Z := \mathbb{R}$, $C := \mathbb{R}_+$, $B := A$ şi bifuncţie $\varphi : A \times A \to \mathbb{R}$ ce satisface proprietatea

$$\varphi(a, a) = 0 \text{ pentru orice } a \in A.$$

În această secţiune studiem următoarea *problemă generalizată de echilibru cu funcţii compuse*:

$(GEPC)$ găsiţi $\bar{a} \in A$ astfel încât $\varphi(\bar{a}, b) + g \circ h(b) \geq g \circ h(\bar{a})$ pentru orice $b \in A$.

**Definiţia 2.2.1** (D. T. Luc [95]) Spunem că funcţia $g : Y \to \mathbb{R}$ este $K$-crescătoare dacă, oricare ar fi $y_1, y_2 \in Y$ astfel încât $y_1 \leq_K y_2$, are loc $g(y_1) \leq g(y_2)$.

**Propoziţia 2.2.2** (D. T. Luc [95]) *Fie funcţia $h : E \to Y$ $K$-semicontinuă inferior în $x_0 \in E$, iar funcţia $g : Y \to \mathbb{R}$ $K$-crescătoare şi semicontinuă inferior în $h(x_0)$. Atunci $g \circ h$ este semicontinuă inferior în $x_0$.*

**Teorema 2.2.3** (R. I. Boţ şi A. E. Capătă [27]) *Fie $A$ o mulţime compactă şi fie îndeplinite următoarele condiţii:*

(i) *pentru fiecare $b \in A$, funcţia $\varphi(\cdot, b)$ este semicontinuă superior pe $A$;*

(ii) *$h$ este $K$-semicontinuă inferior pe $A$;*

(iii) *$g$ este semicontinuă inferior pe $Y$;*

(iv) *bifuncţia*
$$\forall\,(a,b) \in A \times A \mapsto \varphi(a,b) - g(h(a)) \in \mathbb{R}$$
*este asemănător subconcavă în prima variabilă;*

(v) *bifuncţia*
$$\forall\,(a,b) \in A \times A \mapsto \varphi(a,b) + g(h(b)) \in \mathbb{R}$$
*este asemănător subconvexă în a doua variabilă.*

*Atunci problema $(GEPC)$ admite o soluţie.*

**Observaţia 2.2.4** Este uşor de verificat că ipotezele (iv) şi (v) din Teorema 2.2.3 sunt consecinţe ale condiţiilor:

(vi) bifuncţia
$$\forall\,(a,b) \in A \times A \mapsto (\varphi(a,b), -g(h(a))) \in \mathbb{R}^2$$
este asemănător $\mathbb{R}^2_+$-subconcavă în prima variabilă şi, respectiv,

(vii) bifuncţia
$$\forall\,(a,b) \in A \times A \mapsto (\varphi(a,b), g(h(b))) \in \mathbb{R}^2$$
este asemănător $\mathbb{R}^2_+$-subconvexă în a doua variabilă. □

În cazul când funcţia $g : Y \to \mathbb{R}$ este convexă şi $K$-crescătoare, putem da folosind observaţia de mai sus, condiţii suficiente pentru ipotezele (vi) şi (vii) implicând numai funcţia vectorială $h$. În partea finală a acestei secţiuni introducem două noţiuni de convexitate generalizată care sunt definite analog cu cele introduse în Definiţia 2.1.2.

**Definiţia 2.2.5** (R. I. Boţ şi A. E. Capătă [27]) Spunem că:

(i) bifuncţia
$$\forall\,(a,b) \in A \times A \mapsto (\varphi(a,b), -h(a)) \in \mathbb{R} \times Y$$
este asemănător subconcavă – $K$-concavă în prima variabilă dacă, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, oricare ar fi $\lambda \in [0,1]$ şi oricare ar fi $a_1, a_2 \in A$, există $a \in A$ astfel încât
$$(\varphi(a,b), -h(a)) \geq_{\mathbb{R}_+ \times K} \lambda(\varphi(a_1,b), -h(a_1)) +$$
$$+ (1-\lambda)(\varphi(a_2,b), -h(a_2)) - (\varepsilon, 0) \text{ pentru orice } b \in A;$$

(ii) bifuncţia
$$\forall\,(a,b) \in A \times A \mapsto (\varphi(a,b), h(b)) \in \mathbb{R} \times Y$$

este asemănător subconvexă – $K$-convexă în a doua variabilă dacă, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, oricare ar fi $\lambda \in [0,1]$ şi oricare ar fi $b_1, b_2 \in A$, există $b \in A$ astfel încât

$$(\varphi(a,b), h(b)) \leq_{\mathbb{R}_+ \times K} \lambda(\varphi(a,b_1), h(b_1)) +$$
$$+ (1-\lambda)(\varphi(a,b_2), h(b_2)) + (\varepsilon, 0) \text{ pentru orice } a \in A.$$

Acum se poate formula un al doilea rezultat de existenţă al soluţiilor problemei $(GEPC)$.

**Teorema 2.2.6** (R. I. Boţ şi A. E. Capătă [27]) *Fie $A$ o mulţime compactă şi fie îndeplinite următoarele condiţii:*

(i) *pentru fiecare $b \in A$, funcţia $\varphi(\cdot, b)$ este semicontinuă superior pe $A$;*

(ii) *$h$ este $C$-semicontinuă inferior pe $A$;*

(iii) *$g$ este convexă, semicontinuă inferior pe $Y$ şi $K$-crescătoare;*

(iv) *bifuncţia*
$$\forall\,(a,b) \in A \times A \mapsto (\varphi(a,b), -h(a)) \in \mathbb{R} \times Y$$
*este asemănător subconcavă – $K$-concavă în prima variabilă;*

(v) *bifuncţia*
$$\forall\,(a,b) \in A \times A \mapsto (\varphi(a,b), h(b)) \in \mathbb{R} \times Y$$
*este asemănător subconvexă – $K$-convexă în a doua variabilă.*

*Atunci problema $(GEPC)$ admite o soluţie.*

Următorul corolar este dat impunând ipoteze clasice asupra mulţimilor şi funcţiilor ce intervin în formularea problemei $(GEPC)$.

**Corolarul 2.2.7** (R. I. Boţ şi A. E. Capătă [27]) *Fie $A$ o mulţime convexă compactă şi fie îndeplinite următoarele condiţii:*

(i) *pentru fiecare $b \in A$, funcţia $\varphi(\cdot, b)$ este semicontinuă superior pe $A$;*

(ii) *$h$ este $K$-convexă şi $K$-semicontinuă inferior pe $A$;*

(iii) *$g$ este convexă, semicontinuă inferior pe $Y$ şi $K$-crescătoare;*

(iv) *bifuncţia $\varphi$ este concav – convexă.*

*Atunci problema $(GEPC)$ admite o soluţie.*

# Capitolul 3

# Rezultate de existenţă pentru problema vectorială tare de echilibru

Fie $A$ o submulţime nevidă a unui spaţiu topologic $E$, fie $B$ o mulţime nevidă, fie $C$ un con convex punctat netrivial al unui spaţiu liniar topologic real $Z$ şi fie $\varphi : A \times B \to Z$ o bifuncţie. În Q. H. Ansari, W. Oettli şi D. Schläger [6] a fost extinsă problema scalară de echilibru $(EP)$ (a se vedea Secţiunea 2.1) pentru bifuncţii vectoriale în modul următor:

$(VEP)$ găsiţi $\bar{a} \in A$ astfel încât $\varphi(\bar{a}, b) \notin -C \setminus \{0\}$ pentru orice $b \in B$.

În cadrul acestui capitol lucrăm cu $(VEP)$, care este numită *problema vectorială tare de echilibru.*

## 3.1 Rezultate de existenţă stabilite folosind teorema lui Eidelheit

În această secţiune, conul $C$ este presupus a fi solid. Următorul rezultat este despre existenţa soluţiilor problemei vectoriale tari de echilibru $(VEP)$.

**Teorema 3.1.1** (G. Bigi, A. Capătă şi G. Kassay [18]) *Fie urmtoarele condiţii îndeplinite de bifuncţia $\varphi : A \times B \to Z$:*

(i) *dacă familia $(U_b)_{b \in B}$ acoperă mulţimea $A$, atunci ea conţine o subacoperire finită, unde*

$$U_b := \{a \in A \,|\, \varphi(a, b) \in -C \setminus \{0\}\};$$

(ii) *oricare ar fi $a_1, \ldots, a_m \in A$, oricare ar fi $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$ cu $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1$, oricare ar fi $b_1, \ldots, b_n \in B$, există $c^* \in C^\sharp$ astfel încât*

$$\min_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i c^*\big(\varphi(a_i, b_j)\big) \leq \sup_{a \in A} \min_{1 \leq j \leq n} c^*\big(\varphi(a, b_j)\big);$$

(iii) *oricare ar fi $b_1, \ldots, b_n \in B$, şi oricare ar fi $c_1^*, \ldots, c_n^* \in C^*$ nu toate nule, are loc*

$$\sup_{a \in A} \sum_{j=1}^{n} c_j^*\big(\varphi(a, b_j)\big) > 0.$$

*Atunci problema* $(VEP)$ *admite o soluţie.*

Următoarea generalizare a semicontinuităţii superioare a funcţiilor reale a fost dată de W. W. Breckner şi G. Orbán [31].

**Definiţia 3.1.2** (W. W. Breckner şi G. Orbán [31]) Fie $C$ un con convex. Spunem că funcţia vectorială $f : A \to Z$ este semicontinuă superior în punctul $a_0 \in A$ dacă, pentru orice $c \in C \setminus \{0\}$, există o vecinătate $U$ a lui $a_0$ astfel încât

$$f(a) \in f(a_0) + c - C \text{ oricare ar fi } a \in U \cap A.$$

În ipoteza unui con convex punctat, semicontinuitatea superioară introdusă în Definiţia 3.1.2 este echivalentă cu următoarea, introdusă de G. Bigi, A. Capătă şi G. Kassay [18].

**Definiţia 3.1.3** (G. Bigi, A. Capătă şi G. Kassay [18]) Spunem că funcţia vectorială $f : A \to Z$ este:

(i) propriu $C$-semicontinuă superior în punctul $a_0 \in A$ dacă, pentru orice $c \in C \setminus \{0\}$, există o vecinătate $U$ a lui $a_0$ astfel încât

$$f(a) \in f(a_0) + c - C \setminus \{0\} \text{ oricare ar fi } a \in U \cap A;$$

(ii) propriu $C$-semicontinuă superior pe $A$ dacă, ea este propriu $C$-semicontinuă superior în orice punct $a_0 \in A$;

(iii) propriu $C$-semicontinuă inferior în punctul $a_0 \in A$ (respectiv propriu $C$-semicontinuă inferior pe $A$) dacă $-f$ este propriu $C$-semicontinuă superior în punctul $a_0 \in A$ (respectiv propriu $C$-semicontinuă superior pe $A$).

Orice funcţie $f : A \to Z$ propriu $C$-semicontinuă superior este $C$-semicontinuă superior, dar reciproca nu are are loc. Intr-adevăr, dacă $A := Z$ şi $C \subseteq Z$ este un con cu proprietatea că mulţimea $C \setminus \{0\}$ nu este deschisă, atunci funcţia identitate nu este propriu $C$-semicontinuă superior.

**Propoziţia 3.1.4** (G. Bigi, A. Capătă şi G. Kassay [18]) *Pentru o funcţie* $f : A \to Z$*, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) $f$ *este propriu* $C$*-semicontinuă superior pe* $A$*.*

(ii) *Oricare ar fi* $z \in Z$*, mulţimea* $f^{-1}(z - C\setminus\{0\})$ *este deschisă în raport cu topologia indusă pe* $A$*.*

**Propoziţia 3.1.5** (G. Bigi, A. Capătă şi G. Kassay [18]) *Fie* $A$ *o mulţime compactă şi, oricare ar fi* $b \in B$*, fie funcţia* $\varphi(\cdot, b) : A \to Z$ *propriu* $C$*-semicontinuă superior pe* $A$*. Atunci condiţia* (i) *din Teorema* 3.1.1 *este îndeplinită.*

Din Propoziţia 3.1.5 şi Definiţia 2.1.2 (i), obţinem următorul corolar al Teoremei 3.1.1.

**Corolarul 3.1.6** (G. Bigi, A. Capătă şi G. Kassay [18]) *Fie* $C$ *astfel încât* $C^\sharp \neq \emptyset$ *şi fie îndeplinite următoarele condiţii de bifuncţia* $\varphi : A \times B \to Z$*:*

(i) *pentru fiecare* $b \in B$*,* $\varphi(\cdot, b) : A \to Z$ *este propriu* $C$*-semicontinuă superior pe* $A$*;*

(ii) *$\varphi$ este asemănător $C$-subconcavă în prima variabilă;*

(iii) *oricare ar fi $b_1, \ldots, b_n \in B$, şi oricare ar fi $c_1^*, \ldots, c_n^* \in C^*$ nu toate nule, inegalitatea*

$$\sup_{a\in A} \sum_{j=1}^{n} c_j^*\big(\varphi(a, b_j)\big) > 0$$

*are loc.*

*Atunci problema $(VEP)$ admite o soluţie.*

În cazul particular când $Z := \mathbb{R}$ şi $C := \mathbb{R}_+$, Corolarul 3.1.6 ne oferă următorul rezultat pentru problema scalară de echilibru $(EP)$, introdusă în Secţiunea 2.1.

**Corolarul 3.1.7** (G. Bigi, A. Capătă şi G. Kassay [18]) *Fie $A$ o mulţime compactă şi fie îndeplinite următoarele condiţii de bifuncţia $\varphi : A \times B \to \mathbb{R}$:*

(i) *pentru fiecare $b \in B$, $\varphi(\cdot, b) : A \to \mathbb{R}$ este semicontinuă superior pe $A$;*

(ii) *$\varphi$ este asemănător subconcavă în prima variabilă;*

(iii) *oricare ar fi $b_1, \ldots, b_n \in B$ şi oricare ar fi $\mu_1, \ldots, \mu_n \geq 0$ $\mu_1 + \cdots + \mu_n = 1$, are loc*

$$\sup_{a\in A} \sum_{j=1}^{n} \mu_j \varphi(a, b_j) > 0.$$

*Atunci problema $(EP)$ admite o soluţie.*

**Teorema 3.1.8** (C. L. de Vito [112]) *Fie $E$ un spaţiu normat şi fie $A$ o submulţime slab campactă a lui $E$. Atunci orice şir de puncte din $A$ admite un subşir ce converge slab către un punct din $A$.*

Următoarea teoremă rezultă din Corolarul 3.1.7.

**Teorema 3.1.9** (G. Bigi, A. Capătă şi G. Kassay [18]) *Fie $E$ un spaţiu normat, fie $A$ o mulţime slab compactă şi fie $c^* \in C^\sharp$. Presupunem că bifuncţia $\varphi : A \times B \to Z$ îndeplineşte următoarele condiţii:*

(i) *pentru fiecare $b \in B$, funcţia $a \in A \mapsto c^*(\varphi(a, b)) \in \mathbb{R}$ este slab semicontinuă superior pe $A$;*

(ii) *$\varphi$ este asemănător $C$-subconcavă– subconvexă;*

(iii) *oricare ar fi $b \in B$, are loc*

$$\sup_{a\in A} c^*(\varphi(a, b)) \geq 0.$$

*Atunci problema $(VEP)$ admite o soluţie.*

Teorema 3.1.9 permite generalizarea Teoremei 3.2 stabilite de X. H. Gong [58], în care asemănător convexitatea este înlocuită de asemănător subconvexitatea.

**Corolarul 3.1.10** *Fie $E$ un spaţiu normat, fie $A$ o mulţime slab compactă şi fie $c^* \in C^\sharp$. Fie următoarele condiţii îndeplinite de bifuncţia $\varphi : A \times B \to Z$:*

(i) *pentru fiecare* $b \in B$*, funcţia* $a \in A \mapsto c^*(\varphi(a,b)) \in \mathbb{R}$ *este slab semicontinuă superior pe* $A$*;*

(ii) $\varphi$ *este asemănător* $C$*-subconcavă – subconvexă;*

(iii) $\varphi(a,a) \in C$ *oricare ar fi* $a \in A$

*Atunci problema* $(VEP)$ *admite o soluţie.*

Observăm că Teorema 3.1.9 extinde Teorema 3.2 a lui X. H. Gong [58] în două moduri: pe de o parte, în Teorema 3.1.9 două mulţimi diferite $A$ şi $B$ sunt considerate, iar pe de altă parte, condiţia de echilibru $\varphi(a,a) \in C$ este înlocuită cu o ipoteză mai slabă ce implică un supremum după mulţimea $A$.

## 3.2 Rezultate de existenţă stabilite folosind lema lui Ky Fan

Această secţiune este dedicată studiului unui caz particular al problemei $(VEP)$ folosind o problemă duală generalizată. De-a lungul acestei secţiuni, $E$ este un spaţiu liniar topologic Hausdorff real, $A \subseteq E$ o submulţime nevidă convexă, $B = A$, şi $C$ un con convex punctat al unui spaţiu liniar topologic real $Z$. Astfel problema $(VEP)$ devine problema:

$(PVEP)$ găsiţi $\bar{a} \in A$ astfel încât $\varphi(\bar{a}, b) \notin -C \setminus \{0\}$ pentru orice $b \in A$.

Cu ajutorul unui operator, ataşăm problemei $(PVEP)$ o problemă duală. Fie $\mathcal{D}$ un operator definit pe $\mathcal{F}(A,Z) := \{\psi \mid \psi : A \times A \to Z\}$ cu valori în $\mathcal{F}(A,Z)$, numit operator de dualitate. De fapt, $\mathcal{D}$ este un set de reguli fixe aplicate problemei $(PVEP)$. Cu ajutorul lui $\mathcal{D}$ introducem următoarea *duală generalizată a problemei vectoriale tari de echilibru*:

$(DVEP)$ găsiţi $\bar{a} \in A$ astfel încât $\mathcal{D}(\varphi)(\bar{a}, b) \notin -C \setminus \{0\}$ pentru orice $b \in A$.

Următoarea propoziţie arată că duala generalizată a acestei probleme devine problema iniţială.

**Propoziţia 3.2.1** *Dacă* $\mathcal{D} \circ \mathcal{D}(\varphi) = \varphi$*, atunci duala generalizată a problemei* $(DVEP)$ *este problema* $(PVEP)$*.*

Fie $G : A \times A \to Z$ definită prin

$$G(a,b) := -\mathcal{D}(\varphi)(b,a), \text{ oricare ar fi } a, b \in A.$$

În acest cadru, problema $(DVEP)$ poate fi scrisă ca:

$(GVEP)$ găsiţi $\bar{a} \in A$ astfel încât $G(b, \bar{a}) \notin C \setminus \{0\}$ pentru orice $b \in A$.

Următoarele noţiuni sunt generalizări ale $g$-monotoniei şi, respectiv, maximal $g$-monotoniei, introduse de W. Oettli [99] pentru cazul scalar.

**Definiţia 3.2.2** Spunem că bifuncţia $\varphi : A \times A \to Z$ este:

(i) $G$-pseudomonotonă dacă, oricare ar fi $a, b \in A$,

$$\varphi(a,b) \notin -C \setminus \{0\} \text{ implică } G(b,a) \notin C \setminus \{0\};$$

(ii) maximal $G$-pseudomonotonă dacă ea este $G$-pseudomonotonă şi, oricare ar fi $a, b \in A$, următoarea implicaţie are loc:

$$G(x, a) \notin C \setminus \{0\} \text{ oricare ar fi } x \in ]a, b] \text{ implică } \varphi(a, b) \notin -C \setminus \{0\}.$$

**Propoziţia 3.2.3** (A. Capătă [35]) *Dacă $\varphi : A \times A \to Z$ este maximal $G$-pseudomonotonă, atunci mulţimea soluţiilor problemelor $(PVEP)$ şi $(GVEP)$ coincid.*

Folosind formularea duală $(GVEP)$ a problemei $(PVEP)$, obţinem următoarele rezultate de existenţă pentru soluţiile problemei $(PVEP)$.

**Teorema 3.2.4** (A. Capătă [35]) *Fie $\varphi : A \times A \to Z$ şi $G : A \times A \to Z$ astfel încât următoarele condiţii să fie îndeplinite:*

(i) *$\varphi(a, a) \in C$ pentru orice $a \in A$;*

(ii) *$\varphi$ este maximal $G$-pseudomonotonă;*

(iii) *pentru fiecare $b \in A$, mulţimea $S(b) := \{a \in A \mid G(b, a) \notin C \setminus \{0\}\}$ este închisă;*

(iv) *pentru fiecare $a \in A$, mulţimea $W(a) := \{b \in A \mid \varphi(a, b) \in -C \setminus \{0\}\}$ este convexă;*

(v) *există o mulţime nevidă, compactă şi convexă $D \subseteq A$ precum şi un element $\tilde{b} \in D$ astfel încât*
$$\varphi(x, \tilde{b}) \in -C \setminus \{0\} \text{ oricare ar fi } x \in A \setminus D.$$

*Atunci problema $(PVEP)$ admite o soluţie.*

**Corolarul 3.2.5** (A. Capătă [35]) *Fie $\varphi : A \times A \to Z$ şi $G : A \times A \to Z$ astfel încât următoarele condiţii să fie îndeplinite:*

(i) *$\varphi(a, a) \in C$ pentru orice $a \in A$;*

(ii) *$\varphi$ este maximal $G$-pseudomonotonă;*

(iii) *pentru fiecare $b \in A$, mulţimea $S(b) := \{a \in A \mid G(b, a) \notin C \setminus \{0\}\}$ este închisă;*

(iv) *pentru fiecare $a \in A$, funcţia $\varphi(a, \cdot) : A \to Z$ este $C$-cvasiconvexă;*

(v) *există o mulţime nevidă, compactă şi convexă $D \subseteq A$ precum şi un element $\tilde{b} \in D$ astfel încât*
$$\varphi(x, \tilde{b}) \in -C \setminus \{0\} \text{ oricare ar fi } x \in A \setminus D.$$

*Atunci problema $(PVEP)$ admite o soluţie.*

**Observaţia 3.2.6** (A. Capătă [35]) Ipoteza (iv) din Teorema 3.2.4 nu implică condiţia (iv) a Corolarului 3.2.5. Într-adevăr, fie $E = Z$, fie $C \subseteq Z$ un con convex punctat astfel încât relaţia de ordine definită de el nu să nu fie totală, şi fie $\varphi : A \times A \to Z$ definită prin

$$\varphi(a, b) := b \text{ pentru orice } (a, b) \in A \times A.$$

Pentru a verifica ipoteza (iv) a Teoremei 3.2.4, fixăm $a \in A$ şi luăm $b_1, b_2 \in W(a)$. Astfel $b_1,\, b_2 \in -C \setminus \{0\}$. Deoarece $-C \setminus \{0\}$ este convexă, avem

$$\lambda b_1 + (1-\lambda)b_2 \in -C \setminus \{0\}, \text{ oricare ar fi } \lambda \in [0,1].$$

Astfel, $W(a)$ este o mulţime convexă.

Fie $b_1, b_2 \in A$ şi fie $\lambda \in [0,1]$. Presupunem că $\varphi(a,\cdot) : A \to Z$ este $C$-cvasiconvexă. Astfel, obţinem că

$$b_1 \in b_2 + C \text{ sau } b_2 \in b_1 + C.$$

Întrucât $b_1$ şi $b_2$ au fost arbitrar alese şi relaţia de ordine indusă de $C$ pe $A$ nu este totală, avem că funcţia $\varphi(a,\cdot)$ nu este $C$-cvasiconvexă. □

În cele ce urmează vom considera două cazuri particulare ale operatorului $\mathcal{D}$. La început, definim $\mathcal{D} : \mathcal{F}(A,Z) \to \mathcal{F}(A,Z)$ prin

$$\mathcal{D}(\psi)(a,b) := -\psi(b,a), \text{ oricare ar fi } a, b \in A. \tag{3.1}$$

Astfel, duala generalizată a problemei vectoriale tari de echilibru devine:

$(DVEP1)$ găsiţi $\bar{a} \in A$ astfel încât $\varphi(b,\bar{a}) \notin C \setminus \{0\}$ pentru orice $b \in A$.

Vom prezenta un rezultat de existenţă al problemei $(PVEP)$ în ipoteze de pseudomonotonie. Luând în considerare că funcţia $G : A \times A \to Z$, asociată operatorului $\mathcal{D} : \mathcal{F}(A,Z) \to \mathcal{F}(A,Z)$ definit prin (3.1), coincide cu $\varphi$, Definiţia 3.2.2 ne dă următoarea definiţie:

**Definiţia 3.2.7** Spunem că bifuncţia $\varphi : A \times A \to Z$ este:

(i) pseudomonotonă dacă, oricare ar fi $a, b \in A$,

$$\varphi(a,b) \notin -C \setminus \{0\} \text{ implică } \varphi(b,a) \notin C \setminus \{0\};$$

(ii) maximal pseudomonotonă dacă ea este pseudomonotonă şi, oricare ar fi $a, b \in A$, următoarea implicaţie are loc:

$$\varphi(x,a) \notin C \setminus \{0\} \text{ oricare ar fi } x \in \,]a,b] \text{ implică } \varphi(a,b) \notin -C \setminus \{0\}.$$

**Propoziţia 3.2.8** *Dacă $\varphi : A \times A \to Z$ este maximal pseudomonotonă, atunci mulţimea soluţiilor problemelor $(PVEP)$ şi $(DVEP1)$ coincid.*

Folosind o ipoteză de pseudomonotonie, Teorema 3.2.4 implică următorul rezultat de existenţă pentru soluţiile problemei $(PVEP)$.

**Corolarul 3.2.9** (A. Capătă [35]) *Fie bifuncţia $\varphi : A \times A \to Z$ astfel încât următoarele condiţii să fie îndeplinite:*

(i) *$\varphi(a,a) \in C$ pentru orice $a \in A$;*

(ii) *$\varphi$ este maximal pseudomonotonă;*

(iii) *pentru fiecare $b \in A$, mulţimea $S(b) := \{a \in A \mid \varphi(b,a) \notin C \setminus \{0\}\}$ este închisă;*

(iv) *pentru fiecare* $a \in A$, *mulţimea* $W(a) := \{b \in A \mid \varphi(a,b) \in -C \setminus \{0\}\}$ *este convexă;*

(v) *există o mulţime nevidă, compactă şi convexă* $D \subseteq A$ *precum şi un element* $\tilde{b} \in D$ *astfel încât*

$$\varphi(x, \tilde{b}) \in -C \setminus \{0\} \text{ oricare ar fi } x \in A \setminus D.$$

*Atunci problema* $(PVEP)$ *admite o soluţie*

Definind $\mathcal{D} : \mathcal{F}(A,Z) \to \mathcal{F}(A,Z)$ prin $\mathcal{D}(\psi) := \psi$, obţinem un rezultat pentru problema $(PVEP)$ fără ipoteze de pseudomonotonie. Este uşor de verificat că ipoteza ca $\varphi$ să fie maximal $G$-pseudomonotonă este îndeplinită. În acest caz, duala generalizată a problemei $(PVEP)$ este chiar problema $(PVEP)$:

$(DVEP2)$ găsiţi $\bar{a} \in A$ astfel încât $\varphi(\bar{a}, b) \notin -C \setminus \{0\}$ pentru orice $b \in A$.

**Corolarul 3.2.10** (A. Capătă [35]) *Fie bifuncţia* $\varphi : A \times A \to Z$ *astfel încât următoarele condiţii să fie îndeplinite:*

(i) $\varphi(a,a) \in C$ *pentru orice* $a \in A$;

(ii) *pentru fiecare* $b \in A$, *mulţimea* $S(b) := \{a \in A \mid \varphi(a,b) \notin -C \setminus \{0\}\}$ *este închisă;*

(iii) *pentru fiecare* $a \in A$, *mulţimea* $W(a) := \{b \in A \mid \varphi(a,b) \in -C \setminus \{0\}\}$ *este convexă;*

(iv) *există o mulţime nevidă, compactă şi convexă* $D \subseteq A$ *precum şi un element* $\tilde{b} \in D$ *astfel încât*

$$\varphi(x, \tilde{b}) \in -C \setminus \{0\} \text{ oricare ar fi } x \in A \setminus D.$$

*Atunci problema* $(PVEP)$ *admite o soluţie.*

Din Teorema 3.2.4 şi Corolarul 3.2.10 reobţinem Lema 1 şi Teorema 2 stabilite de W. Oettli [99], care sunt rezultate de existenţă pentru o problemă scalară de echilibru. În cele ce urmează admitem că $Z := \mathbb{R}$ şi $C := \mathbb{R}_+$.

**Corolarul 3.2.11** *Fie bifuncţiile* $\varphi : A \times A \to \mathbb{R}$ *şi* $G : A \times A \to \mathbb{R}$ *astfel încât următoarele condiţii să fie îndeplinite:*

(i) $\varphi(a,a) \geq 0$ *pentru orice* $a \in A$;

(ii) $\varphi$ *este maximal* $G$*-pseudomonotonă;*

(iii) *pentru fiecare* $b \in A$, *mulţimea* $S(b) := \{a \in A \mid G(b,a) \leq 0\}$ *este închisă;*

(iv) *pentru fiecare* $a \in A$, *mulţimea* $W(a) := \{b \in A \mid \varphi(a,b) < 0\}$ *este convexă;*

(v) *există o mulţime nevidă, compactă şi convexă* $D \subseteq A$ *precum şi un element* $\tilde{b} \in D$ *astfel încât*

$$\varphi(x, \tilde{b}) < 0 \text{ oricare ar fi } x \in A \setminus D.$$

*Atunci problema* $(EP)$ *considerată în Secţiunea 2.1 cu* $B = A$ *admite o soluţie.*

**Corolarul 3.2.12** *Fie bifuncţia* $\varphi : A \times A \to \mathbb{R}$ *astfel încât următoarele condiţii să fie îndeplinite:*

(i) $\varphi(a, a) \geq 0$ *pentru orice* $a \in A$;

(ii) *pentru fiecare* $b \in A$, *mulţimea* $S(b) := \{a \in A \mid \varphi(a, b) \geq 0\}$ *este închsă;*

(iii) *pentru fiecarea* $a \in A$, *mulţimea* $W(a) := \{b \in A \mid \varphi(a, b) < 0\}$ *este convexă;*

(iv) *există o mulţime nevidă, compactă şi convexă* $D \subseteq A$ *precum şi un element* $\tilde{b} \in D$ *astfel încât*

$$\varphi(x, \tilde{b}) \in -C \setminus \{0\} \text{ oricare ar fi } x \in A \setminus D.$$

*Atunci problema* $(EP)$ *considerată în Secţiunea 2.1 cu* $B = A$ *admite o soluţie.*

Corolarul 3.2.12 reprezintă o generalizare a unui rezultat stabilit de by Ky Fan [49] şi reobţinut de L. J. Lin, Z. T. Yu şi G. Kassay [94].

**Corolarul 3.2.13** (K. Fan [49]) *Fie* $A$ *o mulţime compactă, şi fie următoarele condiţii îndeplinite de* $\varphi : A \times A \to \mathbb{R}$:

(i) $\varphi(a, a) \geq 0$ *pentru orice* $a \in A$;

(ii) $\varphi(\cdot, b) : A \to \mathbb{R}$ *este semicontinuă superior pentru toţi* $b \in A$;

(iii) $\varphi(a, \cdot) : A \to \mathbb{R}$ *este cvasiconvexă pentru toţi* $a \in A$.

*Atunci problema* $(EP)$ *considerată în Secţiunea 2.1 cu* $B = A$ *admite o soluţie.*

## 3.3 Rezultate de existenţă pentru soluţii proprii ale problemelor vectoriale tari de echilibru

În ipoteza unui con convex $C$ cu interior nevid, au fost prezentate în Secţiunea 2.1 şi Secţiunea 3.1 rezultate de existenţă pentru problemele vectoriale de echilibru $(WVEP)$ şi $(VEP)$. Dar, există importante spaţii liniar topologice ce admit conuri cu interioarele vide. De exemplu, luând $Z := L^p(T, \mu)$, unde $(T, \mu)$ este un spaţiu de măsură $\sigma$-finită şi $p \in [1, +\infty[$, conul

$$C := \{u \in L^p(T, \mu) \mid u(t) \geq 0 \text{ a.p. in } [0, T]\}$$

are interiorul vid.

În cele ce urmează vom prezenta rezultate de existenţă pentru soluţiile proprii ale problemei vectoriale tari de echilibru $(VEP)$.

Fie $Z$ un spaţiu liniar topologic real, şi fie $C \subseteq Z$ un con netrivial convex şi punctat.

**Definiţia 3.3.1** Spunem că o submulţime $K \subseteq Z$ este un con Henig dilatator pentru $C$ dacă îndeplineşte următoarele condiţii:

(i) $K$ este un con convex punctat;

(ii) $C \setminus \{0\} \subseteq \operatorname{int} K$.

**Observaţia 3.3.2** Dacă $K \subseteq Z$ este un con Henig dilatator pentru $C$, atunci $K^* \setminus \{0\} \subseteq C^\sharp$. Într-adevăr fie $c^* \in K^* \setminus \{0\}$. Deoarece $c^*(c) \geq 0$ oricare ar fi $c \in K$ şi $\operatorname{int} K \neq \emptyset$, rezultă (a se vedea, de exemplu, W. W. Breckner [30, pp. 352-353, Lema 6.3.1]) că $c^*(c) > 0$ oricare ar fi $c \in \operatorname{int} K$. Din incluziunea of $C \setminus \{0\} \subseteq \operatorname{int} K$, concluzionăm că $c^* \in C^\sharp$. $\square$

**Definiţia 3.3.3** Spunem că o familie $(K_i)_{i\in I}$ de submulţimi ale lui $Z$ este o familie de conuri Henig dilatatoare pentru $C$ dacă fiecare $K_i\,(i \in I)$ este un con Henig dilatator pentru $C$.

Pentru a vedea că asemenea mulţimi există, prezentăm două exemple.

**Exemplul 3.3.4** Fie $Z$ un spaţiu normat real, şi fie $C \subseteq Z$ un con bazat. Astfel, putem alege o submulţime $\mathcal{B} \subseteq C$ ce îndeplineşte următoarele condiţii: $\mathcal{B}$ este nevidă şi convexă; $C = \mathbb{R}_+\mathcal{B}$ şi $0 \notin \operatorname{cl}\mathcal{B}$. Fie

$$d := \inf\{\| b \| \mid b \in \mathcal{B}\}.$$

Fie $U_0$ bila unitate închisă din $Z$. Pentru fiecare $\epsilon \in ]0, d[$ definim

$$K_\epsilon(\mathcal{B}) := \mathbb{R}_+(\mathcal{B} + \epsilon U_0).$$

Afirmăm că $(K_\epsilon(\mathcal{B}))_{\epsilon\in ]0,d[}$ este o familie de conuri Henig dilatatoare pentru $C$.

Fixăm $\epsilon \in ]0, d[$. Astfel mulţimea $\mathcal{B} + \epsilon U_0$ este nevidă şi convexă. Mai mult, avem

$$\|b + \epsilon y\| \geq \|b\| - \epsilon\|y\| \geq d - \epsilon, \text{ oricare ar fi } b \in \mathcal{B} \text{ şi oricare ar fi } y \in U_0,$$

de unde rezultă

$$\inf\{\|z\| \mid z \in \mathcal{B} + \epsilon U_0\} \geq d - \epsilon > 0.$$

Această inegalitate implică $0 \notin \operatorname{cl}(\mathcal{B} + \epsilon U_0)$. Astfel, $K_\epsilon(\mathcal{B})$ este un con bazat, deci este convex şi punctat. În partea finală demonstrăm că

$$C \setminus \{0\} \subseteq \operatorname{int} K_\epsilon(\mathcal{B}).$$

Fie $z \in C \setminus \{0\}$. Deci, există $\lambda \in ]0, \infty[$ astfel încât $z \in \lambda\mathcal{B}$. Din aceasta deducem că

$$z + \lambda\epsilon U_0 \subseteq \lambda(\mathcal{B} + \epsilon U_0) \subseteq K_\epsilon(\mathcal{B}),$$

de unde obţinem $z \in \operatorname{int} K_\epsilon(\mathcal{B})$. Prin urmare, $K_\epsilon(\mathcal{B})$ este un con Henig dilatator pentru $C$. □

**Exemplul 3.3.5** Fie $Z$ un spaţiu local convex real, şi fie $C \subseteq Z$ un con bazat. Astfel există o mulţime nevidă convexă $\mathcal{B} \subseteq C$ ce îndeplineşte condiţiile $C = \mathbb{R}_+\mathcal{B}$ şi $0 \notin \operatorname{cl}\mathcal{B}$. Din teorema de separare a lui Tukey deducem că există o funcţională $z^* \in Z^*$ astfel încât

$$r := \inf\{z^*(b) \mid b \in \mathcal{B}\} > 0.$$

Mulţimea

$$V_\mathcal{B}(z^*) := \{z \in Z \mid |z^*(z)| < \frac{r}{2}\}$$

este o vecinătete convexă şi echilibrată a originii lui $Z$. Mai de parte, fie

$$\mathcal{U} := \{U \mid U \text{ este o vecinătate convexă a originii lui } Z \text{ cu } U \subseteq V_\mathcal{B}(z^*)\}.$$

Pentru fiecarea $U \in \mathcal{U}$ definim

$$K_U(\mathcal{B}) := \mathbb{R}_+(\mathcal{B} + U).$$

Afirmăm că $(K_U(\mathcal{B}))_{U\in\mathcal{U}}$ este o familie de conuri Henig dilatatoare pentru $C$.

Fixăm $U \in \mathcal{U}$. Astfel mulţimea $\mathcal{B} + U$ este nevidă şi convexă. Mai mult, avem

$$|z^*(b+y)| \;\geq\; |z^*(b)| - |z^*(y)| \;\geq\; r - \frac{r}{2}, \text{ oricare ar fi } b \in \mathcal{B} \text{ şi oricare ar fi } y \in U_0,$$

de unde

$$\inf\{|z^*(z)| \mid z \in \mathcal{B} + U\} \geq \frac{r}{2} > 0.$$

Această inegalitate implică $0 \notin \operatorname{cl}(\mathcal{B} + U)$. Astfel, $K_U(\mathcal{B})$ este un con bazat, deci este un con convex şi punctat. Demonstrăm că

$$C \setminus \{0\} \subseteq \operatorname{int} K_U(\mathcal{B}).$$

Fie $z \in C \setminus \{0\}$. Deci, există $\lambda \in ]0, \infty[$ astfel încât $z \in \lambda\mathcal{B}$. Prin urmare, avem că

$$z + \lambda U \subseteq \lambda(\mathcal{B} + U) \subseteq K_U(\mathcal{B}),$$

de unde $z \in \operatorname{int} K_U(\mathcal{B})$. În concluzie $K_U(\mathcal{B})$ este un con Henig dilatator pentru $C$. □

**Definiţia 3.3.6** Fie $K \subseteq Z$ un con Henig dilatator pentru $C$. Spunem că un punct $\bar{a} \in A$ este:

(i) soluţie $K$-Henig slab eficientă a lui $(VEP)$ dacă

$$\varphi(\bar{a}, B) \cap (-\operatorname{int} K) = \emptyset.$$

(ii) soluţie $K$-Henig eficientă a lui $(VEP)$ dacă

$$\varphi(\bar{a}, B) \cap (-K) = \{0\}.$$

Următoarea definiţie generalizează soluţiile Henig eficiente introduse de X. H. Gong, W. T. Fu şi W. Liu [65].

**Definiţia 3.3.7** (A. Capătă [37]) Fie $(K_i)_{i\in I}$ (unde $K_i \subseteq Z$ pentru fiecare $i \in I$) o familie de conuri Henig dilatatoare pentru $C$. Spunem că un punct $\bar{a} \in A$ este:

(i) soluţie Henig slab eficientă a lui $(VEP)$ dacă există $i_0 \in I$ astfel încât $\bar{a}$ este soluţie $K_{i_0}$-Henig slab eficientă a lui $(VEP)$;

(ii) soluţie Henig eficientă a lui $(VEP)$ dacă există $i_0 \in I$ astfel încât $\bar{a}$ este soluţie $K_{i_0}$-Henig eficientă a lui $(VEP)$.

**Teorema 3.3.8** *Fie $A$ o mulţime compactă, fie $K \subseteq Z$ un con Henig dilatator pentru $C$ şi fie îndeplinite următoarele condiţii de bifuncţia $\varphi : A \times B \to Z$:*

(i) *pentru fiecare $b \in B$, funcţia $\varphi(\cdot, b) : A \to Z$ este $K$-semicontinuă superior pe $A$;*

(ii) *oricare ar fi $a_1, \ldots, a_m \in A$, oricare ar fi $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$ cu $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1$, şi oricare ar fi $b_1, \ldots, b_n \in B$, există $k^* \in K^* \setminus \{0\}$ astfel încât*

$$\min_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i k^*\big(\varphi(a_i, b_j)\big) \leq \sup_{a\in A} \min_{1\leq j\leq n} k^*\big(\varphi(a, b_j)\big);$$

(iii) *oricare ar fi* $b_1, \ldots, b_n \in B$ *şi oricare ar fi* $k_1^*, \ldots, k_n^* \in K^*$ *nu toate nule, are loc*

$$\sup_{a \in A} \sum_{j=1}^{n} k_j^*\big(\varphi(a, b_j)\big) \geq 0.$$

*Atunci problema* $(VEP)$ *admite o soluţie* $K$*-Henig slab eficientă.*

**Teorema 3.3.9** *Fie* $A$ *o mulţime compactă, fie* $K \subseteq Z$ *un con Henig dilatataor pentru* $C$ *şi fie îndeplinite următoarele condiţii de bifuncţia* $\varphi : A \times B \to Z$*:*

(i) *pentru fiecare* $b \in B$*, funcţia* $\varphi(\cdot, b) : A \to Z$ *este propriu* $K$*-semicontinuă superior pe* $A$*;*

(ii) *oricare ar fi* $a_1, \ldots, a_m \in A$*, oricare ar fi* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$ *cu* $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1$*, şi oricare ar fi* $b_1, \ldots, b_n \in B$*, există* $k^* \in K^\sharp$ *astfel încât*

$$\min_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i k^*\big(\varphi(a_i, b_j)\big) \leq \sup_{a \in A} \min_{1 \leq j \leq n} k^*\big(\varphi(a, b_j)\big);$$

(iii) *oricare ar fi* $b_1, \ldots, b_n \in B$ *şi oricare ar fi* $k_1^*, \ldots, k_n^* \in K^*$ *nu toate nule, are loc*

$$\sup_{a \in A} \sum_{j=1}^{n} k_j^*\big(\varphi(a, b_j)\big) > 0.$$

*Atunci problema* $(VEP)$ *admite o soluţie* $K$*-Henig eficientă.*

Fie $K := (K_i)_{i \in I}$ (unde $K_i \subseteq Z$ pentru fiecare $i \in I$) o familie de conuri Henig dilatatoare pentru $C$. În cele ce urmează vom prezenta rezultate de existenţă pentru soluţii Henig slab eficiente ale lui $(VEP)$ utilizând următoarea mulţime:

$$K^\triangle := \{c^* \in E^* \mid \exists\, i \in I \,:\, c^* \in K_i^* \setminus \{0\}\}.$$

În virtutea Observaţiei 3.3.2 avem că $K^\triangle \subseteq C^\sharp$.

**Propoziţia 3.3.10** (X. H. Gong [58], [59]) *Dacă* $K$ *este familia* $(K_\epsilon(\mathcal{B}))_{\epsilon \in ]0,d[}$ *de conuri Henig dilatatoare pentru* $C$ *construită în Exemplul 3.3.4 sau familia* $(K_U(\mathcal{B}))_{U \in \mathcal{U}}$ *de conuri Henig dilatatoare pentru* $C$ *construită în Exemplul 3.3.5, atunci*

$$K^\triangle = \{c^* \in C^\sharp \mid \inf c^*(\mathcal{B}) > 0\}.$$

**Teorema 3.3.11** (A. Capătă [37]) *Fie* $A$ *o mulţime compactă, fie* $K := (K_i)_{i \in I}$ *o familie de conuri Henig dilatatoare pentru* $C$ *şi fie* $\varphi : A \times B \to Z$ *astfel încât următoarele condiţii să fie îndeplinite:*

(i) *pentru fiecare* $b \in B$ *şi fiecare* $i \in I$*, funcţia* $\varphi(\cdot, b) : A \to Z$ *este* $K_i$*-semicontinuă superior pe* $A$*;*

(ii) *există* $c^* \in K^\triangle$ *astfel încât, oricare ar fi* $a_1, \ldots, a_m \in A$*, oricare ar fi* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$ *cu* $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1$*, şi oricare ar fi* $b_1, \ldots, b_n \in B$*, funcţionala* $c^*$ *satisface*

$$\min_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i c^*\big(\varphi(a_i, b_j)\big) \le \sup_{a\in A} \min_{1\le j\le n} c^*\big(\varphi(a, b_j)\big);$$

(iii) *oricarea ar fi $b_1, \dots, b_n \in B$, oricare ar fi $i \in I$, oricare ar fi $k_1^*, \dots, k_n^* \in K_i^*$ nu toate nule, are loc*

$$\sup_{a\in A} \sum_{j=1}^{n} k_j^*\big(\varphi(a, b_j)\big) \ge 0.$$

*Atunci problema $(VEP)$ admite o soluţie Henig slab eficientă.*

Observăm că ipotezele (i) şi (iii) ale Teoremei 3.3.11 sunt mai tari decât ipotezele (i) şi (iii) ale Teoremei 3.3.8, în timp ce condiţia (ii) Teoremei 3.3.8 nu trebuie să fie satisfăcută de toate conurile $K_i$ $(i \in I)$.

Următorul corolar este dat în ipoteze mai tari decât cele ale Teoremei 3.3.11.

**Corolarul 3.3.12** (A. Capătă [37]) *Fie $A$ o mulţime compactă, fie $K := (K_i)_{i\in I}$ o familie de conuri Henig dilatatoare pentru $C$ şi fie îndeplinite următoarele condiţii de bifuncţia $\varphi : A \times B \to Z$:*

(i) *pentru fiecare $b \in B$ şi fiecare $i \in I$, funcţia $\varphi(\cdot, b) : A \to Z$ este $K_i$-semicontinuă superior pe $A$;*

(ii) *există $c^* \in K^{\triangle}$ astfel încât $c^* \circ \varphi$ este asemănător subconcavă în prima variabilă;*

(iii) *oricare ar fi $b_1, \dots, b_n \in B$, oricare ar fi $i \in I$, şi oricare ar fi $k_1^*, \dots, k_n^* \in K_i^*$ nu toate nule, are loc*

$$\sup_{a\in A} \sum_{j=1}^{n} k_j^*\big(\varphi(a, b_j)\big) \ge 0.$$

*Atunci problema $(VEP)$ admite o soluţie Henig slab eficientă.*

**Observaţia 3.3.13** Dacă $\varphi$ este asemănător $K_i$-subconcavă pentru fiecare $i \in I$, atunci ipoteza (ii) a Corolarului 3.3.12 este îndeplinită. □

Pentru a prezenta alte rezultate noi, avem nevoie de următoarea noţiune.

**Definiţia 3.3.14** (A. Capătă [37]) Fie $(K_i)_{i\in I}$ (unde $K_i \subseteq Z$ oricare ar fi $i \in I$) o familie de conuri Henig dilatatoare pentru $C$. Spunem că o pereche $(K_{i_1}, K_{i_2})$, unde $i_1, i_2 \in I$, este admisibilă dacă

$$K_{i_1} + K_{i_2} = K_{i_0} \text{ pentru nişte } i_0 \in I.$$

Observăm că familia de conuri Henig dilatatoare pentru $C$ construită în Exemplul 3.3.4 admite perechi de tipul acesta. Această observaţie rămâne adevărată şi pentru familia de conuri Henig dilatatoare pentru $C$ construită în Exemplul 3.3.5. Într-adevăr, dacă $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$, atunci mulţimea $U_3 := \operatorname{co}(U_1 \cup U_2)$ aparţine lui $\mathcal{U}$ şi $K_{U_1}(\mathcal{B}) + K_{U_2}(\mathcal{B}) = K_{U_3}(\mathcal{B})$.

**Teorema 3.3.15** (A. Capătă [37]) *Fie $A$ o mulţime compactă, fie $K := (K_i)_{i\in I}$ o familie de conuri Henig dilatatoare pentru $C$, fie $(K_{i_1}, K_{i_2})$ o pereche admisibilă şi fie îndeplinite următoarele condiţii de bifuncţia $\varphi : A \times B \to Z$:*

(i) *pentru fiecare* $b \in B$*, funcţia* $\varphi(\cdot, b) : A \to Z$ *este* $K_{i_1}$*-semicontinuă superior pe* $A$*;*

(ii) *oricare ar fi* $i \in I$*, oricare ar fi* $a_1, \dots, a_m \in A$*, oricare ar fi numerele* $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$ *cu* $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1$*, şi oricare ar fi* $b_1, \dots, b_n \in B$*, există* $k^* \in K_i^* \setminus \{0\}$ *astfel încât*

$$\min_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i k^*\big(\varphi(a_i, b_j)\big) \leq \sup_{a\in A} \min_{1\leq j\leq n} k^*\big(\varphi(a, b_j)\big);$$

(iii) *oricare ar fi* $b_1, \dots, b_n \in B$ *şi oricare ar fi* $k_1^*, \dots, k_n^* \in K_{i_2}^*$ *nu toate nule, are loc*

$$\sup_{a\in A} \sum_{j=1}^{n} k_j^*\big(\varphi(a, b_j)\big) \geq 0.$$

*Atunci problema* $(VEP)$ *admite o soluţie Henig slab eficientă.*

Fie $K := (K_i)_{i\in I}$ (unde $K_i \subseteq Z$ pentru fiecare $i \in I$) o familie de conuri Henig dilatatoare pentru $C$. Notăm

$$K^{\blacktriangle} := \{c^* \in E^* \mid \exists\, i \in I \,:\, c^* \in K_i^{\sharp}\}.$$

Evident, avem $K^{\blacktriangle} \subseteq K^{\triangle}$.

**Teorema 3.3.16** *Fie* $A$ *o mulţime compactă, fie* $K := (K_i)_{i\in I}$ *o familie de conuri Henig dilatatoare pentru* $C$ *şi fie îndeplinite următoarele condiţii de bifuncţia* $\varphi : A \times B \to Z$*:*

(i) *pentru fiecare* $b \in B$ *şi fiecare* $i \in I$*, funcţia* $\varphi(\cdot, b) : A \to Z$ *este propriu* $K_i$*-semicontinuă superior pe* $A$*;*

(ii) *există* $c^* \in K^{\blacktriangle}$ *astfel încât, oricare ar fi* $a_1, \dots, a_m \in A$*, oricare ar fi* $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$ *cu* $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1$*, şi oricare ar fi* $b_1, \dots, b_n \in B$*, următoarea inegalitate este satisfăcută:*

$$\min_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i c^*\big(\varphi(a_i, b_j)\big) \leq \sup_{a\in A} \min_{1\leq j\leq n} c^*\big(\varphi(a, b_j)\big);$$

(iii) *oricare ar fi* $b_1, \dots, b_n \in B$*, oricare ar fi* $i \in I$*, şi oricare ar fi* $k_1^*, \dots, k_n^* \in K_i^*$ *nu toate nule, are loc*

$$\sup_{a\in A} \sum_{j=1}^{n} k_j^*\big(\varphi(a, b_j)\big) > 0.$$

*Atunci problema* $(VEP)$ *admite o soluţie Henig eficientă.*

Fie $K := (K_i)_{i\in I}$ o familie de conuri Henig dilatatoare pentru $C$. Dacă, pentru fiecare $i \in I$ există $i_0 \in I$ astfel încât $K_{i_0} \setminus \{0\} \subseteq \operatorname{int} K_i$, atunci fiecare soluţie Henig slab eficientă este o soluţie Henig eficientă şi $K^{\triangle} = K^{\blacktriangle}$. Evident, familia de conuri Henig dilatatoare $K := (K_\epsilon(\mathcal{B}))_{\epsilon\in]0,d[}$, construită în Exemplul 3.3.4 admite conuri cu această proprietate. Observaţia aceasta rămâne adevărată şi pentru familia de conuri Henig dilatatoare construită în Exemplul 3.3.5, precum J. H. Qiu şi Y. Hao au notat în [102, Lemma 3.3].

Fie $(K_i)_{i\in I}$ o familie de conuri Henig dilatatoare pentru $C$. Pentru orice $i \in I$ şi orice funcţională $k_i^* \in K_i^* \setminus \{0\}$, considerăm următoarea problemă scalară de echilibru:

$(EP_{k_i^*})$ găsiţi $\bar{a} \in A$ astfel încât $k_i^*(\varphi(\bar{a}, b)) \geq 0$ pentru orice $b \in B$.

**Propoziţia 3.3.17** *Fie $(K_i)_{i\in I}$ o familie de conuri Henig dilatatoare pentru $C$, fie $i \in I$ şi fie $k_i^* \in K_i^* \setminus \{0\}$. Atunci orice soluţie a problemei scalare de echilibru $(EP_{k_i^*})$ este o soluţie $K_i$-Henig slab eficientă a problemei $(VEP)$.*

Următoarea teoremă arată că, în anumite ipoteze, orice şir generalizat de soluţii $K_i$-Henig slab eficiente (unde $(K_i)_{i\in I}$ este un şir generalizat de conuri Henig dilatatoare pentru conul $C$) ale problemei $(VEP)$, obţinut prin scalarizare, admite un subşir generalizat convergent către o soluţie a problemei $(VEP)$.

**Teorema 3.3.18** (A. Capătă [37]) *Fie $A$ o submulţime compactă a unui spaţiu topologic Hausdorff $E$, fie $Z$ un spaţiu local convex Hausdorff, fie $(K_i)_{i\in I}$ un şir generalizat de conuri Henig dilatatoare pentru conul $C$, şi fie $(k_i^*)_{i\in I}$ un şir generalizat de funcţionale cu $k_i^* \in K_i \setminus \{0\}$ (oricare ar fi $i \in I$) astfel încât următoarele condiţii să fie îndeplinite:*

(i) *pentru fiecare $b \in B$, funcţia $\varphi(\cdot, b)$ este $C$- semicontinuă superior pe $A$;*

(ii) *mulţimea $\varphi(A \times B)$ este slab mărginită;*

(iii) *şirul generalizat $(k_i^*)_{i\in I}$ converge în raport cu topologia $\beta(Z^*, Z)$ către funcţionala $k^* \in C^\sharp$.*

*Atunci orice şir generalizat $(\bar{a}_i)_{i\in I}$ din $A$, unde $\bar{a}_i \in A$ ($i \in I$) este o soluţie a problemei $(EP_{k_i^*})$, admite un subşir generalizat convergent către o soluţie a problemei $(VEP)$.*

În cele ce urmează vom prezenta rezultate de existenţă pentru soluţiile supereficiente ale problemei $(VEP)$, în ipoteza unui spaţiu local convex Hausdorff $Z$. Lucrăm cu familia de conuri Henig dilatatoare pentru $C$ considerată în Exemplul 3.3.5. Din Exemplul 3.3.5 ştim că $C^\triangle \neq \emptyset$.

Următoarele concepte de soluţii propriu eficiente au fost introduse în spaţii local convexe de X. H. Gong, W. T. Fu şi W. Liu [65] şi X. H. Gong [59].

**Definiţia 3.3.19** Spunem că un punct $a \in A$ este:

(i) o soluţie supereficientă a problemei $(VEP)$ dacă, pentru orice vecinătate $V$ a originii lui $Z$, există o vecinătate $U$ a originii lui $Z$ astfel încât

$$\text{cone}\,(\varphi(a, B)) \cap (U - C) \subseteq V;$$

(ii) o soluţie global eficientă a problemei $(VEP)$ dacă există un con Henig dilatator $K \subseteq Z$ pentru $C$ astfel încât

$$\varphi(a, B) \cap (-K \setminus \{0\}) = \emptyset.$$

Notăm mulţimea soluţiilor Henig slab eficiente, a soluţiilor supereficiente şi a soluţiilor global eficiente, prin $V_H(\varphi)$, $V_S(\varphi)$ şi $V_G(\varphi)$, respectiv. Pentru a vedea că mulţimea soluţiilor Henig slab eficiente este mai largă decât mulţimea soluţiilor supereficiente, prezentăm următorul exemplu.

**Exemplul 3.3.20** Fie $Z := \mathbb{R}^2$, $C := \mathbb{R}^2_+$, $A := [-2,-1]$, $B := [1,2]$, şi fie $\varphi : [-2,-1]\times[1,2] \to \mathbb{R}^2$ definită prin

$$\varphi(x,y) := \begin{cases} (2,-2) \text{ dacă } (x,y) = (-2,1) \\ (x,y) \quad \text{în rest.} \end{cases}$$

Alegem drept bază $\mathcal{B}$ mulţimea

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \mid x+y=2\}.$$

Observăm că această bază este o submulţime închisă şi convexă a lui $\mathbb{R}^2$. Fie

$$z^*(b) := \langle (1,1),(b_1,b_2)\rangle = b_1 + b_2 \text{ oricare ar fi } b := (b_1,b_2) \in \mathcal{B}.$$

Astfel, obţinem $r = 2$ (unde $r$ este definit în Exemplul 3.3.5) şi

$$V_{\mathcal{B}}(z^*) := \{z \in Z \mid\mid z^*(z) \mid< 1\} = B(0,1).$$

Pentru fiecare $a \in [-2,-1]$ există o vecinătate convexă $U_a$ a originii lui $\mathbb{R}^2$ cu $U_a \subseteq B(0,1)$, astfel încât

$$\varphi(a,B) \cap (-\operatorname{int} C_{U_a}(\mathcal{B})) = \emptyset.$$

Astfel, toate punctele $a \in [-2,-1]$ sunt soluţii slabe Henig eficiente ale problemei $(VEP)$.

Pe de altă parte, fiecare punct $a \in ]-2,-1]$ este o soluţie supereficientă pentru $(VEP)$. Astfel, avem următoarea incluziune:

$$V_S(\varphi) = ]-2,-1] \subseteq [-2,-1] = V_H(\varphi).$$

Ea arată faptul că mulţimea soluţiilor Henig slab eficiente este mai largă decât cea a soluţiilor supereficiente. □

**Definiţia 3.3.21** Fie $c^* \in C^* \setminus \{0\}$. Spunem că un punct $\bar{a} \in A$ este soluţie $c^*$-eficientă a lui $(VEP)$ dacă

$$c^*(\varphi(\bar{a},b)) \geq 0 \text{ pentru orice } b \in B.$$

Prin $V_{c^*}(\varphi)$ notăm mulţimea soluţiilor $c^*$-eficiente ale lui $(VEP)$.

**Lema 3.3.22** ( X. H. Gong [59]) *Dacă conul $C$ este închis şi admite o bază închisă şi mărginită $\mathcal{B}$, atunci*

$$\operatorname{int} C^* = C^{\triangle}(\mathcal{B}),$$

*unde $\operatorname{int} C^*$ este interiorul lui $C^*$ în raport cu topologia $\beta(Z^*,Z)$.*

**Teorema 3.3.23** (X. H. Gong [61]) *Presupunem că pentru fiecare $a \in A$, $\varphi(a,A)$ este o mulţime $C$-convexă. Dacă $C$ este bazat, atunci următoarele proprietăţi au loc:*

(i) $V_G(\varphi) = \bigcup_{c^* \in C^\sharp} V_{c^*}(\varphi)$.

(ii) $V_H(\varphi) = \bigcup_{c^* \in C^\triangle} V_{c^*}(\varphi)$.

(iii) *Dacă $C$ este închis şi admite o bază închisă şi mărginită, atunci*

$$V_S(\varphi) = \bigcup_{c^* \in \operatorname{int} C^*} V_{c^*}(\varphi).$$

Din Lema 3.3.22 şi Teorema 3.3.23 rezultă că un punct $\bar{a} \in A$ este soluţie supereficientă pentru $(VEP)$ dacă şi numai dacă el este o soluţie Henig eficientă pentru $(VEP)$.

Din Teorema 3.3.11, Corolarul 3.3.12, şi Teorema 3.3.15 avem următoarele rezultate.

**Teorema 3.3.24** *Fie $E$ un spaţiu liniar topologic Hausdorff real, fie $A \subseteq E$ o submulţime compactă, fie $B = A$, fie $\varphi(a, A)$ o mulţime $C$-convexă pentru orice $a \in A$, fie $C$ un con închis ce admite o bază închisă mărginită $\mathcal{B}$ şi fie îndeplinite următoarele condiţii de bifuncţia $\varphi : A \times B \to Z$:*

(i) *pentru fiecare $b \in A$ şi fiecare vecinătate convexă $U$ a originii lui $Z$ cu $U \subseteq V_{\mathcal{B}}(z^*)$, funcţia $\varphi(\cdot, b) : A \to Z$ este $K_U(\mathcal{B})$-semicontinuă superior pe $A$;*

(ii) *există $c^* \in K^{\triangle}$ astfel încât, oricare ar fi $a_1, \ldots, a_m \in A$, oricare ar fi $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$ cu $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1$, şi oricare ar fi $b_1, \ldots, b_n \in A$, următoarea inegalitate este satisfăcută:*

$$\min_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i c^*\big(\varphi(a_i, b_j)\big) \leq \sup_{a \in A} \min_{1 \leq j \leq n} c^*\big(\varphi(a, b_j)\big);$$

(iii) *oricare ar fi $b_1, \ldots, b_n \in A$, oricare ar fi o vecinătate convexă $U$ a originii lui $Z$ cu proprietatea că $U \subseteq V_{\mathcal{B}}(z^*)$, şi oricare ar fi $k_1^*, \ldots, k_n^* \in K_U^*(\mathcal{B})$ nu toate nule, are loc*

$$\sup_{a \in A} \sum_{j=1}^{n} k_j^*\big(\varphi(a, b_j)\big) \geq 0.$$

*Atunci problema $(VEP)$ admite o soluţie supereficientă.*

**Corolarul 3.3.25** *Fie $E$ un spaţiu liniar topologic Hausdorff real, fie $A \subseteq E$ o submulţime compactă, fie $B = A$, fie $\varphi(a, A)$ o mulţime $C$-convexă pentru orice $a \in A$, fie $C$ un con închis ce admite o bază închisă mărginită $\mathcal{B}$ şi fie îndeplinite următoarele condiţii de bifuncţia $\varphi : A \times B \to Z$:*

(i) *pentru fiecare $b \in A$ şi fiecare vecinătate convexă $U$ a originii lui $Z$ cu $U \subseteq V_{\mathcal{B}}(z^*)$, funcţia $\varphi(\cdot, b) : A \to Z$ este $K_U(\mathcal{B})$-semicontinuă superior pe $A$;*

(ii) *există $c^* \in K^{\triangle}$ astfel încât $c^* \circ \varphi$ este asemănător subconcavă în prima variabilă;*

(iii) *oricare ar fi $b_1, \ldots, b_n \in A$, oricare ar fi o vecinătate convexă $U$ a originii lui $Z$ ce satisface $U \subseteq V_{\mathcal{B}}(z^*)$, şi oricare ar fi $k_1^*, \ldots, k_n^* \in K_U^*(\mathcal{B})$ nu toate nule, are loc*

$$\sup_{a \in A} \sum_{j=1}^{n} k_j^*\big(\varphi(a, b_j)\big) \geq 0.$$

*Atunci problema $(VEP)$ admite o soluţie supereficientă.*

**Teorema 3.3.26** *Fie $E$ un spaţiu liniar topologic Hausdorff real, fie $A \subseteq E$ o submulţime compactă, fie $B = A$, fie $\varphi(a, A)$ o mulţime $C$-convexă pentru orice $a \in A$, fie $C$ un con închis ce admite o bază închisă mărginită $\mathcal{B}$, fie $(K_{U_1}(\mathcal{B}), K_{U_2}(\mathcal{B}))$ o pereche admisibilă şi fie îndeplinite următoarele condiţii de bifuncţia $\varphi : A \times B \to Z$ :*

(i) *pentru fiecare $b \in B$, funcţia $\varphi(\cdot, b) : A \to Z$ este $K_{U_1}(\mathcal{B})$-semicontinuă superior pe $A$;*

(ii) *oricare ar fi o vecinătate convexă $U$ a originii lui $Z$ cu $U \subseteq V_{\mathcal{B}}(z^*)$, oricare ar fi elementele $a_1, \ldots, a_m \in A$, oricare ar fi $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$ cu $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1$, şi oricare ar fi $b_1, \ldots, b_n \in B$, există $k^* \in K_U^*(\mathcal{B}) \setminus \{0\}$ astfel încât*

$$\min_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i k^*\big(\varphi(a_i, b_j)\big) \leq \sup_{a \in A} \min_{1 \leq j \leq n} k^*\big(\varphi(a, b_j)\big);$$

(iii) *oricare ar fi $b_1, \ldots, b_n \in B$ şi oricare ar fi $k_1^*, \ldots, k_n^* \in K_{U_2}^*(\mathcal{B})$ nu toate nule, are loc*

$$\sup_{a \in A} \sum_{j=1}^{n} k_j^*\big(\varphi(a, b_j)\big) \geq 0.$$

*Atunci problema $(VEP)$ admite o soluţie supereficientă.*

În partea finală a acestei secţiuni prezentăm rezultate de existenţă pentru soluţiile global eficiente ale problemei $(VEP)$.

**Teorema 3.3.27** *Fie $A$ o mulţime compactă şi fie îndeplinite următoarele condiţii de bifuncţia $\varphi : A \times B \to Z$:*

(i) *pentru fiecare $b \in B$, funcţia $\varphi(\cdot, b) : A \to Z$ este propriu $C$-semicontinuă superior pe $A$;*

(ii) *există $c^* \in C^\sharp$ astfel încât, oricar ar fi $a_1, \ldots, a_m \in A$, oricare ar fi $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$ cu $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1$, şi oricare ar fi $b_1, \ldots, b_n \in B$, următoarea inegalitate este satisfăcută:*

$$\min_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i c^*\big(\varphi(a_i, b_j)\big) \leq \sup_{a \in A} \min_{1 \leq j \leq n} c^*\big(\varphi(a, b_j)\big);$$

(iii) *oricare ar fi $b_1, \ldots, b_n \in B$, şi oricare ar fi $c_1^*, \ldots, c_n^* \in C^*$ nu toate nule, are loc*

$$\sup_{a \in A} \sum_{j=1}^{n} c_j^*\big(\varphi(a, b_j)\big) > 0.$$

*Atunci problema $(VEP)$ admite o soluţie global eficientă.*

**Corolarul 3.3.28** *Fie $A$ compactă şi fie îndeplinite următoarele condiţii de bifuncţia vectorială $\varphi : A \times B \to Z$:*

(i) *pentru fiecare $b \in B$, funcţia $\varphi(\cdot, b) : A \to Z$ este propriu $C$-semicontinuă superior pe $A$;*

(ii) *există $c^* \in C^\sharp$ astfel încât $c^* \circ \varphi$ este asemănător concavă în prima variabilă;*

(iii) *oricare ar fi $b_1, \ldots, b_n \in B$, şi oricare ar fi $c_1^*, \ldots, c_n^* \in C^*$ nu toate nule, are loc*

$$\sup_{a \in A} \sum_{j=1}^{n} c_j^*\big(\varphi(a, b_j)\big) > 0.$$

*Atunci problema $(VEP)$ admite o soluţie global eficientă.*

Dacă $Z := \mathbb{R}$ şi $C := \mathbb{R}_+$, atunci acest corolar se reduce la Corolarul 3.1.7.

# Capitolul 4

# Rezultate de existenţă şi multifuncţii de decalaj pentru problema multivocă slabă de echilibru

În acest capitol, presupunem că $E$ şi $Z$ sunt spaţii liniare topologice reale, $A \subseteq E$ este o submulţime nevidă, $B$ este o mulţime nevidă, $C \subseteq Z$ este un con convex solid şi $\varphi : A \times B \to 2^Z$ este o multifuncţie.

Problema vectorială slabă de echilibru $(WVEP)$, studiată în Secţiunea 2.1, poate fi extinsă pentru multifuncţii în două moduri:

$(WWMEP)$ găsiţi $\bar{a} \in A$ astfel încât $\varphi(\bar{a}, b) \nsubseteq -\operatorname{int} C$ pentru orice $b \in B$;

$(SWMEP)$ găsiţi $\bar{a} \in A$ astfel încât $\varphi(\bar{a}, b) \cap (-\operatorname{int} C) = \emptyset$ pentru orice $b \in B$.

În cele ce urmează prezentăm rezultate de existenţă referitoare la problema $(WWMEP)$, ce se numeşte *problema slabă de echilibru multivoc.* Mai departe, două funcţii de decalaj asociate problemei de studiat sunt construite, una dintre ele fiind dată cu ajutorul teoriei lui Fenchel.

## 4.1 Rezultate de existenţă stabilite folosind teorema lui Eidelheit

Primul rezultat este unul tehnic, iar demonstraţia sa se bazează pe torema de separare a lui Eidelheit. În cele urmează, prin $\mathcal{C}(Z)$ notăm mulţimea submulţimilor compacte ale spaţiului $Z$.

**Teorema 4.1.1** (A. Capătă, G. Kassay şi B. Mosoni [39]) *Fie următoarele condiţii îndeplinite de bifuncţia* $\varphi : A \times B \to 2^Z$*:*

(i) $\varphi(a, b) \in \mathcal{C}(Z)$ *pentru orice* $(a, b) \in A \times B$*;*

(ii) *dacă familia* $(U_{b,c})$ *acoperă mulţimea* $A$*, atunci ea conţine o subacoperire finită, unde* $U_{b,c}$ *este definită prin:*

$$U_{b,c} := \{a \in A \,|\, \varphi(a, b) + c \subseteq -\operatorname{int} C\} \text{ oricare ar fi } b \in B,\ c \in \operatorname{int} C;$$

(iii) *oricare ar fi* $a_1, \ldots, a_m \in A$, *oricare ar fi* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$ *cu* $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1$, *oricare ar fi* $b_1, \ldots, b_n \in B$, *şi oricare ar fi* $d_j^i \in \varphi(a_i, b_j)$, *unde* $i \in \{1, \ldots, m\}$ *şi* $j \in \{1, \ldots, n\}$, *există* $c^* \in C^* \setminus \{0\}$ *astfel încât*

$$\min_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i c^*(d_j^i) \leq \sup_{a \in A} \min_{1 \leq j \leq n} \max c^*(\varphi(a, b_j));$$

(iv) *oricare ar fi* $b_1, \ldots, b_n \in B$ *şi oricare ar fi* $c_1^*, \ldots, c_n^* \in C^*$ *nu toate nule, are loc*

$$\sup_{a \in A} \sum_{j=1}^{n} \max c_j^*(\varphi(a, b_j)) \geq 0.$$

*Atunci problema* $(WWMEP)$ *admite o soluţie.*

Introducem un nou concept de convexitate pentru multifuncţiile de două variabile.

**Definiţia 4.1.2** (A. Capătă, G. Kassay şi B. Mosoni [39]) Spunem că o multifuncţie $\varphi : A \times B \to 2^Z$ este:

(i) asemănător $C$-subconvexă în prima variabilă dacă, oricare ar fi $c \in \operatorname{int} C$, oricare ar fi elementele $a_1$, $a_2 \in A$ şi oricare ar fi $\lambda \in [0, 1]$, există $a_3 \in A$ astfel încât

$$c + \lambda\varphi(a_1, b) + (1 - \lambda)\varphi(a_2, b) \subseteq \varphi(a_3, b) + \operatorname{int} C \text{ oricare ar fi } b \in B.$$

(ii) asemănător $C$-subconcavă în prima variabilă dacă $-\varphi$ este asemănător $C$-subconvexă în prima variabilă.

Următorul rezultat oferă condiţii suficiente de existenţă ale soluţiilor problemei $(WWMEP)$ în ipoteze de convexitate şi continuitate.

**Teorema 4.1.3** (A. Capătă, G. Kassay şi B. Mosoni [39]) *Fie* $A$ *o mulţime compactă şi fie îndeplinite următoarele condiţii de bifuncţia* $\varphi : A \times B \to 2^Z$:

(i) $\varphi(a, b) \in \mathcal{C}(Z)$ *pentru orice* $(a, b) \in A \times B$;

(ii) *oricare ar fi* $b \in B$, $\varphi(\cdot, b) : A \to \mathcal{C}(Z)$ *este* $C$*-semicontinuă superior pe* $A$;

(iii) $\varphi$ *este asemănător* $C$*-subconcavă în prima variabilă;*

(iv) *oricare ar fi* $b_1, \ldots, b_n \in B$ *şi oricare ar fi* $c_1^*, \ldots, c_n^* \in C^*$ *nu toate nule, are loc*

$$\sup_{a \in A} \sum_{j=1}^{n} \max c_j^*(\varphi(a, b_j)) \geq 0.$$

*Atunci problema* $(WWMEP)$ *admite o soluţie.*

## 4.2 Multifuncţii de decalaj

În legătură cu problemele de echilibru şi cu cazurile lor particulare, aşa-numitele multifuncţii de decalaj joacă un rol important. Ele ne ajută să analizăm dacă un punct este soluţie a acestor probleme.

### 4.2.1 O multifuncţie de decalaj

Reamintim definiţia multifuncţiei de decalaj.

**Definiţia 4.2.1** (N. J. Huang, J. Li şi S. Y. Wu [76]) Spunem că o multifuncţie $T : A \to 2^Z$ este o multifuncţie de decalaj pentru $(WWMEP)$ dacă următoarele condiţii sunt îndeplinite:

(i) $T(a) \subseteq -C$ pentru orice $a \in A$;

(ii) $0 \in T(a)$ dacă şi numai dacă $a \in A$ este o soluţie a problemei $(WWMEP)$.

În cele ce urmează prezentăm un exemplu de multifuncţie de decalaj pentru $(WWMEP)$, exemplu ce extinde un rezultat de-al lui N. J. Huang, J. Li şi S. Y. Wu [76] la multifuncţii ce iau valori în spaţii liniare topologice reale.

Considerăm următoarea ipoteză:

**Ipoteza A.**

$$\text{Fie } B = A. \text{ Dacă } a \in A \text{ este o soluţie pentru } (WWMEP), \text{ atunci } \bigcap_{b\in A}\{\varphi(a,b) \cap C\} \neq \emptyset.$$

**Teorema 4.2.2** (A. Capătă, G. Kassay şi B. Mosoni [39]) *Fie următoarele condiţii îndeplinite:*

(i) *$C$ este un con punctat;*

(ii) *$\varphi(a,a) \subseteq -C$ pentru orice $a \in A$;*

(iii) *Ipoteza* **A** *are loc.*

*Atunci multifuncţia $T : A \to 2^Z$, definită prin*

$$T(a) := \bigcap_{b\in A} \varphi(a,b) \text{ pentru orice } a \in A,$$

*este o multifuncţie de decalaj pentru $(WWMEP)$.*

Considerăm un caz particular al problemei $(WWMEP)$ ce a fost studiat de N. J. Huang, J. Li şi S. Y. Wu [76]. Pentru $n \in \mathbb{N}$, $N := \{1, \ldots, n\}$ şi $F_l : A \times A \to 2^{\mathbb{R}}$ $(l \in N)$, considerăm problema $(WWMEP)$ pentru multifuncţia definită prin

$$F(a,b) := F_1(a,b) \times \cdots \times F_n(a,b),$$

adică

$$(GFVEP1) \qquad \text{găsiţi } \bar{a} \in A \text{ astfel încât } F(\bar{a},b) \nsubseteq -\operatorname{int}\mathbb{R}^n_+ \text{ oricare ar fi } b \in A.$$

Definim multifuncţia $T_1 : A \to 2^{\mathbb{R}}$ prin

$$T_1(a) := \bigcap_{b\in A}\bigcup_{l\in\mathbb{N}} F_l(a,b) \text{ pentru orice } a \in A. \tag{4.1}$$

Reamintim următoarea ipoteză folosită de N. J. Huang, J. Li şi S. Y. Wu [76]:

**Ipoteza B.** Fie $B = A$. Dacă $a \in A$ şi $\bigcup_{l\in N}\{F_l(a,b) \cap \mathbb{R}_+\} \neq \emptyset$ pentru orice $b \in A$, atunci

$$\bigcap_{b\in A}\bigcup_{l\in N}\{F_l(a,b) \cap \mathbb{R}_+\} \neq \emptyset.$$

**Corolarul 4.2.3** ( N. J. Huang, J. Li şi S. Y. Wu [76], Teorema 4.4) *Dacă*

$$F_l(a,a) \subseteq -\mathbb{R}_+ \text{ pentru fiecare } a \in A \text{ şi fiecare } l \in N,$$

*şi Ipoteza* **B** *are loc, atunci multifuncţia* $T_1$ *definită prin (4.1) este o multifuncţie de decalaj pentru* $(GFVEP1)$ *în sensul Definiţiei 4.2.1, unde* $Z := \mathbb{R}$ *şi* $C := \mathbb{R}_+$.

### 4.2.2 O funcţie de decalaj stabilită folosind dualitatea Fenchel

Considerăm $Z := \mathbb{R}$ şi $C := \mathbb{R}_+$. Astfel $\varphi : A \times B \to 2^{\mathbb{R}}$ şi $(WWMEP)$ devine:

$(MEP)$ găsiţi $\bar{a} \in A$ astfel încât $\varphi(\bar{a}, b) \nsubseteq -\operatorname{int}\mathbb{R}_+$ pentru orice $b \in B$.

Cu ajutorul rezultatelor stabilite în Secţiunea 4.1 pentru problema $(WWMEP)$, obţinem următoarele rezultate de existenţă referitoare la problema $(MEP)$.

**Corolarul 4.2.4** (A. Capătă, G. Kassay şi B. Mosoni [39]) *Fie următoarele condiţii îndeplinite de bifuncţia* $\varphi : A \times B \to 2^{\mathbb{R}}$*:*

(i) $\varphi(a,b) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ *pentru orice* $(a,b) \in A \times B$*;*

(ii) *dacă familia* $(U_{b,c})$ *acoperă mulţimea* $A$*, atunci ea conţine o subacoperire finită, unde* $U_{b,c}$ *este definită prin*

$$U_{b,c} = \{a \in A \,|\, \varphi(a,b) + c \subseteq ]-\infty, 0[\,\} \text{ oricare ar fi } b \in B \text{ şi oricare ar fi } c \in ]-\infty, 0[;$$

(iii) *oricare ar fi* $a_1, \ldots, a_m \in A$*, oricare ar fi* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$ *cu* $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1$*, oricare ar fi* $b_1, \ldots, b_n \in B$*, şi oricare ar fi* $d_j^i \in \varphi(a_i, b_j)$ *unde* $i \in \{1, \ldots, m\}$ *şi* $j \in \{1, \ldots, n\}$*, are loc*

$$\min_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i d_j^i \leq \sup_{a \in A} \min_{1 \leq j \leq n} \max \varphi(a, b_j);$$

(iv) *oricare ar fi* $b_1, \ldots, b_n \in B$ *şi oricare ar fi* $\mu_1, \ldots, \mu_n \geq 0$ *cu* $\mu_1 + \cdots + \mu_n = 1$*, are loc*

$$\sup_{a \in A} \sum_{j=1}^{n} \max \mu_j \varphi(a, b_j) \geq 0.$$

*Atunci problema* $(MEP)$ *admite o soluţie.*

**Corolarul 4.2.5** (A. Capătă, G. Kassay şi B. Mosoni [39]) *Fie* $A$ *o mulţime compactă şi fie îndeplinite următoarele condiţii de bifuncţia* $\varphi : A \times B \to 2^{\mathbb{R}}$*:*

(i) $\varphi(a,b) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ *pentru orice* $(a,b) \in A \times B$*;*

(ii) *oricare ar fi* $b \in B$*,* $\varphi(\cdot, b)$ *este* $-\mathbb{R}_+$*-semicontinuă superior pe* $A$*;*

(iii) $\varphi$ *este asemănător* $\mathbb{R}_+$*-subconcavă în prima variabilă;*

(iv) *oricare ar fi $b_1, \dots, b_n \in B$ şi oricare ar fi $\mu_1, \dots, \mu_n \geq 0$ cu $\mu_1 + \cdots + \mu_n = 1$, are loc*

$$\sup_{a \in A} \sum_{j=1}^{n} \max \mu_j \varphi(a, b_j) \geq 0.$$

*Atunci problema $(MEP)$ admite o soluţie.*

În partea finală a acestei secţiuni presupunem că $A$ este o submulţime închisă şi convexă a unui spaţiu local convex real $E$, $B = A$, şi $\varphi(a,b) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ pentru orice $(a,b) \in A \times A$. Observăm că $(MEP)$ este echivalentă cu următoarea problemă:

$$\text{găsiţi } \bar{a} \in A \text{ astfel încât } \max \varphi(\bar{a}, b) \geq 0 \text{ pentru orice } b \in A,$$

sau, echivalent:

$$(EP_\psi) \qquad \text{găsiţi } \bar{a} \in A \text{ astfel încât } \psi(\bar{a}, b) \geq 0 \text{ pentru orice } b \in A,$$

unde $\psi : E \times E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, cu $A \times A \subseteq \operatorname{dom} \psi$, este definită prin

$$\psi(a,b) := \max \varphi(a,b) \text{ pentru orice } a, b \in A.$$

Mai mult, presupunem că

$$\max \varphi(a,a) = 0 \text{ pentru orice } a \in A.$$

Fie $a \in E$. În acord cu L. Altangerel, R. I. Boţ şi G. Wanka [2], problema $(EP_\psi)$ poate fi redusă la următoarea problemă de minimizare scalară:

$$(P_a) \qquad \inf_{b \in A} \psi(a,b).$$

Intr-adevăr, este uşor de verificat că $\bar{a} \in A$ este o soluţie a problemei $(EP_\psi)$ dacă şi numai dacă ea este o soluţie a problemei $(P_{\bar{a}})$.

Definiţia ce urmează este un caz particular al Definiţiei 4.2.1, unde $C := -\mathbb{R}_+$. Spunem că o funcţie $\gamma : E \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ este funcţie de decalaj pentru $(EP_\psi)$ (a se vedea G. Mastroeni [96]) dacă îndeplineşte condiţiile următoare:

(i) $\gamma(a) \geq 0$ pentru orice $a \in A$;

(ii) $\gamma(a) = 0$ şi $a \in A$ dacă şi numai dacă $a$ este o soluţie pentru $(EP_\psi)$.

Utiliând funcţia indicatoare $\delta_A$, putem rescrie problema $(P_a)$ înfelul următor:

$$(P_a) \qquad \inf_{b \in E} \{\psi(a,b) + \delta_A(b)\}.$$

**Propoziţia 4.2.6** (A. Capătă, G. Kassay şi B. Mosoni [39]) *Fie $a \in A$. Dacă multifuncţia $b \in A \mapsto \varphi(a,b) \in 2^{\mathbb{R}}$ este $\lambda$-concavă pentru fiecare $\lambda \in ]0,1[$ şi d-semicontinuă superior pe $A$, unde $d$ este funcţia valoare absolută pe $\mathbb{R}$, atunci funcţia*

$$(4.2) \qquad b \in A \mapsto \psi(a,b) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

*este convexă şi semicontinuă inferior pe $A$.*

În ipotezele propoziţiei anterioare, duala Fenchel a problemei $(P_a)$ este

$$(D_a) \qquad \sup_{x^* \in E^*} \{-\psi_b^*(a, x^*) - \sigma_A(-x^*)\},$$

unde

$$\psi_b^*(a, x^*) := \sup_{b \in E}[x^*(b) - \psi(a, b)].$$

Pentru problema $(P_a)$, condiţia de regularitate $(FRC)$, introdusă în Secţiunea 1.3, devine

$$(FRC; a) \qquad \psi_b^* \Box \sigma_A \text{ este semicontinuă inferior şi exactă în } 0,$$

unde

$$(\psi_b^* \Box \sigma_A)(x^*) := \inf\{\psi_b^*(x_1^*) + \sigma_A(x_2^*) \mid x_1^* + x_2^* = x^*\}.$$

**Teorema 4.2.7** (R. I. Boţ şi G. Wanka [29]) *Pentru fiecare $a \in A$, fie următoarele condiţii îndeplinite:*

(i) *condiţia de regularitate $(FRC; a)$ are loc;*

(ii) *funcţia (4.2) este convexă şi semicontinuă inferior pe $A$.*

*Atunci funcţia $\gamma : E \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, definită prin*

$$\gamma(a) := -v(D_a),$$

*este o funcţie de decalaj pentru $(EP_\psi)$.*

Din Propoziţia 4.2.6 şi Teorema 4.2.7 deducem următorul rezultat.

**Teorema 4.2.8** (A. Capătă, G. Kassay şi B. Mosoni [39]) *Pentru fiecare $a \in A$, fie următoarele condiţii îndeplinite:*

(i) *condiţia de regularitate $(FRC; a)$ are loc;*

(ii) *multifuncţia (4.2) este $\lambda$-concavă pentru fiecare $\lambda \in ]0, 1[$ şi d-semicontinuă superior pe $A$.*

*Atunci funcţia $\gamma$, definită în Teorema 4.2.7, este o funcţie de decalaj pentru $(MEP)$.*

# Capitolul 5

# O problemă de optimizare şi puncte şa ale bifuncţiilor vectoriale

## 5.1 Problema de optimizare vectorială

Problema vectorială slabă de echilibru $(WWEP)$, studiată în Secţiunea 2.1, conţine ca şi cazuri particulare, probleme de optimizare vectorială, inegalităţi variaţionale vectoriale şi probleme de punct şa al bifuncţiilor vectoriale (a se vedea Q. H. Ansari [3]). Problemele de optimizare vectorială revin la determinarea mulţimii punctelor de minim slab (sau de maxim slab) ale unei mulţimi dintr-un spaţiu liniar topologic real $Z$ în raport cu un con convex şi solid $C$ al lui $Z$.

Fie $S \subseteq Z$. Spunem că un punct $z_0 \in S$ este un minim slab al lui $S$ în raport cu conul $C$ dacă

$$S \cap (z_0 - \operatorname{int} C) = \emptyset.$$

Prin $\operatorname{Min}_w S$ notăm mulţimea punctelor de minim slab ale lui $S$ în raport cu conul $C$.

Fie $A$ o submulţime nevidă a unui spaţiu topologic $E$, fie $F : A \to Z$ o funcţie dată şi fie $c^* \in C^* \setminus \{0\}$. Considerăm problema scalară de echilibru:

$$(EP_{c^*}) \qquad \text{găsiţi } \bar{a} \in A \text{ astfel încât } f(\bar{a}, b) \geq 0 \text{ pentru orice } b \in A,$$

unde $f : A \times A \to \mathbb{R}$ este dată prin $f(a, b) := c^*(F(b) - F(a))$.

Notând cu $\varphi : A \times A \to Z$ bifuncţia vectorială definită prin

$$\varphi(a, b) := F(b) - F(a) \text{ oricare ar fi } a, b \in A,$$

observăm că problema $(WVEP)$, considerată în Capitolul 2, devine pentru acest $\varphi$ *problema slabă de minimizare vectorială*:

$$(WVMP) \qquad \text{găsiţi } \bar{a} \in A \text{ astfel încât } F(b) - F(\bar{a}) \notin -\operatorname{int} C \text{ pentru orice } b \in A.$$

Un punct $\bar{a} \in A$ este o soluţie a problemei $(WVMP)$ dacă şi numai dacă $F(\bar{a}) \in \operatorname{Min}_w F(A)$.

**Propoziţia 5.1.1** (A. Capătă şi G. Kassay [38]) *Oricare ar fi $c^* \in C^* \setminus \{0\}$, mulţimea soluţiilor problemei $(EP_{c^*})$ este inclusă în mulţimea soluţiilor problemei (WVMP).*

Remarcăm că dacă în Propoziţia 5.1.1, se schimbă între ele problemele $(EP_{c^*})$ şi $(WVMP)$, atunci obţinem o afirmaţie care în general nu este adevărată, precum arată următorul exemplu.

**Exemplul 5.1.2** (A. Capătă şi G. Kassay [38]) Fie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ funcţia definită prin

$$F(a) := \begin{cases} (-1, \dfrac{1}{\mid a \mid}) & \text{dacă } a \neq 0 \\ (0,0) & \text{dacă } a = 0. \end{cases}$$

Luăm $C := \mathbb{R}^2_+$ şi definim $c^* : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ prin

$$c^*(x_1, x_2) := \langle (1,0), (x_1, x_2) \rangle = x_1 \text{ pentru orice } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Astfel, avem

$$f(0,b) = \langle (1,0), F(b) - F(0) \rangle = \begin{cases} -1 & \text{dacă } b \neq 0 \\ 0 & \text{dacă } b = 0, \end{cases}$$

deci $\bar{a} := 0$ nu este o soluţie a problemei scalare de echilibru $(EP_{c^*})$.

Verificăm dacă $\bar{a}$ este o soluţie a problemei $(WVMP)$. Într-adevăr,

$$\varphi(0,b) = F(b) - F(0) = \begin{cases} (-1, \dfrac{1}{\mid b \mid}) & \text{dacă } b \neq 0 \\ (0,0) & \text{dacă } b = 0. \end{cases}$$

Această relaţie ne arată că $\varphi(0,b) \notin -\operatorname{int} \mathbb{R}^2_+$ oricare ar fi $b \in \mathbb{R}$, ceea ce implică că $\bar{a}$ este o soluţie a problemei $(WVMP)$. □

Observăm că orice element $a \neq 0$ este soluţie a problemei $(EP_{c^*})$ din exemplul anterior. Din

$$f(a,b) = \langle (1,0), F(b) - F(a) \rangle = \begin{cases} 0 & \text{dacă } b \neq 0 \\ 1 & \text{dacă } b = 0, \end{cases}$$

rezultă $f(a,b) \geq 0$ pentru orice $b \in \mathbb{R}$, adică $a \neq 0$ este o soluţie a problemei $(EP_{c^*})$. Din Propoziţia 5.1.1 rezultă că orice număr real este soluţie pentru $(WVMP)$.

Următorul rezultat este o consecinţă a Corolarului 2.1.5.

**Propoziţia 5.1.3** (A. Capătă şi G. Kassay [38]) *Dacă $A$ este o mulţime compactă şi funcţia $F : A \to Z$ este $C$-semicontinuă inferior pe $A$, atunci, oricarea ar fi $c^* \in C^* \setminus \{0\}$, problema scalară de echilibru $(EP_{c^*})$ admite o soluţie.*

În optimizarea vectorială sunt folosite diferite concepte de semicontinuitate inferioară. Următorul concept (considerat în J. Borwein, J. Penot şi M. Théra [25] şi M. Théra [110]) este o uşoară relaxare a semicontinuităţii inferioare.

**Definiţia 5.1.4** Fie $A$ o mulţime nevidă a unui spaţiu topologic. Spunem că funcţia vectorială $f : A \to Z$ este cvasi-semicontinuă inferior în punctul $a \in A$ dacă, oricare ar fi $z \in Z$ cu $z \ngeq_C f(a)$, există o vecinătate $U$ a lui $a$ astfel încât

$$z \ngeq_C f(u) \text{ oricare ar fi } u \in U \cap A.$$

Întrebarea dacă $C$-semicontinuitatea inferioară din Propoziţia 5.1.3 nu poate fi înlocuită cu ipoteza mai slabă de cvasi-semicontinuitate inferioară apare natural. Exemplul de mai jos arată că răspunsul este negativ.

**Exemplul 5.1.5** Fie $Z := \mathbb{R}^3$, $C := \mathbb{R}^3_+$, $A := [0, 1]$ şi fie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definită prin

$$F(t) := \begin{cases} \big(-1, -\dfrac{2}{t}, \dfrac{1}{t}\big) & \text{dacă } t \neq 0 \\ (0, 0, 0) & \text{dacă } t = 0. \end{cases}$$

Se verifică uşor că $F$ este cvasi-semicontinuă inferior în punctul 0, dar nu este $\mathbb{R}^3_+$-semicontinuă infrior în 0.

Fie funcţionala $c^* : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$c^*(x_1, x_2, x_3) := \langle\Big(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\Big), (x_1, x_2, x_3)\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(x_1 + x_2 + x_3) \text{ oricare ar fi } (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Definim apoi $f : A \times A \to \mathbb{R}$ prin $f(a, b) := c^*(F(b) - F(a))$. Afirmăm că $(EP_{c^*})$ nu admite soluţii.

Într-adevăr, dacă $a \neq 0$, obţinem

$$f(a, b) = \langle\Big(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\Big), F(b) - F(a)\rangle = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{3}}\Big(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\Big) & \text{dacă } b \neq 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\Big(1 + \dfrac{1}{a}\Big) & \text{dacă } b = 0, \end{cases}$$

de unde $f(a, b) < 0$ pentru $b < a$. Aceasta arată că $a \neq 0$ nu este o soluţie a problemei $(EP_{c^*})$.

Pentru $a := 0$ bifuncţia $f$ devine

$$f(0, b) = \langle\Big(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\Big), F(b) - F(0)\rangle = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{3}}\Big(-\dfrac{1}{b} - 1\Big) & \text{dacă } b \neq 0 \\ 0 & \text{dacă } b = 0\ . \end{cases}$$

Observăm că $f(0, b) < 0$ pentru orice $b \in ]0, 1]$. Aceasta arată că $a$ nu este o soluţie a problemei $(EP_{c^*})$. Prin urmare, problema $(EP_{c^*})$ nu are soluţii, cu toate că mulţimea soluţiilor problemei $(WVMP)$ este $[0, 1]$. $\square$

Propoziţiile 5.1.1 şi 5.1.3 furnizează următorul rezultat de existenţă pentru $(WVMP)$.

**Propoziţia 5.1.6** (A. Capătă şi G. Kassay [38]) *Dacă $A$ este o mulţime compactă şi $F : A \to Z$ este $C$-semicontinuă inferior pe $A$, atunci problema (WVMP) admite o soluţie.*

## 5.2 Rezultate de existenţă a punctelor şa slabe ale bifuncţiilor vectoriale

Folosind rezultatele de existenţă ale problemei vectoriale slabe de echilibru $(WVEP)$, stabilite în Secţiunea 2.1, vom da în cele ce urmează rezultate de existenţă pentru punctele şa slabe ale unei bifuncţii vectoriale. Pentru aceasta, fie $X$ şi $Y$ submulţimi nevide ale unor spaţii topologice, fie $Z$ un spaţiu liniar topologic real, şi fie $f : X \times Y \to Z$ o bifuncţie. Pentru $x \in X$ şi $y \in Y$ introducem mulţimile următoare:

$$f(x, Y) := \{f(x, y) |\, y \in Y\} \text{ şi } f(X, y) := \{f(x, y) |\, x \in X\}.$$

Fie $S \subseteq Z$ o submulţime nevidă şi $C \subseteq Z$ un con convex solid. Prin $\mathrm{Max}_w\, S$ notăm mulţimea punctelor de maxim slab ale mulţimii $S$ în raport cu conul $C$, adică $z_0 \in \mathrm{Max}_w S$ înseamnă

$$z_0 \in S \text{ şi } S \cap (z_0 + \operatorname{int} C) = \emptyset.$$

Reamintim următorul concept, ce extinde definiţia clasică a unui punct şa al unei funcţii reale.

**Definiţia 5.2.1** (T. Tanaka [108]) Spunem că un punct $(x_0, y_0) \in X \times Y$ este $C$-punct şa slab al lui $f$ dacă

$$f(x_0, y_0) \in \mathrm{Max}_w\, f(X, y_0) \cap \mathrm{Min}_w\, f(x_0, Y).$$

**Propoziţia 5.2.2** *Fie $A := X \times Y$, $B := X \times Y$, iar $\varphi : A \times B \to Z$ bifuncţia definită prin*

$$\varphi(a, b) := f(x, v) - f(u, y) \text{ oricare ar fi } a := (x, y) \text{ şi } b := (u, v) \in X \times Y.$$

*Dacă $\bar{a} \in A$ este o soluţie a problemei (WVEP), atunci $\bar{a}$ este un $C$-punct şa slab al lui $f$.*

Subliniem faptul că reciproca Propoziţiei 5.2.2 nu are loc. Pentru a arăta acesta, dăm un exemplu.

**Exemplul 5.2.3** Fie $X := [-1, 1]$, $Y := [-1, 1]$, $Z := \mathbb{R}^2$, $C := \mathbb{R}^2_+$. Fie $f : [-1, 1] \times [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$ bifuncţia definită prin

$$f(x, y) := \begin{cases} (x, y) & \text{dacă } x \geq 0 \text{ şi } y \leq 0 \text{ sau, } x \leq 0 \text{ şi } y \geq 0 \\ (0, 0) & \text{în rest.} \end{cases}$$

Se verifică uşor că $\bar{a} := (0, 0)$ este un $\mathbb{R}^2_+$-punct şa slab al bifuncţiei $f$.

Pentru a verifica dacă acest punct este o soluţie a problemei $(WVEP)$, considerăm mulţimea $A := [-1, 1] \times [-1, 1]$ şi $B := A$. Astfel avem de verificat dacă

$$\varphi(\bar{a}, b) = f(0, v) - f(u, 0) \notin -\operatorname{int} \mathbb{R}^2_+ \text{ pentru orice } b := (u, v) \in A.$$

Luând $b := (1, -1) \in A$, avem

$$\varphi(\bar{a}, b) = f(0, -1) - f(1, 0) = (-1, -1) \in -\operatorname{int} \mathbb{R}^2_+.$$

Deci, $\bar{a}$ nu este o soluţie a problemei $(WVEP)$. $\square$

**Teorema 5.2.4** (A. Capătă şi G. Kassay [38]) *Fie $X$ şi $Y$ mulţimi compacte, iar $f : X \times Y \to Z$ o bifuncţie care îndeplinite următoarele condiţii:*

(i) *$f$ este $C$-semicontinuă superior în prima variabilă pe $X$ şi $C$-semicontinuă inferior în a doua variabilă pe $Y$;*

(ii) *$f$ este asemănător $C$-subconcavă – subconvexă.*

*Atunci $f$ admite un $C$-punct şa slab.*

## 5.3 Rezultate de existenţă a punctelor şa tari ale bifuncţiilor vectoriale

Fie $S$ o submulţime nevidă a unui spaţiu liniar topologic $Z$ real, ordonat de un con convex $C$. Prin $\operatorname{Min} S$ notăm mulţimea punctelor de minim ale mulţimii $S$ în raport cu conul $C$, adică $z_0 \in \operatorname{Min} S$ înseamnă că

$$z_0 \in S \text{ şi } (S - z_0) \cap (-C) = \{0\}.$$

Analog, $\operatorname{Max} S$ reprezintă mulţimea punctelor de maxim ale mulţimii $S$ în raport cu conul $C$, adică $z_0 \in \operatorname{Max} S$ înseamnă că

$$z_0 \in S \text{ şi } (S - z_0) \cap C = \{0\}.$$

Prin $\operatorname{IMin} S$ notăm mulţimea punctelor de minim ideal ale lui $S$ în raport cu conul $C$, adică $z_0 \in \operatorname{IMin} S$ înseamnă că

$$z_0 \in S \text{ şi } z \geq_C z_0 \text{ pentru orice } z \in S.$$

Analog, $\operatorname{IMax} S$ reprezintă mulţimea punctelor de maxim ideal ale lui $S$ în raport cu conul $C$, adică $z_0 \in \operatorname{IMax} S$ înseamnă că

$$z_0 \in S \text{ şi } z_0 \geq_C z \text{ pentru orice } z \in S.$$

**Definiţia 5.3.1** Fie $X$ şi $Y$ submulţimi nevide ale unor spaţii topologice, şi fie $f : X \times Y \to Z$ o bifuncţie vectorială. Spunem că un punct $(x_0, y_0) \in X \times Y$ este:

(i) un $C$-punct şa tare al lui $f$ dacă

$$f(x_0, y_0) \in \operatorname{Max} f(X, y_0) \cap \operatorname{Min} f(x_0, Y).$$

(ii) un $C$-punct şa tare ideal al lui $f$ dacă

$$f(x_0, y_0) \in \operatorname{IMax} f(X, y_0) \cap \operatorname{IMin} f(x_0, Y).$$

X. H. Gong [63] a prezentat rezultate de existenţă pentru $C$-punctele şa tari ideale ale bifuncţiilor vectoriale. Se cunoaşte (a se vedea D. T. Luc [95], Propoziţia 2.2, pagina 41) că mulţimea punctelor de minim ideal ale unei mulţimi (dacă aceasta este nevidă) coincide cu mulţimea punctelor de minim Pareto, iar dacă conul este punctat, atunci mulţimea punctelor minim ideal se reduce la un singur element. Astfel, X. H. Gong a dat rezultate de existenţă şi unicitate pentru $C$-puncte şa tari.

Evident, dacă $\operatorname{int} C \neq \emptyset$, atunci fiecare $C$-punct şa tare este un $C$-punct şa slab, dar reciproca nu este adevărată, precum arată următorul exemplu.

**Exemplul 5.3.2** Fie $f : [-1, 1] \times [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$ definită prin $f(x) := x$, şi fie $Z := \mathbb{R}^2$, iar $C := \mathbb{R}^2_+$. Observăm că $(0, 0)$ este un $C$-punct şa slab al bifuncţiei $f$, dar nu este un $C$-punct şa tare al acesteia. $\square$

$C$-punctele şa tari pot fi obţinute ca şi cazuri particulare ale soluţiilor unor probleme vectoriale tari de echilibru, precum arată următoarea propoziţie. Într-adevăr, fie $A := X \times Y$, $B := A$ şi fie $\varphi : A \times A \to \mathbb{R}$ definită prin

$$\varphi(a, b) := f(x, v) - f(u, y), \text{ unde } a := (x, y) \in A \text{ şi } b := (u, v) \in A.$$

**Propoziţia 5.3.3** *Dacă $\bar{a} \in A$ este o soluţie a problemei $(VEP)$, atunci $\bar{a}$ este un $C$-punct şa tare al bifuncţiei $f$.*

Reciproca Propoziţiei 5.3.3 nu are loc, precum ilustrează exemplul de mai jos.

**Exemplul 5.3.4** (G. Bigi, A. Capătă şi G. Kassay [18]) Considerăm

$$X := [-1, 0],\ Y := X,\ A := [-1, 0] \times [-1, 0],\ Z := \mathbb{R}^2,\ C := \mathbb{R}^2_+.$$

Definim $f : [-1, 0] \times [-1, 0] \to \mathbb{R}^2$ prin

$$f(x, y) := \begin{cases} (0, 0) & \text{dacă } x = 0,\ y = -1 \\ (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) & \text{dacă } x = 0 \text{ şi } y \neq -1 \\ (-\frac{1}{4}, 1) & \text{dacă } x \neq 0 \text{ şi } y = -1 \\ (x, y + 1) & \text{în rest.} \end{cases}$$

Atunci $(0, -1)$ este un $C$-punct şa tare al bifuncţiei $f$. Luând $\bar{a} := (0, -1) \in A$ şi $b := (u, v) \in A$ cu $u \neq 0$ şi $v := -1$, obţinem

$$\varphi(a, b) = f(0, v) - f(u, -1) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) - (-\frac{1}{4}, 1) = (-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}).$$

Atunci

$$\varphi(a, b) \in -\mathbb{R}^2_+ \setminus \{0\}$$

implică că $(0, -1)$ nu este soluţie a problemei $(VEP)$. □

Teorema 5.2.4 asigură existenţa $C$-punctelor şa slabe. Mai departe, arătăm că sub o ipoteză suplimentară, nu foarte tare, anume că $C^\sharp \neq \emptyset$, putem obţine un rezultat mai bun, şi anume existenţa $C$-punctelor şa tari.

**Teorema 5.3.5** (G. Bigi, A. Capătă şi G. Kassay [18]) *Fie* $\operatorname{int} C \neq \emptyset$*, fie* $C^\sharp \neq \emptyset$*, fie* $X$ *şi* $Y$ *submulţimi compacte ale unor spaţii metrizabile liniar topologice şi fie* $f : X \times Y \to Z$ *o funcţie ce îndeplineşte următoarele condiţii:*

(i) $f$ *este* $C$*-semicontinuă superior în prima variabilă pe* $X$ *şi* $C$*-semicontinuă inferior în a doua variabilă pe* $Y$*;*

(ii) $f$ *este asemănător* $C$*-subconcavă – subconvexă.*

*Atunci* $f$ *admite un* $C$*-punct şa tare.*

Acest rezultat nu este legat de cel al lui X. H. Gong [63]. În timp ce ipotezele noastre de continuitate sunt mai slabe, ipotezele de convexitate sunt mai tari decât cele prezente în Teorema 2.1 a lui X. H. Gong [63].

# Capitolul 6

# Inegalităţi variaţionale de tip Minty şi Stampacchia

Domeniul inegalităţilor vectoriale variaţionale a stârnit un mare interes din partea comunităţii academice odată cu apariţia lucrării lui F. Giannessi [56]. Primele rezultate de existenţă referitoare la inegalităţile variaţionale vectoriale au fost publicate de G.-Y. Chen şi Q. M. Cheng [41]. G.-Y. Chen şi S. H. Hou au prezentat în lucrarea [42] unele dintre rezultatele de existenţă fundamentale pentru inegalităţile variaţionale vectoriale. Majoritatea cercetărilor din această arie se ocupă de forma slabă a inegalităţilor variaţinale vectoriale şi de generalizările acestora. Astfel autorii lucrării [42] propun studiul existenţei soluţiilor formei tari a inegalităţilor variaţionale vectoriale. Recent, Y. P. Fang şi N. J. Huang [51] şi B. S. Lee, M. F. Khan şi Salahuddin [89] au obţinut rezultate de acest tip.

## 6.1 Inegalităţi variaţionale vectoriale slabe de tip Minty şi Stampacchia

Inegalităţile variaţionale vectoriale slabe sunt cazuri particulare ale problemei vectoriale slabe de echilibru $(WVEP)$, considerată în Capitolul 2. Fie $E$ şi $Z$ spaţii liniare topologice reale, $A \subseteq E$ o submulţime nevidă şi $F : A \to L(E, Z)$ un operator, unde $L(E, Z)$ reprezintă mulţimea tuturor aplicaţiilor liniare şi continue de la $E$ la $Z$. Mai departe, fie $C \subseteq Z$ un con convex şi solid. Folosind aceste notaţii, vom studia în această secţiune următoarele inegalităţi variaţionale:

$(WMVI)$ găsiţi $\bar{a} \in A$ astfel încât $\langle F(b), b - \bar{a} \rangle \notin -\operatorname{int} C$ pentru orice $b \in A$;

şi

$(WSVI)$ găsiţi $\bar{a} \in A$ astfel încât $\langle F(\bar{a}), b - \bar{a} \rangle \notin -\operatorname{int} C$ pentru orice $b \in A$.

Prin $\langle F(b), b - a \rangle$ am notat valoarea funcţiei $F(b)$ în punctul $b - a$, oricare ar fi $a, b \in A$. Problema $(WMVI)$ se numeşte *inegalitatea variaţională vectorială Minty slabă*, în timp $(WSVI)$ se numeşte *inegalitatea variţională vectorială Stampacchia slabă*.

Din Teorema 2.1.1 avem următorul rezultat de existenţă referitor la problema $(WMVI)$.

**Teorema 6.1.1** (A. Capătă [34]) *Fie $A$ o mulţime compactă şi fie următoarele condiţii îndeplinite:*

(i) *oricare ar fi* $a_1, \ldots, a_m \in A$, *oricare ar fi* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$ *cu* $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1$, *şi oricare ar fi* $b_1, \ldots, b_n \in A$, *există* $c^* \in C^* \setminus \{0\}$ *astfel încât*

$$\min_{1 \leq j \leq n} c^*\big(\langle F(b_j), b_j - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i \rangle\big) \leq \sup_{a \in A} \min_{1 \leq j \leq n} c^*\big(\langle F(b_j), b_j - a \rangle\big);$$

(ii) *oricare ar fi* $b_1, \ldots, b_n \in A$, *şi oricare ar fi* $c_1^*, \ldots, c_n^* \in C^*$ *nu toate nule, are loc*

$$\sup_{a \in A} \sum_{j=1}^{n} c_j^*\big(\langle F(b_j), b_j - a \rangle\big) \geq 0. \tag{6.1}$$

*Atunci problema* $(WMVI)$ *admite o soluţie.*

Prima ipoteză a Teoremei 6.1.1, care este o concavitate generalizată, este îndeplinită dacă presupunem convexitatea mulţimii $A$.

**Corolarul 6.1.2** (A. Capătă [34]) *Fie* $A$ *o mulţime compactă convexă, iar* $C^* \neq \{0\}$. *Mai presupunem că oricare ar fi* $b_1, \ldots, b_n \in A$ *şi oricare ar fi* $c_1^*, \ldots, c_n^* \in C^*$ *nu toate nule, are loc (6.1). Atunci problema* $(WMVI)$ *admite o soluţie.*

Pentru a stabili rezultate de existenţă referitoare la problema $(WSVI)$ avem nevoie de următoarea noţiune de continuitate.

**Definiţia 6.1.3** (X. H. Gong [58]) Fie $A$ o mulţime convexă. Spunem că operatorul $F$ este $v$-hemicontinuu dacă, oricare ar fi $a, b \in A$, funcţia

$$\forall\, \lambda \in [0,1] \mapsto \langle F(\lambda b + (1-\lambda)a), b - a \rangle \in Z$$

este continuă în punctul 0.

**Propoziţia 6.1.4** *Dacă* $A$ *este o mulţime convexă şi* $F$ *este* $v$*-hemicontinuu, atunci orice soluţie a problemei* $(WMVI)$ *este o soluţie a problemei* $(WSVI)$.

**Teorema 6.1.5** (A. Capătă [34]) *Fie* $A$ *o mulţime compactă convexă, iar* $C^* \neq \{0\}$, *fie* $F$ $v$*-hemicontinuu, şi fie următoarea condiţie îndeplinită: oricare ar fi* $b_1, \ldots, b_n \in A$ *şi oricare ar fi* $c_1^*, \ldots, c_n^* \in C^*$ *nu toate nule, are loc (6.1). Atunci problema* $(WSVI)$ *admite o soluţie.*

## 6.2 Inegalităţi variaţionale vectoriale tari de tip Minty şi Stampacchia

Inegalităţile variaţionale vectoriale tari sunt cazuri particulare ale problemei vectoriale tari de echilibru $(VEP)$, investigate în Capitoul 3. Fie $A$ o mulţime nevidă convexă a unui spaţiu liniar topologic real $E$ şi fie $F : A \to L(E, Z)$ un operator. $Z$ este un spaţiu Hausdorff liniar topologic real. Fie $C \subseteq Z$ un con netrivial, punctat şi convex. Studiem următoarele inegalităţi variaţionale:

$(MVI)$ găsiţi $\bar{a} \in A$ astfel încât $\langle F(b), b - \bar{a} \rangle \notin -C \setminus \{0\}$ pentru orice $b \in A$;

$(SVI)$ găsiţi $\bar{a} \in A$ astfel încât $\langle F(\bar{a}), b - \bar{a} \rangle \notin -C \setminus \{0\}$ pentru orice $b \in A$.

Problema $(MVI)$ se numeşte *inegalitatea variaţională vectorială Minty tare*, în timp ce $(SVI)$ se numeşte *inegalitatea variaţională vectorială Stampacchia tare.*

Folosind teoria dualităţii generalizate prezentate în Secţiunea 3.2, deducem că inegalitatea variaţională vectorială Stampacchia tare $(SVI)$ admite, ca şi duală generalizată, inegalitatea variaţională vectorială Minty tare $(MVI)$. Notăm că şi reciproca are loc, adică problema duală generalizată a problemei $(MVI)$ este $(SVI)$.

În Y. P. Fang şi N. J. Huang [51] sunt prezentate rezultate de existenţă pentru problema $(SVI)$ folosind următoarea proprietate de monotonie. Spunem că operatorul $F : A \to L(E, Z)$ este tare pseudomonoton dacă, oricare ar fi $a, b \in A$, următoarea proprietate au loc:

$$\langle F(a), b - a\rangle \notin -C \setminus \{0\} \text{ implică } \langle F(b), b - a\rangle \in C.$$

În cele ce urmează lucrăm cu o noţiune de pseudomonotonie, care este mai slabă decât cea prezentată mai sus. Pentru a vedea aceasta, vom prezenta exemplu.

**Definiţia 6.2.1** (Y. P. Fang şi N. J. Huang [51]) Spunem că operatorul $F : A \to L(E, Z)$ este pseudomonoton dacă, oricare ar fi $a, b \in A$, următoarea proprietate are loc:

$$\langle F(a), b - a\rangle \notin -C \setminus \{0\} \text{ implică } \langle F(b), b - a\rangle \notin -C \setminus \{0\}.$$

**Exemplul 6.2.2** (A. Capătă [35]) Fie $E := \mathbb{R}^2$, $A := [0, 1] \times [0, 1]$, $Z := \mathbb{R}^2$, $C := \mathbb{R}^2_+$. Definim $F : A \to L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ prin

$$\langle F(a), x\rangle := (x_1+x_2)(a_1-2, a_2+2), \text{ oricare ar fi } a := (a_1, a_2) \in A \text{ şi oricare ar fi } x := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Fie $a := (a_1, a_2)$ şi $b := (b_1, b_2)$ puncte din $A$. Deoarece $a_1 - 2 < 0$ şi $a_2 + 2 > 0$, deducem din

$$\langle F(a), b - a\rangle = (b_1 + b_2 - a_1 - a_2)(a_1 - 2, a_2 + 2)$$

că $\langle F(a), b - a\rangle \notin -\mathbb{R}^2_+ \setminus \{0\}$. Analog, luând în considerare că $b_1 - 2 < 0$ şi $b_2 + 2 > 0$, deducem din

$$\langle F(b), b - a\rangle = (b_1 + b_2 - a_1 - a_2)(b_1 - 2, b_2 + 2) \tag{6.2}$$

că $\langle F(b), b - a\rangle \notin -\mathbb{R}^2_+ \setminus \{0\}$. Prin urmare, $F$ este pseudomonoton. Pe de altă parte, deoarece $b_1 + b_2 - a_1 - a_2 \neq 0$, observăm că (6.2) implică

$$\langle F(b), b - a\rangle \notin \mathbb{R}^2_+.$$

Aşadar, $F$ nu este tare pseudomonoton. □

Următoarea definiţie este un caz particular al Definiţiei 3.2.2.

**Definiţia 6.2.3** Spunem că operatorul $F : A \to L(E, Z)$ este maximal pseudomonoton dacă următoarele condiţii sunt îndeplinite:

(i) $F$ este pseudomonoton;

(ii) oricare ar fi, $a, b \in A$ are loc implicaţia: dacă $\langle F(x), a - x\rangle \notin C \setminus \{0\}$ pentru orice $x \in ]a, b]$, atunci $\langle F(a), a - b\rangle \notin C \setminus \{0\}$.

Propoziţia următoare rezultă din Propoziţia 3.2.8.

**Propoziţia 6.2.4** (A. Capătă [35]) *Dacă $F$ este maximal pseudomonoton, atunci mulţimile soluţiilor problemelor $(SVI)$ şi $(MVI)$ coincid.*

Din Corolarul 3.2.9 obţinem următorul rezultat de existenţă referitor la problema $(SVI)$.

**Teorema 6.2.5** (A. Capătă [35]) *Presupunem că următoarele condiţii sunt îndeplinite:*

(i) *$F$ este maximal pseudomonoton;*

(ii) *mulţimea $S(b) := \{a \in A \mid \langle F(b), b-a\rangle \notin -C \setminus \{0\}\}$ este închisă, oricare ar fi $b \in A$;*

(iii) *există o mulţime nevidă, compactă şi convexă $D \subseteq A$ precum şi un element $\tilde{b} \in D$ astfel încât*

$$\langle F(x), \tilde{b} - x\rangle \in -C \setminus \{0\} \text{ oricare ar fi } x \in A \setminus D.$$

*Atunci problema $(SVI)$ admite o soluţie.*

**Exemplul 6.2.6** (A. Capătă [35]) Pentru a arăta că există operatori ce îndeplinesc ipotezele Teoremei 6.2.5, alegem $E := \mathbb{R}^2$, $A := [0,1]\times[0,1]$, $Z := \mathbb{R}^2$, $C := \mathbb{R}^2_+$ şi definim $F : A \to L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ prin

$$\langle F(a), x\rangle := (x_1 + x_2)(a_1 + 1, a_2 + 1) \tag{6.3}$$

oricare ar fi $a := (a_1, a_2) \in A$ şi oricare ar fi $x := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Deoarece

$$(a_1 + 1, a_2 + 1) \in \mathbb{R}^2_+ \setminus \{0\} \text{ pentru orice } a := (a_1, a_2) \in A,$$

(6.3) implică

$$\forall\, a \in A \,:\, \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle F(a), x\rangle \notin \mathbb{R}^2_+ \setminus \{0\}\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 +_2 \leq 0\}. \tag{6.4}$$

Din această relaţie deducem că

$$\forall\, a, b \in A \,:\, \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle F(a), x\rangle \notin \mathbb{R}^2_+ \setminus \{0\}\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle F(b), x\rangle \notin \mathbb{R}^2_+ \setminus \{0\}\}. \tag{6.5}$$

Fie $a := (a_1, a_2)$ şi $b := (b_1, b_2)$ puncte din $A$. Presupunem că

$$\langle F(a), b - a\rangle \notin -\mathbb{R}^2_+ \setminus \{0\}.$$

Atunci avem $\langle F(a), a - b\rangle \notin \mathbb{R}^2_+ \setminus \{0\}$. În virtutea relaţiei (6.5) obţinem

$$\langle F(b), a - b\rangle \notin \mathbb{R}^2_+ \setminus \{0\}, \text{ de unde } \langle F(b), b - a\rangle \notin -\mathbb{R}^2_+ \setminus \{0\}.$$

Deci $F$ este operator pseudomonoton.

Acum, presupunem că

$$\langle F(x), a - x\rangle \notin \mathbb{R}^2_+ \setminus \{0\} \text{ oricare ar fi } x \in ]a, b].$$

În particular, avem

$$\langle F(b), a - b\rangle \notin \mathbb{R}^2_+ \setminus \{0\}.$$

Din (6.5) obţinem $\langle F(a), a-b\rangle \notin \mathbb{R}^2_+ \setminus \{0\}$. Aşadar operatorul $F$ este maximal pseudomonoton. Cu alte cuvinte, condiţia (i) din Teorema 6.2.5 este îndeplinită.

Din (6.4) avem

$$S(b) = \{a \in A \mid \langle F(b), a-b\rangle \notin \mathbb{R}^2_+ \setminus \{0\}\} = \{(a_1, a_2) \in A \mid a_1 + a_2 \leq b_1 + b_2\},$$

oricare ar fi $b := (b_1, b_2) \in A$. Prin urmare, condiţia (ii) din Teorema 6.2.5 este de asemenea îndeplinită. Evident, condiţia (iii) din Teorema 6.2.5 este îndeplinită cu $D := A$. □

Din Corolarul 3.2.10 obţinem următorul rezultat, care este o uşoară generalizare a Teoremei 2.1 a lui Y. P. Fang şi N. J. Huang [51].

**Teorema 6.2.7** (A. Capătă [35]) *Presupunem că următoarele condiţii sunt îndeplinite:*

(i) *oricare ar fi $b \in A$, mulţimea $S(b) := \{a \in A \mid \langle F(a), b-a\rangle \notin -C \setminus \{0\}\}$ este închisă;*

(ii) *există o mulţime nevidă, compactă şi convexă $D \subseteq A$ precum şi un element $\tilde{b} \in D$ astfel încât*

$$\langle F(x), \tilde{b} - x\rangle \in -C \setminus \{0\} \text{ oricare ar fi } x \in A \setminus D.$$

*Atunci problema $(SVI)$ admite o soluţie.*

## 6.3 Soluţii proprii ale unor inegalităţi variaţionale vectoriale generalizate

În cele ce urmează prezentăm rezultate de existenţă pentru soluţiile propriu eficiente ale unor inegalităţi variaţionale vectoriale generalizate. Fie $A$ o submulţime nevidă a unui spaţiu liniar topologic metrizabil $E$, fie $Z$ un spaţiu liniar topologic real, fie $C \subseteq Z$ un con netrivial, punctat şi convex, fie $q : A \to Z$ o funcţie dată şi fie $F : A \to L(E, Z)$ un operator.

Următoarele rezultate de existenţă se referă la inegalităţile variaţionale de mai jos:

$(GMVI)$ găsiţi $\bar{a} \in A$ astfel încât $\langle F(b), b-\bar{a}\rangle + q(b) - q(\bar{a}) \notin -C \setminus \{0\}$ pentru orice $b \in A$;

$(GSVI)$ găsiţi $\bar{a} \in A$ astfel încât $\langle F(\bar{a}), b-\bar{a}\rangle + q(b) - q(\bar{a}) \notin -C \setminus \{0\}$ pentru orice $b \in A$.

Numim aceste probleme *inegalitatea variaţinală vectorială tare Minty generalizată*, şi respectiv *inegalitatea variaţională vectorială tare Stampacchia generalizată*.

Pentru început, reamintim câteva definiţii legate de inegalităţile variaţionale vectoriale (a se vedea [58], [107] şi [117]).

**Definiţia 6.3.1** Fie $c^* \in C^* \setminus \{0\}$. Spunem că operatorul $F$ este:

(i) $c^*$-monoton dacă, oricare ar fi $a, b \in A$, avem

$$c^*(\langle F(b) - F(a), b-a\rangle) \geq 0.$$

(ii) $c^*$-hemicontinuu superior dacă $A$ este o mulţime convexă, şi oricare ar fi $a, b \in A$, funcţia

$$\forall\, \lambda \in [0,1] \mapsto c^*(\langle F(\lambda b + (1-\lambda)a), b-a\rangle) \in \mathbb{R}$$

este semicontinuă superior în 0.

(iii) $C$-monoton dacă, oricare ar fi $a, b \in A$, avem

$$\langle F(b) - F(a), b - a \rangle) \in C.$$

(iv) $v$-hemicontinuu dacă $A$ este o mulţime convexă şi, oricare ar fi $a, b \in A$, funcţia

$$\forall \lambda \in [0,1] \mapsto \langle F(\lambda b + (1-\lambda)a), b - a \rangle \in Z$$

este semicontinuă superior în 0.

**Observaţia 6.3.2** Este evident că, dacă $F$ este $C$-monoton şi $v$-hemicontinuu, atunci, pentru orice funcţională $c^* \in C^* \setminus \{0\}$, $F$ este $c^*$-monoton şi $c^*$-semicontinuu superior. $\square$

**Definiţia 6.3.3** (X. H. Gong [61]) Spunem că un punct $\bar{a} \in A$ este:

(i) o soluţie global eficientă a problemei $(GMVI)$ dacă există un con Henig dilatator $K \subseteq Z$ pentru $C$ astfel încât

$$\langle F(b), b - \bar{a} \rangle + q(b) - q(\bar{a}) \notin -K \setminus \{0\} \text{ pentru orice } b \in A;$$

(ii) o soluţie Henig slab eficientă a problemei $(GMVI)$ dacă $Z$ este un spaţiu local convex real şi există o vecinătate convexă $U$ a originii lui $Z$ cu $U \subseteq V_{\mathcal{B}}$ (a se vedea Secţiunea 3.3) astfel încât

$$\langle F(b), b - \bar{a} \rangle + q(b) - q(\bar{a}) \notin -\operatorname{int} C_U(\mathcal{B}) \text{ pentru orice } b \in A;$$

(iii) o soluţie global eficientă a problemei $(GSVI)$ dacă există un con Henig dilatator $K \subseteq Z$ pentru $C$ astfel încât

$$\langle F(a), b - \bar{a} \rangle + q(b) - q(\bar{a}) \notin -K \setminus \{0\} \text{ pentru orice } b \in A;$$

(iv) o soluţie Henig slab eicientă a problemei $(GSVI)$ dacă $Z$ este un spaţiu local convex real şi există o vecinătate convexă $U$ a originii lui $Z$ cu $U \subseteq V_{\mathcal{B}}$ (a se vedea Secţiunea 3.3) astfel încât

$$\langle F(a), b - \bar{a} \rangle + q(b) - q(\bar{a}) \notin -\operatorname{int} C_U(\mathcal{B}) \text{ pentru orice } b \in A.$$

**Teorema 6.3.4** (A. Capătă [36]) *Fie $A$ o mulţime compactă convexă, fie $K \subseteq Z$ un con Henig dilatator pentru conul $C$, fie $k^* \in K^\sharp$, şi fie următoarele condiţii îndeplinite:*

(i) *$k^* \circ q$ este semicontinuă inferior pe $A$;*

(ii) *$q$ este $K$-convex;*

(iii) *$F$ este $k^*$-monoton.*

*Atunci problema $(GMVI)$ admite o soluţie global eficientă.*

Următoarea teoremă asigură existenţa soluţiilor global eficiente ale problemei $(GSVI)$, în ipoteza că există un con Henig dilatator $K$ cu $K^\sharp \neq \emptyset$. O asemenea ipoteză nu este tare, deoarece un asemenea con există întotdeauna dacă presupunem că $C$ este bazat.

**Teorema 6.3.5** (A. Căpătă [36]) *Fie $A$ o mulţime compactă convexă, fie $K \subseteq Z$ un con Henig dilatator pentru $C$, fie $k^* \in K^\sharp$ şi fie următoarele condiţii îndeplinite:*

(i) *$k^* \circ q$ este semicontinuu inferior pe $A$;*

(ii) *$q$ este $K$-convex;*

(iii) *$F$ este $k^*$-monoton;*

(iv) *$F$ este $k^*$-hemicontinuu superior.*

*Atunci problema $(GSVI)$ admite o soluţie global eficientă.*

În partea finală a acestei secţiuni, prezentăm rezultate de existenţă pentru $(GSVI)$, în ipoteze mai tari decât cele ale Teoremei 6.3.5.

**Corolarul 6.3.6** (A. Căpătă [36]) *Fie $A$ o mulţime compactă convexă, fie $K \subseteq Z$ un con Henig dilatator pentru $C$ cu $K^\sharp \neq \emptyset$ şi fie următoarele condiţii îndeplinite:*

(i) *$q$ este $K$-semicontinuă inferior pe $A$;*

(ii) *$q$ este $K$-convex;*

(iii) *$F$ este $K$-monoton;*

(iv) *$F$ este $v$-hemicontinuu.*

*Atunci problema $(GSVI)$ admite o soluţie global eficientă.*

Menţionăm că orice soluţie global eficientă a problemei $(GSVI)$ este o soluţie a problemei $(GSVI)$, datorită incluziunii $C \setminus \{0\} \subseteq \operatorname{int} K$, unde $K$ este un con Henig dilatator pentru $C$.

Ipotezele (i), (ii) şi (iii) ale Corolarului 6.3.6 sunt îndeplinite, dacă presupunemcă funcţia $q$ este $C$-semicontinuă inferior şi $C$-convexă, iar operatorul $F$ este $C$-monoton pe $A$.

**Corolarul 6.3.7** (A. Căpătă [36]) *Fie $Z$ un spaţiu local convex ţeal, fie $C$ un con bazat, fie $A$ o mulţime compactă convexă, şi fie următoarele condiţii îndeplinite:*

(i) *$q$ este $C$-semicontinuu inferior pe $A$;*

(ii) *$q$ este $C$-convex;*

(iii) *$F$ este $C$-monoton;*

(iv) *$F$ este $v$-hemicontinuu.*

*Atunci problema $(GSVI)$ admite o soluţie Henig slab eficientă .*

Luând $q := 0$ în definiţia problemei $(GMVI)$ şi $(GSVI)$, deducem din rezultatele anterioare rezultate de existenţă pentru soluţiile problemei $(SVI)$.

**Propoziţia 6.3.8** (G. Bigi, A. Căpătă şi G. Kassay [18]) *Fie $A$ o mulţime convexă şi fie $F$ $v$-hemicontinuu. Dacă $\bar{a} \in A$ este o soluţie global eficientă a problemei $(MVI)$, atunci $\bar{a}$ este o soluţie a problemei $(SVI)$.*

Din Teorema 6.3.4, Teorema 6.3.5 şi Observaţia 6.3.2 deducem următoarele rezultate.

**Teorema 6.3.9** (G. Bigi, A. Capătă şi G. Kassay [18]) *Fie $A$ o mulţime compactă convexă, fie $K \subseteq Z$ un con Henig dilatator pentru $C$ cu $K^\sharp \neq \emptyset$ şi fie $F$ un operator $K$-monoton. Atunci problema $(MVI)$ admite o soluţie global eficientă.*

**Teorema 6.3.10** (G. Bigi, A. Capătă şi G. Kassay [18]) *Fie $A$ o mulţime compactă convexă, fie $K \subseteq Z$ un con Henig dilatator pentru $C$ cu $K^\sharp \neq \emptyset$. Dacă operatorul $F$ este $K$-monoton şi v-hemicontinuu, atunci problema $(SVI)$ admite o soluţie.*

## 6.4 Inegalităţi variaţionale multivoce de tip Minty şi Stampacchia

Fie $A$ o submulţime nevidă convexă a unui spaţiu Banach reflexiv $E$ şi fie $F : A \to \mathcal{F}(E^*)$ o funcţie multivocă unde $\mathcal{F}(E^*)$ este mulţimea submulţimilor nevide şi finite ale lui $E^*$. Studiem următoarele inegalităţi variaţionale, prezente în lucrarea L. J. Lin, Z. T. Yu şi G. Kassay [94]:

$$(MMVI) \qquad \text{găsiţi } \bar{a} \in A \text{ astfel încât } \inf_{v \in F(b)} \langle v, b - \bar{a} \rangle \geq 0 \text{ pentru orice } b \in A,$$

şi

$$(SMVI) \qquad \text{găsiţi } \bar{a} \in A \text{ astfel încât } \sup_{u \in F(\bar{a})} \langle u, b - \bar{a} \rangle \geq 0 \text{ pentru orice } b \in A.$$

Deoarece $F$ ia valori în $\mathcal{F}(E^*)$, aceste inegalităţi variaţionale multivoce devin:

$$(MMVI) \qquad \text{găsiţi } \bar{a} \in A \text{ astfel încât } \min_{v \in F(b)} \langle v, b - \bar{a} \rangle \geq 0 \text{ pentru orice } b \in A,$$

şi respectiv

$$(SMVI) \qquad \text{găsiţi } \bar{a} \in A \text{ astfel încât } \max_{u \in F(\bar{a})} \langle u, b - \bar{a} \rangle \geq 0 \text{ pentru orice } b \in A.$$

Observăm aceste probleme *inegalitatea variaţională multivocă Minty*, şi *inegalitatea variaţională multivocă Stampacchia*, respectiv. Notăm că $(MMVI)$ este echivalentă cu următoarea problemă scalară de echilibru:

$$(EP_1) \qquad \text{găsiţi } \bar{a} \in A \text{ astfel încât } h(\bar{a}, b) \geq 0 \text{ pentru orice } b \in A,$$

unde $h : A \times A \to \mathbb{R}$ este definit prin

$$h(a, b) := \min_{v \in F(b)} \langle v, b - a \rangle \text{ pentru orice } a, b \in A.$$

Luând în considerare această observaţie, deducem din Corolarul 2.1.5 următorul rezultat de existenţă referitor la soluţiile problemei $(MMVI)$.

**Teorema 6.4.1** (A. Capătă [35]) *Fie $A$ o mulţime compactă, şi fie următoarea condiţie îndeplinită: oricare ar fi $b_1, \ldots, b_n \in A$, şi oricare ar fi $\mu_1, \ldots, \mu_n \geq 0$ cu $\mu_1 + \cdots + \mu_n = 1$, are loc*

$$\sup_{a \in A} \sum_{j=1}^{n} \mu_j \min_{v \in F(b_j)} \langle v, b_j - a \rangle \geq 0.$$

*Atunci problema $(MMVI)$ admite o soluţie.*

Pentru a prezenta rezultate de existenţă ale problemei $(SMVI)$, avem nevoie de următoarea noţiune.

**Definiţia 6.4.2** (L. J. Lin, Z. T. Yu şi G. Kassay [94]) Fie $X$ şi $Y$ spaţii liniare topologice reale şi fie $A$ o submulţime nevidă convexă a lui $X$. Spunem că multifuncţia $T : A \to 2^Y$ este semicontinuă superior de-a lungul liniilor în punctul 0 dacă, oricare ar fi $a, b \in A$, multifuncţia

$$\forall\,\lambda \in [0,1] \mapsto T(\lambda b + (1-\lambda)a) \in 2^Y$$

este semicontinuă superior în 0.

**Teorema 6.4.3** (A. Capătă [34]) *Fie $A$ o mulţime compactă, fie $F$ semicontinuu superior de-a lungul liniilor în punctul 0 şi fie următoarea condiţie îndeplinită: oricare ar fi $b_1, \ldots, b_n \in A$ şi oricare ar fi $\mu_1, \ldots, \mu_n \geq 0$ cu $\mu_1 + \cdots + \mu_n = 1$, are loc*

$$\sup_{a \in A} \sum_{j=1}^{n} \mu_j \min_{v \in F(b_j)} \langle v, b_j - a \rangle \geq 0.$$

*Atunci problema $(SMVI)$ admite o soluţie.*

# Bibliografie


[1] C. D. Aliprantis, K. C. Border, *Infinite Dimensional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1999.

[2] L. Altangerel, R. I. Boţ, G. Wanka, *On gap functions for equilibrium problems via Fenchel duality*, Pacific Journal of Optimization **2** (2006), 667-678.

[3] Q. H. Ansari, *Vector equilibrium problems and vector variational inequalities*, in: F. Giannessi (ed.), *Vector Variational Inequalities and Vector Equilibria*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 2000, 1-15.

[4] Q. H. Ansari, I. V. Konnov, J. C. Yao, *Existence of a solution and variational principles for vector equilibrium problems*, Journal of Optimization Theory and Applications **110** (2001), 481-492.

[5] Q. H. Ansari, I. V. Konnov, J. C. Yao, *On generalized vector equilibrium problems*, Nonlinear Analysis **47** (2001), 543-554.

[6] Q. H. Ansari, W. Oettli, D. Schläger, *A generalization of vector equilibria*, Mathematical Methods of Operational Research **46** (1997), 147-152.

[7] Q. H. Ansari, A. H. Siddiqi, S. Y. Wu, *Existence and duality of generalized vector equilibrium problems*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **259** (2001), 115-126.

[8] Q. H. Ansari, X. Q. Yang, J. C. Yao, *Existence and duality of implicit vector variational problems*, Numerical Functional Analysis and Optimization **22** (2001), 815-829.

[9] Q. H. Ansari, J. C. Yao, *An existence result for the generalized vector equilibrium problem*, Applied Mathematics Letters **12** (1999), 53-56.

[10] H. Attouch, H. Brézis, *Duality for the sum of convex functions in general Banach spaces*, in: J. A. Barosso (ed.), *Aspects of Mathematics and its Applications*, North-Holland Mathematical Library, Amsterdam, 1986, 125-133.

[11] J. P. Aubin, I. Ekeland, *Applied Nonlinear Analysis*, John Wiley and Sons, New-York, 1984.

[12] M. Beldiman, *Equilibrium problems with set-valued mappings in Banach spaces*, Nonlinear Analysis **68** (2008), 3364-3371.

[13] H. P. Benson, *An improved definition of proper efficiency for vector maximization with respect to cones*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **71** (1979), 232-241.

[14] C. Berge, *Topological Spaces*, MacMillan, New York, 1963.

[15] M. Bianchi, N. Hadjisavvas, S. Schaible, *Vector equilibrium problems with generalized monotone bifunctions*, Journal of Optimization Theory and Applications **92** (1997), 527-542.

[16] M. Bianchi, G. Kassay, R. Pini, *Ekeland's principle for vector equilibrium problems*, Nonlinear Analysis **66** (2007), 1454-1464.

[17] M. Bianchi, S. Schaible, *Generalized monotone bifunctions and equilibrium problems*, Journal of Optimization Theory and Applications **90** (1996), 31-43.

[18] G. Bigi, **A. Capătă**, G. Kassay, *Existence results for strong vector equilibrium problems and their applications*, Optimization DOI: 10.1080/02331934.2010.528761.

[19] G. Bigi, M. Catellani, G. Kassay, *A dual view of equilibrium problems*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **342** (2008), 17-26.

[20] E. Blum, W. Oettli, *From optimization and variational inequalities to equilibrium problems*, Mathematics Student **63** (1994), 123-145.

[21] J. Borwein, *Proper efficient points for maximizations with respect to cones*, SIAM Journal of Control and Optimization **15** (1977), 57-63.

[22] J. M. Borwein, V. Jeyakumar, *On convexlike Lagrangian and minimax theorems*, Research Report 24, University of Waterloo, 1988.

[23] J. M. Borwein, V. Jeyakumar, A. S. Lewis, H. Wolkowicz, *Constrained approximation via convex programming*, preprint, University of Waterloo, 1998.

[24] J. M. Borwein, A. S. Lewis, *Partially finite convex programming, part I: Quasi relative interiors and duality theory*, Mathematical Programming **57** (1992), 15-48.

[25] J. M. Borwein, J. P. Penot, M. Théra, *Conjugate convex operators*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **102** (1984), 339-414.

[26] J. M. Borwein, D. Zhuang, *Super efficiency in vector optimization*, Transactions of the American Mathematical Society **338** (1993), 105-122.

[27] R. I. Boţ, **A. E. Capătă**, *Existence results and gap functions for the generalized equilibrium problem with composed functions*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications **72** (2010), 316-324.

[28] R. I. Boţ, S. M. Grad, G. Wanka, *Duality in Vector Optimization*, Springer-Verlag, Berlin, 2009.

[29] R. I. Boţ, G. Wanka, *A weaker regularity condition for subdifferential calculus and Fenchel duality in infinite dimensional spaces*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications **64** (2006), 2787-2804.

[30] W. W. Breckner, *Analiză Funcţională*, Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 2009.

[31] W. W. Breckner, G. Orbán, *Continuity Properties of Rationally s-Convex Mappings with Values in an Ordered Topological Linear Space*, Universitatea Babeş-Bolyai, Facultatea de Matematică, Cluj-Napoca, 1978.

[32] W. W. Breckner, G. Orbán, *Continuity of generalized convex mappings taking values in an ordered topological linear space*, Mathematica-Revue d'Analyse Numérique et de Théorie de l'Approximation, L'Analyse Numérique et de Théorie de l'Approximation **11** (1982), 15-33.

[33] R. S. Burachik, V. Jeyakumar, *A new geometrical condition for Fenchel's duality in infinite dimensional spaces*, Mathematical Programming **104** (2005), 229-233.

[34] **A. Capătă**, *Existence results for Stampacchia and Minty type generalized variational inequalitiy problems*, Annals of the Tiberiu Popoviciu Seminar of Functional Equations, Approximation and Convexity **7** (2009), 13-31.

[35] **A. Capătă**, *Existence and generalized duality of strong vector equilibrium problems* (trimis spre publicare).

[36] **A. Capătă**, *Existence results for proper efficient solutions of vector equilibrium problems and applications*, Journal of Global Optimization DOI: 10.1007/s10898-011-9649-6.

[37] **A. Capătă**, *Families of Henig dilating cones and proper efficiency in vector equilibrium problems*, Automation Computers and Applied Mathematics **19** (2010), 67-76.

[38] **A. Capătă**, G. Kassay, *On vector equilibrium problems and applications*, Taiwanese Journal of Mathematics **15** (2011), 365-380.

[39] **A. Capătă**, G. Kassay, B. Mosoni, *On weak multifunctions equilibrium problems*, in: R. S. Burachik and J. C. Yao (eds.), *Variational Analysis and Generalized Differentiation in Optimization and Control*, Springer 2011, 133-148.

[40] O. Chadli, Y. Chiang, S. Huang, *Topological pseudomonotonicity and vector equilibrium problems*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **270** (2002), 435-450.

[41] G.-Y. Chen, Q. M. Cheng, *Vector variational inequality and vector optimization*, in: Y. Sawaragi, K. Inoue and H. Nakayama (eds.), *Towards Interactive and Intelligent Decision Support Systems*, Springer-Verlag, New York, 1987, 408-416.

[42] G.-Y. Chen, S. H. Hou, *Existence of solutions for vector variational inequalities*, in: F. Giannessi (ed.), *Vector Variational Inequalities and Vector Equilibria*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 2000, 73-86.

[43] Y. Chiang, O. Chadli, J. C. Yao, *Existence of solutions to implicit vector variational inequalities*, Journal of Optimization Theory and Applications **116** (2003), 251-264.

[44] B. D. Craven, *Mathematical Programming and Control Theory*, Chapman and Hall, London, 1978.

[45] J. Dutta, V. Vetrivel, *On approximate minima in vector optimization*, Numerical Functional Analysis and Optimization **22** (2001), 845-859.

[46] M. Eidelheit, *Zur Theorie der konvexen Mengen in linearen normierten Räumen*, Studia Mathematica **6** (1936), 104-111.

[47] K. Fan, *Minimax theorems*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA **39** (1953), 42-47.

[48] K. Fan, *A generalization of Tychonoff's fixed point theorem*, Mathematische Annalen **142** (1961), 305-310.

[49] K. Fan, *A minimax inequality and applications*, in: O. Shisha (ed.), *Inequalities III*, Academic Press, New York, **3** (1972), 103-113.

[50] Y. P. Fang, N. J. Huang, *Vector equilibrium type problems with* $(S)_+$*-conditions*, Optimization **53** (2004), 269-279.

[51] Y. P. Fang, N. J. Huang, *Strong vector variational inequalities in Banach spaces*, Applied Mathematics Letters **19** (2006), 362-368.

[52] F. Ferro, *A minimax theorem for vector-valued functions*, Journal of Optimization Theory and Applications **60** (1989), 19-31.

[53] F. Flores-Bazán, F. Flores-Bazán, *Vector equilibrium problems under asymptotic analysis*, Journal of Global Optimization **26** (2003), 141-166.

[54] M. Fukushima, *A class of gap functions for quasi-variational inequality problems*, Journal of Industrial Management Optimization **3** (2007), 165-171.

[55] A. M. Geoffrion, *Proper efficiency and the theory of vector maximization*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **22** (1968), 613-630.

[56] F. Giannessi, *Theorems of alternative, quadratic programs and complementarity problems*, in: R. W. Cottle, F. Giannessi and J. L. Lions (eds.), *Variational Inequalities and Complementarity Problems*, Wiley, Chichester, 1980, 151-186.

[57] F. Giannessi, *On some connections among variational inequalities, combinatorial and continuous optimization*, Annals of Operations Research **58** (1995), 181-200.

[58] X. H. Gong, *Efficiency and Henig efficiency for vector equilibrium problems*, Journal of Optimization Theory and Applications **108** (2001), 139-154.

[59] X. H. Gong, *Optimality conditions for Henig and globally proper efficient solutions with ordering cone has empty interior*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **307** (2005), 12-31.

[60] X. H. Gong, *Strong vector equilibrium problems*, Journal of Global Optimization **36** (2006), 339-349.

[61] X. H. Gong, *Connectedness of the solution sets and scalarization for vector equilibrium problems*, Journal of Optimization Theory and Applications **133** (2007), 151-161.

[62] X. H. Gong, *Symmetric strong vector quasi-equilibrium problems*, Mathematical Methods of Operational Research **65** (2007), 305-314.

[63] X. H. Gong, *The strong minimax theorem and strong saddle points of vector-valued functions*, Nonlinear Analysis **68** (2008), 2228-2241.

[64] X. H. Gong, *Optimality conditions for vector equilibrium problems*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **342** (2008), 1455-1466.

[65] X. H. Gong, W. T. Fu, W. Liu, *Super efficiency for a vector equilibrium problem in locally convex topological vector spaces*, in: F. Giannessi (ed.) *Vector Variational Inequalities and Vector Equilibria*, Kluwer, Dordrecht, 233-252 (2000).

[66] V. V. Gorokhovik, P. P. Zabreiko, *On Fréchet differentiability of multifunctions*, Optimization **54** (2005), 391-409.

[67] M. G. Govil, A. Mehra, *$\epsilon$-optimality for multiobjective programming on a Banach space*, European Journal of Operational Research **157** (2004), 106-112.

[68] M. S. Gowda, M. Teboulle, *A comparison of constraint qualifications in infinite-dimensional convex programming*, SIAM Journal on Control and Optimization **28** (1990), 925-935.

[69] A. Göpfert , H. Riahi, C. Tammer, C. Zălinescu, *Variational Methods in Partially Ordered Spaces*, Springer-Verlag, New York, 2003.

[70] C. Gutiérrez, B. Jimenéz, V. Novo, *Multiplier rules and saddle-point theorems for Helbing's approximate solutions in convex Pareto problems*, Journal of Global Optimization **32** (2005), 367-383.

[71] N. Hadjisavvas, S. Komlósi, S. Schaible, *Handbook of Generalized Convexity and Generalized Monotonicity*, Springer Science, New York, 2005.

[72] R. Hartley, *On cone-efficiency, cone-convexity and cone-compactness*, SIAM Journal on Applied Mathematics **34** (1978), 211-222.

[73] M. I. Henig, *Proper efficiency with respect to cones*, Journal of Optimization Theory and Applications **36** (1982), 387-407.

[74] R. B. Holmes, *Geometric Functional Analysis*, Springer, Berlin, 1975.

[75] S. H. Hou, H. Yu, G.-Y. Chen, *On vector quasi-equilibrium problems with set-valued maps*, Journal of Optimization Theory and Applications **119** (2003), 485-498.

[76] N. J. Huang, J. Li, S. Y. Wu, *Gap functions for a system of generalized vector quasi-equilibrium problems with set-valued mappings*, Journal of Global Optimization **41** (2008), 401-415.

[77] A. N. Iusem, W. Sosa, *New existence results for equilibrium problems*, Nonlinear Analysis **52** (2003), 621-635.

[78] D. Inoan, J. Kolumbán, *Two existence results for variational inequalities*, Studia Universitatis Babeş-Bolyai University **LI** (2006), 85-95.

[79] J. Jahn, *Vector Optimization: Theory, Applications, and Extensions*, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[80] V. Jeyakumar, *Convexlike alternative theorems and mathematical programming*, Optimization **16** (1985), 643-652.

[81] V. Jeyakumar, *A generalization of a minimax theorem of Fan via a theorem of the alternative*, Journal of Optimization Theory and Applications **48** (1986), 525-533.

[82] G. Kassay, J. Kolumbán, *On a generalized sup-inf problem*, Journal of Optimization Theory and Applications **91** (1996), 651-670.

[83] B. Knaster, C. Kuratowski, S. Mazurkiewicz, *Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n-dimensionale Simplexe*, Fundamenta Mathematicae **11** (1935), 767-776.

[84] I. Konnov, T. L. Dinh, A. M. Rubinov (eds.), *Generalized Convexity and Related Topics*, Springer-Verlag, Berlin, 2007.

[85] I. V. Konnov, S. Schaible, *Duality for equilibrium problems under generalized monotonicity*, Journal of Optimization Theory and Applications **104** (2000), 395-408.

[86] I. V. Konnov, J. C. Yao, *Existence of solutions for generalized vector equilibrium problems*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **233** (1999), 328-335.

[87] H. W. Kuhn, A. W. Tucker, *Nonlinear programming*, in: J. Neyman (ed.), *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, University of California Press, Berkeley California, 1951, 481-492.

[88] D. Kuroiwa, *Convexity for set-valued maps*, Applied Mathematics Letters **9** (1996), 97-101.

[89] B. S. Lee, M. F. Khan, Salahuddin, *Generalized vector variational-type inequalities*, Computers and Mathematics with Applications **55** (2008), 1164-1169.

[90] S. X. Li, *Quasiconvexity and nondominated solutions in multiobjective programming*, Journal of Optimization Theory and Applications **88** (1996), 197- 208.

[91] Z. F. Li, *Benson proper efficiency in the vector optimization of set-valued maps*, Journal of Optimization Theory and Applications **98** (1998), 623-649.

[92] K. L. Lin, D. P. Yang, J. C. Yao, *Generalized vector variational inequalities*, Journal of Optimization Theory and Applications **92** (1997), 117-125.

[93] L. J. Lin, Q. H. Ansari, J. Y. Wu, *Geometric properties and coincide theorems with applications to generalized vector equilibrium problems*, Journal of Optimization Theory and Applications **117** (2003), 121-137.

[94] L. J. Lin, Z. T. Yu, G. Kassay, *Existence of equilibria for multivalued mappings and its applications to vectorial equilibria*, Journal of Optimization Theory and Applications **114** (2002), 189-208.

[95] D. T. Luc, *Theory of Vector Optimization*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[96] G. Mastroeni, *Gap functions for equilibrium problems*, Journal Global Optimization **27** (2003), 411-426.

[97] R. E. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer-Verlag, New York, 1998.

[98] E. Michael, *Continuous selections III*, Annals of Mathematics **65** (1957), 375-390.

[99] W. Oettli, *A remark on vector-valued equilibria and generalized monotonicity*, Acta Mathematica Vietnamica **22** (1997), 213-221.

[100] S. Paeck, *Convexlike and concavelike conditions in alternative, minimax, and minimization theorems*, Journal of Optimization Theory and Applications **74** (1992), 317-332.

[101] S. Park, *Some coincidence theorems on acyclic multifunctions and applications to KKM theory*, in: K. K. Tan (ed.), *Fixed Point Theory and Applications*, World Scientific, River Edge, 1992, 248-277.

[102] J. H. Qiu, Y. Hao, *Scalarization of Henig properly efficient points in locally convex spaces*, Journal of Optimization Theory and Applications DOI 10.1007/s10957-010-9708-z (2010).

[103] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, 1970.

[104] R. T. Rockafellar, *Conjugate Duality and Optimization*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1974.

[105] B. Rodrigues, *The Fenchel duality theorem in Fréchet spaces*, Optimization **21** (1990), 13-22.

[106] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1973.

[107] N. X. Tan, P. N. Tinh, *On the existence of equilibrium points of vector functions*, Numerical Functional Analysis and Optimization **19** (1998), 141-156.

[108] T. Tanaka, *Generalized semicontinuity and existence theorems for cone saddle points*, Applied Mathematical Optimization **36** (1997), 313-322.

[109] E. Tarafdar, *A fixed point theorem equivalent to Fan-Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz's theorem*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **128** (1997), 475-479.

[110] M. Théra, *Études des fonctions convexes vectoriellles semi-continues*, Thèse de 3^e^ cycle, Université de Pau, 1978.

[111] J. W. Tukey, *Some notes on the separation of convex sets*, Portugaliae Mathematica **3** (1942), 95-102.

[112] C. L. de Vito, *Functional Analysis*, Academic Press, New York, 1978.

[113] X. Q. Yang, J. C. Yao, *Gap functions and existence of solutions to set-valued vector variational inequalities*, Journal of Optimization Theory and Applications **115** (2002), 407-417.

[114] J. C. Yao, *Multi-valued variational inequalities with K-pseudomonotone operators*, Journal of Optmization Theory and Applications **83** (1994), 391-403.

[115] J. C. Yao, *Variational inequalities with generalized monotone operators*, Mathematics of Operations Research **19** (1994), 691-705.

[116] K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1980.

[117] S. J. Yu, J. C. Yao, *On vector variational inequalities*, Journal of Optimization Theory and Applications **89** (1996), 749-769.

[118] C. Zălinescu, *Solvability results for sublinear functions and operators*, Zeitschrift für Operations Research, Series A-B **31** (1987), A79-A101.

[119] X. Y. Zheng, *The domination property for efficiency in locally convex spaces*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **213** (1997), 455-467.