Universitatea „Babeş-Bolyai” Cluj-Napoca
Facultatea de Matematică şi Informatică
Departamentul de Matematică

Teoria Punctului Fix în spaţii Kasahara

Rezumatul tezei de doctorat

Conducător ştiinţific
Prof. Dr. Adrian-Olimpiu Petruşel

Student doctorand
Alexandru-Darius Filip

Cluj-Napoca
2011

Cuprins

Introducere

Teoria punctului fix devine în ultima vreme, nu numai un domeniu cu o amplă dezvoltare, ci şi un instrument util în rezolvarea diferitelor probleme care apar în diferite domenii ale matematicii pure şi aplicate. Un element central al teoriei metrice de punct fix este Principiul Contracţiilor lui Banach-Caccioppoli. În prezent avem numeroase generalizări ale acestui rezultat în contextul unei game variate de spaţii metrice generalizate. Dacă analizăm cu atenţie demonstraţiile acestor generalizări, putem observa că proprietăţile metricii, în particular anumite axiome ale metricii, nu sunt întotdeauna esenţiale. Drept urmare se pune următoarea problemă: *Care ar fi spaţiile generale în care au loc teoremele de punct fix pentru operatori de tip contractiv ?*

Această problemă a fost studiată încă din 1975 de către un distins matematician, Shouro Kasahara, profesor la Universitatea din Kobe. Plecând de la lucrarea lui Maurice Fréchet [42], care a introdus structura de L-spaţiu, Kasahara a înzestrat această structură cu o funcţională d ce nu este neapărat o metrică. Astfel Kasahara a definit un spaţiu mai general: L-spaţiul d-complet. Utilizând această noţiune, Kasahara extinde teorema lui Maia, publicată în 1968 în [84], un binecunoscut rezultat de punct fix care are loc în contextul unei mulţimi înzestrate cu două metrici. Menţionăm aici şi alţi autori care au obţinut teoreme de punct fix în contextul unei mulţimi înzestrate cu două metrici: V. Berinde [10], S. Iyer [57], A. Petruşel şi I.A. Rus [102], R. Precup [105], I.A. Rus [118], I.A. Rus, A.S. Mureşan şi V. Mureşan [122], B. Rzepecki [129], L.M. Saliga [130].

Într-un anumit număr de lucrări [66]-[70], Kasahara a construit o teorie a punctului fix în L-spaţii d-complete. T.L. Hicks [47] şi T.L. Hicks - B.E. Rhoades [49] au demonstrat câteva teoreme de punct fix în spaţii topologice d-complete. Alte rezultate în această direcţie au fost obţinute de V.G. Angelov [3], J. Daneš [22], K. Iséki [55], L. Guran [45], P.Q. Khanh [75].

Cu toate acestea, noţiunea de L-spaţiu d-complet a fost, într-un anumit sens, destul de dificil de utilizat. Astfel, luând în considerare lucrările lui Kasahara precum şi rezultatele obţinute de matematicienii amintiţi mai sus, Ioan A. Rus a definit în 2010 următoarele noţiuni *spaţiu Kasahara*, *spaţiu Kasahara generalizat* şi *spaţiu Kasahara în sens larg*. Lucrarea sa [121] conţine de asemenea teoreme de punct fix şi probleme propuse în legătură cu spaţiile Kasahara. Anumite soluţii la problemele propuse pot fi găsite în această teză.

Teza de doctorat este structurată în trei capitole, fiecare capitol fiind împărţit în mai multe secţiuni.

Capitolul 1: Preliminarii.

În acest capitol prezentăm noţiunile şi rezultatele de bază referitoare la L-spaţii, spaţii metrice generalizate, spaţii metrice parţiale, w-distanţă şi τ-distanţă într-un spaţiu metric (X, d), spaţii Kasahara şi operatori definiţi pe spaţii Kasahara, ce vor fi abordate în capitolele următoare ale tezei, în vederea prezentării rezultatelor din teza. Contribuţiile proprii cuprinse în acest capitol sunt câteva soluţii la Problemele 1.6.1, 1.6.2 şi 1.6.3 propuse de I.A. Rus în [121].

Capitolul 2: Contracţii generalizate în spaţii Kasahara.

$\diamond$ În prima secţiune a acestui capitol prezentăm teoria unor binecunoscute rezultate de punct fix precum Principiul Contracţiilor lui Banach-Caccioppoli, Principiul Contracţiilor pe Grafic, Teoreme de tip Caristi-Browder şi Matkowski. Rezultatele noastre se referă la contracţii univoce generalizate în contextul spaţiilor Kasahara $(X, \to, d)$, unde $d : X\times X \to \mathbb{R}_+$ este o funcţională. Prezentăm de asemenea unele extensii ale rezultatelor noastre în cazul spaţiilor Kasahara generalizate şi în sens larg. Contribuţiile proprii din această secţiune sunt: Teorema 2.1.1 $-$ o teorie a punctului fix în spaţii Kasahara, care extinde şi completează totodată Principiul Contracţiilor lui Banach-Caccioppoli; Teorema 2.1.2 $-$ un rezultat local de punct fix pentru operatori Zamfirescu în contextul spaţiilor Kasahara, fiind o extindere dar şi o generalizare a teoremei locale de punct fix a lui Krasnoselskii; Teorema 2.1.3 $-$ un rezultat de punct fix în spaţii Kasahara generalizate ($d(x, y) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$) pentru α-contracţii; Teorema 2.1.5 $-$ o teorie a punctului fix pentru varianta locală a Principiului Contracţiilor lui Banach-Caccioppoli, în contextul spaţiilor Kasahara în sens larg (d este o w-distanţă); Teorema 2.1.6 $-$ o teoremă de punct fix în contextul spaţiilor Kasahara în sens larg (d este perturbată cu o funcţie φ crescătoare, subaditivă şi continuă), care extinde şi completează Principiul Contracţiilor lui Banach-Caccioppoli, Principiul Contracţiilor pe Grafic, teoremele de punct fix de tip Caristi-Browder şi Matkowski; Teorema 2.1.2, care extinde Teorema 1 prezentată de T. Zamfirescu în lucrarea [150]; Lema 2.1.2; Definiţiile 2.1.7, 2.1.8; Observaţia 2.1.2 şi Exemplele 2.1.2, 2.1.3. Majoritatea rezultatelor prezentate în prima secţiune se regăsesc şi în următoarele lucrări: A.-D. Filip [35], [36]; A.-D. Filip şi A. Petruşel [40].

$\diamond$ În a doua secţiune prezentăm legătura dintre teoremele de punct fix de tip Maia şi teoremele de punct fix din spaţiile Kasahara. Sunt prezentate de asemenea şi unele teoreme de punct fix de tip Maia în contextul unui spaţiu înzestrat cu două metrici. Contribuţiile proprii din această secţiune sunt: Teorema 2.2.2 care este un rezultat de punct fix referitor la aproape contracţii definite pe o mulţime înzestrată cu două metrici vectoriale, teoremă ce extinde şi generalizează teorema de punct fix a lui Maia; Observaţia 2.2.4 în care se specifică legătura dintre teoremele de punct fix din spaţiile Kasahara şi teoremele de punct fix de tip Maia. Teorema 2.2.2 se regăseşte în lucrarea A.-D. Filip şi A. Petruşel [39].

$\diamond$ În a treia secţiune, introducem o noţiune nouă: *spaţiu Kasahara relativ la un operator* şi prezentăm în acest context câteva aplicaţii referitoare la existenţa şi unicitatea soluţiilor pentru ecuaţiile diferenţiale şi integrale. Contribuţiile proprii din această secţiune sunt: Teorema 2.3.1 care este o teorie a punctului fix în spaţiile Kasahara relative la un operator, ce extinde şi completează Principiul Contracţiilor lui Banach-Caccioppoli; Teorema 2.3.2 care este o teorie a punctului fix în contextul spaţiilor Kasahara relative la un operator, ce extinde şi completează Principiul Contracţiilor pe Grafic; Teorema 2.3.3 care este o aplicaţie a Teoremei 2.3.1 referitoare la existenţa şi unicitatea soluţiilor pentru ecuaţiile integrale; Teorema

2.3.4 care este de asemenea o aplicaţie a Teoremei 2.3.1 referitoare la existenţa şi unicitatea soluţiilor pentru problemele cu condiţii la limită; Definiţia 2.3.1; Observaţiile 2.3.1, 2.3.2 şi 2.3.3; Exemplele 2.3.1 şi 2.3.2. Toate aceste contribuţii se regăsesc în lucrarea A.-D. Filip [34].

Capitolul 3: Contracţii multivoce generalizate în spaţii Kasahara.

$\diamond$ În prima secţiune a acestui capitol, prezentăm câteva teoreme de punct fix pentru contracţii multivoce generalizate definite pe spaţii Kasahara, spaţii Kasahara generalizate şi spaţii Kasahara în sens larg. Contribuţiile proprii din această secţiune sunt: Teorema 3.1.2 care extinde teorema de punct fix a lui Nadler (Nadler [94]) de la contextul spaţiilor metrice complete la contextul spaţiilor Kasahara; Teorema 3.1.3 prezentată sub forma unei teorii a Teoremei 3.1.2; Teorema 3.1.4 care este un rezultat de punct fix strict, similar Teoremei 3.1.3; Teorema 3.1.5 care este un rezultat local de punct fix, similar Teoremei 2.1.2, dar pentru operatori Zamfirescu multivoci; Teorema 3.1.6 care extinde Teorema 3.1.5 în contextul spaţiilor Kasahara generalizate ($d(x, y) \in \mathbb{R}^m_+$); Teorema 3.1.7 prezentată ca o aplicaţie la operatorii Zamfirescu multivoci definiţi pe spaţii Kasahara generalizate, referitoare la existenţa soluţiilor sistemelor de incluziuni semiliniare; Teorema 3.1.8 care este un rezultat de punct fix pentru operatori Zamfirescu multivoci în contextul spaţiilor Kasahara în sens larg; Corolarele 3.1.1, 3.1.2; Lemele 3.1.2, 3.1.3; Definiţia 3.1.2 şi Observaţiile 3.1.4, 3.1.5. Majoritatea rezultatelor prezentate în această secţiune se regăsesc şi în următoarele lucrări: A.-D. Filip [32], [33], [37].

$\diamond$ În a doua secţiune a acestui capitol prezentăm câteva rezultate de punct fix de tip Maia, în strânsă legătură cu rezultatele de punct fix obţinute în prima secţiune a celui de-al treilea capitol, pentru contracţii multivoce generalizate în spaţii Kasahara. Contribuţiile proprii din această secţiune sunt: Theorem 3.2.2 care este un rezultat local de punct fix, de tip Maia, în contextul spaţiilor metrice; Teorema 3.2.3 care este un rezultat local de punct fix, de tip Maia, în contextul spaţiilor metrice generalizate ($d(x, y) \in \mathbb{R}^m_+$); Corolarele 3.2.1 şi 3.2.2; Observaţiile 3.2.1, 3.2.2. Rezultatele prezentate în această secţiune sunt incluse în următoarele lucrări: A.-D. Filip [31], [32], [33]; A.-D. Filip şi A. Petruşel [39].

$\diamond$ În a treia secţiune a acestui capitol introducem noţiunea de *spaţiu Kasahara relativ la un operator multivoc* şi demonstrăm două teoreme de punct fix pentru α-contracţii multivoce în contextul spaţiilor Kasahara relative la operatori multivoci. Contribuţiile proprii din această secţiune sunt: Teoremele 3.3.1 şi 3.3.2; Definiţia 3.3.1 şi Exemplul 3.3.1.

Contribuţiile autorului prezentate în această teză se regăsesc şi în următoarele lucrări:

- A.-D. Filip, *On the existence of fixed points for multivalued weak contractions*, Proceedings of the International Conference on Theory and Applications of Mathematics and Informatics, ICTAMI 2009, Alba Iulia, pp. 149-158.

- A.-D. Filip, *Fixed point theorems for multivalued contractions in Kasahara spaces*, Carpathian J. Math., submitted.

- A.-D. Filip, *Perov's fixed point theorem for multivalued mappings in generalized Kasahara spaces*, Studia Univ. Babeş-Bolyai Math., 56(2011), no. 3, 19-28.

- A.-D. Filip, *Fixed point theorems in Kasahara spaces with respect to an operator and applications*, Fixed Point Theory, 12(2011), no. 2, 329-340.

- A.-D. Filip, *Fixed point theory in large Kasahara spaces*, Anal. Univ. de Vest, Timişoara, submitted.
- A.-D. Filip, *A note on Zamfirescu's operators in Kasahara spaces*, General Mathematics, submitted.
- A.-D. Filip, *Several fixed point results for multivalued Zamfirescu operators in Kasahara spaces*, JP Journal of Fixed Point Theory and Applications, submitted.
- A.-D. Filip şi P.T. Petra, *Fixed point theorems for multivalued weak contractions*, Studia Univ. Babeş-Bolyai Math., 54(2009), no. 3, 33-40.
- A.-D. Filip şi A. Petruşel, *Fixed point theorems on spaces endowed with vector-valued metrics*, Fixed Point Theory and Applications, 2010, Art. ID 281381, 15 pp.
- A.-D. Filip şi A. Petruşel, *Fixed point theorems for operators in generalized Kasahara spaces*, Sci. Math. Jpn., submitted.

O parte importantă din rezultatele originale demonstrate în această teză au fost de asemenea prezentate la următoarele conferinţe ştiinţifice:

- International Conference on Theory and Applications in Mathematics and Informatics (ICTAMI), September 3^{rd}-6^{th}, 2009, Alba Iulia, Romania;
- The 7^{th} International Conference on Applied Mathematics (ICAM7), September 1^{st}-4^{th}, 2010, North University of Baia Mare, Romania;
- International Conference on Nonlinear Operators, Differential Equations and Applications (ICNODEA), July 5^{th}-8^{th}, 2011, Babes-Bolyai University of Cluj-Napoca, Romania;
- The 13^{th} International Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing (SYNASC), September 26^{th}-29^{th}, 2011, West University of Timişoara, Romania.

Cuvinte cheie: punct fix, spaţiu Kasahara, spaţiu Kasahara generalizat, spaţiu Kasahara în sens larg, spaţiu Kasahara relativ la un operator, L-spaţiu, w-distanţă, τ-distanţă, premetrică, cvasimetrică, metrică dislocată, metrică parţială, matrice convergentă la zero, şir al aproximaţiilor succesive, operator Picard, operator slab Picard.

Capitolul 1

Preliminarii

Scopul acestui capitol este acela de a prezenta noţiunile şi rezultatele de bază ce vor fi abordate în capitolele următoare ale tezei, în vederea prezentării rezultatelor acestei teze. În acest sens, sunt reamintite noţiunile de L-spaţiu, metrică generalizată, metrică parţială, w-distanţă, τ-distanţă, spaţiu Kasahara, spaţiu Kasahara generalizat şi spaţiu Kasahara în sens larg, toate aceste noţiuni fiind însoţite de prezentarea proprietăţilor caracteristice şi a unor exemple ilustrative. Un al doilea scop al acestui capitol este acela de a prezenta câteva soluţii la Problemele 1.6.1, 1.6.2 şi 1.6.3, propuse de I.A. Rus în lucrarea [121].

În vederea realizării *Preliminariilor* au fost studiate următoarele referinţe bibliografice: M. Fréchet [42]; L.M. Blumenthal [12]; M.M. Bonsangue, F. van Breugel şi J.J.M.M. Rutten [13]; O. Kada, T. Suzuki şi W. Takahashi [60]; S. Kasahara [62], [66]; I.A. Rus [117], [119], [121]; I.A. Rus, A. Petruşel şi G. Petruşel [124]; T. Suzuki [139], [140].

1.1 L-spaţii

În această secţiune reamintim noţiunea de L-spaţiu, un spaţiu abstract în care funcţionează unul dintre instrumentele de bază utilizat în teoria ecuaţiilor operatoriale, în special în teoria punctului fix: metoda aproximaţiilor succesive. Pe de altă parte, noţiunea de L-spaţiu are un rol important în definirea spaţiilor Kasahara. Câteva exemple de L-spaţii sunt de asemenea prezentate.

Noţiunea de L-spaţiu a fost introdusă în 1906 de M. Fréchet în lucrarea [42] după cum urmează:

Definiţia 1.1.1 (M. Fréchet [42], I.A. Rus [117])**.** *Fie X o mulţime nevidă. Fie*

$$s(X) := \big\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid x_n \in X,\ n \in \mathbb{N}\big\}.$$

Fie $c(X) \subset s(X)$ o submulţime a lui $s(X)$ şi $Lim : c(X) \to X$ un operator. Prin definiţie, tripletul $(X, c(X), Lim)$ se numeşte L-spaţiu dacă următoarele condiţii sunt îndeplinite:

(i) Dacă $x_n = x$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, atunci $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c(X)$ şi $Lim(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = x$.

(*ii*) *Dacă* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c(X)$ *şi* $Lim(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = x$, *atunci pentru orice subşir* $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ *al lui* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *avem că* $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}} \in c(X)$ *şi* $Lim(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}} = x$.

Prin definiţie, un element $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ al lui $c(X)$ se numeşte şir convergent, $x = Lim(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este limita acestui şir şi vom nota acest lucru prin

$$x_n \to x \text{ când } n \to \infty.$$

Notăm structura de L-spaţiu pe X prin $(X, \to)$.

Exemplul 1.1.1. *În general, un L-spaţiu este orice mulţime înzestrată cu o structură ce implică o noţiune de convergenţă a şirurilor. Spaţiile topologice Hausdorff, spaţiile metrice, spaţiile metrice generalizate în sens Perov (i.e.* $d(x,y) \in \mathbb{R}^m_+$*), spaţiile metrice generalizate în sens Luxemburg (i.e.* $d(x,y) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$*), spaţiile* K*-metrice (i.e.* $d(x,y) \in K$*, unde* K *este un con într-un spaţiu Banach ordonat), spaţiile Gauge, spaţiile* 2*-metrice, spaţiile* D*-*R *, spaţiile metrice probabilistice, spaţiile sintopogene, sunt exemple de L-spaţii. Mai multe detalii în acest sens se pot găsi în lucrarea lui I.A. Rus [117] şi a referinţelor acesteia.*

1.2 Spaţii metrice generalizate

În această secţiune prezentăm noţiunile de G*-metrică* şi *funcţionala distanţă* definite pe o mulţime nevidă X, ambele noţiuni fiind utilizate în definirea spaţiului metric generalizat. Legătura dintre L-spaţii şi spaţiile metrice generalizate este de asemenea studiată.

Prin metrică generalizată definită pe o mulţime nevidă X înţelegem:

1°. O funcţională $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ (numită şi *funcţională distanţă*) care satisface anumite axiome.

2°. O funcţională $d : X\times X \to (G, +, \le, \xrightarrow{G})$ (numită şi G-metrică) care satisface următoarele axiome

(*i*) $d(x,y) \ge 0$, oricare ar fi $x,y \in X$ şi $d(x,y) = 0$ dacă şi numai dacă $x = y$;

(*ii*) $d(x,y) = d(y,x)$, oricare ar fi $x,y \in X$;

(*iii*) $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$, oricare ar fi $x,y,z \in X$,

unde structura $(G, +, \le, \xrightarrow{G})$ este un L-grup ordonat [1].

[1]Fie $(G,+)$ un grup, $\le$ o relaţie de ordine parţială pe G, iar $\xrightarrow{G}$ o structură de L-spaţiu pe G. Prin definiţie, $(G, +, \le, \xrightarrow{G})$ este un L-grup ordonat dacă următoarele axiome au loc:

(1) $x_n \to x$ şi $y_n \to y$ când $n \to \infty$ implică $x_n + y_n \to x + y$ când $n \to \infty$;

(2) $x_n \to x$, $y_n \to y$ când $n \to \infty$ şi $x_n \le y_n$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ implică $x \le y$;

(3) $x \le y$ şi $u \le v$ implică $x + u \le y + v$.

Mai multe consideraţii legate de L-grupuri ordonate pot fi găsite în lucrarea lui I.A. Rus, A. Petruşel şi G. Petruşel [124], p.79 .

În această secţiune analizăm următoarea problemă.

Problema 1.2.1. *Care din funcţionalele distanţă $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ induc o structură de L-spaţiu pe X?*

1.3 Spaţii metrice parţiale

În această secţiune reamintim noţiunea de metrică parţială ca un caz particular de metrică generalizată. Câteva exemple de spaţii metrice parţiale sunt de asemenea prezentate. Definim noţiunile de convergenţă induse de cvasimetrica q_p şi metrica d_p, ambele fiind funcţionale obţinute dintr-o metrică parţială p.

Definiţia 1.3.1 (S.G. Matthews [87])**.** *Fie X o mulţime nevidă. O funcţională $p : X \times X \to \mathbb{R}_+$ este o metrică parţială pe X dacă p satisface următoarele condiţii:*

(p_1) $p(x, x) = p(y, y) = p(x, y)$ *dacă şi numai dacă* $x = y$;

(p_2) $p(x, x) \leq p(x, y)$, *oricare ar fi* $x, y \in X$;

(p_3) $p(x, y) = p(y, x)$, *oricare ar fi* $x, y \in X$;

(p_4) $p(x, y) \leq p(x, z) + p(z, y) - p(z, z)$, *oricare ar fi* $x, y, z \in X$.

Cuplul (X, p), unde X este o mulţime nevidă, iar p este o metrică parţială pe X, se numeşte spaţiu metric parţial.

Exemplul 1.3.1 (I.A. Rus [119])**.** *Fie (X, d) un spaţiu metric. Atunci (X, d) este un spaţiu metric parţial.*

Exemplul 1.3.2 (S.G. Matthews [87])**.** *Fie $X := \{[a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}_+,\ a \leq b\}$ şi $p : X \times X \to \mathbb{R}_+$ o funcţională definită prin*

$$p([a, b], [c, d]) := \max\{b, d\} - \min\{a, c\},\ \text{oricare ar fi } [a, b], [c, d] \in X,\ \text{cu } [c, d] \subseteq [a, b].$$

Atunci (X, p) este un spaţiu metric parţial.

Observaţia 1.3.1. *Mai multe consideraţii legate de spaţiile metrice parţiale şi aplicaţii pe aceste spaţii, se pot găsi în lucrările lui S.G. Matthews [87], [88], H.-P. A. Künzi şi V. Vajner [81], M. Fitting [41], R. Kopperman, S. Matthews şi H. Pajoohesh [79], S.J. O'Neill [97], S. Romaguera şi M. Schellekens [109], A.K. Seda [134], S. Oltra şi O. Valero [96], I.A. Rus [119].*

1.4 w-distanţă pe un spaţiu metric (X, d)

O alta metrică generalizată este aşa numita w-distanţă. Prezentăm în această secţiune definiţia noţiunii de w-distanţă, precum şi câteva proprietăţi şi exemple ale acesteia.

Definiţia 1.4.1 (O. Kada, T. Suzuki şi W. Takahashi [60]). *Fie (X, d) un spaţiu metric. Atunci funcţionala $p : X \times X \to \mathbb{R}_+$ se numeşte w-distanţă pe X dacă următoarele condiţii sunt îndeplinite:*

(w_1) $p(x, z) \leq p(x, y) + p(y, z)$, *oricare ar fi* $x, y, z \in X$;

(w_2) pentru orice $x \in X$, $p(x, \cdot) : X \to \mathbb{R}_+$ *este semicontinuă inferior;*

(w_3) pentru orice $\varepsilon > 0$, *există* $\delta > 0$ *astfel încât* $p(z, x) \leq \delta$ *şi* $p(z, y) \leq \delta$ *să implice* $d(x, y) \leq \varepsilon$.

Exemplul 1.4.1 (L. Guran [45]). *Fie (X, d) un spaţiu metric. Atunci metrica d este o w-distanţă pe (X, d).*

Exemplul 1.4.2 (L. Guran [45]). *Fie X un spaţiu liniar normat cu norma $\|\cdot\|$. Atunci funcţionala $p : X \times X \to \mathbb{R}_+$, definită prin $p(x, y) = \|x\| + \|y\|$, oricare ar fi $x, y \in X$, este o w-distanţă pe X.*

Observaţia 1.4.1. *Mai multe consideraţii legate de w-distanţe se pot găsi în lucrările lui O. Kada, T. Suzuki şi W. Takahashi [60], T. Suzuki [138], L. Guran [45] şi referinţele cuprinse în aceste lucrări.*

1.5 τ-distanţă pe un spaţiu metric (X, d)

În lucrarea [139], T. Suzuki introduce noţiunea de τ-distanţă, definită pe un spaţiu metric, care este un concept generalizat al noţiunilor de w-distanţă şi distanţă Tataru (a se vedea D. Tataru [144]). De asemenea T. Suzuki prezintă generalizări pentru Principiul Contracţiilor lui Banach-Caccioppoli, teorema de punct fix a lui Caristi, principiul variaţional al lui Ekeland şi teorema de minimizare nonconvexă a lui Takahashi.

Definiţia 1.5.1 (T. Suzuki [139]). *Fie (X, d) un spaţiu metric. O funcţională $p : X \times X \to \mathbb{R}_+$ se numeşte τ-distanţă pe X dacă există un operator $\eta : X \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ şi următoarele condiţii sunt îndeplinite:*

(τ_1) $p(x, z) \leq p(x, y) + p(y, z)$, *oricare ar fi* $x, y, z \in X$;

(τ_2) $\eta(x, 0) = 0$ *şi* $\eta(x, t) \geq t$ *oricare ar fi* $x \in X$ *şi* $t \in \mathbb{R}_+$, *şi* η *este concavă şi continuă în a doua variabilă;*

(τ_3) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{m \geq n} \eta(z_n, p(z_n, x_m)) = 0$ *implică* $p(w, x) \leq \liminf\limits_{n\to\infty} p(w, x_n)$, *oricare ar fi* $w \in X$;

(τ_4) $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{m\geq n} p(x_n, y_m) = 0$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} \eta(x_n, t_n) = 0$ *implică* $\lim\limits_{n\to\infty} \eta(y_n, t_n) = 0$;

(τ_5) $\lim\limits_{n\to\infty} \eta(z_n, p(z_n, x_n)) = 0$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} \eta(z_n, p(z_n, y_n)) = 0$ *implică* $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$.

Exemplul 1.5.1 (T. Suzuki [139]). *Fie p o w-distanţă definită pe un spaţiu metric (X, d). Atunci p este o τ-distanţă pe (X, d).*

Exemplul 1.5.2 (T. Suzuki [139]). *Fie p o τ-distanţă pe un spaţiu metric X şi fie c un număr real pozitiv. Atunci funcţionala $q : X \times X \to \mathbb{R}_+$, definită prin $q(x, y) = c \cdot p(x, y)$, oricare ar fi $x, y \in X$, este de asemenea o τ-distanţă pe X.*

Observaţia 1.5.1. *Mai multe consideraţii referitoare la τ-distanţă şi la rezultate de punct fix ce folosesc această noţiune, pot fi găsite în lucrarea lui T. Suzuki [139], [140] şi L. Guran [45].*

1.6 Spaţii Kasahara

Fie X o mulţime nevidă şi $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ o funcţională. Fie $\to$ o structură de convergenţă pe X. În lucrarea lui S. Kasahara [66], L-spaţiul $(X, \to)$ se numeşte d-complet dacă pentru orice şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din X, cu $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} d(x_n, x_{n+1}) < +\infty$, avem că $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge în $(X, \to)$.

În mai multe lucrări [66]-[70] S. Kasahara construieşte o teorie a punctului fix în L-spaţii d-complete. T.L. Hicks [47] şi T.L. Hicks - B.E. Rhoades [49] prezintă câteva teoreme de punct fix într-un spaţiu topologic d-complet. Alte rezultate în această direcţie au fost obţinute de V.G. Angelov [3], J. Daneš [22], K. Iséki [55], L. Guran [45], P.Q. Khanh [75]. Pe de altă parte, unii autori prezintă câteva teoreme de punct fix în contextul unei mulţimi înzestrate cu două metrici: M.G. Maia [84], V. Berinde [10], R. Precup [105], A. Petruşel şi I.A. Rus [102], I.A. Rus [118], B. Rzepecki [129], L.M. Saliga [130], S. Iyer [57], I.A. Rus, A. Petruşel şi G. Petruşel ([124], pp. 39-40).

Reamintim noţiunile de spaţiu Kasahara, spaţiu Kasahara generalizat şi spaţiu Kasahara în sens larg, noţiuni ce au fost introduse de I.A. Rus în lucrarea [121]:

Definiţia 1.6.1 (*Spaţiu Kasahara*, I.A. Rus [121]). *Fie $(X, \to)$ un L-spaţiu şi $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ o funcţională. Tripletul $(X, \to, d)$ este un spaţiu Kasahara dacă şi numai dacă avem următoarea condiţie de compatibilitate între $\to$ şi d:*

$$x_n \in X,\ \sum_{n\in\mathbb{N}} d(x_n, x_{n+1}) < +\infty \ \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge în } (X, \to). \tag{1.6.1}$$

Definiţia 1.6.2 (*Spaţiu Kasahara generalizat*, I.A. Rus [121]). *Fie $(X, \to)$ un L-spaţiu, $(G, +, \leq, \xrightarrow{G})$ un semigrup ordonat cu unitate, înzestrat cu o structură de L-spaţiu, 0 cel mai mic element în $(G, \leq)$ şi $d_G : X \times X \to G$ un operator. Tripletul $(X, \to, d_G)$ se numeşte* *spaţiu Kasahara generalizat dacă şi numai dacă avem următoarea condiţie de compatibilitate între $\to$ şi d_G:*

$$x_n \in X,\ \sum_{n\in\mathbb{N}} d_G(x_n, x_{n+1}) < +\infty \ \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge în } (X, \to). \tag{1.6.2}$$

De notat este faptul că prin inegalitatea cu simbolul $+\infty$ ce apare în condiţia de compatibilitate (1.6.2), înţelegem că seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} d_G(x_n, x_{n+1})$ este mărginită în $(G, \leq)$.

Definiţia 1.6.3 (*Spaţiu Kasahara în sens larg*, I.A. Rus [121]). *Fie $(X, \to)$ un L-spaţiu, $(G, +, \leq, \xrightarrow{G})$ un semigrup ordonat cu unitate, înzestrat cu o structură de L-spaţiu, 0 cel mai mic elemenet în $(G, \leq)$ şi $d_G : X \times X \to G$ un operator. Tripletul $(X, \to, d_G)$ se numeşte spaţiu Kasahara în sens larg dacă şi numai dacă avem următoarea condiţie de compatibilitate dintre $\to$ şi d_G:*

$$\begin{aligned} x_n \in X,\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} &\text{ şir Cauchy (într-un anumit sens) în raport cu } d_G \\ &\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge în } (X, \to). \end{aligned} \tag{1.6.3}$$

Prezentăm în continuare câteva exemple de spaţii Kasahara.

Exemplul 1.6.1 (Spaţiul Kasahara trivial). *Fie (X, d) un spaţiu metric complet. Fie $\xrightarrow{d}$ structura de convergenţă indusă de metrica d pe X. Atunci $(X, \xrightarrow{d}, d)$ este un spaţiu Kasahara.*

Exemplul 1.6.2 (I.A. Rus [121]). *Fie (X, ρ) un spaţiu semimetric complet, unde $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$ este continuă. Fie $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ o funcţională astfel încât există $c > 0$ cu $\rho(x, y) \leq c \cdot d(x, y)$, oricare ar fi $x, y \in X$. Atunci $(X, \xrightarrow{\rho}, d)$ este un spaţiu Kasahara.*

Exemplul 1.6.3 (I.A. Rus [121]). *Fie (X, ρ) un spaţiu cvasimetric complet, unde $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$. Fie $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ o funcţională astfel încât există $c > 0$ cu $\rho(x, y) \leq c \cdot d(x, y)$, oricare ar fi $x, y \in X$. Atunci $(X, \xrightarrow{\rho}, d)$ este un spaţiu Kasahara.*

Exemplul 1.6.4 (I.A. Rus [121]). *Fie $\rho : X \times X \to \mathbb{R}^m_+$ o metrică completă generalizată pe o mulţime X. Fie $x_0 \in X$ şi $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$ cu $\lambda \neq 0$. Fie $d_\lambda : X \times X \to \mathbb{R}^m_+$ definită prin*

$$d_\lambda(x, y) := \begin{cases} \rho(x, y), & \text{dacă } x \neq x_0 \text{ şi } y \neq x_0 \\ \lambda, & \text{dacă } x = x_0 \text{ sau } y = x_0. \end{cases}$$

Atunci $(X, \xrightarrow{\rho}, d_\lambda)$ este un spaţiu Kasahara generalizat.

Exemplul 1.6.5 (I.A. Rus [121]). *Fie (X, ρ) un spaţiu metric parţial complet. Atunci $(X, \xrightarrow{\rho}, d_\rho)$ este un spaţiu Kasahara în sens larg, unde $d_\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$ este definită prin*

$$d_\rho(x, y) := \rho(x, y) + \rho(y, x) - \rho(x, x) - \rho(y, y), \text{ oricare ar fi } x, y \in X.$$

În această secţiune prezentăm câteva soluţii la următoarele probleme, formulate de I.A. Rus în lucrarea [121]:

Problema 1.6.1. *Să se construiască exemple relevante de spaţii Kasahara.*

Problema 1.6.2. *Fie p o w-distanţă definită pe un spaţiu metric complet (X, d). În ce condiţii $(X, \stackrel{d}{\to}, p)$ este un spaţiu Kasahara în sens larg?*

Problema 1.6.3. *Fie p o τ-distanţă definită pe un spaţiu metric complet (X, d). În ce condiţii $(X, \stackrel{d}{\to}, p)$ este un spaţiu Kasahara în sens larg?*

1.7 Operatori definiţi pe spaţii Kasahara

În această secţiune considerăm spaţiul Kasahara $(X, \to, d)$, unde $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ este o funcţională. Definim proprietăţile de continuitate şi închidere pentru operatorii *self* $f : X \to X$ în raport cu $\to$ şi condiţii metrice pentru f în raport cu d, prezentând în acest sens unele contracţii generalizate. În final, definim proprietatea de bine-punere pentru problema de punct fix şi proprietatea de umbrire pentru f în raport cu d. În mod similar, prezentăm cazul operatorilor multivoci definiţi pe spaţii Kasahara.

Capitolul 2

Contracţii generalizate în spaţii Kasahara

În acest capitol construim teoria unor importante teoreme de punct fix precum Principiul Contracţiilor lui Banach-Caccioppoli, Principiul Contracţiilor pe Grafic, teoreme de punct fix de tip Caristi-Browder şi Matkowski. Rezultatele acestui capitol sunt obţinute pentru contracţii generalizate univoce în contextul spaţiilor Kasahara $(X, \to, d)$, unde $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ este o funcţională. Sunt prezentate de asemenea şi extinderi ale acestor rezultate în contextul spaţiilor Kasahara generalizate şi a spaţiilor Kasahara în sens larg.

În continuare, este prezentată legătura dintre teoremele de punct fix de tip Maia şi cele obţinute în spaţii Kasahara şi se defineşte o noţiune nouă: spaţiu Kasahara relativ la un operator. Sunt prezentate câteva aplicaţii ale acestei noi noţiuni, aplicaţii referitoare la existenţa şi unicitatea soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale şi integrale.

Referinţele consultate în vederea elaborării acestui capitol sunt: A.-D. Filip [34], [35], [36]; A.-D. Filip şi A. Petruşel [39], [40]; S. Kasahara [66]; M.G. Maia [84]; I.A. Rus [110], [115], [117], [119], [121]; I.A. Rus, A.S. Mureşan şi V. Mureşan [122]; I.A. Rus, A. Petruşel şi G. Petruşel [124]; M.-A. Şerban [142]; T. Zamfirescu [150].

2.1 Teoreme de punct fix în spaţii Kasahara

Scopul acestei secţiuni este acela de a prezenta teoria unor binecunoscute rezultate de punct fix în contextul spaţiilor Kasahara. Unele dintre aceste rezultate sunt obţinute şi în cazul spaţiilor Kasahara generalizate, respectiv a spaţiilor Kasahara în sens larg, după cum urmează:

- teoreme de punct fix pentru contracţii generalizate în spaţii Kasahara generalizate $(X, \to, d)$, unde $d : X \times X \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ este o funcţională;
- o teorie a punctului fix pentru Principiul Contracţiilor lui Banach-Caccioppoli în variantă locală în contextul spaţiilor Kasahara în sens larg $(X, \overset{d}{\to}, p)$, unde $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ este o metrică completă pe X, iar $p : X \times X \to \mathbb{R}_+$ este o w-distanţă pe X;

- teoreme de punct fix pentru contracţii generalizate în contextul spaţiilor Kasahara în sens larg $(X, \xrightarrow{d}, \varphi \circ d)$, obţinute din spaţii metrice (X, d), prin perturbarea metricii cu o funcţie crescătoare, subaditivă şi continuă $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$.

Considerăm pentru început spaţiul Kasahara $(X, \to, d)$, unde $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ este o funcţională. În rezultatele noastre vom utiliza următoarele noţiuni şi notaţii:

Definiţia 2.1.1. *Fie $(X, \to, d)$ un spaţiu Kasahara, unde $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ este o funcţională. Fie $f : X \to X$ un operator. Atunci*

(i) f se numeşte operator Picard dacă şi numai dacă $F_f = \{x^*\}$ şi $f^n(x) \to x^*$ când $n \to \infty$, oricare ar fi $x \in X$;

(ii) f se numeşte operator slab Picard dacă şi numai dacă şirul $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge pentru orice $x \in X$ şi limita şirului (care poate depinde de x) este un punct fix pentru f;

(iii) dacă f este operator slab Picad, atunci definim operatorul

$$f^\infty : X \to X \text{ prin } f^\infty(x) := Lim(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}};$$

Observaţia 2.1.1. *Mai multe consideraţii legate de operatorii Picard şi slabi Picard pot fi găsite în lucrările lui I.A. Rus [117], [115], I.A. Rus, A. Petruşel şi M.A. Şerban [127].*

Reamintim de asemenea un instrument deosebit de util în demonstrarea unicităţii punctului fix corespunzător unui operator univoc definit pe un spaţiu Kasahara.

Lema 2.1.1 (Lema lui Kasahara [66])**.** *Fie $(X, \to, d)$ un spaţiu Kasahara, unde $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ este o funcţională. Atunci*

$$\text{oricare ar fi } x, y \in X,\ d(x, y) = d(y, x) = 0 \Rightarrow x = y.$$

Prezentăm în continuare unul din rezultatele noastre de punct fix, precum şi teoria aferentă acestuia.

Teorema 2.1.1 (Principiul Contracţiilor). *Fie $(X, \to, d)$ un spaţiu Kasahara, unde $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ este o funcţională. Fie $f : X \to X$ un operator. Presupunem că:*

(i) $f : (X, \to) \to (X, \to)$ are grafic închis;

(ii) $f : (X, d) \to (X, d)$ este o α-contracţie, i.e., există $\alpha \in [0, 1[$ astfel încât

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y),\ \text{oricare ar fi } x, y \in X.$$

Atunci următoarele afirmaţii sunt adevărate:

(1) *$F_f = F_{f^n} = \{x_f^*\}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ şi $d(x_f^*, x_f^*) = 0$;*

(2) *$f^n(x) \to x_f^*$ când $n \to \infty$, oricare ar fi $x \in X$, i.e., $f : (X, \to) \to (X, \to)$ este operator Picard;*

(3) *oricare ar fi* $x \in X$ *avem:*

(3.1) $d(f^n(x), x_f^*) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$ *când* $n \to \infty$;

(3.2) $d(x_f^*, f^n(x)) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$ *când* $n \to \infty$;

(4) *dacă funcţionala* d *este o cvasimetrică (i.e.,* $d(x,y) = d(y,x) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *oricare ar fi* $x, y \in X$ *şi* d *satisface inegalitatea triunghiului), atunci*

(4.1) $d(x, x_f^*) \leq \frac{1}{1-\alpha} d(x, f(x))$, *oricare ar fi* $x \in X$;

(4.2) $d(x_f^*, x) \leq \frac{1}{1-\alpha} d(f(x), x)$, *oricare ar fi* $x \in X$;

(4.3) $d(f^n(x), x_f^*) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x, f(x))$, *oricare ar fi* $x \in X$;

(4.4) $d(x_f^*, f^n(x)) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(f(x), x)$, *oricare ar fi* $x \in X$;

(4.5) *dacă* $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ *astfel încât* $d(z_n, f(z_n)) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$ *când* $n \to \infty$ *atunci* $d(z_n, x_f^*) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$ *când* $n \to \infty$, *i.e., problema de punct fix pentru operatorul* f *este bine-pusă în raport cu* d;

(4.6) *dacă* $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ *astfel încât* $d(z_{n+1}, f(z_n)) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$ *când* $n \to \infty$ *atunci avem că* $d(z_{n+1}, f^{n+1}(z)) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$ *când* $n \to \infty$, *oricare ar fi* $z \in X$, *i.e., operatorul* f *satisface proprietatea de umbrire la limită în raport cu* d;

(4.7) *dacă* $g : X \to X$ *are proprietatea că există* $\eta > 0$ *pentru care* $d(g(x), f(x)) \leq \eta$, *oricare ar fi* $x \in X$, *atunci*

$$x_g^* \in F_g \text{ implică } d(x_g^*, x_f^*) \leq \frac{\eta}{1-\alpha}.$$

Observaţia 2.1.2. *Teorema 2.1.1 extinde Principiul Contracţiilor lui Banach-Caccioppoli în sensul că în loc de spaţiul metric* (X, d) *este folosit spaţiul Kasahara* $(X, \to, d)$. *Funcţionala* $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ *nu trebuie să satisfacă obligatoriu toate axiomele metricii. Pe de altă parte Teorema 2.1.1 completează concluziile Principiului Contracţiilor lui Banach-Caccioppoli în sensul că sunt abordate câteva probleme de punct fix: proprietatea de bine-punere (itemul (4.5)), proprietatea de umbrire la limită (itemul (4.6)), problema dependenţei de date (itemul (4.7)).*

- Prezentăm în continuare unul din rezultatele de punct fix referitor la operatorii Zamfirescu de tip univoc.

În 1972, T. Zamfirescu obţine în lucrarea sa [150] câteva teoreme de punct fix pentru operatori de tip contractiv în spaţii metrice, obţinând generalizări ale Principiului Contracţiilor lui Banach-Caccioppoli, precum şi pentru teoremele lui Kannan, Edelstein şi Singh. Prezentăm rezultate similare în variantă locală şi globală pentru operatori Zamfirescu în spaţii Kasahara. Deoarece invarianţa domeniului de definiţie pentru operatorii Zamfirescu nu este întotdeauna îndeplinită, utilizăm în demonstraţiile noastre metoda aproximaţiilor succesive. Rezultatele locale pe care le obţinem, extind şi generalizează teorema locală de punct fix a lui Krasnoselskii, o dată ce contextul de spaţiu metric este înlocuit cu cel de spaţiu Kasahara. Pe de altă parte, în locul contracţiilor folosim operatori Zamfirescu.

Definiţia 2.1.2. *Fie $(X, \to, d)$ un spaţiu Kasahara, unde $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ este o funcţională. Aplicaţia $f : X \to X$ se numeşte operator Zamfirescu dacă există α, β, $\gamma \in \mathbb{R}_+$ cu $\alpha < 1$, $\beta < \frac{1}{2}$ şi $\gamma < \frac{1}{2}$ astfel încât pentru orice $x, y \in X$, cel puţin una din următoarele condiţii este adevărată:*

(1_z) $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$;

(2_z) $d(f(x), f(y)) \leq \beta[d(x, f(x)) + d(y, f(y))]$;

(3_z) $d(f(x), f(y)) \leq \gamma[d(x, f(y)) + d(y, f(x))]$.

Observaţia 2.1.3. *În rezultatele noastre de punct fix considerăm spaţiul Kasahara $(X, \to, d)$, unde $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ este o premetrică, i.e.,*

(1) $d(x, x) = 0$, *oricare ar fi* $x \in X$;

(2) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, *oricare ar fi* $x, y, z \in X$.

Considerăm de asemenea următoarele notaţii şi noţiuni.

Definiţia 2.1.3. *Fie $(X, \to, d)$ un spaţiu Kasahara, unde $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ este o premetrică. Atunci*

$$\tilde{B}(x_0, r) := \{x \in X \mid d(x_0, x) \leq r\}$$

este bila închisă la dreapta, centrată în $x_0 \in X$ şi de rază $r \in \mathbb{R}_+$.

Observaţia 2.1.4. *Fie $(X, \to, d)$ un spaţiu Kasahara, unde $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ este o premetrică. Fie $x_0 \in X$ şi $r \in \mathbb{R}_+$. Dacă d este continuă pe X în raport cu al doilea argument, atunci bila închisă la dreapta $\tilde{B}(x_0, r)$ este o mulţime închisă în X în raport cu $\to$, i.e., pentru orice şir $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \tilde{B}(x_0, r)$, cu $z_n \to z \in X$ când $n \to \infty$, avem că $z \in \tilde{B}(x_0, r)$.*

Rezultatul local principal de punct fix care extinde şi generalizează teorema lui Krasnoselskii (a se vedea de exemplu [44]) este următorul:

Teorema 2.1.2 (A.-D. Filip [36])**.** *Fie $(X, \to, d)$ un spaţiu Kasahara, unde $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ este o premetrică. Fie $x_0 \in X$, $r \in \mathbb{R}_+$ şi $f : \tilde{B}(x_0, r) \to X$ un operator Zamfirescu. Presupunem că:*

(i) Graph(f) este închis în $X \times X$ în raport cu $\to$;

(ii) $d(x_0, f(x_0)) \leq (1 - \delta)r$, unde $\delta = \max\left\{\alpha, \frac{\beta}{1-\beta}, \frac{\gamma}{1-\gamma}\right\}$;

(iii) d este continuă în raport cu al doilea argument.

Atunci:

(1°) *f are cel puţin un punct fix în $\tilde{B}(x_0, r)$ şi $f^n(x_0) \to x^* \in F_f$, când $n \to \infty$.*

(2°) *are loc următoarea estimare:*

$$d(x_n, x^*) \leq \delta^n r, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}, \tag{2.1.1}$$

unde $x^* \in F_f$ şi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este şirul aproximaţiilor succesive pentru f, pornind din x_0.

Observaţia 2.1.5. *Se poate realiza o extindere a rezultatului de punct fix prezentat mai sus, la spaţiile Kasahara în sens larg. În vederea obţinerii unui spaţiu Kasahara în sens larg dintr-un spaţiu Kasahara $(X, \to, d)$, unde $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ este o premetrică, este necesară definirea unei anumite noţiuni de şir Cauchy în raport cu premetrica d. Trebuie avut în vedere şi faptul că d nu este simetrică.*

Definiţia 2.1.4. *Fie (X, d) un spaţiu premetric, unde $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ şi fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir din X. Atunci $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir Cauchy la dreapta în raport cu d dacă şi numai dacă*

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} d(x_n, x_m) = 0,$$

i.e., oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $d(x_n, x_m) < \varepsilon$, pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$ cu $m \geq n \geq k$.

Obţinem următoarea noţinue de spaţiu Kasahara în sens larg.

Definiţia 2.1.5 (A.-D. Filip [36])**.** *Fie $(X, \to)$ un L-spaţiu. Fie $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ o premetrică pe X. Tripletul $(X, \to, d)$ este un spaţiu Kasahara în sens larg dacă şi numai dacă următoarea condiţie de compatibiliate dintre $\to$ şi d are loc:*

$$\text{dacă } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X \text{ cu } \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} d(x_n, x_m) = 0 \text{ atunci } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge în } (X, \to).$$

Observaţia 2.1.6 (A.-D. Filip [36])**.** *Fie $(X, \to, d)$ un spaţiu Kasahara în sens larg, în sensul Definiţiei 2.1.5. Atunci $(X, \to, d)$ este un spaţiu Kasahara.*

Observaţia 2.1.7. *Fie $(X, \to, d)$ un spaţiu Kasahara în sens larg, în sensul Definitiei 2.1.5. În acest context, Teorema 2.1.2 are loc.*

- Prezentăm în continuare unul din rezultatele de punct fix obţinute în spaţii Kasahara generalizate $(X, \to, d)$, unde $d : X \times X \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ este o funcţională. Un exemplu de spaţiu Kasahara generalizat este prezentat mai jos.

Exemplul 2.1.1 (A.-D. Filip şi A. Petruşel [40])**.** *Fie $a > 0$ şi $I := [t_0 - a, t_0 + a] \subset \mathbb{R}$. Considerăm mulţimea*

$$X := C(I) := \{x : I \to \mathbb{R} \mid x \text{ este o funcţie continuă pe } I\}.$$

Fie $\lambda > 0$ *şi* $d_\lambda : C(I) \times C(I) \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ *definită prin*

$$d_\lambda(x,y) := \max\left\{\frac{1}{|t-t_0|^\lambda}|x(t)-y(t)| : t \in I\right\}, \text{ oricare ar fi } x,y \in C(I). \tag{2.1.2}$$

Să observăm că d_λ *nu este neapărat finită pentru orice pereche de funcţii* $x, y \in C(I)$*. Astfel, conform lucrării lui W.A.J. Luxemburg [82], avem că* d_λ *este o metrică generalizată pe* $C(I)$ *şi*

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} d_\lambda(x_n, x_m) = 0 \ \Rightarrow \ \text{există } x \in C(I) \text{ astfel încât } \lim_{n\to\infty} d_\lambda(x_n, x) = 0. \tag{2.1.3}$$

Fie $\rho = \max\{|x(t)-y(t)| : t \in I\}$ *metrica ce induce convergenţa uniformă pe* $C(I)$*, iar* $\stackrel{\rho}{\to}$ *structura de convergenţă indusă de* ρ *pe* $C(I)$*.*

Tripletul $(C(I), \stackrel{\rho}{\to}, d_\lambda)$ *este un spaţiu Kasahara generalizat.*

În rezultatele noastre, vom folosi de asemenea următoarele noţiuni.

Definiţia 2.1.6 (A.-D. Filip şi A. Petruşel [40])**.** *Fie* $(X, \to, d)$ *un spaţiu Kasahara generalizat, unde* $d : X \times X \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ *este o funcţională. Fie* $f : X \to X$ *un operator. Spunem că* f *este*

- ⋄ *operator Picard dacă*
  1) $F_f = \{x^*\}$;
  2) $f^n(x_0) \to x^*$ *când* $n \to \infty$*, pentru orice* $x_0 \in X$ *cu proprietatea* $d(x_0, f(x_0)) < +\infty$*.*
- ⋄ *operator slab Picard dacă*
  1) $F_f \neq \emptyset$;
  2) *şirul* $(f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge pentru orice* $x_0 \in X$ *cu* $d(x_0, f(x_0)) < +\infty$*, iar limita sa este un punct fix pentru* f*.*

Observaţia 2.1.8. *Lema lui Kasahara 2.1.1 are loc şi în cazul când* $(X, \to, d)$ *este un spaţiu Kasahara generalizat, unde* $d : X \times X \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ *este o funcţională. Lema este demonstrată în lucrarea lui S. Kasahara [66].*

Teorema 2.1.3 (A.-D. Filip şi A. Petruşel [40])**.** *Fie* $(X, \to, d)$ *un spaţiu Kasahara generalizat, unde* $d : X \times X \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ *este o funcţională. Fie* $f : X \to X$ *un operator. Presupunem că:*

i) $f : (X, \to) \to (X, \to)$ *are grafic închis;*

ii) există $\alpha \in [0, 1[$ *astfel încât*

$$d(f(x), f(y)) \le \alpha d(x,y), \text{ oricare ar fi } x, y \in X, \text{ cu } d(x,y) < +\infty;$$

iii) există $x_0 \in X$ *astfel încât* $d(x_0, f(x_0)) < +\infty$*.*

Atunci:

1) f *este un operator slab Picard;*

2) *dacă* $d(x^*, y^*) < +\infty$ *pentru orice* $x^*, y^* \in F_f$, *atunci* f *este un operator Picard;*

3) *dacă* $d(x, x) = 0$ *oricare ar fi* $x \in X$, *atunci* $d(x^*, f(x^*)) < +\infty$ *pentru orice* $x^* \in F_f$;

4) *dacă* $x \in X$ *şi* $x^* \in F_f$ *astfel încât* $d(x, x^*) < +\infty$, *atunci*

$$d(f^n(x), x^*) \to 0 \text{ când } n \to \infty;$$

5) *dacă* $d(x_0, x^*) < +\infty$ *pentru orice* $x^* \in F_f$ *şi*

$$d(f^k(x_0), x^*) \leq d(f^k(x_0), f^{k+1}(x_0)) + d(f^{k+1}(x_0), x^*), \text{ oricare ar fi } k \in \mathbb{N},$$

atunci

$$d(x_0, x^*) \leq \frac{1}{1-\alpha} d(x_0, f(x_0)).$$

- Considerăm în continuare cazul spaţiilor Kasahara generalizate $(X, \to, d)$, unde d este o funcţională reală cu valori vectoriale, i.e., $d : X \times X \to \mathbb{R}^n_+$. În acest context, avem câteva rezultate de punct fix obţinute de I.A. Rus în lucrarea [121]. Unul dintre ele este următorul.

Teorema 2.1.4 (I.A. Rus [121])**.** *Fie* $(X, \to, d)$ *un spaţiu Kasahara generalizat, unde* $d : X \times X \to \mathbb{R}^n_+$ *este o funcţională. Fie* $f : X \to X$ *un operator. Presupunem că:*

(i) $f : (X, \to) \to (X, \to)$ *are grafic închis;*

(ii) $f : (X, d) \to (X, d)$ *este o* S*-contracţie, i.e.* $d(f(x), f(y)) \leq S d(x, y)$, *oricare ar fi* $x, y \in X$, *unde* S *este o matrice convergentă la zero.*

Atunci:

(1) $F_f = \{x^*\}$; $d(x^*, x^*) = 0$;

(2) $f^n(x) \to x^*$ *când* $n \to \infty$, *oricare ar fi* $x \in X$;

(3) $\diamond$ $d(f^n(x), x^*) \overset{\mathbb{R}^n}{\to} 0$ *când* $n \to \infty$, *pentru orice* $x \in X$;
$\diamond$ $d(x^*, f^n(x)) \overset{\mathbb{R}^n}{\to} 0$ *când* $n \to \infty$, *pentru orice* $x \in X$;

(4) *Dacă* d *este o cvasimetrică (i.e.,* $d(x, y) = d(y, x) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *pentru orice* $x, y \in X$ *şi* d *satisface inegalitatea triunghiului), atunci:*

  (a) $\diamond$ $d(x, x^*) \leq (I - S)^{-1} d(x, f(x))$, *oricare ar fi* $x \in X$;
  $\diamond$ $d(x^*, x) \leq (I - S)^{-1} d(f(x), x)$, *oricare ar fi* $x \in X$;

(b) *Dacă* $g : X \to X$ *satisface*

$$d(f(x), g(x)) \leq \eta, \text{ pentru orice } x \in X,$$

atunci $d(x^*, y^*) \leq (I - S)^{-1}\eta$, *pentru orice* $y^* \in F_g$.

- Prezentăm în continuare teoria variantei locale a Principiului Contracţiilor lui Banach-Caccioppoli în contextul spaţiilor Kasahara în sens larg. Pentru a ne atinge scopul propus, vom defini mai întâi câteva noţiuni auxiliare.

Definiţia 2.1.7. *Fie* X *o mulţime nevidă, iar* $p : X \times X \to \mathbb{R}_+$ *o* w*-distanţă (a se vedea Definiţia 1.4.1) pe* X*. Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un şir din* X*. Atunci*

(1) *structura de convergenţă indusă de* p *pe* X *este notată cu* $\xrightarrow{p}$ *şi este definită astfel:*

$$x_n \xrightarrow{p} x \text{ când } n \to \infty \text{ dacă şi numai dacă } \lim_{n\to\infty} p(x_n, x) = 0.$$

(2) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un şir Cauchy în raport cu* p *dacă si numai dacă există un şir* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *în* $\mathbb{R}_+$ *astfel încât*

(2_a) $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$;

(2_b) $p(x_n, x_m) \leq \alpha_n$ *oricare ar fi* $n, m \in \mathbb{N}$ *cu* $m > n$.

Din definiţia 2.1.7 obţinem următoarea noţiune de spaţiu Kasahara în sens larg.

Definiţia 2.1.8. *Fie* $(X, \to)$ *un L-spaţiu. Fie* $p : X \times X \to \mathbb{R}_+$ *o* w*-distanţă pe* X*. Tripletul* $(X, \to, p)$ *este un spaţiu Kasahara în sens larg dacă şi numai dacă are loc următoarea condiţie de compatibilitate între* $\to$ *şi* p*:*

dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ *este un şir Cauchy în raport cu* p *în sensul definiţiei 2.1.7*
atunci $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge în* $(X, \to)$.

Exemplul 2.1.2. *Fie* (X, d) *un spaţiu metric complet, iar* p *o* w*-distanţă pe* X*. Atunci* $(X, \xrightarrow{d}, p)$ *este un spaţiu Kasahara în sens larg, în sensul definiţiei 2.1.8.*

Lema 2.1.2. *Fie* (X, d) *un spaţiu metric şi* $p : X \times X \to \mathbb{R}_+$ *o* w*-distanţă pe* X*. Fie* $x_0 \in X$*,* $r \in \mathbb{R}_+$ *şi*

$$\tilde{B}_p(x_0, r) := \big\{x \in X \mid p(x_0, x) \leq r\big\}$$

bila închisă la dreapta, centrată în x_0 *şi de rază* r*. Atunci*

(1) $\tilde{B}_p(x_0, r)$ *este o mulţime închisă în* (X, d)*;*

(2) *dacă* (X, d) *este complet, atunci* $\big(\tilde{B}_p(x_0, r), \xrightarrow{d}, p\big)$ *este un spaţiu Kasahara în sens larg, în sensul definiţiei 2.1.8.*

Teorema 2.1.5. *Fie* $(X, \overset{d}{\to}, p)$ *un spaţiu Kasahara în sens larg, în sensul definiţiei 2.1.8, unde* $\overset{d}{\to}$ *este structura de convergenţă indusă de metrica completă* $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ *pe* X*, iar* $p : X \times X \to \mathbb{R}_+$ *este o* w*-distanţă pe* X*. Fie* $x_0 \in X$*,* $r \in \mathbb{R}_+$ *şi* $f : \tilde{B}_p(x_0, r) \to X$ *un operator astfel încât*

(i) $f : (\tilde{B}_p(x_0, r), d) \to (X, d)$ *are grafic închis;*

(ii) $f : (\tilde{B}_p(x_0, r), p) \to (X, p)$ *este o* α*-contracţie în* $\tilde{B}_p(x_0, r)$*, i.e., există* $\alpha \in [0, 1[$ *astfel încât*

$$p(f(x), f(y)) \leq \alpha p(x, y) \text{ oricare ar fi } x, y \in \tilde{B}_p(x_0, r);$$

(iii) $p(x_0, f(x_0)) \leq (1 - \alpha)r$.

Atunci următoarele afirmaţii sunt adevărate:

(1) $F_f = F_{f^n} = \{x_f^*\}$, *oricare ar fi* $n \in \mathbb{N}^*$ *şi* $p(x_f^*, x_f^*) = 0$*;*

(2) $f^n(x_0) \overset{d}{\to} x_f^* \in \tilde{B}_p(x_0, r)$ *când* $n \to \infty$*, oricare ar fi* $x \in \tilde{B}_p(x_0, r)$*, i.e.,* $f : (\tilde{B}_p(x_0, r), \overset{d}{\to}) \to (X, \overset{d}{\to})$ *este un operator Picard;*

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} p(f^n(x), x_f^*) = 0$*, oricare ar fi* $x \in \tilde{B}_p(x_0, r)$*;*

(4) *pentru orice* $x \in \tilde{B}_p(x_0, r)$ *avem:*

(4.1) $p(x, x_f^*) \leq \frac{1}{1-\alpha} p(x, f(x))$*;*

(4.2) $p(x_f^*, x) \leq \frac{1}{1-\alpha} p(f(x), x)$*;*

(4.3) $p(f^n(x), x_f^*) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} p(x, f(x))$*;*

(4.4) $p(x_f^*, f^n(x)) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} p(f(x), x)$*;*

(4.5) *dacă* $g : \tilde{B}_p(x_0, r) \to X$ *are proprietatea că există* $\mu > 0$ *pentru care*

$$p(g(x), f(x)) \leq \mu, \text{ oricare ar fi } x \in \tilde{B}_p(x_0, r)$$

atunci

$$x_g^* \in F_g \text{ şi } x_g^* \in \tilde{B}_p(x_0, r) \text{ implică } p(x_g^*, x_f^*) \leq \frac{\mu}{1-\alpha}.$$

- Prezentăm în continuare una din teoremele de punct fix în spaţii Kasahara în sens larg, obţinute din spaţii metrice complete prin perturbarea metricii.

Teoreme de punct fix în spaţii metrice cu metrică perturbată au fost obţinute de M.S. Khan, M. Swaleh şi S. Sessa [74] ,K.P.R. Sastry şi G.V.R. Babu [131], [132], K.P.R. Sastry, G.V.R. Babu şi D.N. Rao [133], M.A. Şerban [142].

Teorema 2.1.6 (A.-D. Filip [35]). *Fie* $(X, \xrightarrow{d}, \rho)$ *un spaţiu Kasahara în sens larg cu* $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ *metrică completă pe* X *şi* $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$ *o funcţională distanţă definită prin* $\rho = \varphi \circ d$, *unde* $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *este o funcţie crescătoare, subaditivă şi continuă. Fie* $f : X \to X$ *un operator. Presupunem că:*

(*i*) $f : (X, \xrightarrow{d}) \to (X, \xrightarrow{d})$ *are graficul închis;*

(*ii*) $f : (X, \rho) \to (X, \rho)$ *este o* α*-contracţie, i.e., există* $\alpha \in [0, 1[$ *astfel încât*

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \alpha\rho(x, y), \text{ oricare ar fi } x, y \in X;$$

(*iii*) $\varphi(t) = 0 \Rightarrow t = 0$, *oricare ar fi* $t \in \mathbb{R}_+$.

Atunci următoarele afirmaţii sunt adevărate:

(1) $F_f = F_{f^n} = \{x_f^*\}$, *oricare ar fi* $n \in \mathbb{N}^*$ *şi* $\rho(x_f^*, x_f^*) = 0$;

(2) $f^n(x) \xrightarrow{d} x_f^*$ *când* $n \to \infty$, *oricare ar fi* $x \in X$, *i.e.,* $f : (X, \xrightarrow{d}) \to (X, \xrightarrow{d})$ *este operator Picard;*

(3) *oricare ar fi* $x \in X$ *avem:*

(3_a) $\rho(f^n(x), x_f^*) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$ *când* $n \to \infty$;

(3_b) $\rho(x, x_f^*) \leq \frac{1}{1-\alpha}\rho(x, f(x))$;

(3_c) $\rho(f^n(x), x_f^*) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x, f(x))$, *oricare ar fi* $n \in \mathbb{N}$;

(4) $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, $\rho(z_n, f(z_n)) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$ *când* $n \to \infty \Rightarrow \rho(z_n, x_f^*) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$ *când* $n \to \infty$, *i.e., problema de punct fix pentru operatorul* f *este bine-pusă în raport cu* ρ;

(5) $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, $\rho(z_{n+1}, f(z_n)) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$ *când* $n \to \infty \Rightarrow \rho(z_{n+1}, f^{n+1}(z)) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$ *când* $n \to \infty$, *oricare ar fi* $z \in X$, *i.e., operatorul* f *satisface proprietatea de umbrire în raport cu* ρ;

(6) *dacă* $g : X \to X$ *are proprietatea că există* $\eta > 0$ *pentru care*

$$\rho(g(x), f(x)) \leq \eta, \text{ oricare ar fi } x \in X,$$

atunci

$$x_g^* \in F_g \text{ implică } \rho(x_g^*, x_f^*) \leq \frac{\eta}{1-\alpha}.$$

Observaţia 2.1.9. *Cazuri particulare de spaţii Kasahara în sens larg se pot obţine pentru o anumită funcţie perturbatoare dată* $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. *Următorul exemplu este relevant în acest sens.*

Exemplul 2.1.3 (A.-D. Filip [35]). *Fie* (X, d) *un spaţiu metric complet şi* $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *o funcţie definită prin*

$$\varphi(t) = t + \theta(t, u(t)), \text{ oricare ar fi } t \in \mathbb{R}_+$$

unde $\theta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *este o funcţie simetrică ce satisface inegalitatea triunghiului, iar* $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *este o funcţie oarecare.*

Atunci $(X, \overset{d}{\to}, \varphi \circ d)$ *este un spaţiu Kasahara în sens larg.*

2.2 Teoreme de punct fix de tip Maia

Scopul acestei secţiuni este de a reaminti teorema de punct fix a lui Maia şi câteva versiuni ale ei în vederea stabilirii unei legături cu teoremele de punct fix din spaţiile Kasahara.

Teorema 2.2.1 (M.G. Maia, [84]). *Fie* X *o mulţime nevidă,* d *şi* ρ *două metrici pe* X*, iar* $f : X \to X$ *o aplicaţie. Presupunem că:*

(*i*) $\rho(x, y) \leq d(x, y)$, *oricare ar fi* $x, y \in X$;

(*ii*) (X, ρ) *este un spaţiu metric complet;*

(*iii*) $f : (X, \rho) \to (X, \rho)$ *este continuă;*

(*iv*) $f : (X, d) \to (X, d)$ *este o* α*-contracţie, i.e., există* $\alpha \in [0, 1[$ *astfel încât*

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha \cdot d(x, y), \text{ oricare ar fi } x, y \in X.$$

Atunci

(1) $F_f = \{x^*\}$;

(2) $(f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge în* (X, ρ) *la* x^*, *oricare ar fi* $x_0 \in X$.

În aplicaţii, de obicei este folosită varianta Rus a Teoremei 2.2.1. În acest sens, o observaţie importantă a fost făcută de I.A. Rus în lucrarea [110] (a se vedea de asemenea [115]).

Observaţia 2.2.1. *Teorema 2.2.1 rămâne adevărată dacă condiţia* (*i*) *este înlocuită de*

(i') *există* $c > 0$ *astfel încât* $\rho(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$, *oricare ar fi* $x, y \in X$;

Observaţia 2.2.2. *Alte rezultate de tip Maia sunt teoremele de punct fix obţinute în contextul unei mulţimi înzestrate cu două metrici. Reamintim una dintre ele mai jos.*

Teorema 2.2.2 (A.-D. Filip şi A. Petruşel [39]). *Fie* X *o mulţime nevidă şi* $d, \rho : X \times X \to \mathbb{R}^m_+$ *două metrici generalizate pe* X. *Fie* $f : X \to X$ *un operator. Presupunem că*

1) există $C \in M_{m,m}(\mathbb{R}_+)$ *astfel încât* $\rho(f(x), f(y)) \leq C \cdot d(x, y)$, *oricare ar fi* $x, y \in X$;

2) (X, ρ) *este un spaţiu metric generalizat şi complet;*

3) $f : (X, \rho) \to (X, \rho)$ *este continuu;*

4) $f : (X, d) \to (X, d)$ *este o aproape contracţie, i.e., există* $A, B \in M_{m,m}(\mathbb{R}_+)$ *astfel încât pentru orice* $x, y \in X$ *avem*

$$d(f(x), f(y)) \leq Ad(x, y) + Bd(y, f(x)).$$

Dacă matricea A *este convergentă la zero, atunci* $F_f \neq \emptyset$.

În plus, dacă matricea $A + B$ *converge la zero, atunci* $F_f = \{x^*\}$.

Observaţia 2.2.3. *Alte teoreme de punct fix pe mulţimi înzestrate cu două metrici au fost obţinute de M. Albu [1], V. Berinde [9], B.C. Dhage [24], A.S. Mureşan [92], [90], A.S. Mureşan şi V. Mureşan [91], V. Mureşan [93], R. Precup [105], B.K. Ray [107], I.A. Rus [110], [111], [113], B. Rzepecki [129], I.A. Rus, A.S. Mureşan şi V. Mureşan [122].*

Observaţia 2.2.4. *Teoremele de punct fix din spaţiile Kasahara sunt generalizări naturale ale teoremelor de punct fix de tip Maia.*

Observaţia 2.2.5. *Pentru a include varianta Rus a teoremei lui Maia 2.2.1 în domeniul teoriei punctului fix în spaţii Kasahara, se impune construcţia unei structuri speciale de spaţiu Kasahara, structură care va fi prezentată în următoarea secţiune.*

2.3 Teoreme de punct fix în spaţii Kasahara relative la un operator

Această secţiune are ca şi obectiv introducerea unei noi noţiuni: spaţiu Kasahara relativ la un operator. În acest context, sunt obţinute câteva teoreme de punct fix. Din punct de vedere aplicativ, este studiată existenţa şi unicitatea soluţiilor ecuaţiilor integrale şi problemelor bilocale.

Definiţia 2.3.1 (A.-D. Filip [34]). *Fie* $(X, \to)$ *un* L*-spaţiu,* $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ *o funcţională şi* $f : X \to X$ *un operator. Tripletul* $(X, \to, d)$ *se numeşte spaţiu Kasahara relativ la operatorul* f *dacă şi numai dacă*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} d(f^n(x), f^{n+1}(x)) < +\infty, \text{ oricare ar fi } x \in X$$

implică faptul că şirul

$$(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}} \text{ este convergent } (X, \to), \text{ oricare ar fi } x \in X.$$

Observaţia 2.3.1. *Conceptul de spaţiu Kasahara relativ la un operator generalizează noţiunea de completitudine orbitală şi conceptul de completitudine în raport cu un operator.*

Observaţia 2.3.2. *Aplicaţiile referitoare la w-distanţe şi τ-distanţe sunt de asemenea generalizate în contextul spaţiilor Kasahara relative la un operator.*

Observaţia 2.3.3 (A.-D. Filip [34]). *În spaţiile Kasahara relative la un operator, lema lui Kasahara 2.1.1 nu are loc întotdeauna. Pe de altă parte, un spaţiu Kasahara este un spaţiu Kasahara relativ la un operator, dar reciproca nu este adevărată.*

Exemplul 2.3.1 (A.-D. Filip [34]). *Fie X o mulţime nevidă, $f : X \to X$ un operator şi $d, \rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$ două funcţionale. Presupunem că:*

(i) (X, ρ) este un spaţiu metric complet;

(ii) există $c > 0$ astfel încât $\rho(f(x), f(y)) \leq cd(x, y)$, oricare ar fi $x, y \in X$.

Atunci $(X, \overset{\rho}{\to}, d)$ este un spaţiu Kasahara relativ la operatorul f.

Exemplul 2.3.2 (A.-D. Filip [34]). *Fie*

$$X := C(\overline{\Omega}) := \{x : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} \mid x \text{ este o funcţie continuă pe } \overline{\Omega}\},$$

unde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ este un domeniu mărginit.

Fie $\overset{\rho}{\longrightarrow}$ structura de convergenţă indusă de $\rho : C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega}) \to \mathbb{R}_+$, unde

$$\rho(x, y) := \|x - y\|_\infty := \sup_{t \in \overline{\Omega}} |x(t) - y(t)|, \text{ oricare ar fi } x, y \in C(\overline{\Omega}).$$

Fie $d : C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega}) \to \mathbb{R}_+$ funcţionala definită prin

$$d(x, y) := \|x - y\|_{L^2(\Omega)} := \left(\int_\Omega |x(t) - y(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ oricare ar fi } x, y \in C(\overline{\Omega}).$$

Considerăm operatorul $f : C(\overline{\Omega}) \to C(\overline{\Omega})$, definit prin

$$f(x)(t) := \int_\Omega K(t, s, x(s)) ds$$

unde $K \in C(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R})$.

Presupunem că există $L \in C(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$ astfel încât

$$|K(t, s, u) - K(t, s, v)| \leq L(t, s)|u - v|,$$

oricare ar fi $t, s \in \overline{\Omega}$ şi $u, v \in \mathbb{R}$.

Atunci tripletul $(X, \overset{\rho}{\to}, d)$, i.e., $\left(C(\overline{\Omega}), \overset{\|\cdot\|_\infty}{\longrightarrow}, \|\cdot\|_{L^2(\Omega)}\right)$ este un spaţiu Kasahara relativ la operatorul f.

Teorema 2.3.1 (A.-D. Filip [34]). *Fie X o mulţime nevidă, iar $f : X \to X$ un operator. Presupunem că $(X, \to, d)$ este un spaţiu Kasahara relativ la operatorul f. Dacă:*

(i) $f : (X, \to) \to (X, \to)$ are grafic închis;

(ii) $f : (X, d) \to (X, d)$ este α-contracţie;

(iii) $d(x,y) = d(y,x) = 0 \;\Rightarrow\; x = y.$

atunci

(1) $F_f = F_{f^n} = \{x^*\}$ *oricare ar fi* $n \in \mathbb{N}^*$ *şi* $d(x^*,x^*) = 0$.

(2) $f^n(x) \to x^*$ *când* $n \to \infty$, *oricare ar fi* $x \in X$, *i.e.,* f *este un operator Picard.*

(3) *Avem:*

(3_a) $d(f^n(x),x^*) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$ *când* $n \to \infty$, *oricare ar fi* $x \in X$;

(3_b) $d(x^*,f^n(x)) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$, *când* $n \to \infty$, *oricare ar fi* $x \in X$.

(4) Dacă d *este o cvasimetrică (i.e.,* $d(x,y) = d(y,x) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *oricare ar fi* $x,y \in X$, *iar* d *satisface inegalitatea triunghiului), atunci:*

(4_a) $d(x,x^*) \le \frac{1}{1-\alpha} d(x,f(x))$, *oricare ar fi* $x \in X$;

(4_b) $d(x^*,x) \le \frac{1}{1-\alpha} d(f(x),x)$, *oricare ar fi* $x \in X$;

(4_c) $d(f^n(x),x^*) \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x,f(x))$, *oricare ar fi* $x \in X$ *şi* $n \in \mathbb{N}$;

(4_d) $d(x^*,f^n(x)) \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(f(x),x)$, *oricare ar fi* $x \in X$ *şi* $n \in \mathbb{N}$;

(4_e) *dacă* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ *astfel încât* $d(z_n,f(z_n)) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$ *când* $n \to \infty$ *atunci* $d(z_n,x^*) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$ *când* $n \to \infty$, *i.e., problema de punct fix pentru operatorul* f *este bine-pusă în raport cu* d;

(4_f) *dacă* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ *astfel încât* $d(z_{n+1},f(z_n)) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$ *când* $n \to \infty$ *atunci avem că* $d(z_{n+1},f^{n+1}(z)) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$ *când* $n \to \infty$, *oricare ar fi* $z \in X$, *i.e., operatorul* f *satisface proprietatea de umbrire la limită în raport cu* d;

(4_g) *Dacă* $g : X \to X$ *este un operator astfel încât*

$$d(f(x),g(x)) \le \eta, \text{ oricare ar fi } x \in X,$$

atunci

$$d(x^*,y^*) \le \frac{\eta}{1-\alpha}, \text{ oricare ar fi } y^* \in F_g.$$

Teorema 2.3.2 (A.-D. Filip [34]). *Fie* X *o multime nevidă, iar* $f : X \to X$ *un operator. Presupunem că* $(X,\to,d)$ *este un spaţiu Kasahara relativ la operatorul* f. *Dacă:*

(i) $f : (X,\to) \to (X,\to)$ *are grafic închis;*

(ii) $f : (X,d) \to (X,d)$ *este o* α*-contracţie pe grafic, i.e., există* $\alpha \in [0,1[$ *astfel încât* $d(f(x),f^2(x)) \le \alpha d(x,f(x))$, *oricare ar fi* $x \in X$

atunci următoarele afirmaţii sunt adevărate:

(1) $F_f \neq \emptyset$.

(2) *$f^n(x) \to f^\infty(x) \in F_f$ când $n \to \infty$, oricare ar fi $x \in X$, i.e., $f : (X, \to) \to (X, \to)$ este un operator slab Picard.*

(3) *$d(x^*, x^*) = 0$, oricare ar fi $x^* \in F_f$.*

(4) *dacă d satisface inegalitatea triunghiului şi d este continuă în raport cu $\to$, atunci*

(4_a) *$d(x, f^\infty(x)) \leq \frac{1}{1-\alpha} d(x, f(x))$, oricare ar fi $x \in X$,*

(4_b) *Fie $g : X \to X$ un operator. Dacă există $c > 0$ astfel încât*

$$d(x, g^\infty(x)) \leq c \cdot d(x, g(x)), \text{ oricare ar fi } x \in X \tag{2.3.1}$$

şi pentru orice $x \in X$, există $\eta > 0$ astfel încât

$$\max\{d(g(x), f(x)), d(f(x), g(x))\} \leq \eta, \tag{2.3.2}$$

atunci

$$H_d(F_f, F_g) \leq \max\left\{\frac{1}{1-\alpha}, c\right\}\eta,$$

unde H_d este funcţionala Pompeiu-Hausdorff generată de d (a se vedea [51]).

În ceea ce urmează, studiem existenţa şi unicitatea soluţiilor ecuaţiilor integrale şi a problemelor bilocale.

Teorema 2.3.3 (A.-D. Filip [34])**.** *Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domeniu mărginit, $K \in C(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ şi $g \in C(\overline{\Omega})$. Presupunem că:*

(i) $K(t, s, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este crescătoare, oricare ar fi $t, s \in \overline{\Omega}$.

(ii) există $L \in C(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$ astfel încât

$$|K(t, s, u) - K(t, s, v)| \leq L(t, s)|u - v|,$$

oricare ar fi $t, s \in \overline{\Omega}$ şi $u, v \in \mathbb{R}$.

(iii) $\displaystyle\int_{\Omega\times\Omega} L(t, s)^2 ds dt < 1.$

Atunci ecuaţia integrală

$$x(t) = \int_\Omega K(t, s, x(s))ds + g(t), \; t \in \Omega \tag{2.3.3}$$

are o soluţie unică $x^* \in C(\overline{\Omega})$.

Considerăm în continuare următoarea problemă bilocală:

$$\begin{cases} y''(t) = f(t, y(t)), \text{ oricare ar fi } t \in [a, b] \\ a_1 y(a) + a_2 y(b) + a_3 y'(a) + a_4 y'(b) = 0 \\ b_1 y(a) + b_2 y(b) + b_3 y'(a) + b_4 y'(b) = 0 \end{cases} \tag{2.3.4}$$

unde $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, 4}$ şi $f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă.

Considerăm de asemenea următoarele aplicaţii liniare:

(1) $L : C^2([a,b]) \to C([a,b])$, $L(y) = y''(t)$;

(2) $l_1 : C^2([a,b]) \to \mathbb{R}$, $l_1(y) = a_1 y(a) + a_2 y(b) + a_3 y'(a) + a_4 y'(b)$

(3) $l_2 : C^2([a,b]) \to \mathbb{R}$, $l_2(y) = b_1 y(a) + b_2 y(b) + b_3 y'(a) + b_4 y'(b)$

Problema bilocală (2.3.4) se poate rescrie sub următoarea formă:

$$L(y) = f(\cdot, y),\ \ l_1(y) = 0,\ \ l_2(y) = 0. \tag{2.3.5}$$

Reamintim faptul că funcţia lui Green asociată problemei bilocale (2.3.5) este aplicaţia

$$G : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R};\ \ (t,s) \mapsto G(t,s)$$

care satisface următoarele condiţii:

(*i*) $G \in C([a,b] \times [a,b])$;

(*ii*) pentru orice $s \in [a,b]$, $G(\cdot, s) \in C^2([a,s[\cup]s,b])$ şi

$$\frac{\partial}{\partial t} G(s+0,s) - \frac{\partial}{\partial t} G(s-0,s) = -\frac{1}{p(s)},$$

unde $p \in C([a,b])$ şi $p(s) \neq 0$ oricare ar fi $s \in [a,b]$;

(*iii*) $G(\cdot, s)$ este o soluţie pentru $L(y) = 0$ pe $[a,b] \setminus \{s\}$ şi satisface condiţiile $l_1(y) = l_2(y) = 0$.

Avem următorul rezultat:

Teorema 2.3.4 (A.-D. Filip [34])**.** *Fie* $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă şi considerăm problema bilocală* (2.3.5)*. Presupunem că:*

(i) există $L_f > 0$ *astfel încât*

$$|f(s,u) - f(s,v)| \leq L_f |u - v|,$$

oricare ar fi $s \in [a,b]$ *şi* $u, v \in \mathbb{R}$*;*

(ii) $\int_a^b \int_a^b G(t,s)^2 ds dt < 1$, *unde* G *este funcţia lui Green asociată problemei bilocale* (2.3.5)*.*

Dacă problema bilocală omogenă

$$\begin{cases} L(y) = 0 \\ l_1(y) = l_2(y) = 0 \end{cases} \tag{2.3.6}$$

admite doar soluţia trivială $y \equiv 0$*, atunci problema bilocală* (2.3.5) *are o unică soluţie în* $C([a,b])$*.*

Capitolul 3

Contracţii multivoce generalizate în spaţii Kasahara

Scopul acestui capitol este acela de a prezenta unele rezultate de punct fix pentru contracţii multivoce generalizate în spaţii Kasahara, spaţii Kasahara generalizate şi spaţii Kasahara în sens larg. Sunt prezentate de asemenea câteva teoreme de punct fix de tip Maia în strânsă legătură cu rezultatele prezentate în prima secţiune a acestui capitol. Cazul spaţiilor Kasahara relative la un operator multivoc este de asemenea studiat.

Referinţele bibliografice consultate în vederea obţinerii rezultatelor de punct fix cuprinse în acest capitol sunt: M. Berinde şi V. Berinde [8]; A.-D. Filip [39], [31], [32], [33], [37]; S. Kasahara [65]; A. Petruşel şi I.A. Rus, [102], [103]; I.A. Rus [112], [115]; I.A. Rus, A. Petruşel şi G. Petruşel [123].

3.1 Teoreme de punct fix în spaţii Kasahara

În această secţiune prezentăm rezultate corespunzătoare teoremei de punct fix a lui Nadler, φ-contracţiilor multivoce, operatorilor multivoci de tip Caristi, (θ, L)-slab contracţiilor multivoce, operatorilor multivoci de tip Kannan şi Reich, rezultate care au fost obţinute în spaţii metrice complete. Vom adapta aceste rezultate astfel încât acestea să fie adevărate şi în contextul spaţiilor Kasahara $(X, \to, d)$, unde $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ este o funcţională ce satisface anumite proprietăţi.

Prezentăm de asemenea unele teoreme de punct fix în spaţii Kasahara generalizate şi spaţii Kasahara în sens larg, mai precis:

- teoreme de punct fix pentru contracţii generalizate de tip multivoc în spaţii Kasahara generalizate $(X, \to, d)$, unde $d : X \times X \to \mathbb{R}^m_+$ este o funcţională ce satisface anumite proprietăţi.
- teoreme de punct fix pentru operatori Zamfirescu multivoci în spaţii Kasahara în sens larg $(X, \xrightarrow{d}, p)$, unde $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ este o metrică completă pe X, iar $p : X \times X \to \mathbb{R}_+$ este o w-distanţă pe X.

Definiţia 3.1.1 (S. Kasahara [65]). *Fie $(X, \to, d)$ un spaţiu Kasahara, unde $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ este o funcţională. Fie $x \in X$. Atunci mulţimea $A \in P(X)$ se numeşte d-închisă dacă şi numai dacă*

$$D(x, A) = 0 \Rightarrow x \in A$$

Definim mulţimea

$$P_d(X) := \{A \in P(X) \mid A \text{ este } d\text{-închisă } \}.$$

Referitor la mulţimile d-închise în spaţiile Kasahara, avem următorul rezultat:

Lema 3.1.1 (Kasahara, [65]). *Fie $(X, \to, d)$ un spaţiu Kasahara, unde $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ este o funcţională cu proprietatea $d(x, x) = 0$ pentru orice $x \in X$. Dacă $A, B \in P_d(X)$ atunci $H_d(A, B) = 0$ dacă şi numai dacă $A = B$.*

În următoarele rezultate de punct fix, considerăm spaţiul Kasahara $(X, \to, d)$, unde $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ este o funcţională ce satisface următoarele proprietăţi:

- ⋄ $d(x, x) = 0$, oricare ar fi $x \in X$;
- ⋄ $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$, oricare ar fi $x, y \in X$.

Studiul teoremelor de punct fix pentru aplicaţiile multivoce a fost iniţiat de Markin [85] şi Nadler [94]. Următorul rezultat, de obicei cunoscut ca teorema de punct fix a lui Nadler, extinde Principiul Contracţiilor lui Banach-Caccioppoli de la operatorii univoci la cei multivoci de tip contractiv.

Teorema 3.1.1 (S.B. Nadler Jr. [94]). *Fie (X, d) un spaţiu metric complet, iar $T : X \to P_{b,cl}(X)$ o α-contracţie multivocă, i.e., o aplicaţie pentru care există constanta $\alpha \in]0, 1[$ astfel încât $H(Tx, Ty) \leq \alpha \cdot d(x, y)$, oricare ar fi $x, y \in X$. Atunci T are cel puţin un punct fix.*

În rezultatul de mai sus, $P_{b,cl}(X)$ notează familia tuturor submulţimilor închise şi mărginite din X. În plus, H reprezintă funcţionala Pompeiu-Hausdorff (a se vedea [8], [15]).

Observăm de asemenea c a teorema de punct fix a lui Nadler are loc în contextul spaţiilor metrice. Adaptăm acest rezultat astfel încât acesta să fie adevărat şi în contextul spaţiilor Kasahara.

Lema 3.1.2 (A.-D. Filip [32]). *Fie $(X, \to, d)$ un spaţiu Kasahara, unde $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ este o funcţională cu proprietăţile $d(x, x) = 0$ şi $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$, oricare ar fi $x, y \in X$. Fie $A, B \in P_d(X)$ şi numărul real $q > 1$. Atunci pentru orice $a \in A$, există $b \in B$ astfel încât*

$$d(a, b) \leq q \cdot H_d(A, B).$$

Teorema 3.1.2 (A.-D. Filip [32]). *Fie $(X, \to, d)$ un spaţiu Kasahara, unde $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ este o funcţională cu proprietăţile $d(x, x) = 0$ şi $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$, oricare ar fi $x, y \in X$. Fie $T : X \to P_d(X)$ un operator multivoc. Presupunem că*

i) $Graph(T)$ este închis în $(X, \to)$;

ii) T este o α-contracţie multivocă, i.e.,

$$\text{există } \alpha \in [0,1[\text{ astfel încât } H_d(Tx,Ty) \leq \alpha \cdot d(x,y), \text{ oricare ar fi } x,y \in X.$$

Atunci T are cel puţin un punct fix.

Observaţia 3.1.1. *Teorema 3.1.2 extinde teorema de punct fix a lui Nadler 3.1.1 deoarece contextul spaţiilor metrice complete este înlocuit de contextul spaţiilor Kasahara în care funcţionala $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ nu este neapărat o metrică.*

A. Petruşel şi I.A. Rus au introdus în [103] conceptul de *teorie a unei teoreme metrice de punct fix* şi folosesc această teorie în cazul contracţiilor multivoce. Referindu-ne la lucrarea [103], prezentăm în continuare o teorie a punctului fix pentru teorema 3.1.2.

Teorema 3.1.3. *Fie $(X, \to, d)$ un spaţiu Kasahara, unde $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ este o funcţională cu proprietăţile $d(x,x) = 0$ şi $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$, oricare ar fi $x,y \in X$. Fie $T : X \to P_d(X)$ un operator multivoc. Presupunem că*

(i) $Graph(T)$ este închis în $(X, \to)$;

(ii) T este o α-contractie multivocă, i.e.,

$$\text{există } \alpha \in [0,1[\text{ astfel încât } H_d(Tx,Ty) \leq \alpha \cdot d(x,y), \text{ oricare ar fi } x,y \in X;$$

(iii) d satisface inegalitatea triunghiului şi este continuă în raport cu al doilea argument.

Atunci

(1) T este un operator multivoc slab Picard şi pentru orice $x^* \in F_T$, $x_0 \in X$ şi $x_1 \in Tx_0$ avem

$$d(x_0, x^*) \leq \frac{1}{1-\alpha} d(x_0, x_1) \tag{3.1.1}$$

(2) Fie $S : X \to P_d(X)$ o α-contracţie multivocă şi $\eta > 0$ astfel încât pentru orice $x \in X$, $H_d(Sx,Tx) \leq \eta$. Atunci $H_d(F_S, F_T) \leq \frac{\eta}{1-\alpha}$.

(3) Fie $T_n : X \to P_d(X)$, $n \in \mathbb{N}$ un şir de α-contracţii multivoce astfel încât $T_n x \xrightarrow{H_d} Tx$ când $n \to \infty$ uniform în raport cu $x \in X$. Atunci $F_{T_n} \xrightarrow{H_d} F_T$ când $n \to \infty$.

(4) Dacă în plus, Tx este o submulţime compactă din X pentru orice $x \in X$, atunci avem

- *(stabilitatea Ulam-Hyers pentru incluziunea $x \in Tx$)*
  Fie $\varepsilon > 0$ şi $x \in X$ astfel încât $D(x,Tx) \leq \varepsilon$. Atunci există $x^* \in F_T$ astfel încât $d(x,x^*) \leq \frac{\varepsilon}{1-\alpha}$.

În plus, avem următorul rezultat:

Teorema 3.1.4. *Fie* $(X, \to, d)$ *un spaţiu Kasahara, unde* $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ *este o funcţională ce satisface* $d(x,x) = 0$ *şi* $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$*, oricare ar fi* $x, y \in X$*. Fie* $T : X \to P_d(X)$ *un operator multivoc. Presupunem că*

(i) *Graph*(T) *este închis în* $(X, \to)$*;*

(ii) T *este o* α*-contracţie multivocă, i.e.,*

$$\text{există } \alpha \in [0,1[\text{ astfel încât } H_d(Tx,Ty) \le \alpha \cdot d(x,y), \text{ oricare ar fi } x,y \in X;$$

(iii) $(SF)_T \neq \emptyset$.

Atunci următoarele afirmaţii sunt adevărate

(1) $F_T = (SF)_T = \{x^*\}$*;*

(2) $F_{T^n} = (SF)_{T^n} = \{x^*\}$ *oricare ar fi* $n \in \mathbb{N}^*$*;*

(3) $H_d(T^n x, x^*) \overset{\mathbb{R}}{\to} 0$ *când* $n \to \infty$*, pentru orice* $x \in X$*;*

(4) *dacă* d *satisface inegalitatea triunghiului, atunci*

  (4_a) *fie* $S : X \to P_d(X)$ *un operator multivoc şi* $\eta > 0$ *astfel încât* $F_S \neq \emptyset$ *şi* $H_d(Sx,Tx) \le \eta$*, pentru orice* $x \in X$*. Atunci* $H_d(F_S, F_T) \le \frac{\eta}{1-\alpha}$*;*

  (4_b) *fie* $T_n : X \to P_d(X)$*,* $n \in \mathbb{N}$ *un şir de operatori multivoci astfel încât* $F_{T_n} \neq \emptyset$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$ *şi* $H_d(T_n x, Tx) \to 0$ *când* $n \to \infty$ *uniform în raport cu* $x \in X$*. Atunci* $H_d(F_{T_n}, F_T) \to 0$ *când* $n \to \infty$*;*

(5) *dacă* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un şir din* X *astfel încât* $D(x_n, Tx_n) \to 0$ *când* $n \to \infty$*, atunci* $d(x_n, x^*) \to 0$ *când* $n \to \infty$*;*

(6) *dacă* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un şir din* X *astfel încât* $H_d(x_n, Tx_n) \to 0$ *când* $n \to \infty$*, atunci* $d(x_n, x^*) \to 0$ *când* $n \to \infty$*;*

(7) *presupunând că* d *satisface inegalitatea triunghiului, proprietatea de umbrire la limită a lui* T *are loc, i.e., dacă* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un şir din* X *astfel încât* $D(Ty_n, y_{n+1}) \to 0$ *când* $n \to \infty$*, atunci există un şir* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ *al aproximaţiilor succesive ale lui* T*, astfel încât* $d(x_n, y_{n+1}) \to 0$ *când* $n \to \infty$*.*

Observaţia 3.1.2. *Teoremele 3.1.3 şi 3.1.4 extind teoremele 3.1 şi 3.2 obţinute de A. Petruşel şi I.A. Rus în lucrarea [103] în sensul că în locul spaţiilor metrice complete sunt considerate spaţiile Kasahara.*

- Prezentăm în continuare un rezultat local de punct fix pentru operatorii Zamfirescu multivoci în spaţiile Kasahara, prin extinderea rezultatelor obţinute pentru operatorii Zamfirescu univoci din lucrarea A.-D. Filip [36].

Vom reaminti mai întâi noţiunea de operator Zamfirescu multivoc.

Definiţia 3.1.2 (A.-D. Filip, [37]). *Fie $(X, \to, d)$ un spaţiu Kasahara. Aplicaţia $T : X \to P(X)$ se numeşte operator Zamfirescu multivoc dacă există α, β, $\gamma \in \mathbb{R}_+$ cu $\alpha < 1$, $\beta < \frac{1}{2}$ şi $\gamma < \frac{1}{2}$ astfel încât pentru orice $x, y \in X$ şi $u \in Tx$, există $v \in Ty$ astfel încât cel puţin una din următoarele condiţii are loc:*

(1_m) $d(u, v) \leq \alpha d(x, y)$;

(2_m) $d(u, v) \leq \beta[d(x, u) + d(y, v)]$;

(3_m) $d(u, v) \leq \gamma[d(x, v) + d(y, u)]$.

În rezultatele următoare, considerăm spaţiul Kasahara $(X, \to, d)$ şi presupunem că $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ este o premetrică, i.e. funcţionala d satisface următoarele condiţii:

(d_1) $d(x, x) = 0$, oricare ar fi $x \in X$;

(d_2) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, oricare ar fi $x, y, z \in X$.

Presupunem în plus că

(d_3) d este continuă în raport cu al doilea argument.

Observaţia 3.1.3. *În baza presupunerilor de mai sus pentru spaţiul Kasahara $(X, \to, d)$, bila închisă la dreapta*

$$\tilde{B}_d(x_0, r) := \{x \in X \mid d(x_0, x) \leq r\}$$

unde $x_0 \in X$ şi $r \in \mathbb{R}_+$, este o mulţime închisă în raport cu $\to$, în sensul că pentru orice şir $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \tilde{B}_d(x_0, r)$, cu $z_n \to z \in X$ când $n \to \infty$, avem că $z \in \tilde{B}_d(x_0, r)$.

Prezentăm în continuare un rezultat local de punct fix în spaţii Kasahara.

Teorema 3.1.5 (A.-D. Filip, [37]). *Fie $(X, \to, d)$ un spaţiu Kasahara şi $T : \tilde{B}_d(x_0, r) \to P(X)$ un operator Zamfirescu multivoc. Presupunem că:*

(i) T are grafic închis în raport cu $\to$;

(ii)

$$d(x_0, z) \leq (1 - \delta)r; \tag{3.1.2}$$

unde $z \in Tx_0$ şi $\delta := \max\left\{\alpha, \frac{\beta}{1-\beta}, \frac{\gamma}{1-\gamma}\right\}$;

(iii) $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ este o premetrică, continuă în raport cu al doilea argument.

Atunci următoarele afirmaţii au loc:

(1) T are cel puţin un punct fix în bila $\tilde{B}_d(x_0, r)$.

(2) există un şir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \tilde{B}_d(x_0, r)$ astfel încât

(2.a) $x_{n+1} \in Tx_n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$;

(2.b) $x_n \to x^* \in F_T$ când $n \to \infty$;

(2.c) *avem*

$$d(x_n, x^*) \leq \delta^n r, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}, \tag{3.1.3}$$

unde $x^* \in F_T$ *şi* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este şirul aproximaţiilor succesive pentru* T *ce porneşte din* $(x_0, x_1) \in Graph(T)$.

- Următoarele rezultate de punct fix sunt obţinute pentru operatori multivoci în contextul spaţiilor Kasahara generalizate $(X, \to, d)$, unde $d : X \times X \to \mathbb{R}^m_+$ este o funcţională.

Considerăm următoarea mulţime:

$$\mathcal{M}^{\Delta}_{m,m}(\mathbb{R}_+) := \left\{ Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1m} \\ 0 & q_{22} & \dots & q_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & q_{mm} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R}_+) \;\middle|\; \max_{i=\overline{1,m}} q_{ii} < \frac{1}{2} \right\}.$$

Atunci are loc următoarea lemă:

Lema 3.1.3 (A.-D. Filip, [37]). *Dacă* $Q \in \mathcal{M}^{\Delta}_{m,m}(\mathbb{R}_+)$ *atunci*

(1) *matricea* Q *este convergentă la zero;*

(2) *matricea* $(I_m - Q)^{-1}Q$ *este convergentă la zero.*

Prezentăm în continuare rezultate locale şi globale de punct fix pentru operatori multivoci în spaţii Kasahara generalizate.

Teorema 3.1.6 (A.-D. Filip, [37]). *Fie* $(X, \to, d)$ *un spaţiu Kasahara generalizat şi* $T : \tilde{B}_d(x_0, r) \to P(X)$ *un operator multivoc. Presupunem că:*

(i) T *are grafic închis în raport cu* $\to$*;*

(ii) *una din următoarele condiţii are loc:*

(ii_1) *există matricea* $A \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R}_+)$ *convergentă la zero astfel încât pentru orice* $x, y \in X$ *şi* $u \in Tx$ *există* $v \in Ty$ *astfel încât*

$$d(u, v) \leq Ad(x, y);$$

(ii_2) *există matricea* $B \in \mathcal{M}^{\Delta}_{m,m}(\mathbb{R}_+)$ *astfel încât pentru orice* $x, y \in X$ *şi* $u \in Tx$ *există* $v \in Ty$ *astfel încât*

$$d(u, v) \leq B[d(x, u) + d(y, v)];$$

(ii_3) *există matricea* $C \in \mathcal{M}^{\Delta}_{m,m}(\mathbb{R}_+)$ *astfel încât pentru orice* $x, y \in X$ *şi* $u \in Tx$ *există* $v \in Ty$ *astfel încât*

$$d(u, v) \leq C[d(x, v) + d(y, u)];$$

(iii) *dacă* $u \in \mathbb{R}^m_+$ *satisface proprietatea* $u(I_m - M)^{-1} \leq (I_m - M)^{-1}r$, *atunci* $u \leq r$ *oricare ar fi* $M \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R}_+)$*;*

(iv)

$$d(x_0, z)(I_m - W)^{-1} \leq r \tag{3.1.4}$$

unde $z \in Tx_0$ *şi* $W := \max\left\{A, (I_m - B)^{-1}B, (I_m - C)^{-1}C\right\} \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R}_+)$*;*

(v) $d : X \times X \to \mathbb{R}^m_+$ *este o premetrică, continuă în raport cu al doilea argument pe* X*.*

Atunci următoarele afirmaţii sunt adevărate:

(1) T *are cel puţin un punct fix în bila* $\tilde{B}_d(x_0, r)$*.*

(2) *există şirul* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \tilde{B}_d(x_0, r)$ *astfel încât*

(2.*a*) $x_{n+1} \in Tx_n$*, oricare ar fi* $n \in \mathbb{N}$*;*

(2.*b*) $x_n \to x^* \in F_T$ *când* $n \to \infty$*;*

(2.*c*) *avem*

$$d(x_n, x^*) \leq W^n(I_m - W)^{-1}d(x_0, x_1), \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}, \tag{3.1.5}$$

unde $x^* \in F_T$ *şi* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este şirul aproximaţiilor succesive pentru* T *pornind din* $(x_0, x_1) \in Graph(T)$*.*

Observaţia 3.1.4. *Orice matrice* $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$*, cu* $a, b \in \mathbb{R}_+$ *şi* $\max\{a, b\} < 1$*, este convergentă la zero şi satisface condiţia (iii) din teorema 3.1.6.*

Observaţia 3.1.5. *Teorema 3.1.6 are loc şi în cazul în care presupunerea* (ii_1) *este înlocuită cu următoarea presupunere:*

(ii_1') *există o matrice* $A \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R}_+)$ *convergentă la zero şi o matrice* $B \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R}_+)$ *astfel încât pentru orice* $x, y \in X$ *şi* $u \in Tx$ *există* $v \in Ty$ *astfel încât*

$$d(u, v) \leq Ad(x, y) + Bd(y, u).$$

Rezultatul global de punct fix corespunzător teoremei 3.1.6 este următorul:

Corolar 3.1.1 (A.-D. Filip, [37])**.** *Fie* $(X, \to, d)$ *un spaţiu Kasahara generalizat şi* $T : X \to P(X)$ *un operator multivoc. Presupunem că:*

(i) T *are grafic închis în raport cu* $\to$*;*

(ii) cel puţin una din condiţiile (ii_1), (ii_2), (ii_3) *ale Teoremei 3.1.6 are loc;*

(iii) $d : X \times X \to \mathbb{R}^m_+$ *este o premetrică, continuă în raport cu al doilea argument.*

Atunci următoarele afirmaţii au loc:

(1) T *are cel puţin un punct fix în* X*.*

(2) *există un şir* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ *astfel încât concluziile* $(2.a)$, $(2.b)$ *şi* $(2.c)$ *ale Teoremei 3.1.6 au loc.*

Ca şi o aplicaţie a rezultatelor anterioare, prezentăm o teoremă de punct fix referitoare la existenţa soluţiilor sistemelor de incluziuni semiliniare.

Teorema 3.1.7 (A.-D. Filip, [37]). *Fie* $\varphi, \psi : [0,1]^2 \to]0, \frac{1}{2}]$ *două funcţii şi* $T_1, T_2 : [0,1]^2 \to P([0,1])$ *doi operatori multivoci definiţi astfel:*

$$T_1(x_1,x_2) = [\varphi(x_1,x_2), \tfrac{1}{2} + \varphi(x_1,x_2)] \text{ şi}$$
$$T_2(x_1,x_2) = [\psi(x_1,x_2), \tfrac{1}{2} + \psi(x_1,x_2)].$$

Presupunem că pentru orice (x_1,x_2), $(y_1,y_2) \in [0,1]^2$ *şi orice* $u_1 \in T_1(x_1,x_2)$ *şi* $u_2 \in T_2(x_1,x_2)$, *există* $v_1 \in T_1(y_1,y_2)$ *şi* $v_2 \in T_2(y_1,y_2)$ *astfel încât unul din următoarele cupluri de condiţii are loc:*

(I) *oricare ar fi* $a,b,c,d \in \mathbb{R}_+$ *cu* $|a+d \pm \sqrt{(a-d)^2+4bc}| < 2$,

$$|u_1 - v_1| \le a|x_1 - y_1| + b|x_2 - y_2|,$$
$$|u_2 - v_2| \le c|x_1 - y_1| + d|x_2 - y_2|,$$

(II) *oricare ar fi* $a,b,c \in \mathbb{R}_+$ *cu* $a,c < \frac{1}{2}$,

$$|u_1 - v_1| \le a\big(|x_1 - u_1| + |y_1 - v_1|\big) + b\big(|x_2 - u_2| + |y_2 - v_2|\big),$$
$$|u_2 - v_2| \le c\big(|x_2 - u_2| + |y_2 - v_2|\big),$$

(III) *oricare ar fi* $a,b,c \in \mathbb{R}_+$ *cu* $a,c < \frac{1}{2}$,

$$|u_1 - v_1| \le a\big(|x_1 - v_1| + |y_1 - u_1|\big) + b\big(|x_2 - v_2| + |y_2 - u_2|\big),$$
$$|u_2 - v_2| \le c\big(|x_2 - v_2| + |y_2 - u_2|\big).$$

Atunci sistemul

$$\begin{cases} x_1 \in T_1(x_1,x_2) \\ x_2 \in T_2(x_1,x_2), \end{cases}$$

are cel puţin o soluţie în $[0,1]^2$.

- Prezentăm în continuare unele rezultate de punct fix pentru operatori Zamfirescu multivoci în spaţii Kasahara în sens larg, în sensul definiţiei 2.1.8.

Teorema 3.1.8 (A.-D. Filip, [37]). *Fie* $(X, \xrightarrow{d}, p)$ *un spaţiu Kasahara în sens larg, în sensul definiţiei 2.1.8, unde* $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ *este o metrică completă pe* X, *iar* $p : X \times X \to \mathbb{R}_+$ *este o* w*-distanţă pe* X. *Fie* $x_0 \in X$, $r > 0$ *şi* $T : \tilde{B}_p(x_0,r) \to P(X)$ *un operator Zamfirescu multivoc în raport cu* p. *Presupunem că:*

(i) *T are grafic închis în raport cu* $\xrightarrow{d}$;

(ii) $p(x_0, z) < (1-\delta)r$, *unde* $z \in Tx_0$ *şi* $\delta := \max\left\{\alpha, \frac{\beta}{1-\beta}, \frac{\gamma}{1-\gamma}\right\}$;

(iii) $p(x, x) = 0$, *oricare ar fi* $x \in X$.

Atunci următoarele afirmaţii au loc:

(1) *T are cel puţin un punct fix în bila* $\tilde{B}_p(x_0, r)$.

(2) *există şirul* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \tilde{B}_p(x_0, r)$ *astfel încât*

(2.a) $x_{n+1} \in Tx_n$, *oricare ar fi* $n \in \mathbb{N}$;

(2.b) $x_n \to x^* \in F_T$ *când* $n \to \infty$;

(2.c) *următoarea estimare are loc*

$$p(x_n, x^*) \leq \delta^n r, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}, \tag{3.1.6}$$

unde $x^* \in F_T$ *şi* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este şirul aproximaţiilor succesive ale lui* T*, pornind din* $(x_0, x_1) \in Graph(T)$.

Varianta globală a teoremei 3.1.8 este cuprinsă în următorul corolar:

Corolar 3.1.2 (A.-D. Filip, [37]). *Fie* $(X, \xrightarrow{d}, p)$ *un spaţiu Kasahara în sens larg, în sensul definiţiei 2.1.8, unde* $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ *este o metrică completă pe* X*, iar* $p : X \times X \to \mathbb{R}_+$ *este o w-distanţă pe* X*. Fie* $T : X \to P(X)$ *un operator Zamfirescu multivoc în raport cu* p*. Presupunem că* T *are graficul închis în raport cu* $\xrightarrow{d}$ *şi* $p(x, x) = 0$*, oricare ar fi* $x \in X$*. Atunci următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

(1) T are cel puţin un punct fix în X;

(2) şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ *al aproximaţiilor succesive ale lui* T *pornind din* $(x_0, x_1) \in Graph(T)$ *converge la elementul* $x^* \in F_T$ *când* $n \to \infty$;

(3) următoarea estimare are loc:

$$p(x_n, x^*) \leq \frac{\delta^n}{1-\delta} p(x_0, x_1), \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},$$

unde $\delta := \max\left\{\alpha, \frac{\beta}{1-\beta}, \frac{\gamma}{1-\gamma}\right\}$, $x^* \in F_T$ *şi* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este şirul aproximaţiilor succesive ale lui* T*, pornind din* $(x_0, x_1) \in Graph(T)$.

Prezentăm în continuare un rezultat de dependenţă de date pentru operatorii Zamfirescu multivoci.

Teorema 3.1.9 (A.-D. Filip, [37]). *Fie* $(X, \xrightarrow{d}, p)$ *un spaţiu Kasahara în sens larg, în sensul definiţiei 2.1.8, unde* $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ *este o metrică completă pe* X*, iar* $p : X \times X \to \mathbb{R}_+$ *este o w-distanţă pe* X *cu* $p(x, x) = 0$*, oricare ar fi* $x \in X$*. Fie* $T_1, T_2 : X \to P(X)$ *doi operatori Zamfirescu multivoci în raport cu* p*, având grafic închis în raport cu* $\xrightarrow{d}$*. Atunci* *(i)* T_1 *şi* T_2 *au cel puţin un punct fix în* X*;*

(ii) *dacă presupunem că există* $\eta > 0$ *astfel încât pentru orice* $x \in X$ *şi* $u \in T_1x$*, există* $v \in T_2x$ *astfel încât* $p(u,v) \leq \eta$*, atunci pentru orice* $u^* \in F_{T_1}$*, există* $v^* \in F_{T_2}$ *astfel încât*

$$p(u^*,v^*) \leq \frac{\eta}{1-\delta_2}, \text{ unde } \delta_2 = \max\left\{\alpha_2, \frac{\beta_2}{1-\beta_2}, \frac{\gamma_2}{1-\gamma_2}\right\} \tag{3.1.7}$$

respectiv, dacă presupunem că există $\eta > 0$ *astfel încât pentru orice* $x \in X$ *şi* $v \in T_2x$*, există* $u \in T_1x$ *astfel încât* $p(v,u) \leq \eta$*, atunci pentru orice* $v^* \in F_{T_2}$*, există* $u^* \in F_{T_1}$ *astfel încât*

$$p(v^*,u^*) \leq \frac{\eta}{1-\delta_1}, \text{ unde } \delta_1 = \max\left\{\alpha_1, \frac{\beta_1}{1-\beta_1}, \frac{\gamma_1}{1-\gamma_1}\right\}. \tag{3.1.8}$$

3.2 Teoreme de punct fix de tip Maia

Scopul acestei secţiuni este de a prezenta unele teoreme de punct fix de tip Maia pentru contracţiile multivoce generalizate, în strânsă legătură cu rezultatele obţinute în spaţiile Kasahara, obţinute în secţiunea precedentă.

Mai întâi, reamintim varianta multivocă a teoremei de punct fix a lui Maia 2.2.1.

Teorema 3.2.1 (A. Petruşel şi I.A. Rus [102])**.** *Fie* X *o mulţime nevidă,* d *şi* ρ *două metrici pe* X*, iar* $T : X \to P(X)$ *un operator multivoc. Presupunem că:*

(i) (X,ρ) *este un spaţiu metric complet;*

(ii) *există* $c > 0$ *astfel încât* $\rho(x,y) \leq c \cdot d(x,y)$*, oricare ar fi* $x, y \in X$*;*

(iii) $T : (X,\rho) \to (P(X), H_\rho)$ *are grafic închis (aici* H_ρ *reprezintă funcţionala Pompeiu-Hausdorff generată de* ρ *(a se vedea [51]));*

(iv) *există* $\alpha \in [0,1[$ *astfel încât* $H_d(Tx,Ty) \leq \alpha d(x,y)$*, oricare ar fi* $x, y \in X$*.*

Atunci avem:

(a) $F_T \neq \emptyset$*;*

(b) *pentru orice* $x \in X$ *şi orice* $y \in Tx$ *există un şir* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *astfel încât:*

(1) $x_0 = x$, $x_1 = y$;

(2) $x_{n+1} \in Tx_n$, *oricare ar fi* $n \in \mathbb{N}$;

(3) $x_n \xrightarrow{\rho} x^* \in Tx^*$, *când* $n \to \infty$.

Menţionăm aici alte două rezultate locale de punct fix de tip Maia.

Teorema 3.2.2 (A.-D. Filip, [31]). *Fie X o mulţime nevidă, ρ şi d două metrici pe X, $x_0 \in X$, $r > 0$ şi $T : \tilde{B}_d(x_0, r) \to P(X)$ un operator multivoc. Presupunem că:*

(i) *(X, ρ) este un spaţiu metric complet;*

(ii) *există $c > 0$ astfel încât $\rho(x, y) \leq c \cdot d(x, y)$, oricare ar fi $x, y \in \tilde{B}_d(x_0, r)$;*

(iii) *$T : (\tilde{B}_d(x_0, r), \rho) \to (P(X), H_\rho)$ are grafic închis (H_ρ reprezintă funcţionala Pompeiu-Hausdorff generată de ρ (a se vedea [51]));*

(iv) *există $L \geq 0$ astfel încât pentru orice $x \in \tilde{B}_d(x_0, r)$, există $y \in I^x_{b,d}$ astfel încât*

$$H_d(Tx, Ty) \leq \Lambda(d(x, y)) \cdot d(x, y) + L \cdot D_d(y, Tx)$$

unde

- $\diamond$ $I^x_{b,d} := \left\{y \in Tx \mid b \cdot d(x, y) \leq D_d(x, Tx)\right\}$*, unde* $b \in]0, 1[$ *şi* $D_d(x, Tx) = \inf\limits_{z \in Tx} d(x, z)$.
- $\diamond$ $\Lambda : \mathbb{R}_+ \to [0, 1[$ *este o funcţie definită prin* $\Lambda(t) = b \cdot \alpha(t)$*, oricare ar fi* $t \in \mathbb{R}_+$*, unde* $b \in]0, 1[$ *este acelaşi număr folosit în definirea mulţimii* $I^x_{b,d}$*, iar* $\alpha : \mathbb{R}_+ \to [0, 1[$ *este o funcţie cu proprietatea că* $\limsup\limits_{s \to t^+} \alpha(s) < 1$*, oricare ar fi* $t \in \mathbb{R}_+$.

(v) *$D_d(x_0, Tx_0) < b(1 - \theta)r$, unde $\theta \in [0, 1[$ satisface $\Lambda(t) < b\theta$, oricare ar fi $t \in \mathbb{R}_+$.*

Atunci:

(a) $F_T \neq \emptyset$;

(b) *există un şir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ în $\tilde{B}_d(x_0, r)$ astfel încât:*

  (b1) *$x_{n+1} \in Tx_n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$;*

  (b2) *$x_n \xrightarrow{\rho} x^* \in F_T$, când $n \to \infty$;*

  (b3) *$\rho(x_n, x^*) \leq c \cdot \theta^n \cdot r$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.*

Observaţia 3.2.1. *În Teorema 3.2.2, considerând $n = 0$ în concluzia (b3), avem că $x^* \in \tilde{B}_\rho(x_0, cr)$.*

Considerăm acum cazul spaţiilor metrice generalizate (X, d), unde $d : X \times X \to \mathbb{R}^m_+$. Are loc urmă toarea teoremă de punct fix de tip Maia:

Teorema 3.2.3 (A.-D. Filip şi A. Petruşel [39]). *Fie X o mulţime nevidă şi $d, \rho : X \times X \to \mathbb{R}^m_+$ două metrici generalizate pe X. Fie $x_0 \in X$, $r := (r_1, r_2, \ldots, r_m) \in \mathbb{R}^m_+$ şi fie $T : \tilde{B}_d(x_0, r) \to P(X)$ un operator multivoc. Presupunem că:*

(i) *(X, ρ) este un spaţiu metric generalizat şi complet;*

(ii) *există $C \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R}_+)$ astfel încât $\rho(x, y) \leq C \cdot d(x, y)$, oricare ar fi $x, y \in X$;*

(iii) $T : (\tilde{B}_d(x_0, r), \rho) \to (P(X), H_\rho)$ *are grafic închis* (H_ρ *reprezintă funcţionala Pompeiu-Hausdorff generată de* ρ *(a se vedea [51]));*

(iv) există $A, B \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R}_+)$ *astfel încât* A *este o matrice convergentă la zero şi pentru orice* $x, y \in \tilde{B}_d(x_0, r)$ *şi* $u \in Tx$*, există* $v \in Ty$ *astfel încât*

$$d(u, v) \leq Ad(x, y) + Bd(y, u);$$

(v) dacă $u \in \mathbb{R}^m_+$ *satisface* $u(I_m - A)^{-1} \leq (I_m - A)^{-1}r$*, atunci* $u \leq r$*;*

(vi) $d(x_0, x_1)(I_m - A)^{-1} \leq r$.

Atunci $F_T \neq \emptyset$.

Observaţia 3.2.2. *În teorema 3.2.3, punctul fix* $x^* \in \tilde{B}_\rho(x_0, Cr)$.

Observaţia 3.2.3. *Alte rezultate de punct fix de tip Maia se pot obţine în cazul în care* d *nu este neapărat o metrică.*

Fie X *o mulţime nevidă şi* $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$ *o metrică completă pe* X*. Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un şir din* X *şi fie* $x \in X$*. Considerăm structura de convergenţă* $\overset{\rho}{\to}$ *indusă de* ρ *pe* X *şi definită prin*

$$x_n \overset{\rho}{\to} x \;\Leftrightarrow\; \rho(x_n, x) \to 0, \text{ când } n \to \infty.$$

Avem următoarele rezultate de punct fix de tip Maia:

Corolar 3.2.1 (A.-D. Filip [32])**.** *Fie* X *o mulţime nevidă şi* $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$ *o metrică completă pe* X*. Fie* $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ *o funcţională cu proprietatea că pentru orice* $x, y \in X$*,* $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$*. Fie* $T : X \to P_d(X)$ *un operator multivoc. Presupunem că:*

i) există $\alpha \in [0, 1[$ *astfel încât* $H_d(Tx, Ty) \leq \alpha \cdot d(x, y)$*, pentru orice* $x, y \in X$*;*

ii) $Graph(T)$ *este închis în* $(X, \overset{\rho}{\to})$*;*

iii) există $c > 0$ *astfel încât* $\rho(x, y) \leq c \cdot d(x, y)$.

Atunci următoarele afirmaţii sunt adevărate:

1) $F_T \neq \emptyset$*;*

2) există $\theta \in [0, 1[$ *astfel încât*

$$\rho(x_n, x^*) \leq c\frac{\theta^n}{1 - \theta}d(x_0, x_1), \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},$$

unde $x^* \in F_T$ *şi* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este şirul aproximaţiilor succesive pentru* T *pornind din* $(x_0, x_1) \in Graph(T)$.

Corolar 3.2.2 (A.-D. Filip, [33])**.** *Fie* X *o mulţime nevidă şi* $\rho : X \times X \to \mathbb{R}^m_+$ *o metrică generalizată şi completă pe* X*. Fie* $d : X \times X \to \mathbb{R}^m_+$ *o funcţională şi* $T : X \to P(X)$ *un operator multivoc. Presupunem că:*

i) există $A \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R}_+)$ *şi pentru orice* $x, y \in X$ *şi* $u \in Tx$*, există* $v \in Ty$ *astfel încât*

$$d(u, v) \leq Ad(x, y);$$

ii) $Graph(T)$ *este închis în* $X \times X$.

iii) există $c > 0$ *astfel încât* $\rho(x, y) \leq c \cdot d(x, y)$.

Atunci următoarele afirmaţii sunt adevărate:

1) dacă A *converge la zero, atunci* $F_T \neq \emptyset$*. Dacă, în plus,* $(I_m - A)$ *este inversabilă,* $(I_m - A)^{-1} \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{R}_+)$ *şi*

$$\max\{d(u, v) \mid u \in Tx,\ v \in Ty\} \leq Ad(x, y),\ \text{oricare ar fi } x, y \in X$$

atunci T *are un unic punct fix în* X.

2) $\rho(x_n, x^*) \leq c \cdot A^n(I_m - A)^{-1}d(x_0, x_1)$*, oricare ar fi* $n \in \mathbb{N}$*, unde* $x^* \in F_T$ *şi* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este şirul aproximaţiilor succesive ale lui* T*, pornind din* $(x_0, x_1) \in Graph(T)$.

3.3 Teoreme de punct fix în spaţii Kasahara relative la un operator

Introducem în această secţiune o noţiune nouă: spaţiu Kasahara relativ la un operator multivoc. Prezentăm apoi două rezultate de punct fix pentru α-contracţii multivoce definite pe spaţii Kasahara relative la un operator multivoc.

Definiţia 3.3.1. *Fie* $(X, \to)$ *un* L*-spaţiu,* $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ *o funcţională şi* $T : X \to P(X)$ *un operator multivoc. Tripletul* $(X, \to, d)$ *se numeşte spaţiu Kasahara relativ la operatorul* T *dacă şi numai dacă pentru orice şir* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ *care satisface proprietăţile:*

(i) $x_{n+1} \in Tx_n$*, oricare ar fi* $n \in \mathbb{N}$*;*

(ii) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} H_d(Tx_n, Tx_{n+1}) < \infty$

avem că $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este convergent în* $(X, \to)$.

Exemplul 3.3.1. *Fie* X *o mulţime nevidă,* $T : X \to P_d(X)$ *un operator multivoc şi* $d, \rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$ *două funcţionale. Presupunem că:*

(i) (X, ρ) *este un spaţiu metric complet;*

(ii) oricare ar fi $x \in X$ *şi* $y \in Tx$*, există* $z \in Ty$ *şi* $c > 0$ *astfel încât* $H_\rho(Tx, Ty) \leq c\cdot d(y, z)$*;*

(iii) $d(x, x) = 0$*, oricare ar fi* $x \in X$*;*

(iv) $d(x,y)=0 \Rightarrow x=y$, *oricare ar fi* $x,y \in X$.

Atunci $(X,\to,d)$ *este un spaţiu Kasahara relativ la operatorul* T.

Teorema 3.3.1. *Fie* $(X,\to,d)$ *un spaţiu Kasahara relativ la operatorul multivoc* $T : X \to P_d(X)$, *unde* $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ *este o funcţională ce satisface* $d(x,x)=0$ *şi* $d(x,y)=0 \Rightarrow x=y$, *oricare ar fi* $x,y \in X$. *Presupunem că:*

(i) *Graph*(T) *este închis în raport cu* $\to$;

(ii) T *este o* α*-contracţie multivoca în raport cu* d.

Atunci:

(1) $F_T \neq \emptyset$;

(2) *pentru orice* $x \in X$ *şi orice* $y \in Tx$, *există şirul* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ *astfel încât*

(2_a) $x_0 = x$, $x_1 = y$;

(2_b) $x_{n+1} \in Tx_n$, *oricare ar fi* $n \in \mathbb{N}$;

(2_c) $x_n \to x^* \in F_T$ *când* $n \to \infty$.

Teorema 3.3.2. *Fie* $(X,\to,d)$ *un spaţiu Kasahara relativ la operatorul multivoc* $T : X \to P_d(X)$, *cu* $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ *o funcţională ce satisface* $d(x,x)=0$, *oricare ar fi* $x \in X$. *Presupunem că:*

(i) *Graph*(T) *este închis în raport cu* $\to$;

(ii) T *este o* α*-contracţie multivocă în raport cu* d;

(iii) $(SF)_T \neq \emptyset$;

(iv) $d(x,y)=0 \Rightarrow x=y$, *oricare ar fi* $x,y \in X$.

Atunci:

(1) $F_T = (SF)_T = \{x^*\}$;

(2) $F_{T^n} = (SF)_{T^n} = \{x^*\}$;

(3) $H_d(T^n x, x^*) \leq \alpha^n d(x,x^*)$, *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$ *şi* $x \in X$;

(4) *dacă* d *satisface inegalitatea triunghiului, atunci*

(4_a) $d(x,x^*) \leq \frac{1}{1-\alpha} H_d(x,Tx)$ *pentru orice* $x \in X$;

(4_b) *problema de punct fix a lui* T *este bine-pusă în raport cu* D.

Bibliografie

[1] M. Albu, *A fixed point theorem of Maia-Perov type*, Studia Univ. Babeş-Bolyai Math., 23(1978), 76-79.

[2] G. Allaire, *Numerical Linear Algebra*, Springer, New York, 2008.

[3] V.G. Angelov, *On the nonlinear contractions in Fréchet L-spaces*, Mathematica, 27(1985), no. 1, 3-5.

[4] M. Angrisani şi M. Clavelli, *Synthetic approaches to problems of fixed points in metric spaces*, Ann. Mat. Pura Appl., 170(1996), 1-12.

[5] J.-P. Aubin şi J. Siegel, *Fixed points and stationary points of dissipative multivalued maps*, Proc. Amer. Math. Soc., 78(1980), 391-398.

[6] C.E. Aull şi R. Lowen, *Handbook of the History of General Topology, Vol. 3*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2001.

[7] S. Banach, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*, Fundamenta Mathematicae, 3(1922), 133-181.

[8] M. Berinde şi V. Berinde, *On a general class of multi-valued weakly Picard mappings*, J. Math. Anal. Appl., 326(2007), 772-782.

[9] V. Berinde, *A fixed point theorem of Maia type in K-metric spaces*, Sem. on Fixed Point Theory, Preprint 3(1991), Babeş-Bolyai Univ., Cluj-Napoca, 7-14.

[10] V. Berinde, *Iterative Approximation of Fixed Points*, Springer, Berlin, 2007.

[11] V. Berinde, *Common fixed points of noncommuting almost contractions in cone metric spaces*, Math. Commun., 15(2010), no. 1, 229-241.

[12] L.M. Blumenthal, *Theory and Applications of Distance Geometry*, Oxford, 1953.

[13] M.M. Bonsangue, F. van Breugel şi J.J.M.M. Rutten, *Generalized metric spaces: completion, topology and powerdomains via the Yoneda embedding*, Theoretical Computer Sciences, 193(1998), 1-51.

[14] D. Borşan, *Bitopologii generate de o g-quasimetrică*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Math.,22 (1997), fas. 2, 72-76.

[15] M.-F. Bota, *Dynamical aspects in the theory of multivalued operators*, Cluj Univ. Press, Cluj-Napoca, 2010.

[16] F.E. Browder, *On a theorem of Caristi and Kirk*, Fixed point theory and its applications, 23-27, Acad. Press, New York, 1976.

[17] R. Caccioppoli, *Un teorema generale sull'esistenza di elementi uniti in una transformazione funzionale*, Rendiconti dell'Academia Nazionale dei Lincei, vol. 11, 1930, 794-799.

[18] J. Caristi, *Fixed point theorems for mappings satisfaying inwardness conditions*, Trans. Amer. Math. Soc. 215 (1976), 241-251.

[19] A. Chiş, *Fixed point theorems for generalized contractions*, Fixed Point Theory, 4(2003), no. 1, 33-48.

[20] L.B. Čirič, *A generalization of Banach's contraction principle*, Proc. Amer. Math. Soc., 45(1974), 267-273.

[21] P. Corazza, *Introduction to metric-preserving function*, Amer. Math. Monthly, 104(1999), no. 4, 309-323.

[22] J. Daneš, *Some fixed point theorems*, Comment. Math. Univ. Carolinae, 9(1968), no. 2, 223-235.

[23] E. De Pascale, G. Marino şi P. Pietramala, *The use of the E-metric spaces in the search of fixed points*, Le Matematiche, 48(1993), fas. 2, 367-376.

[24] B.C. Dhage, *On extension of a fixed point theorem of Maia*, Pure Appl. Math. Sci., XXIV, 1-2(1986), 65-69.

[25] D. Doitchinov, *On completeness in quasi-metric spaces*, Topology and its Applications, 30(1988), 127-148.

[26] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, 1966.

[27] M. Edelstein, *An extension of Banach's contraction principle*, Proc. Amer. Math. Soc., 12(1961), 7-10.

[28] I. Ekeland, *Non convex minimization Problems*, Bull. Amer. Math. Soc., 1(1979), 443-474.

[29] M. El Amrani şi A.B. Mbarki, *Fixed point theorem by altering distance between the points*, Electr. Journal: Southwest Journal Pure Appl. Math., 1(2000), 16-21.

[30] R. Engelking, *General Topology*, PWN Warszawa, 1977.

[31] **A.-D. Filip**, *On the existence of fixed points for multivalued weak contractions*, Proceedings of the International Conference on Theory and Applications of Mathematics and Informatics, ICTAMI 2009, Alba Iulia, pp. 149-158.

[32] **A.-D. Filip**, *Fixed point theorems for multivalued contractions in Kasahara spaces*, Carpathian J. Math., submitted.

[33] **A.-D. Filip**, *Perov's fixed point theorem for multivalued mappings in generalized Kasahara spaces*, Studia Univ. Babeş-Bolyai Math., 56(2011), no. 3, 19-28.

[34] **A.-D. Filip**, *Fixed point theorems in Kasahara spaces with respect to an operator and applications*, Fixed Point Theory, 12(2011), no. 2, 329-340.

[35] **A.-D. Filip**, *Fixed point theory in large Kasahara spaces*, Anal. Univ. de Vest, Timişoara, submitted.

[36] **A.-D. Filip**, *A note on Zamfirescu's operators in Kasahara spaces*, General Mathematics, submitted.

[37] **A.-D. Filip**, *Several fixed point results for multivalued Zamfirescu operators in Kasahara spaces*, JP Journal of Fixed Point Theory and Applications, submitted.

[38] **A.-D. Filip** şi P.T. Petra, *Fixed point theorems for multivalued weak contractions*, Studia Univ. Babeş-Bolyai Math., 54(2009), no. 3, 33-40.

[39] **A.-D. Filip** şi A. Petruşel, *Fixed point theorems on spaces endowed with vector-valued metrics*, Fixed Point Theory and Applications, 2010, Art. ID 281381, 15 pp.

[40] **A.-D. Filip** şi A. Petruşel, *Fixed point theorems for operators in generalized Kasahara spaces*, Sci. Math. Jpn., submitted.

[41] M. Fitting, *Metric methods: Three examples and a theorem*, J. Logic Programming, 12(1993), 1-16.

[42] M. Fréchet, *Les espaces abstraits*, Gauthier-Villars, Paris, 1928.

[43] M. Frigon, *Fixed point and continuation results for contractions in metric and gauge spaces*, Banach Center Publications, 77(2007), 89-114.

[44] A. Granas şi J. Dugundji, *Fixed Point Theory*, Springer Verlag Berlin, 2003.

[45] L. Guran, *Fixed Point Theory for Multivalued Operators on KST Spaces*, Ph.D. Thesis, Cluj-Napoca, 2009.

[46] F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig, 1914.

[47] T.L. Hicks, *Fixed point theorems for d-complete topological spaces I*, Int. J. Math. and Math. Sci., 15(1992), 435-440.

[48] T.L. Hicks şi B.E. Rhoades, *A Banach type fixed point theorem*, Math. Jap., 24(1979), 327-330.

[49] T.L. Hicks şi B.E. Rhoades, *Fixed point theorems for d-complete topological spaces II*, Math. Japonica, 37(1992), 847-853.

[50] P. Hitzler şi A.K. Seda, *Dislocated Topologies*, J. Electr. Engin., 51(12/s)(2000), 3-7.

[51] S. Hu şi N.S. Papageorgiou, *Handbook of Multivalued Analysis. Vol. I. Theory; Vol. II. Applications*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997 and 1999.

[52] L.-G. Huang şi X. Zhang, *Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings*, J. Math. Anal. Appl., 332(2007), 1468-1476.

[53] K. Iséki, *Fixed point theorems in generalized complete metric spaces*, Math. Sem. Notes, Kobe Univ., 2(1974), no. 1, 10 p.

[54] K. Iséki, *Fixed point theorems in generalized complete metric spaces*, Tamkang J. Math. 5(1974), 213-219.

[55] K. Iséki, *An approach to fixed point theorems*, Math. Sem. Notes, 3(1975), 193-202.

[56] K. Iséki, *Shouro Kasahara (1929-1980)*, Math. Japonica, 26(1981), no. 1, 3-8.

[57] S. Iyer, *Fixed point theorems in bimetric spaces*, Journal of M.A.C.T., 15(1982), 7-12.

[58] J. Jachymski, J. Matkowski şi T. Świątowski, *Nonlinear contractions on semimetric spaces*, J. Appl. Analysis, 1 (1995), no. 2, 125-134.

[59] C.F.K. Jung, *On generalized complete metric spaces*, Bull. A.M.S., 75(1969), 113-116.

[60] O. Kada, T. Suzuki şi W. Takahashi, *Nonconvex minimization theorems and fixed point theorems in complete metric spaces*, Math. Jap., 44(1996), 381-391.

[61] R. Kannan, *Some results on fixed points*, II, Amer. Math. Monthly, 76(1969), 405-408.

[62] S. Kasahara, *A Remark on the Contraction Principle*, Proc. Japan Acad., no. 1, 44(1968), 21-26.

[63] S. Kasahara, *Some fixed point and coincidence theorems in L-spaces*, Math. Seminar Notes, 3(1975), 181-187.

[64] S. Kasahara, *Common fixed point theorems for mappings in L-spaces*, Math. Seminar Notes, 3(1975), 203-212.

[65] S. Kasahara, *Common fixed points of multivalued mappings in L-spaces*, Math. Seminar Notes, 4(1976), 181-193.

[66] S. Kasahara, *On some generalizations of the Banach contraction theorem*, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 12(1976), 427-437.

[67] S. Kasahara, *Fixed point theorems in certain L-spaces*, Math. Seminar Notes, 5(1977), 29-35.

[68] S. Kasahara, *Common fixed point theorems in certain L-spaces*, Math. Seminar Notes, 5(1977), 173-178.

[69] S. Kasahara, *L-space version of coincidence theorem of Dugundji*, Math. Seminar Notes, 5(1977), 485-488.

[70] S. Kasahara, *A coincidence theorem in L-spaces*, Math. Seminar Notes, 6(1978), 15-18.

[71] J.L. Kelley, *General Topology*, van Nostrand, New-York, 1955.

[72] J.C. Kelly, *Bitopological spaces*, Proc. London Math. Soc., 13(1963), 71-89.

[73] M.A. Khamsi şi W.A. Kirk, *An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory*, Wiley-Interscience, New-York, 2001.

[74] M.S. Khan, M. Swaleh şi S. Sessa, *Fixed point theorems by altering distance between the points*, Bull. Austral. Math. Soc., 30(1984), no. 1, 1-9.

[75] P.Q. Khanh, *On Caristi-Kirk theorem and Ekeland variational principle for pareto extrema*, Polish Acad. Sc., Inst. Math., Preprint 357, 1986.

[76] W.A. Kirk şi B.G. Kang, *A fixed point theorem revisited*, J. Korean Math. Soc., 34(1997), 285-291.

[77] W.A. Kirkand şi B. Sims, *Handbook of Metric Fixed Point Theory*, Kluwer, 2001.

[78] R. Kopperman, *All topologies come from generalized metrics*, Amer. Math. Monthly, 95(1988), 89-97.

[79] R. Kopperman, S. Matthews şi H. Pajoohesh, *Partial metrizability in value quantales*, Applied General Topology, 5(2004), no. 1, 115-127.

[80] K. Kunen şi J.F. Vaughan (eds.), *Handbook of Set-Theoretic Topology*, North-Holland, Amsterdam, 1984.

[81] H.-P. A. Künzi şi V. Vajner, *Weighted quasi-metrics*, Ann. New York Acad. Sci., 728(1994), 64-77.

[82] W.A.J. Luxemburg, *On the convergences of successive approximations in the theory of ordinary differential equations*, Canad. Math. Bull., 1(1958), 9-20.

[83] W.A.J. Luxemburg, *On the convergences of successive approximations in the theory of ordinary differential equations*, Indag. Math., 20(1958), 540-546.

[84] M.G. Maia, *Un'osservatione sulle contrazioni metriche*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 40(1968), 139-143.

[85] J.T. Markin, *A fixed point theorem for set-valued mappings*, Bull. Amer. Math. Soc., 74(1968), 639-640.

[86] J. Matkowski, *Integrable solutions of functional equations*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.), 127(1975).

[87] S.G. Matthews, *Partial metric topology*, Ann. New York Acad. Sci., 728(1994), 183-197.

[88] S.G. Matthews, *Partial Metric Spaces*, Univ. Warwick, Depart. of Computer Science, Research Report no. 212, 1992.

[89] N. Mizoguchi şi W. Takahashi, *Fixed point theorems for multivalued mappings on complete metric spaces*, J. Math. Anal. Appl., 141(1989), 177-188.

[90] A.S. Mureşan, *Some fixed point theorems of Maia type*, Sem. on Fixed Point Theory, Preprint 3(1988), Babeş-Bolyai Univ. Cluj-Napoca, 35-42.

[91] A.S. Mureşan şi V. Mureşan, *A generalization of Maia's fixed point theorem*, Conferinţa de matematică aplicată şi mecanică, 20-23 oct. 1988, vol. II, Institutul Politehnic Cluj-Napoca, Sem. Th. Angheluţă, 185-190.

[92] A.S. Mureşan, *Fixed point theorems of Maia type for expansion mappings*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Oeconomica, 34(1)(1989), 81-84.

[93] V. Mureşan, *Basic problem for Maia-Perov's fixed point theorem*, Sem. on Fixed Point Theory, Preprint 3(1988), Babeş-Bolyai Univ. Cluj-Napoca, 43-48.

[94] S.B. Nadler Jr., *Multivalued contraction mappings*, Pacific J. Math., 30(1969), 475-488.

[95] S.V.R. Naidu, *Some fixed point theorems in metric spaces by altering distances*, Czech. Math. Journal, 53(128)(2003), 205-212.

[96] S. Oltra şi O. Valero, *Banach's fixed point theorem for partial metric spaces*, Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste, 36(2004), no. 1-2, 17-26.

[97] S.J. O'Neill, *Partial metrics, valuations and domain theory*, Ann. New York Acad. Sci. 806(1996), 304-315.

[98] P. Pavel şi I.A. Rus, *Ecuaţii diferenţiale şi integrale*, EDP Bucureşti, 1975.

[99] A.I. Perov, *On Cauchy problem for a system of ordinary differential equations*, Pviblizhen. Met. Reshen. Differ. Uvavn., 2(1964), 115-134.

[100] A. Petruşel, *Caristi type operators and applications*, Studia Univ. Babeş-Bolyai Math., 48(2003), 115-123.

[101] A. Petruşel, *Multivalued weakly Picard operators and applications*, Sci. Math. Jpn., 59(2004), 167-202.

[102] A. Petruşel şi I.A. Rus, *Fixed point theory for multivalued operators on a set with two metrics*, Fixed Point Theory, 8(2007), no. 1, 97-104.

[103] A. Petruşel şi I.A. Rus, *The theory of a metric fixed point theorem for multivalued operators*, Proceedings of the 9^{th} International Conference on Fixed Point Theory and Its Applications, Yokohama Publishers, 2009.

[104] A. Petruşel, I.A. Rus şi M.A. Şerban, *Fixed points for operators in generalized metric spaces*, CUBO A Mathematical Journal, 10(2008), no. 4, 45-66.

[105] R. Precup, *A fixed point theorem of Maia type in syntopogenous spaces*, Sem. on Fixed Point Theory, Preprint 3(1988), Babeş-Bolyai Univ. Cluj-Napoca, 49-70.

[106] R. Precup, *The role of the matrices that are convergent to zero in the study of semilinear operator systems*, Math & Computer Modeling, 49(2009), 703-708.

[107] B.K. Ray, *On a fixed point theorem in a space with two metrics*, The Mathematics Education, 9(1975), no. 3, 57-58.

[108] J.L. Reilly, *On non-Hausdorff spaces*, Topology Appl., 44(1992), 331-340.

[109] S. Romaguera şi M. Schellekens, *Quasimetric properties of complexity spaces*, Topology Appl., 98(1999), 311-322.

[110] I.A. Rus, *On a fixed point theorem of Maia*, Studia Univ. Babeş-Bolyai Math., 22(1977), 40-42.

[111] I.A. Rus, *On a fixed point theorem in a set with two metrics*, Mathematica, Revue d'analyse numérique et de la théorie de l'approximation, 6(1977), 197-201.

[112] I.A. Rus, *Principles and Applications of the Fixed Point Theory*, (in Romanian), Ed. Dacia, 1979.

[113] I.A. Rus, *Basic problem for Maia's theorem*, Sem. on Fixed Point Theory, Preprint 3(1981), Babeş-Bolyai Univ. Cluj-Napoca, 112-115.

[114] I.A. Rus, *A fiber generalized contraction theorem and applications*, Mathematica 41(64)(1999), no. 1, 85-90.

[115] I.A. Rus, *Generalized Contractions and Applications*, Cluj Univ. Press, Cluj-Napoca, 2001.

[116] I.A. Rus, *Weakly Picard operators and applications*, Seminar on Fixed Point Theory, Cluj-Napoca, 2(2001), 41-58.

[117] I.A. Rus, *Picard operators and applications*, Sci. Math. Japonicae, 58(2003), 191-219.

[118] I.A. Rus, *Data dependence of the fixed points in a set with two metrics*, Fixed Point Theory, 8(2007), no. 1, 115-123.

[119] I.A. Rus, *Fixed point theory in partial metric spaces*, Anal. Univ. de Vest, Timişoara, Seria Matematică-Informatică, 46(2008), no. 2, 141-160.

[120] I.A. Rus, *The theory of a metrical fixed point theorem: theoretical and applicative relevances*, Fixed Point Theory, 9(2008), no. 2, 541-559.

[121] I.A. Rus, *Kasahara spaces*, Sci. Math. Jpn., 72(2010), no. 1, 101-110.

[122] I.A. Rus, A.S. Mureşan şi V. Mureşan, *Weakly Picard operators on a set with two metrics*, Fixed Point Theory, 6(2005), no. 2, 323-331.

[123] I.A. Rus, A. Petruşel şi G. Petruşel, *Fixed Point Theory 1950-2000. Romanian Contributions*, House of the Book of Science, Cluj-Napoca, 2002.

[124] I.A. Rus, A. Petruşel şi G. Petruşel, *Fixed Point Theory*, Cluj University Press, Cluj-Napoca, 2008.

[125] I.A. Rus, A. Petruşel şi A. Sîntămărian, *Data dependence of the fixed points set of some multivalued weakly Picard operators*, Nonlinear Anal., 52(2003), 1947-1959.

[126] I.A. Rus, A. Petruşel şi A. Sîntămărian, *Data dependence of the fixed points set of multivalued weakly Picard operators*, Studia Univ. Babeş-Bolyai Math., 46(2001), 111-121.

[127] I.A. Rus, A. Petruşel şi M.A. Şerban, *Weakly Picard operators: equivalent definitions, applications and open problems*, Fixed Point Theory, 7(2006), 3-22.

[128] I.A. Rus şi M.A. Şerban, *Extensions of a Cauchy lemma and applications*, to appear.

[129] B. Rzepecki, *A note on fixed point theorem of Maia*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Math., 25(1980), no. 2, 65-71.

[130] L.M. Saliga, *Fixed point theorems for non-self maps in d-complete topological spaces*, Internat. J. Math. and Math. Sci., 19 (1996), no. 1, 103-110.

[131] K.P.R. Sastry şi G.V.R. Babu, *Some fixed point theorems by altering distances between the points*, Indian J. Pure Appl. Math., 30(1999), 641-647.

[132] K.P.R. Sastry şi G.V.R. Babu, *Fixed point theorems in metric spaces by altering distances*, Bull. Cal. Math. Soc., 90(1998), 175-182.

[133] K.P.R. Sastry, G.V.R. Babu şi D.N. Rao, *Fixed point theorems in complete metric spaces by using a continuous control function*, Bull. Cal. Math. Soc., 91(6)(1999), 493-502.

[134] B. Schweizer, H. Sherwood şi R.M. Tardiff, *Contractions on probabilistic metric spaces: example and counterexamples*, Stochastica, 12(1988), no. 1, 5-17.

[135] A.K. Seda, *Quasi-metrics and fixed point in computing*, Bull. EATCS 60(1996), 154-163.

[136] L.A. Steen şi J.A. Seebach Jr., *Counterexamples in Topology.* Second-Edition, Springer-Verlag, New York - Heidelberg, 1978.

[137] P.V. Subrahmanyam, *Remarks on some fixed point theorems related to Banach's contraction principle*, J. Math. Phys. Sci., 8(1974), 445-457; Eratum, 9(1975), 195.

[138] T. Suzuki, *Several fixed point theorems in complete metric spaces*, Yokohama Math. J., 44(1997), 61-72.

[139] T. Suzuki, *Generalized distance and existence theorems in complete metric spaces*, J. Math. Anal. Appl., 253(2001), 440-458.

[140] T. Suzuki, *Several fixed point theorems concerning τ-distance*, Fixed Point Theory and Applications, 2004(2004), no. 3, 195-209. doi:10.1155/S168718200431003X.

[141] T. Suzuki şi W. Takahashi, *Fixed point theorems and characterizations of metric completeness*, Topological Methods in Nonlinear Analysis, 8(1996), 371-382.

[142] M.A. Şerban, *Spaces with Perturbed Metrics and Fixed Point Theorems*, Auto. Comp. App. Math., 17(2008), no. 1, 5-16.

[143] W. Takahashi, *Existence theorems generalizing fixed point theorems for multivalued mappings*, Fixed point theory and applications, Pitman Res. Notes Math., 252(1991), 397-406.

[144] D. Tătaru, *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations with unbounded nonlinear terms*, J. Math. Anal. Appl., 163(1992), 345-392.

[145] M. Turinici, *Finite dimensional vector contractions and their fixed points*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Math., 35(1990), no. 1, 30-42.

[146] R.S. Varga, *Matrix Iterative Analysis*, Springer, Berlin, 2000.

[147] W. Walter, *A note on contraction*, SIAM Review, 18(1976), no.1, 107-111.

[148] R. Wegrzyk, *Fixed point theorems for multifunctions and their applications to functional equations*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.), 201(1982).

[149] P.P. Zabrejko, *K-metric and K-normed linear spaces: survey*, Collect. Math., 48(1997), no. 4-6, 825-859.

[150] T. Zamfirescu, *Fix point theorems in metric spaces*, Archiv der Mathematik, 23(1972), no. 1, 292-298.