UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI

FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

CLUJ-NAPOCA, ROMÂNIA

László Szilárd Csaba

Teoria operatorilor monotoni cu aplicaţii

Rezumatul tezei de doctorat

Conducător ştiinţific: **Prof.Univ.Dr. Kassay Gábor**

CLUJ-NAPOCA

23 Septembrie 2011

Cuprins

Introducere

Conceptul de monotonie pentru operatori definiţi pe un spaţiu Banach cu valori în dualul lui a fost introdus cu vreo cincizeci de ani în urmă în lucrările lui Browder şi Minty (vezi, de exemplu, [22–24], [91,92]). Această noţiune (adesea numit *monotonie în sens Minty-Browder*) s-a dovedit a fi o piatră de temelie în dezvoltarea analizei neliniare, în special al analizei convexe, datorită faptului că convexitatea unei funcţii proprie, inferior semicontinuă poate fi caracterizată prin monotonia subdiferenţialei ei (vezi, de exemplu, [34, 115]).

În ultimele decenii conceptul de monotonie în sens Minty-Browder s-a impus datorită importanţei sale, şi a influenţat şi alte ramuri ale matematicii, cum ar fi ecuaţiile diferenţiale, precum şi economia, ingineria, managementul, teoria probabilitaţilor şi alte ştiinţe aplicate. Datorită acestei interacţiuni conceptul de monotonie alături de convexitate au fost subiectele unei evoluţii dinamice, reflectată într-o serie de noi concepte - extensii ale noţiunilor clasice de monotonie şi convexitate, fără pierderea proprietăţilor valoroase ale acestora (vezi, de exemplu, [27], [55], [62], [94], [111] şi referinţele de acolo).

Acestă lucrare se bazează pe rezultatele originale ale autorului din 10 lucrări ştiinţifice, toate trimise spre publicare la reviste de prestigiu, şi este împărţită în patru capitole. După o scurtă introducere, în **Capitolul 1** sunt prezentate noţiunile de operator de monoton în sens Minty-Browder şi cele mai cunoscute generalizări ale sale, cum ar fi conceptele de cvasimonotonie, strict cvasimonotonie, pseudomonotonie şi strict pseudomonotonie. În acest capitol vom demonstra că monotonia locală, respectiv monotonia generalizată locală a unui operator pe complementul unei mulţimi închise având intersecţia numărabilă cu fiecare segment, implică monotonia globală, respectiv monotonia generalizată globală. Mai mult, vom da un exemplu de un operator continuu local Minty-Browder monoton, definit pe o submulţime conexă dar neconvexă din $\mathbb{R}^2$, care nu este nici măcar cvasimonoton global. Acest lucru arată că convexitatea a domeniului este esenţială atunci când extindem monotonia locală la monotonia globală.

Ca şi aplicaţii obţinem câteva teoreme de injectivitate pentru funcţii complexe, şi rezultate de convexitate (generalizată) globală pentru funcţii local convexe (generalizate). Contribuţiile autorului în legătură cu aceste subiecte au fost publicate în G. Kassay, C. Pintea, **S. László**: [72] şi **S. László**: [77].

În **Capitolul 2** vom introduce conceptul de $\theta-$ monotonie pentru operatori şi conceptul de θ-convexitate pentru funcţii reale. Aceste concepte conţin ca şi cazuri particulare mai multe noţiuni de monotonie, respectiv de convexitate cunoscute în literatura de specialitate. Stabilim de asemenea anumite proprietăţi fundamentale ale operatorilor care au această proprietate de monotonie. Conceptul de operator maximal $\theta-$monoton este de asemenea introdusă, şi se demonstrează că un astfel de operator are valori convexe şi închise. Mai mult, vom analiza condiţii care să asigure faptul că proprietatea de local $\theta-$monotonie a unui operator implică $\theta-$monotonia globală. Prin câteva exemple arătăm că noţiunea de $\theta-$monotonie este mai generală decât majoritatea noţiunilor de monotonie cunoscute în literatura de specialitate, dăm un exemplu de operator $\theta-$monoton care nu este nici măcar cvasimonoton. Vom prezenta exemple de operatori $\theta-$monotoni care nu sunt monotoni în sens Minty-Browder, paramonotoni sau m-relaxat monotoni şi nici măcar cvasimonotoni. Introducem noţiunea de $\theta-$convexitate, şi arătăm- în cazul diferenţiabil, că în anumite circumstanţe, o funcţie este $\theta-$convexă dacă şi numai dacă diferenţiala sa este un operator $2\theta-$monoton. Arătăm că această noţiune generalizează diferite noţiuni de convexitate ale funcţiilor reale cunoscute în literatură, cum ar fi γ paraconvexitatea, convexitatea tare sau $\epsilon-$convexitatea. Obţinem condiţii analitice asupra funcţiei θ care să asigure $\theta-$convexitatea unei funcţii diferenţiabile, apoi dăm un exemplu de funcţie $\theta-$convexă care nu este nici măcar cvasi-convexă. În final vom prezenta câteva aplicaţii ale rezultatelor noastre în obţinerea unor rezultate de surjectivitate în spaţii finit dimensionale. Contribuţiile autorului în legătură cu aceste subiecte au fost publicate în lucrarea **S. László**: [79].

Teoria inegalităţilor variationale, care se datorează în principal lui Stampacchia (a se vedea [124]) şi Fichera (a se vedea [45]) asigură tehnici foarte puternice pentru studierea problemelor care apar în mecanică, optimizare, transport, economie şi alte ramuri ale matematicii.

În **Capitolul 3,** vom da câteva rezultate de existenţa a soluţiilor, pentru mai multe inegalităţi variaţionale, generalizări ale inegalităţilor variaţionale ale lui Stampacchia, respectiv Minty. Introducem o nouă clasă de operatori, clasa operatorilor de tip ql, care pe de o parte este generalizarea monotoniei funcţiilor reale de o variabilă reală, pe de altă parte este generalizarea noţiunii de operator liniar. Bazându-ne pe aplicaţii KKM şi o celebră lemă a lui Ky Fan, dăm teoreme de existenţă a soluţiei ale acestor inegalităţi variaţionale, apoi dăm câteva generalizări a teoremei lui Minty privind coincidenţa soluţiilor, şi arătăm că condiţia ca operatorii implicaţi în aceste inegalităţi să fie de tip ql este esenţială în obţinerea acestor rezultate.

Ca şi aplicaţii arătăm că teoremele de punct fix ale lui Brouwer respectiv Kakutani sunt consecinţe ale rezultatelor obţinute. Contribuţiile autorului în legătură cu aceste subiecte au fost finalizate în **S. László**: [78, 80, 81].

Merită să subliniem faptul că mai multe întrebări deschise sunt încă fără răspuns chiar şi în teoria clasică ai operatorilor monotoni în sens Minty-Browder. Una dintre cele mai interesante este problema sumei. Este bine cunoscut faptul că într-un spaţiu Banach reflexiv suma a doi operatori maximali monotoni este maximal monoton, cu condiţia ca domeniul unuia să se intersecteze cu interiorul domeniului celuilalt (cf. Rockafellar a se vedea [114]), dar în cazul nereflexiv este încă necunoscut dacă această condiţie este suficientă. Cu toate acestea, sunt mai multe rezultate care în particular validează această conjunctură. Passty (a se vedea [104]) a introdus suma paralelă pentru operatori monotoni, motivând acest lucru prin următoarea situaţie: dacă două rezistenţe având rezistenţa T şi S sunt conectate în paralel, legea lui Kirchhoff şi legea lui Ohm combinate arăta că rezistenţa lor comună este de $(S^{-1} + T^{-1})^{-1}$. Motivat de acest lucru, dar de asemenea inspirat de numărul semnificativ de rezultate cu privire la problema de maximalitate a sumei a doi operatori maximal monotoni, Penot şi Zălinescu în [109] introduc conceptele sumelor paralele generalizate. O problemă deschisă până în prezent este urmatoarea: în literatura de specialitate nu există nici o condiţie de regularitate care asigură maximal monotonia a sumelor paralele generalizate. Cu toate acestea, există condiţii de regularitate de punct interior care să asigure maximal monotonia a sumelor paralele în spaţii Banach reflexive. În **Capitolul 4**, vom da o condiţie de regularitate de tip închis referitoare la această problemă, şi printr-un exemplu aratăm că condiţia noastră este cea mai slabă dintre cele deja cunoscute în literatura de specialitate. În ceea ce priveşte sumele paralele generalizate, vom obţine mai multe condiţii de regularitate, atât de tipul de punct interior cât şi de tip închis, şi arătăm că rezultatele noastre nu pot fi deduse din rezultatele cunoscute în literatura de specialitate. Cu toate acestea, multe rezultate cunoscute referitor la suma a doi operatori maximal monotoni, $S + T$, respectiv suma generalizată $S + A^*TA$, în cazul în care T şi S sunt operatori maximal monotoni, A este o operator liniar, continuu şi A^* este operatorul său adjunct, sunt consecinţe ale rezultatelor noastre. Rezultatele noastre sunt bazate pe conceptele de funcţie reprezentativă şi conjugata Fenchel, în timp ce tehnica utilizată pentru a stabili condiţiile de regularitate de tip închis respectiv de tip de punct interior, care să asigure maximal monotonia ai acestor sume, este dualitatea tare. În acest capitol ne ocupăm de problemele sumelor a doi operatori de Gossez tip (D) în spaţii Banach arbitrare. Ca şi cazuri particulare, alături de rezultatele noi, vom stabili unele bine cunoscute, în spaţii Banach reflexive.

Contribuţiile autorului în legătură cu aceste subiecte au fost finalizate în lucrările R.I. Boţ, **S. László**: [20] şi **S. László**: [82], [83], [84].

Cuvintele cheie: monotonie în sens Minty-Browder; monotonie generalizată; convexitate generalizată; operator local monoton; inegalitate variaţională generalizată; aplicaţie KKM; Lema lui Minty; Lema lui Ky Fan; teoremă de punct fix; funcţie conjugată; dualitate conjugată; cvasi-relativ interior; condiţie de regularitate; operator maximal monoton; funcţia Fitzpatrick; funcţie reprezentativă; sumă paralelă;

Investeşte în oameni !
FONDUL SOCIAL EUROPEAN
Programul Operaţional Sectorial pentru Dezvoltarea Resurselor Umane 2007 -2013
Axa prioritară 1. Educaţia şi formarea profesională în sprijinul creşterii economice şi dezvoltării societăţii bazate pe cunoaştere
Domeniul major de intervenţie 1.5. Programe doctorale şi postdoctorale în sprijinul cercetării
Contract nr: POSDRU/6/1.5/S/3: "STUDII DOCTORALE: PRIN ŞTIINŢĂ SPRE SOCIETATE"

Capitolul 1

Operatori monotoni, funcţii convexe şi mulţimi închise numărabile

1.1 Monotonia funcţiilor reale de o variabilă reală

1.1.1 Funcţii reale de o variabilă reală local crescătoare

În această secţiune arătăm ca proprietatea de creştere locală a funcţiilor reale de o variabilă reală pe complementul unei mulţimi închise şi numărabile implică monotonia (crescătoare) globală al acelui funcţii.

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ şi fie $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie. Spunem că f este (monoton) crescătoare (respectiv descrescătoare) pe I, dacă pentru orice $x, y \in I$, $x \leq y$ avem $f(x) \leq f(y)$, (respectiv $f(x) \geq f(y)$).

Se poate uşor observa că proprietatea de monotonie a funcţiei reale f este echivalentă cu una dintre următoarele condiţii

$$(f(x) - f(y))(x - y) \geq 0, \text{ pentru orice } x, y \in I, \tag{1. 1}$$

respectiv

$$(f(x) - f(y))(x - y) \leq 0, \text{ pentru orice } x, y \in I. \tag{1. 2}$$

Prima inegalitate este satisfăcută dacă şi numai dacă f este crescătoare, iar al doilea este satisfăcută dacă şi numai dacă f este descrescătoare.

Spunem că f este local crescătoare dacă pentru orice $t \in I$ există un interval deschis $J_t \subseteq \mathbb{R}$, cu $t \in J_t$, astfel încât restricţia $f|_{J_t \cap I}$ este crescătoare.

Următorul rezultat asigură monotonia globală a unei funcţii.

Teoremă 1.1.1. *Fie $J \subseteq \mathbb{R}$ un interval deschis şi $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Dacă $Y \subseteq J$ este o mulţime numărabilă, închisă relativ la J, astfel încât f este local crescătoare pe $J \setminus Y$, atunci f este crescătoare pe J.*

1.1.2 Monotonia generalizată locală ale funcţiilor reale de o variabilă reală

În această secţiune arătăm că în majoritatea cazurilor monotonia generalizată locală a funcţiilor reale de o variabilă reală, pe complementul unei mulţimi închise şi numărabile implică monotonia generalizată globală. Dar, cvasimonotonia este o excepţie, pentru care dăm un contraexemplu.

Spunem că funcţia $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ este pseudomonoton (vezi [36, 53, 55, 67, 69]), dacă pentru orice $x, y \in I$,

$$f(x)(y-x) \geq 0 \implies f(y)(y-x) \geq 0,$$

sau echivalent, pentru orice $x, y \in I$,

$$f(x)(y-x) > 0 \implies f(y)(y-x) > 0.$$

f este strict pseudomonoton (vezi [55, 68, 69]), dacă pentru orice $x, y \in I$, $x \neq y$,

$$f(x)(y-x) \geq 0 \implies f(y)(y-x) > 0.$$

Funcţia f se numeşte cvasimonoton (vezi [36, 53, 55, 58, 68, 69]), dacă pentru orice $x, y \in I$,

$$f(x)(y-x) > 0 \implies f(y)(y-x) \geq 0.$$

Fie I un interval. f se numeşte strict cvasimonoton (vezi [36, 55, 56]), dacă f este cvasimonoton, şi pentru orice $x, y \in I$, $x \neq y$ există $z \in (x, y)$ astfel încât $f(z)(y-x) \neq 0$.

In cele ce urmează introducem noţiunile de monotonie generalizate locală. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ şi fie $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie. Spunem că:

(i) f este local cvasimonotonă, dacă pentru orice $t \in I$ există un interval deschis $J_t \subseteq I$, cu $t \in J_t$, astfel încât, pentru orice $x, y \in J_t \cap I$, $\min\{f(x)(y-x), f(y)(x-y)\} \leq 0$.

(ii) f este local strict cvasimonotonă, dacă pentru orice $t \in I$ există un interval deschis $J_t \subseteq I$, cu $t \in J_t$, astfel încât, pentru orice $x, y \in J_t \cap I$, $int\{x \in J_t : f(x) = 0\} = \emptyset$ şi pentru orice $x, y \in J_t$, $\min\{f(x)(y-x), f(y)(x-y)\} \leq 0$.

(iii) f este local pseudomonotonă, dacă pentru orice $t \in I$ există un interval deschis $J_t \subseteq I$, cu $t \in J_t$, astfel încât, pentru orice $x, y \in J_t \cap I$,

$$f(x)(y-x) \geq 0 \Longrightarrow f(y)(y-x) \geq 0,$$

sau echivalent

$$f(x)(y-x) > 0 \Longrightarrow f(y)(y-x) > 0.$$

(iv) f este local strict pseudomonotonă, dacă pentru orice $t \in I$ există un interval deschis $J_t \subseteq I$, cu $t \in J_t$, astfel încât, pentru orice $x, y \in J_t \cap I$, $x \neq y$,

$$f(x)(y-x) \geq 0 \Longrightarrow f(y)(y-x) > 0.$$

Următoarele rezultate asigură condiţii suficiente ca o funcţie să fie global strict cvasimonotonă, (respectiv global pseudomonotonă, global strict pseudomonotonă).

Teoremă 1.1.2. *Fie $J \subseteq \mathbb{R}$ un interval deschis şi $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Dacă $Y \subseteq J$ este o mulţime numărabilă, închisă relativ la J, astfel încât f este local strict cvasimonotonă, (respectiv local pseudomonotonă, local strict pseudomonotonă) pe $J \setminus Y$, atunci f global strict cvasimonotonă, (respectiv global pseudomonotonă, global strict pseudomonotonă) pe J.*

Cvasimonotonia locală nu implică cvasimonotonia globală nici măcar când funcţia f este continuă, după cum ne arată următorul exemplu.

Examplu 1.1.1. Fie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} -x-1, \text{ dacă } x < -1 \\ 0, \text{ dacă } x \in [-1,1] \\ -x+1, \text{ dacă } x > 1. \end{cases}$

Este uşor de verificat că f este local cvasimonotonă pe $\mathbb{R}$. Pe de altă parte, pentru $x = -2$ şi $y = 2$ avem $\min\big\{f(x)(y-x), f(y)(x-y)\big\} = 4$ ceea ce arată că f nu este cvasimonotonă global.

1.2 Operatori local monotoni

1.2.1 Operatori local crescători pe complementul unei mulţimi închise numărabile

Fie X un spaţiu Banach, X^* dualul lui, şi $T : X \longrightarrow X^*$ un operator.

Spunem că operatorul A este monoton crescător (descrescător) în sens Minty-Browder, dacă $\langle Tx - Ty, x - y\rangle \geq 0\,(\leq 0)$, oricare ar fi $x, y \in D$ unde cu $\langle x^*, x\rangle$ s-a notat produsul bidual, adică valoarea funcţionalei x^* în punctul x.

Definiţie 1.2.1. *Fie X un spaţiu Banach şi $D \subseteq X$ o submulţime deschisă. Spunem că operatorul $T : D \longrightarrow X^*$ este local Minty-Browder crescător, dacă orice $x \in D$ admite o vecinătate deschisă U_x astfel încât restricţia $A|_{U_x} : U_x \longrightarrow X^*$ să fie un operator Minty-Browder crescător.*

În continuare vom da un exemplu de operator continuu, local monoton crescător în sens Minty-Browder, definit pe o mulţime conexă, dar neconvexă din $\mathbb{R}^2$, care nu este nici măcar cvasimonoton global.

Examplu 1.2.1. Fie $D = (-1,1) \times (-1,1) \setminus \{(-1,0] \times \{0\}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ care este conexă, (dar nu este convexă), şi deschisă, şi fie

$$U_1 = \left\{(x,y)\ :\ x \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right),\ x \leq y < -\frac{1}{2}\right\} \subset D,$$

$$U_2 = \left\{(x,y)\ :\ x \in (-1,0),\ -\frac{1}{2} < y \leq -x\right\} \subset D.$$

Fie operatorul $T : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definit prin $T(x,y) = (p(x,y), q(x,y))$. unde:

$$p(x,y) = \begin{cases} x+y,\ (x,y) \in D \setminus (U_1 \cup U_2) \\ 2x,\ (x,y) \in U_1 \\ 0,\ (x,y) \in U_2 \end{cases}$$

şi

$$q(x,y) = \begin{cases} -x+y,\ (x,y) \in D \setminus (U_1 \cup U_2) \\ 0,\ (x,y) \in U_1 \\ 2y,\ (x,y) \in U_2. \end{cases}$$

Este uşor de verificat că T este local crescător. Pe de altă parte

$$\langle T(x,y), (u,v) - (x,y)\rangle = 2x(u-x) = \frac{3}{40} > 0$$

şi

$$\langle T(u,v), (u,v) - (x,y)\rangle = 2v(v-y) = -\frac{5}{24} < 0,$$

cu $(x,y) = \left(-\frac{3}{4}, -\frac{2}{3}\right) \in U_1$, $(u,v) = \left(-\frac{4}{5}, -\frac{1}{4}\right) \in U_2$. Acest lucru arată că T nu este cvasimonoton.

În cele ce urmează fie X un spaţiu Banach şi $C \subseteq D \subseteq X$ cu D deschisă şi convexă şi C închisă relativ la D cu interior vid, astfel încât intersecţia $[x,y] \cap C$ este numărabilă, posibil vidă, pentru orice $x, y \in D \setminus C$.

Observaţie 1.2.1. Example de submulţimi $C \subset D \subseteq \mathbb{R}^n$ care satisfac cerinţele de mai sus sunt alcătuite de familii finite de sfere $S(p,r) := \{x \in \mathbb{R}^n : ||x-p|| = r\}$ în D, deoarece sferele nu conţin segmente. există însă mulţimi C care conţin segmente. Într-adevăr orice varietate algebrică are proprietatea menţionată. În particular fie $D = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| < 1\}$ and

$$C = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) \in D : \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 = \frac{1}{4} \right\}.$$

Figura de mai jos prezintă un astfel de mulţime C.

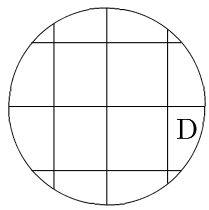

Fig. 3

Aici D este un disc deschis din $\mathbb{R}^2$, şi C este reuniunea unui număr finit de segmente având capetele pe frontiera lui D.

Definiţie 1.2.2. *Fie $T : X \longrightarrow X^*$ un operator. Spunem că T este hemicontinuu înt $x \in X$, dacă pentru orice $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, $t_n \longrightarrow 0$, $n \longrightarrow \infty$ şi $y \in X$, avem $A(x + t_n y) \rightharpoonup^* Ax$, $n \longrightarrow \infty$, unde " $\rightharpoonup^*$ " inseamnă convergenţa în topologia weak* a lui X^*.*

Următorul rezultat asigură monotonia globală a unui operator.

Teoremă 1.2.1. *Dacă $T : D \longrightarrow X^*$ este un operator hemicontinuu, a cărui restricţie $T|_{D\setminus C}$ este local Minty-Browder crescător, atunci T este Minty-Browder crescător pe D.*

1.2.2 Operatori monotoni generalizate pe complementul unei mulţimi închise numărabile

În această secţiune extindem rezultatele din secţiunea anterioară pentru operatori monotoni generalizaţi definite pe o submulţime deschisă şi convexă a unui spaţiu Banach real.

Fie X un spaţiu Banach real, X^* dualul lui, $D \subseteq X$ şi $T : D \longrightarrow X^*$ un operator. Notăm cu int Y interiorul mulţimii $Y \subseteq X$, şi cu (x,y) segmentul deschis din X cu capetele x şi y, adică $(x,y) = \{z \in X : z = x + t(y-x),\, t \in (0,1)\}$. Segmentul închis este notat cu $[x,y]$ adică $[x,y] = \{z \in X : z = x + t(y-x),\, t \in [0,1]\}$.

Operatorul T se numeşte pseudomonoton (vezi [36, 53, 55, 67, 69]), dacă pentru orice $x, y \in D$, $\langle Tx, y-x \rangle \geq 0$ implică $\langle Ty, y-x \rangle \geq 0$, sau echivalent, pentru orice $x, y \in D$, $\langle Tx, y-x \rangle > 0$ implică $\langle Ty, y-x \rangle > 0$.

T se numeşte strict pseudo-monoton(vezi [**?**,55,69]), dacă pentru orice $x, y \in D$, $x \neq y$, $\langle Tx, y-x \rangle \geq 0$ implică $\langle Ty, y-x \rangle > 0$.

Operatorul T se numeşte cvasi-monoton (vezi [**?**, 36, 53, 55, 58, 69]), dacă pentru orice $x, y \in D$, $\langle Tx, y-x \rangle > 0$ implică $\langle Ty, y-x \rangle \geq 0$.

Fie D convexă. T se numeşte strict cvasi-monoton (vezi [36,55,56]), dacă T este cvasi-monoton, şi pentru orice $x, y \in D$, $x \neq y$ există $z \in (x, y)$ astfel încât$\langle Tz, y - x\rangle \neq 0$.

Desigur monotonia în sens Minty-Browder al unui operator implică pseudo-monotonia acelui operator.

În cele ce urmează definim monotoniile generalizate locale pentru operatori.

Definiţie 1.2.3. *Fie X un spaţiu Banach real, X^* dualul lui, $D \subseteq X$ o submulţime deschisă din X, şi $T : D \longrightarrow X^*$ un operator. Spunem că:*

(i) T este local cvasi-monoton, dacă pentru orice $z \in D$ există o vecinătate deschisă al lui z, $U_z \subseteq D$, astfel încât restricţia $T|_{U_z}$ este cvasi-monoton, adică pentru orice $x, y \in U_z$,

$$\langle Tx, y - x\rangle > 0 \Longrightarrow \langle Ty, y - x\rangle \geq 0,$$

(ii) T este local strict cvasi-monoton, dacă pentru orice $z \in D$ există o vecinătate deschisă şi convexă al lui z, $U_z \subseteq D$, astfel încât restricţia $T|_{U_z}$ este strict cvasimonoton, adică pentru orice $x, y \in U_z$,

$$\langle Tx, y - x\rangle > 0 \Longrightarrow \langle Ty, y - x\rangle \geq 0,$$

şi pentru orice $x, y \in U_z$, $x \neq y$ există $z \in (x, y)$, astfel încât $\langle Tz, y - x\rangle \neq 0$,

(iii) T este local pseudo-monoton, dacă pentru orice $z \in D$ există o vecinătate deschisă al lui z, $U_z \subseteq D$, astfel încât restricţia $T|_{U_z}$ este pseudo-monoton, adică pentru orice $x, y \in U_z$,

$$\langle Tx, y - x\rangle \geq 0 \Longrightarrow \langle Ty, y - x\rangle \geq 0,$$

(iv) T este local strict pseudo-monoton, dacă pentru orice $z \in D$ există o vecinătate deschisă al lui z, $U_z \subseteq D$, astfel încât restricţia $T|_{U_z}$ este strict pseudo-monoton, adică pentru orice $x, y \in U_z$, $x \neq y$,

$$\langle Tx, y - x\rangle \geq 0 \Longrightarrow \langle Ty, y - x\rangle > 0.$$

În cele ce urmează X va fi un spaţiu Banach real, şi fie $C \subseteq D \subseteq X$ cu D deschisă şi convexă, C închisă relativ la D, cu interiorul vid, astfel încât intersecţia $[x, y] \cap C$ să fie numărabilă, eventual vidă, pentru orice $x, y \in D \setminus C$.

În continuare prezentăm condiţii suficiente pentru strict cvasimonotonie globală (respectiv, pseudomonotonie, strict pseudomonotonie).

Teoremă 1.2.2. *Dacă $T : D \longrightarrow X^*$ este un operator hemicontinuu cu proprietatea că $\langle Tz, y - x\rangle \neq 0$ pentru orice $z \in [x, y] \cap C$, $x, y \in D$, $x \neq y$ şi al cărui restricţie $T|_{D \setminus C}$ este local strict cvasimonoton (respectiv, local pseudomonoton, local strict pseudomonoton), atunci T este strict cvasimonoton (respectiv pseudomonoton, strict pseudomonoton), pe D.*

1.3 Aplicaţii

1.3.1 Câteva rezultate de injectivitate

În această secţiune aplicăm rezultatele din secţiunea 1.2.1 pentru a obţine câteva rezultate de injectivitate.

Fie C şi D mulţimi ca şi în Secţiunea 1.2.1.

Propoziţie 1.3.1. Dacă H este un spaţiu Hilbert, iar $T : D \longrightarrow H$ un operator continuu pe D, şi de clasa C^1 pe $D \setminus C$, cu proprieatatea că $\langle (dT)_x(y), y\rangle > 0$ oricare ar fi $x \in D \setminus C$ şi $y \in H \setminus \{0\}$, şi C nu conţine segmente atunci T este injectiv.

Următorul rezultat ne dă condiţii suficiente pentru injectivitatea funcţiilor complexe.

Corolar 1.3.1. Dacă $D \setminus C$ este conexă şi $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ este o funcţie continuă pe D, şi de clasa C^1 pe $D \setminus C$, care satisface inegalitatea

$$Re\frac{\partial f}{\partial z}(z) > \left|\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)\right|,$$

pentru orice $z \in D \setminus C$, şi C nu conţine segmente, atunci f este injectivă.

1.3.2 Aplicaţii la funcţii convexe

Luând în considerare că convexitatea unei funcţii reale de clasa C^1 definită pe o submulţime deschisă şi convexă a unui spaţiu Hilbert este caracterizată de monotonia operatorului gradient (vezi [34]), ca şi consecinţe ale rezultatlor anterioare putem obţine teorem de convexitate globală pentru funcţii reale local convexe. În cele ce urmează H va fi un spaţiu Hilbert real, şi C respectiv D mulţimi cu proprietăţile introduse în Secţiunea 2.2. Începem cu definiţia noţiunii de convexitate locală.

Definiţie 1.3.1. *Fie $\mathfrak{D}$ o submulţime deschisă al spaţiului Banach X. Spunem că funcţia $f : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ este local convexă, dacă orice punct $x \in \mathfrak{D}$ admite o vecinătate convexă şi deschisă, $U_x \subseteq \mathfrak{D}$, astfel încât, restricţia lui f pe U_x, $f\big|_{U_x}$ să fie convexă.*

Teoremă 1.3.1. *Dacă $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcţie de clasa C^1 pe D, local convexă pe $D \setminus C$, atunci f este global convexă.*

O funcţie reală f definită pe o submulţime deschisă şi convexă D al spaţiului H, este cvasi-convexă (vezi [36, 53, 62, 105]), respectiv strict cvasi-convexă (vezi [36, 105]), dacă pentru orice $x, y \in D$ şi $t \in [0, 1]$, avem

$$f(y) \le f(x) \Longrightarrow f(tx + (1-t)y) \le f(x),$$

respectiv pentru orice $x, y \in D$, $x \neq y$ şi $t \in (0, 1)$, avem

$$f(y) \le f(x) \Longrightarrow f(tx + (1-t)y) < f(x),$$

sau echivalent $f(tx + (1-t)y) \le \max\big\{f(x), f(y)\big\}$, respectiv $f(tx + (1-t)y) < \max\big\{f(x), f(y)\big\}$.

Observaţie 1.3.1. O funcţie diferenţiabilă cvasi-convexă f poate fi carcterizată cu diferenţiala sa (vezi [55]), adică f este cvasi-convexă pe submulţimea deschisă şi convexă D al spaţiului H, dacă şi numai dacă, pentru orice $x, y \in D$ avem

$$f(y) \le f(x) \Longrightarrow \langle \nabla f(x), y - x\rangle \le 0,$$

unde cu ∇f am notat operatorul gradient.

Funcţia diferenţiabilă f definită pe submulţimea deschisă şi convexă D al spaţiului H este pseudo-convexă (vezi [35, 36, 52, 54]), respectiv strict pseudo-convexă (vezi [35, 36, 52–54]) pe D, dacă pentru orice $x, y \in D$ avem

$$\langle \nabla f(x), y - x \rangle \geq 0 \Longrightarrow f(y) \geq f(x),$$

respectiv

$$\langle \nabla f(x), y - x \rangle \geq 0,\ x \neq y \Longrightarrow f(y) > f(x).$$

Următorul rezultat este binecunoscut vezi de exemplu [**?**, 30, 55].

Propoziţie 1.3.2. *Fie f o funcţie diferenţiabilă pe submulţimea deschisă şi convexă D din H. Atunci f este pseudo-convexă, (respectiv strict pseudo-convexă) pe D, dacă şi numai dacă, ∇f este pseudo-monoton, (respectiv strict pseudo-monoton) pe D.*

În cele ce urmează prezentăm noţiunile de convexitate generalizate locală ale funcţiilor.

Definiţie 1.3.2. *Spunem că funcţia $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ este local cvasiconvexă, (respectiv local strict cvasiconvexă, local pseudoconvexă, local strict pseudoconvexă) pe D, dacă pentru orice $z \in D$ există o vecinătate deschisă şi convexă a lui z, notat cu U_z, pe care f este cvasiconvexă, (respectiv strict cvasiconvexă, pseudoconvexă, strict pseudoconvexă).*

În continuare prezentăm, în contextul spaţiilor Hilbert, o condiţie suficientă al strict cvasiconvexităţii (respectiv pseudoconvexităţii, strict pseudoconvexităţii), a unei funcţii local strict cvasiconvexe (respectiv, local pseudoconvexe, local strict pseudoconvexe).

Teoremă 1.3.2. *Fie $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie continuu diferenţiabilă, local strict cvasiconvexă (respectiv, local pseudoconvexe, local strict pseudoconvexe), pe $D \setminus C$. Dacă ∇f are proprietatea că $\langle \nabla f(z), x - y \rangle \neq 0$, pentru orice $z \in [x, y] \cap C$, $x, y \in D$, $x \neq y$ atunci f este global strict cvasiconvexă (respectiv, global pseudoconvexă, global strict pseudoconvexă), pe D.*

După cum am văzut în Exemplul 1.2.1, cvasimonotonia locală nu implică cvasimonotonia globală. În continuare vom da un exemplu de funcţie local cvasiconvexă, continuu diferenţiabilă care nu este cvasiconvexă global.

Examplu 1.3.1. Fie $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{2} - x, \text{ if } x < -1 \\ \dfrac{1}{2}, \text{ if } x \in [-1, 1] \\ -\dfrac{x^2}{2} + x, \text{ if } x > 1. \end{cases}$

Se poate verifica uşor că derivata lui F este funcţia f dată în Exemplul 1.2.1, în consecinţă F este continuu diferenţiabilă.

Se ştie că orice funcţie monotonă de la $\mathbb{R}$ la $\mathbb{R}$ este cvasi-convexă. Deoarece F este local monotonă obţinem că F este local cvasi-convexă.

Pe de altă parte, pentru $x = -2$ şi $y = 2$ avem:
$F\left(\dfrac{1}{2} \cdot (-2) + \left(1 - \dfrac{1}{2}\right) \cdot (2)\right) = F(0) = \dfrac{1}{2} > \max\{F(-2), F(2)\} = 0$, ceea ce ne arată că F nu este cvasi-convexă global.

Capitolul 2

Operatori $\theta-$monotoni şi funcţii $\theta-$convexe

2.1 Operatori $\theta-$monotoni

2.1.1 Câteva proprietăţi ai operatorilor $\theta-$monotoni

În această secţiune prezentăm câteva proprietăţi ai operatorilor $\theta-$monotoni multivoci. În cele ce urmează prezentăm noţiunea de $\theta-$monotonie al unui operator.

Fie X un spaţiu Banach real, X^* dual lui, şi $T : X \rightrightarrows X^*$ un operator multivoc. Notăm cu $D(T) = \{x \in X : Tx \neq \emptyset\}$ domeniul, cu $R(T) = \bigcup_{x \in D(T)} Tx$ rangul şi cu $G(T) = \{(x,u) \in X \times X^* : u \in Tx\}$ graficul operatorului T.Fie $\theta : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea că $\theta(x,y) = \theta(y,x)$, pentru orice $x, y \in D(T)$.

Definiţie 2.1.1. *Spunem că T este $\theta-$monoton, dacă*

$$\langle u-v, x-y\rangle \geq \theta(x,y)\|x-y\| \text{ pentru orice } (x,u),\ (y,v) \in G(T). \tag{2. 1}$$

T este strict $\theta-$monoton dacă în (2.1) avem egalitate doar pentru $x = y$.

Se poate observa uşor, că noţiunea de $\theta-$monotonie generalizează mai multe noţiuni de monotonie cunoscute în literatură.

Dacă $\theta(x,y) = 0$ pentru orice $x, y \in D$ obţinem noţiunea de monotonie în sens Minty-Browder, respectiv monotonia strictă în sens Minty-Browder, (vezi [22, 23, 91, 92]) adică

$$\langle u-v, x-y\rangle \geq 0 \text{ pentru orice } (x,u),\ (y,v) \in G(T)$$

respectiv

$$\langle u-v, x-y\rangle > 0 \text{ pentru orice } (x,u),\ (y,v) \in G(T).$$

Dacă $\theta(x,y) = m\|x-y\|$, $m \in \mathbb{R}_+^*$ pentru orice $x, y \in D$ obţinem noţiunea de monotonie tare, adică

$$\langle u-v, x-y\rangle \geq m\|x-y\|^2 \text{ pentru orice } (x,u),\ (y,v) \in G(T).$$

Dacă $\theta(x,y) = f(\|x-y\|)$ pentru orice $x, y \in D$, $x \neq y$ unde $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ este o funcţie crescătoare, cu $\lim_{t \downarrow 0} f(t) = 0$, $\lim_{t \longrightarrow \infty} f(t) = \infty$, obţinem noţiunea de monotonie uniformă (vezi [70]), adică

$$\langle u-v, x-y\rangle \geq f(\|x-y\|)\|x-y\| \text{ pentru orice } (x,u),\ (y,v) \in G(T).$$

Dacă $\theta(x,y) = -\epsilon$, $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$ pentru orice $x, y \in D$ obţinem noţiunea $\epsilon-$monotoniei, (vezi [65,96]) adică

$$\langle u - v, x - y\rangle \geq -\epsilon\|x - y\| \text{ pentru orice } (x, u), (y, v) \in G(T).$$

Dacă $\theta(x,y) = -m\|x-y\|$, $m \in \mathbb{R}_+^*$ pentru orice $x, y \in D$ obţinem noţiunea m-relaxat monotoniei (vezi [125]), adică

$$\langle u - v, x - y\rangle \geq -m\|x - y\|^2 \text{ pentru orice } (x, u), (y, v) \in G(T).$$

Dacă $\theta(x,y) = -C\|x-y\|^{\gamma-1}$, $C \in \mathbb{R}_+^*$, $\gamma \in \mathbb{R}$ pentru orice $x, y \in D$ obţinem noţiunea $\gamma-$paramonotoniei, (vezi [66]) adică

$$\langle u - v, x - y\rangle \geq -C\|x - y\|^{\gamma} \text{ pentru orice } (x, u), (y, v) \in G(T).$$

Dacă $\theta(x,y) = -\min\{\sigma(x), \sigma(y)\}$, pentru orice $x, y \in D$ unde $\sigma : X \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ este o funcţie dată, obţinem noţiunea de premonotonie, introdusă în [62], adică

$$\langle u - v, x - y\rangle \geq -\min\{\sigma(x), \sigma(y)\}\|x - y\| \text{ pentru orice } (x, u), (y, v) \in G(T).$$

Următoarea teoremă ne oferă local mărginirea unui operator $\theta-$monoton, în interiorul domeniului.

Teoremă 2.1.1. *Fie $T : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ un operator $\theta-$monoton. Dacă funcţia $\theta(\cdot, y)$ este inferior semicontinuă pe* $\operatorname{int}(D(T))$ *pentru orice $y \in int(D(T))$, atunci T este local mărginit în interiorul domeniului $D(T)$.*

2.1.2 Operatori maximal $\theta-$monotoni

În această secţiune introducem conceptul de operator maximal $\theta-$monoton. Arătăm că un operator maximal $\theta-$monoton are imagini convexe şi închise iar în anumite circumstanţe graficul lui este $\|\cdot\| \times bdw^*$-închis, unde cu bdw^* notăm convergenţa slabn* a şirurilor generalizate mărginite.

Definiţie 2.1.2. *Fie $T : X \rightrightarrows X^*$ un operator $\theta-$monoton. Spunem că T este maximal $\theta-$monoton, dacă pentru orice operator $T' : X \rightrightarrows X^*$, $\theta-$monoton cu $G(T) \subseteq G(T')$, avem $T = T'$.*

Următorul rezultat asigură convexitatea imaginilor unui operator maximal $\theta-$monoton.

Teoremă 2.1.2. *Fie $T : X \rightrightarrows X^*$ un operator maximal $\theta-$monoton. Atunci Tx este convexă şi închisă pentru orice $x \in D(T)$.*

Propoziţie 2.1.1. *Fie $T : X \rightrightarrows X^*$ un operator maximal $\theta-$monoton. Dacă $\theta(\cdot, y) : X \longrightarrow \mathbb{R}$ este inferior semicontinuă pe $D(T)$ pentru orice $y \in D(T)$, atunci $G(T)$ este $\|\cdot\| \times \|\cdot\|$-închis.*

2.1.3 Operatori local $\theta-$monotoni

În această secţiune vom introduce noţiunea de operator local $\theta-$monoton. Vom demonstra, că în anumite circumstanţe proprietatea locală de $\theta-$monotonie al unui operator poate fi extinsă global. Vom da condiţii suficiente asupra funcţiei θ astfel încât $\theta-$monotonia locală al unui operator să asigure $\theta-$monotonia globală acelui operator.

Definiţie 2.1.3. *Fie $T : X \rightrightarrows X^*$ un operator. Spunem că T este local $\theta-$monoton, respectiv, local central $\theta-$monoton, dacă pentru orice $z \in D(T)$ există o vecinătate deschisă $U_z \subseteq X$ a lui z, astfel încât*

$$\langle u - v, x - y \rangle \geq \theta(x, y)\|x - y\|, \text{ pentru orice } x, y \in U_z \cap D(T),\ u \in Tx,\ v \in Ty \tag{2. 2}$$

respectiv

$$\langle u - v, x - z \rangle \geq \theta(x, z)\|x - z\|, \text{ pentru orice } x \in U_z \cap D(T),\ u \in Tx,\ v \in Tz. \tag{2. 3}$$

Definiţie 2.1.4. *Fie $D \subseteq X$ convexă. Spunem că θ are proprietatea (m) pe D, dacă*

$$\theta(x, z) + \theta(z, y) \geq \theta(x, y)$$

pentru orice $z \in (x, y)$, $x, y \in D$, $x \neq y$.

Următorul rezultat dă o condiţie suficientă pentru $\theta-$monotonia unui operator.

Teoremă 2.1.3. *Fie $T : X \rightrightarrows X^*$ un operator local central $\theta-$monoton, cu domeniul $D(T)$ convex. Dacă θ are proprietatea (m) pe $D(T)$, atunci T este $\theta-$monoton.*

2.2 Funcţii $\theta-$convexe

În această secţiune introducem noţiunea de $\theta-$convexitate ale funcţiilor reale definite pe o submulţime al unui spaţiu Hilbert real. Acest concept generalizează câteva noţiuni de convexitate, cum ar fi convexitatea tare şi convexitatea uniformă, cunoscute în literatură. Vom arăta că această noţiune este strâns legată de noţiunea de $\theta-$monotonie al operatorilor. Vom demonstra că în cazul în care o funcţie diferenţiabilă este $\theta-$convexă, atunci diferenţiala sa este un operator $2\theta-$monoton, cu acelaşi θ. Pe parcursul secţiunii vom arăta că în anumite condiţii o funcţie diferenţiabilă este $\theta-$convexă, dacă şi numai dacă differenţiala sa este un operator $2\theta-$monoton. În cele ce urmează D va fi o submulţime deschisă şi convexă a spaţiului Hilbert H, şi diferenţiala Frèchet a funcţiei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ în $x \in D$ ve fi identificată cu $\nabla f(x)$. Începem cu definiţia noţiunii de $\theta-$convexitate.

Definiţie 2.2.1. *Spunem că funcţia $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ este $\theta-$convexă, dacă pentru orice $x, y \in D$ şi $z \in (x, y)$ avem*

$$\frac{f(z) - f(x)}{\|z - x\|} + \frac{f(z) - f(y)}{\|z - y\|} + \theta(x, z) + \theta(z, y) \leq 0.$$

Se poate observa uşor, că Definiţia 2.2.2 este echivalentă cu $f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y) - t(1-t)(\theta(x, (1-t)x + ty) + \theta((1-t)x + ty, y))\|x - y\|$, pentru orice $t \in [0, 1]$, $x, y \in D$.

Evident, dacă $\theta(x, y) = \dfrac{c}{2}\|x - y\|$ pentru orice $x, y \in D$ unde $c \in \mathbb{R}_+^*$, obţinem noţiunea de convexitate tare, dacă $\theta(x, y) = 0$ pentru orice $x, y \in D$, obţinem noţiunea clasică a convexităţii.

Everywhere in the sequel D denotes an open and convex subset of a real Hilbert space H, while the Frèchet differential of a function $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ at $x \in D$ will be identified with $\nabla f(x)$.

Definiţie 2.2.2. *Let $\theta : D \times D \longrightarrow \mathbb{R}$ be a given function with the property that $\theta(x, y) = \theta(y, x)$ pentru orice $x, y \in D$. One says that the function $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ este $\theta-$convex, if pentru orice $x, y \in D$ and all $z \in (x, y)$ avem*

$$\frac{f(z) - f(x)}{\|z - x\|} + \frac{f(z) - f(y)}{\|z - y\|} + \theta(x, z) + \theta(z, y) \leq 0. \tag{2. 4}$$

Următorul rezultat face legătura între o funcţie $\theta-$convexă şi $2\theta-$monotonia diferenţialei sale.

Propoziţie 2.2.1. *Dacă $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcţie diferenţiabilă, $\theta-$convexă, unde $\theta(x,\cdot) : D \longrightarrow \mathbb{R}$ este radial continuu şi $\theta(x,x) = 0$ pentru orice $x \in D$, atunci ∇f este un operator $2\theta-$monoton, cu aceaşi θ. Dacă $D = X$ şi ∇f este hemicontinuu, atunci ∇f este maximal $2\theta-$monoton.*

În continuare vom da o condiţie asupra funcţiei θ, astfel încât $2\theta-$monotonia diferenţialei unei funcţii differenţiabile să asigure $\theta-$convexitatea acelei funcţii.

Teoremă 2.2.1. *Dacă $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcţie continuu diferenţiabilă, şi funcţia $s : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $s(t) = \theta(x, x + t(y - x))$ este integrabilă, $\int_0^1 s(t)dt \geq \frac{\theta(x,y)}{2}$ pentru orice $x, y \in D$, $x \neq y$, şi operatorul ∇f este $2\theta-$monoton, atunci f este $\theta-$convexă.*

Teoremă 2.2.2. *Dacă $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ este diferenţiabilă şi θ are proprietatea că $2\theta(u,v) \geq \theta(x,z) + \theta(z,y)$ pentru orice $x, y \in D$, $x \neq y$, $z \in (x,y)$, $u \in (x,z)$, $v \in (z,y)$, şi ∇f este $2\theta-$monoton, atunci f este $\theta-$convexă.*

2.3 Aplicaţii la rezultate de surjectivitate

În cele ce urmează prezentăm câteva rezultate de surjectivitate pentru operatori $\theta-$monotoni în cazul când $X = \mathbb{R}^n$.

Un operator cu graficul $\|\cdot\| \times \|\cdot\|$ închis în $X \times X^*$ se numeşte *outer semi-continuous*.

Teoremă 2.3.1. *Dacă $T : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ este $\theta-$monoton, cu valori convexe, outer semi-continuous şi $D(T) = \mathbb{R}^n$, precum $\theta(\cdot, y) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ este inferior semicontinuu pentru orice $y \in \mathbb{R}^n$ şi funcţia $\theta(\cdot, 0) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ este mărginită inferior atunci $T + \lambda I$ este surjectiv pentru orice $\lambda > 0$.*

Următorea teoremă de tip Minty's asigură surjectivitatea lui $T + \lambda I$, când T este maximal $\theta-$monoton.

Teoremă 2.3.2. *Fie $T : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ maximal $\theta-$monoton cu domeniul $D(T) = \mathbb{R}^n$. Dacă $\theta(\cdot, y) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ este inferior semicontinuu pentru orice $y \in \mathbb{R}^n$ şi funcţia $\theta(\cdot, 0) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ este mărginită inferior atunci $T + \lambda I$ este surjectiv pentru orice $\lambda > 0$.*

2.4 Dispoziţii finale

Deoarece conceptele de $\theta-$monotonie şi $\theta-$convexitate conţin mai multe noţiuni de monotonie respectiv convexitate în particular, posibilităţile de investigaţii viitoare sunt considerabile.

De exemplu se poate introduce un nou concept de subdiferenţială aşa numita θ-subdiferenţială.

Fie X un spaţiu Banach real şi $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ o funcţie proprie. Spunem că $x^* \in X^*$ este un $\theta-$subgradient a lui f în $x \in dom(f) = \{x \in X : f(x) < \infty\}$, dacă $\langle x^*, y - x\rangle \leq f(y) - f(x) - \theta(x,y)\|x - y\|$, $(\forall)y \in X$. Mulţimea

$$\partial_\theta f(x) = \{x^* \in X^* : \langle x^*, y - x\rangle \leq f(y) - f(x) - \theta(x,y)\|x - y\|, (\forall)y \in X\}$$

se numeşte $\theta-$*subdiferenţiala* lui f în $x \in dom(f)$.

Investigarea diferenţiabilităţii generice a unei funcţii $\theta-$convexe în spaţii Asplund este deasemenea un bun punct de pornire pentru cercetări viitoare, deoarece acest lucru afost deja stabilită pentru funcţii approximative convexe şi $\gamma-$paraconvexe (vezi [97, 116]).

Merită cercetat deasemenea aplicabilitatea acestor concepte în domeniul optimizării şi ale inegalităţilor variaţionale.

Capitolul 3

Inegalităţi variaţionale

3.1 Inegalităţi variaţionale generalizate

Fie X un spaţiu Banach şi X^* dualul său topologic. Să considerăm $K \subseteq X$ şi fie $A : K \longrightarrow X^*$ şi $a : K \longrightarrow X$ doi operatori.

Reamintim că inegalitatea variaţională a lui Stampacchia, $VI_S(A, K)$, constă în aflarea unui element $x \in K$, astfel încât $\langle A(x), y - x \rangle \geq 0$ pentru orioce $y \in K$, unde K este convexă şi închisă (vezi, de exemplu [43, 74, 87]).

Problema care vom studia în cele ce urmează este aşa numita inegalitate variaţională generală de tip Stampacchia , $VI_S(A, a, K)$, care constă în aflarea unui element $x \in K$, astfel încât

$$\langle A(x), a(y) - a(x) \rangle \geq 0, \quad \text{pentru orice } y \in K, \tag{3. 1}$$

Desigur când $a \equiv id_K$, (3.1) se reduce la inegalitatea variaţională a lui Stampacchia $VI_S(A, K)$.

Schimbând A cu a în $VI_S(A, a, K)$, obţinem inegalitatea variaţională invertată de tip Stampacchia, $VI_{iS}(A, a, K)$, care constă în găsirea unui element $x \in K$ astfel încât

$$\langle A(y) - A(x), a(x) \rangle \geq 0, \quad \text{pentru orice } y \in K. \tag{3. 2}$$

Inegalitatea variaţională a lui Minty, $VI_M(A, K)$, constă în aflarea unui element $x \in K$, astfel încât $\langle A(y), y - x \rangle \geq 0$ pentru orice $y \in K$, unde mulţimea K este convexă şi închisă (vezi, de exemplu, [43, 63, 87]).

Inegalitatea variaţională generală a lui Minty, $VI_M(A, K)$, constă în aflarea unui element $x \in K$, astfel încât

$$\langle A(y), a(y) - a(x) \rangle \geq 0, \quad \text{pentru orice } y \in K. \tag{3. 3}$$

Desigur, când $a \equiv id_K$, atunci (3.3) se reduce la inegalitatea varaţională a lui Minty $VI_M(A, K)$.

Schimbând A cu a în $VI_M(A, a, K)$, obţinem inegalitatea variaţională invertată de tip Minty, $VI_{iM}(A, a, K)$, care constă în găsirea unui element $x \in K$ astfel încât

$$\langle A(y) - A(x), a(y) \rangle \geq 0, \quad \text{pentru orice } y \in K. \tag{3. 4}$$

Fie $K \subseteq X$ nevidă şi convexă, şi fie $T : K \rightrightarrows X^*$ şi $f : K \longrightarrow X$ doi operatori. Considerăm următoarea problemă. Să se găsească un element $x \in K$, astfel încât

$$(\forall) y \in K \, (\exists) u \in T(x) : \langle u, f(y) - f(x) \rangle \geq 0. \tag{3. 5}$$

Desigur, când T este univoc, atunci (3.5) se reduce la inegalitatea variaţională generală de tip Stampacchia, $VI_S(T, f, K)$. Să notăm cu $S_w(T, f, K)$ mulţimea soluţiilor problemei (3.5).

Să considerăm deasemenea următoarea problemă. Să se afle un element $x \in K$, astfel încât

$$(\exists)u \in T(x) : (\forall)y \in K \; \langle u, f(y) - f(x)\rangle \geq 0. \tag{3. 6}$$

Se poate observa uşor că şi în acest caz, dacă T este univoc, atuci (3.6) se reduce la inegalitatea variaţională generală de tip Stampacchia, $VI_S(T, f, K)$. Să notăm cu $S(T, f, K)$ mulţimea soluţiilor lui (3.6).

În continuare să considerăm următoarea problemă. Să se găsească un element $x \in K$, astfel încât

$$(\forall)y \in K \; (\forall)v \in T(y) : \langle v, f(y) - f(x)\rangle \geq 0. \tag{3. 7}$$

Se poate observa uşor că în acest caz, dacă T este univoc, atuci (3.7) se reduce la inegalitatea variaţională generală de tip Minty, $VI_M(T, f, K)$. Să notăm cu $M(T, f, K)$ mulţimea soluţiilor lui (3.7).

3.2 Operatori de tip ql

3.2.1 Câteva caracterizări a monotoniei funcţiilor reale de o variabilă reală

În această secţiune prezentăm câteva caracterizări a monotoniei funcţiilor reale de o variabilă reală, şi generalizând aceste caracteristici, introducem mai multe noţiuni de monotonie pentru operatori. Bazându-ne pe una dintre caracteristici menţionate introducem noţiunea de operator de tip ql.

Propoziţie 3.2.1. *Fie $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie. Funcţia f este monoton crescătoare (descrescătoare), dacă şi numai dacă, pentru orice $a, b \in I$, $a \leq b$, şi orice $z \in [a, b] \cap I$ avem $f(z) \in [f(a), f(b)]$, (respectiv $f(z) \in [f(b), f(a)]$).*

3.2.2 Căteva proprietăţi ai operatorilor de tip ql

În această secţiune, bazându-ne pe Propoziţia 3.2.1 introducem conceptul de operator de tip ql.

Definiţie 3.2.1. *Fie X şi Y două spaţii liniare reale. Spunem că operatorul $A : D \subseteq X \longrightarrow Y$ este de tip ql, dacă pentru orice $x, y \in D$ şi orice $z \in [x, y] \cap D$ avem $A(z) \in [A(x), A(y)]$. Spunem că operatorul $A : D \subseteq X \longrightarrow Y$ este de tip strict ql, dacă pentru orice $x, y \in D$ şi orice $z \in (x, y) \cap D$ avem $A(z) \in (A(x), A(y))$.*

Avem următorul rezultat.

Propoziţie 3.2.2. *Fie $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie. Atunci f este de tip ql, dacă şi numai dacă f este monotonă (crescătoare sau descrescătoare).*

Următorul rezultat este eviden.

Propoziţie 3.2.3. *Fie X şi Y două spaţii liniare reale şi fie $A : X \longrightarrow Y$ un operator liniar. Atunci A este de tip ql.*

Definiţie 3.2.2. *Fie X un spaţiu liniar real, Y un spaţiu topologic şi fie $A : D \subseteq X \longrightarrow Y$ un operator. Spunem că A este continuu pe segmente în $x \in D$, dacă orice şir $\{t_n\} \subseteq \mathbb{R}$ de numere reale convergent către 0 şi orice $y \in D$ cu $x + t_n y \in D$ avem $A(x + t_n y) \longrightarrow A(x)$, $n \longrightarrow \infty$. A este continuu pe segmente în D dacă are această proprietate în orice $x \in D$.*

Lemă 3.2.1. *Fie X un spaţiu liniar real şi fie Y un spaţiu Hausdorff topologico-vectorial, fie $D \subseteq X$ convexă şi $A : D \longrightarrow Y$ un operator continuu pe segmente şi de tip ql. Atunci pentru orice $x, y \in D$ avem $A([x, y]) = [A(x), A(y)]$.*

În cele ce urmează dăm o metodă prin cere se poate obţine operatori de tip ql din cele deja existente.

Propoziţie 3.2.4. *Fie X, Y, Z spaţii liniare reale, $D \subseteq X$, şi fie $A : D \longrightarrow Y$, $B : A(D) \longrightarrow Z$ doi operatori de tip ql. Atunci $B \circ A : D \longrightarrow Z$ este de tip ql.*

Următorul exemplu ne furnizează un operator de tip ql într-un context general infinit dimensional.

Examplu 3.2.1. Fie $D = \{f \in C_{[a,b]} | f(a) \geq 0\} \subseteq C_{[a,b]}$ şi să considerăm operatorul $S : D \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $S(f)(x) = (f(a))^2 x$. Atunci S este un operator neliniar de tip ql.

Definiţie 3.2.3. *Fie X un spaţiu liniar real şi fie $D \subseteq X$. Acoperirea convexă A mulţimii D este definit ca mulţimea*

$$\operatorname{co}(D) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : x_i \in D, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, \text{ pentru orice } i \in \{1, 2, \ldots, n\}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Avem următorul rezultat:

Teoremă 3.2.1. *Fie X şi Y două spaţii liniar reale, fie $D \subseteq X$ convexă şi fie $A : D \longrightarrow Y$ un operator de tip ql. Atunci pentru orice număr finit de elemente $x_1, x_2, \ldots, x_n \in D$ şi orice $x \in co\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ avem $A(x) \in co\{A(x_1), A(x_2), \ldots, A(x_n)\}$.*

3.3 Existenţa soluţiilor a câtorva inegalităţi variaţionale generalizate

3.3.1 Inegalităţi variaţionale de tip Stampacchia

În această secţiune prezentăm câteva rezultate de existenţă a soluţiei pentru inegalităţi variaţionale de tip Stampacchia.

Unul dintre rezultatele principale a acestei secţiuni este următoare teoremă

Teoremă 3.3.1. *Dacă A este slab-$\|\cdot\|$-sevenţial continuu, a este de tip ql şi slab-slab secvenţial continuu şi K este slab compactă şi convexă, atunci $VI_S(A, a, K)$ admite soluţii.*

3.3.2 Inegalităţi variaţionale de tip Minty

În această secţiune obţinem câteva generalizări a teoremei clasice a lui Minty referitor la coincidenţa soluţiilor inegalităţilor variaţionale de tip Stampacchia respectiv Minty.

Reamintim următoarele definiţii (vezi [101]):

Definiţie 3.3.1. *Fie X un spaţiu Banach real, fie X^* dual lui, şi fie $A : D \subseteq X \longrightarrow X^*$ şi $a : D \longrightarrow X$ doi operatori. Spunem că A este monoton relativ la a, dacăpentru orice $x, y \in D$, avem $\langle A(x) - A(y), a(x) - a(y)\rangle \geq 0$.*

În continuare obţinem câteva rezultate pentru problemele $VI_S(A, a, K)$ şi $VI_M(A, a, K)$, care pot fi văzute ca şi generalizarea teoremei lui Minty.

Teoremă 3.3.2. *Fie $K \subseteq X$ o mulţime convexă, şi fie $A : K \longrightarrow X^*$ şi $a : K \longrightarrow X$ doi operatori. Atunci următoarele propoziţii sunt adevărate.*

i) Dacă A este monoton relativ la a pe K, atunci orice $x \in K$ soluţie lui $VI_S(A, a, K)$ este deasemenea soluţie lui $VI_M(A, a, K)$.

ii) Dacă A este hemicontinuu şi a este de tip strict ql, atunci orice $x \in K$ soluţie lui $VI_M(A, a, K)$ este deasemenea soluţie lui $VI_S(A, a, K)$.

3.3.3 Problemele invertate

În cele ce urmează obţinem rezultate asemănătoare pentru problemele invertate $VI_{iS}(A, a, K)$ şi $VI_{iM}(A, a, K)$.

Teoremă 3.3.3. *Dacă A este slab-tare secvenţial continuu iar a este slab-slab secvenţial continuu, A este de tip ql şi K este slab compactă, atunci inegalitatea generală invertată de tip Stampacchia $VI_{iS}(A, a, K)$ admite soluţii.*

Avem următoarea teoremă de tip Minty.

Teoremă 3.3.4. *i) Fie $A : K \longrightarrow X^*$ monoton relativ la a. Dacă $x \in K$ este o soluţie a lui $VI_{iS}(A, a, K)$, atunci x este o soluţie lui $VI_{iM}(A, a, K)$.*

ii) Fie $A : K \longrightarrow X^*$ de tip strict ql şi fie a continuu pe segmente. Dacă $x \in K$ este o soluţie a lui $VI_{iM}(A, a, K)$, atunci x este o soluţie lui $VI_{iS}(A, a, K)$.

3.3.4 Inegalităţi variaţionale multivoci

Fie $K \subseteq X$ convexă şi fiet $T : K \rightrightarrows X^*$ şi $f : K \longrightarrow X$ doi operatori.

Teoremă 3.3.5. *Fie $K \subseteq X$ nevidă şi slab compactă şi fie $f : K \longrightarrow K$ de tip ql şi slab-tare secvenţial continuu. Fie $T : K \rightrightarrows X^*$ slab-slab* superior semicontinuu pe K, astfel încât $T(x)$ este nevidă, slab* compactă pentru orice $x \in K$. Atunci, $S_w(T, f, K) \neq \emptyset$.Dacă în plus T este f-pseudomonoton, atunci $M(T, f, K) \neq \emptyset$.*

În cele ce urmează prezentăm rezultatul principal al acestei secţiuni.

Teoremă 3.3.6. *Fie $K \subseteq X$ nevidă şi slab compactă şi fie $f : K \longrightarrow K$ de tip ql şi slab-tare continuu. Fie $T : K \rightrightarrows X^*$ slab-slab* superior semicontinuu pe K, astfel încât $T(x)$ este nevidă, slab* compactă şi convexă pentru orice $x \in K$. Atunci, $S(T, f, K) \neq \emptyset$.*

3.4 Aplicaţii la teoreme de punct fix

În această secţiune demonstrăm teoremele de punct fix ale lui Brouwer respectiv Kakutani. Teorema de punct fix a lui Brouwer afirmă, că o funcţie $F : K \longrightarrow K$ continuă pe mulţimea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compactă şi convexă, admite un punct fix, adică există $x \in K$ astfel încât $F(x) = x$, (vezi, de exemplu, [61]).

Conform Teoremei 3.3.3, dacă A este slab-tare secvenţial continuu şi de tip ql, a este slab-slab secvenţial continuu şi K este slab compactă şi convexă, atunci problema $VI_{iS}(A, a, K)$ admite soluţii. Fie $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compactă şi convexă, $A : K \longrightarrow K$, $A \equiv id_K$ şi $a : K \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $a(x) = x - F(x)$. Evident A şi a sunt continui, deci condiţiile Teoremei 3.3.3 sunt satisfăcute, în consecinţă există $x_0 \in K$ astfel încât

$$\langle y - x_0, x_0 - F(x_0)\rangle \geq 0, (\forall) y \in K.$$

Cum $\mathrm{Im}(F) \subseteq K$, pentru $y = F(x_0) \in K$ obţinem $\langle F(x_0) - x_0, x_0 - F(x_0)\rangle \geq 0$. Deci, $-\|F(x_0) - x_0\|^2 \geq 0$, astfel avem $F(x_0) = x_0$.

Capitolul 4

Problemele sumelor în spaţii Banach

4.1 Preliminarii

4.1.1 Noţiuni de punct interior şi conjugata Fenchel

Fie X un spaţiu separat local convex şi X^* dualul său topologic. Pentru o mulţime nevidă $D \subseteq X$, notăm cu $\mathrm{co}(D), \mathrm{cone}(D), \mathrm{aff}(D), \mathrm{lin}(D), \mathrm{int}(D), \mathrm{cl}(D)$, *acoperirea convexă, acoperirea conică, acoperirea afină, acoperirea liniară, interiorul*, şi *închiderea.*

Interiorul algebric (*core*) a lui D este mulţimea (vezi [60, 113, 133])

$$\mathrm{core}(D) = \{u \in X |\ \forall x \in X,\ \exists \delta > 0 \text{ astfel încât } \forall \lambda \in [0, \delta] : u + \lambda x \in D\},$$

şi interiorul algebric relativ este mulţimea (vezi [60, 133])

$$\mathrm{icr}(D) = \{u \in X |\ \forall x \in \mathrm{aff}(D - D),\ \exists \delta > 0 \text{ astfel încât } \forall \lambda \in [0, \delta] : u + \lambda x \in D\}.$$

Considerăm de asemenea *strong cvasi-relativ interiorul* a lui D (vezi [13, 64, 133, 134]), notat cu $\mathrm{sqri}(D)$,

$$\mathrm{sqri}(D) = \begin{cases} \mathrm{icr}(D), & \text{if } \mathrm{aff}(D) \text{ este a closed set,} \\ \emptyset, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Spunem că funcţia $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ este convexă dacă

$$\forall x, y \in X,\ \forall t \in [0, 1]\ : f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y),$$

cu convenţiile $(+\infty) + (-\infty) = +\infty$, $0 \cdot (+\infty) = +\infty$ şi $0 \cdot (-\infty) = 0$ (vezi [133]). Considerăm $\mathrm{dom}\, f = \{x \in X : f(x) < +\infty\}$ domeniul lui f şi $\mathrm{epi}\, f = \{(x, r) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \leq r\}$ epigraful funcţiei. Spunem că f este proprie dacă $\mathrm{dom}\, f \neq \emptyset$ şi $f(x) > -\infty$ pentru orice $x \in X$.

Conjugata *Fenchel-Moreau* a lui f este funcţia $f^* : X^* \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definit prin

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in X}\{\langle x^*, x\rangle - f(x)\}\ \forall x^* \in X^*.$$

Pentru un operator liniar continuu $A : X \longrightarrow Y$, operatorul adjunct $A^* : Y^* \longrightarrow X^*$ este definit prin $\langle A^*y^*, x\rangle = \langle y^*, Ax\rangle$ pentru orice $y^* \in Y^*$ şi $x \in X$.

4.1.2 Operatori maximal monotoni şi funcţii reprezentative

Fie X un spaţiu nontrivial Banach, X^* dualul lui şi X^{**} spaţiul său bidual. Pentru un operator monoton $S : X \rightrightarrows X^*$, numim funcţie reprezentativă a lui S o funcţie convexă şi inferior semicontină $h_S : X \times X^* \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (în topologia tare a lui $X \times X^*$) care satisface

$$h_S \geq c \text{ and } G(S) \subseteq \{(x, x^*) \in X \times X^* : h_S(x, x^*) = \langle x^*, x\rangle\}.$$

Teoremă 4.1.1. *Fie X un spaţiu Banach şi $f : X \times X^* \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie proprie, convexă şi inferior semicontinuă astfel încât $f \geq \langle x^*, x\rangle$ şi $f^*(x^*, x^{**}) \geq \langle x^{**}, x^*\rangle$ pentru orice $(x^*, x^{**}) \in X^* \times X^{**}$. Atunci operatorul al cărui grafic este mulţimea $\{(x, x^*) \in X \times X^* : f(x, x^*) = \langle x^*, x\rangle\}$ este maximal monoton şi avem $\{(x, x^*) \in X \times X^* : f(x, x^*) = \langle x^*, x\rangle\} = \{(x, x^*) \in X \times X^* : f^*(x^*, x) = \langle x^*, x\rangle\}$.*

Următoarea clasă de operatori maximal monotoni a fost introdusă recebt în [88], fiind deasemenea studiată în [129].

Definiţie 4.1.1. *Un operator $S : X \rightrightarrows X^*$ este* strongly-representable *dacă există o funcţie proprie, convexă şi tare inferior semicontinuă $h : X \times X^* \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ astfel încât*

$$h \geq c, h^*(x^*, x^{**}) \geq \langle x^{**}, x^*\rangle \forall (x^*, x^{**}) \in X^* \times X^{**}$$

şi

$$G(S) = \{(x, x^*) \in X \times X^* : h(x, x^*) = \langle x^*, x\rangle\}.$$

În acest caz h este o funcţie strong-representative *a lui S.*

Definiţie 4.1.2. *(*vezi [51]*) Închiderea monotonă Gossez a unui operator maximal monoton $S : X \rightrightarrows X^*$ este $\overline{S} : X^{**} \rightrightarrows X^*$,*

$$G(\overline{S}) = \{(x^{**}, x^*) \in X^{**} \times X^* : \langle x^* - y^*, x^{**} - y\rangle \geq 0, (\forall)(y, y^*) \in G(S)\}.$$

Un operator maximal monoton $S : X \rightrightarrows X^*$ este de Gossez type (D) dacă pentru orice $(x^{**}, x^*) \in G(\overline{S})$, există un şir generalizat mărginit $\{(x_\alpha, x^*_\alpha)\}_{\alpha \in \mathfrak{I}} \subseteq G(S)$ care converge la (x^{**}, x^*) în topologia $w^* \times \|\cdot\|$ a lui $X^{**} \times X^*$.

4.2 Despre probleme de dualitate tare stabilă

4.2.1 Dualitate conjugată

Fie V un spaţiu separat local convex şi $F : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie proprie. Considerăm următoare problemă primală

$$(PG) : \inf_{v \in V} F(v)$$

(vezi [15]).

Fie W un alt spaţiu separat local convexşi funcţia $\Phi : V \times W \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ satisfacând $\Phi(v, 0) = F(v)$ pentru orice $v \in V$. Funcţia Φ se numeşte funcţie de perturbare. Problema (PG) poate fi scrisă ca

$$(PG) : \inf_{v \in V} \Phi(v, 0).$$

Problema duală conjugată a lui (PG) poate fi formulată ca

$$(DG) : \sup_{w^* \in W^*} -\Phi^*(0, w^*).$$

Pentru orice $v^* \in V^*$ să considerăm extensia problemei primale (PG)

$$(PG^{v^*}): \inf_{v\in V}\{\Phi(v,0) - \langle v^*, v\rangle\}.$$

Duala ei este

$$(DG^{v^*}): \sup_{w^*\in W^*} -\Phi^*(v^*, w^*).$$

Spunem că pentru problemele (PG) şi (DG) are loc dualitatea tare stabilă, dacă pentru orice $v^* \in V^*$ $v(PG^{v^*}) = v(DG^{v^*})$ şi duala (DG^{v^*}) are o soluţie optimă, unde cu $v(P)$ notăm valoarea problemei P, adică

$$\sup_{v\in V}\{\langle v^*, v\rangle - \Phi(v,0)\} = \min_{w^*\in W^*} \Phi^*(v^*, w^*)\, \forall v^* \in V^*.$$

În [15] este considerat următoarea condiţie de regularitate care în anumite condiţii asigură dualitatea tare stabilă pentru problemele (PG) şi (DG):

(RC_2^{Φ}) : V şi W sunt spaţii Fréchet, Φ este inferior semicontinuu şi $0 \in \operatorname{sqri}(\operatorname{pr}_W(\operatorname{dom}\Phi))$.

În [16] a fost dat o condiţie de tip closedness, care este echivalentă cu dualitatea tare stabilă în cazul când Φ este proprie, convexă şi inferior semicontinuu: $(CQ^{\Phi})(U)$: $\operatorname{pr}_{V^*\times\mathbb{R}}(epi(\Phi^*))$ este inchisă relativ la $U\times\mathbb{R}$ în topologia $(V^*, w^*)\times\mathbb{R}$, unde $U \subseteq V^*$.

4.2.2 Dualitate Fenchel

Să considerăm funcţiile proprii, convexe şi inferior semicontinui $f, g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Să presupunem că $\operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}(g) \neq \emptyset$. Considerăm următoarea probemă primală.

$$(P): \inf_{x\in X}\{(f+g)(x)\}.$$

Duala lui (P) este

$$(D): \sup_{y^*\in Y^*}\{-f^*(y^*) - g^*(-y^*)\}.$$

Pentru orice $x^* \in X^*$ considerăm extensia lui (P)

$$(P^{x^*}): -\sup_{x\in X}\{\langle x^*, x\rangle - (f+g)(x)\},$$

şi duala

$$(D^{x^*}): -\inf_{y^*\in X^*}\{f^*(y^*) + g^*(x^* - y^*)\}.$$

Teoremă 4.2.1. *Fie $U \subseteq X^*$. Următoarele condiţii sunt echivalente:*

(i) $\sup_{x\in X}\{\langle x^*, x\rangle - (f+g)(x)\} = \min_{y^*\in X^*}\{f^*(y^*) + g^*(x^* - y^*)\}$ *pentru orice* $x^* \in U$.

(ii) $(CQ)(U)$: $\{(x^* + y^*, r) : f^*(x^*) + g^*(y^*) \leq r\}$ *este închisă relativ la* $U \times \mathbb{R}$ *în topologia* $(X^*, w^*) \times \mathbb{R}$.

Avem următoarea condiţie de regularitate de tip interior:

(RC_2) : X este spaţiu Fréchet şi $0 \in \operatorname{sqri}(\operatorname{dom}(f) - \operatorname{dom}(g))$.

Teoremă 4.2.2. *Dacă (RC_2) este satisfăcută atunci*

$$\sup_{x\in X}\{\langle x^*, x\rangle - (f+g)(x)\} = \min_{y^*\in Y^*}\{f^*(y^*) + g^*(x^* - y^*)\}, \quad \textit{pentru orice } x^* \in X^*.$$

4.2.3 Dualitate tare stabilă pentru problema având o compoziţie cu un operator liniar în funcţia ojectivă

Fie X, Y spaţii separate local convexe, cu dualul lor X^* şi Y^*,şi să considerăm funcţiile proprii, convexe şi inferior semicontinui $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ şi $g : Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Fie $A : Y \longrightarrow X$, respectiv $B : X \longrightarrow Y$ doi operatori liniari şi continui astfel încât $A^{-1}(\mathrm{dom}(f)) \cap \mathrm{dom}(g) \neq \emptyset$, respectiv $\mathrm{dom}(f) \cap B^{-1}(\mathrm{dom}(g)) \neq \emptyset$.

Pentru orice $x^* \in X^*$, respectiv $y^* \in Y^*$ considerăm problemele

$$(P^{A^{y^*}}) : \ -\sup_{y\in Y}\{\langle y^*, y\rangle - (f \circ A + g)(y)\},$$

respectiv,

$$(P^{B^{x^*}}) : \ -\sup_{x\in X}\{\langle x^*, x\rangle - (f + g \circ B)(x)\}.$$

Dualele lor sunt

$$(D^{A^{y^*}}) : \ -\inf_{x^*\in X^*}\{f^*(x^*) + g^*(y^* - A^*x^*)\},$$

respectiv,

$$(D^{B^{x^*}}) : \ -\inf_{y^*\in Y^*}\{f^*(x^* - B^*y^*) + g^*(y^*)\}.$$

Teoremă 4.2.3. *Fie $U \subseteq Y^*$. Următoarele condiţii sunt echivalente:*
(i) $\sup_{y\in Y}\{\langle y^*, y\rangle - (f \circ A + g)(y)\} = \min_{x^*\in X^*}\{f^*(x^*) + g^*(y^* - A^*x^*)\}$ *pentru orice $y^* \in U$.*
(ii) $(CQ^{\Phi_A})(U) : \{(A^*x^* + y^*, r) : f^*(x^*) + g^*(y^*) \leq r\}$ *este închisă relativ la $U \times \mathbb{R}$ în topologia* $(Y^*, w^*) \times \mathbb{R}$.

Teoremă 4.2.4. *Fie $U \subseteq X^*$. Următoarele condiţii sunt echivalente:*
(i) $\sup_{x\in X}\{\langle x^*, x\rangle - (f + g \circ B)(x)\} = \min_{y^*\in Y^*}\{f^*(x^* - B^*y^*) + g^*(y^*)\}$ *pentru orice $x^* \in U$.*
(ii) $(CQ^{\Phi_B})(U) : \{(x^* + B^*y^*, r) : f^*(x^*) + g^*(y^*) \leq r\}$ *este închisă relativ la $U \times \mathbb{R}$ în topologia* $(X^*, w^*) \times \mathbb{R}$ *topology.*

Avem următoarele condiţii de regularitate:
$(RC_2^{\Phi_A})$: X şi Y sunt spaţii Fréchet şi $0 \in \mathrm{sqri}(\mathrm{dom}(f) - A(\mathrm{dom}(g)))$, respectiv,
$(RC_2^{\Phi_B})$: X şi Y sunt spaţii Fréchet şi $0 \in \mathrm{sqri}(\mathrm{dom}(g) - B(\mathrm{dom}(f)))$. Avem următorul rezultat.

Teoremă 4.2.5. *Dacă $(RC_2^{\Phi_A}),\}$, respectiv, $(RC_2^{\Phi_B})$, are loc, atunci*

$$\sup_{y\in Y}\{\langle y^*, y\rangle - (f \circ A + g)(y)\} = \min_{x^*\in X^*}\{f^*(x^*) + g^*(y^* - A^*x^*)\} \text{ pentru orice } y^* \in Y^*,$$

respectiv,

$$\sup_{x\in X}\{\langle x^*, x\rangle - (f + g \circ B)(x)\} = \min_{y^*\in Y^*}\{f^*(x^* - B^*y^*) + g^*(y^*)\} \text{ pentru orice } x^* \in X^*.$$

4.2.4 Dualitate tare stabilă pentru problema având suma a doi funcţii, fiecare compusă cu un operator liniar şi continuu, în funcţia objectivă

Fie X, Y, Z spaţii separate local convexe, cu dualul lor X^*, Y^* şi Z^*,şi să considerăm funcţiile proprii, convexe şi inferior semicontinui $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ şi $g : Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Fie $A : Z \longrightarrow X$, respectiv $B : Z \longrightarrow Y$ doi operatori liniari şi continui astfel încât $A^{-1}(\mathrm{dom}(f)) \cap B^{-1}(\mathrm{dom}(g)) \neq \emptyset$.

Pentru orice $z^* \in Z^*$ considerăm problema

$$(P^{AB^{z^*}}): \ -\sup_{z\in Z}\{\langle z^*, z\rangle - (f\circ A + g\circ B)(z)\},$$

şi duala ei

$$(D^{AB^{z^*}}): \ -\inf_{(x^*,y^*)\in X^*\times Y^*}\{f^*(x^*)+g^*(y^*) : A^*x^*+B^*y^* = z^*\}$$

Considerăm condiţia de regularitate pentru $U \subseteq Z^*$:

$(CQ^{\Phi_{AB}})(U)$: $\{(A^*x^*+B^*y^*, r) : f^*(x^*)+g^*(y^*) \le r\}$ este închisă relativ la $U\times\mathbb{R}$ în topologia $(Z^*, w^*)\times\mathbb{R}$.

Avem următorul rezultat.

Teoremă 4.2.6. *Următoarele condiţii sunt echivalente.*

(i) $(CQ^{\Phi_{AB}})(U)$ *este satisfăcută.*

(ii) Pentru orice $z^* \in U$ *avem* $(f\circ A+g\circ B)^*(z^*) = \inf_{(x^*,y^*)\in X^*\times Y^*}\{f^*(x^*)+g^*(y^*) : A^*x^*+B^*y^* = z^*\}$ *şi infimul este atins.*

Avem următoarea condiţie de regularitate:

$(RC_2^{\Phi_{AB}})$: Z, X şi Y sunt spaţii Fréchet şi $(0,0)\in \operatorname{sqri}(\operatorname{dom}(f)\times\operatorname{dom}(g) - (A\times B)(\Delta_Z))$.

Avem următorul rezultat.

Teoremă 4.2.7. *Dacă* $(RC_2^{\Phi_{AB}})$ *are loc, atunci*

$$\sup_{z\in Z}\{\langle z^*, z\rangle - (f\circ A+g\circ B)(z)\} = \min_{(x^*,y^*)\in X^*\times Y^*}\{f^*(x^*)+g^*(y^*) : A^*x^*+B^*y^* = z^*\}\, \forall z^*\in Z^*.$$

4.3 Conjugata unor infimal convoluţii generalizate

4.3.1 Infimal convoluţiile $\Box_1$ şi $\Box_2$

Fie X, Y două spaţii separate, local convexe cu dualele X^* şi Y^* şi să considerăm funcţiile proprii, convexe şi inferior semicontinui $f, g : X\times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

Formulele de inf-convoluţie $\Box_1$ şi $\Box_2$ sunt introduse prin $f\Box_1 g : X\times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$

$$(f\Box_1 g)(x,y) = \inf\{f(u,y)+g(v,y) : u, v\in X,\, u+v = x\},$$

respectiv, $f\Box_2 g : X\times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$

$$(f\Box_2 g)(x,y) = \inf\{f(x,u)+g(x,v) : u,v\in Y,\, u+v = y\}.$$

Avem următorul rezultat.

Teoremă 4.3.1. *Dacă* $\operatorname{pr}_Y(\operatorname{dom}(f))\cap\operatorname{pr}_Y(\operatorname{dom}(g)) \ne \emptyset$ *and let* $V\subseteq X^*$, $V\ne\emptyset$, *atunci următoarele condiţii sunt echivalente:*

(i) $(f\Box_1 g)^*(x^*,y^*) = (f^*\Box_2 g^*)(x^*,y^*)$ *şi* $f^*\Box_2 g^*$ *este exactă pentru orice* $(x^*,y^*)\in V\times Y^*$.

(ii) $(CQ^{\Box_1})$: $\{(u^*, v^*, a^*+b^*, r)\in X^*\times X^*\times Y^*\times\mathbb{R} : f^*(u^*,a^*)+g^*(v^*,b^*)\le r\}$ *este închisă relativ la* $\Delta_V\times Y^*\times\mathbb{R}$ *în topologia* $(X^*,w^*)\times(X^*,w^*)\times(Y^*,w^*)\times\mathbb{R}$, *unde* $\Delta_V = \{(x^*,x^*) : x^*\in V\}$.

Considerăm următoarea condiţie de regularitate:

$(RC_2^{\Box_1})$: X şi Y sunt spaţii Fréchet şi
$0\in\operatorname{sqri}(\operatorname{pr}_Y\operatorname{dom}(f) - \operatorname{pr}_Y\operatorname{dom}(g))$.

Avem următorul rezultat.

Teoremă 4.3.2. *Dacă* $(RC_2^{\square_1})$ *are loc atunci*

$$(f\square_1 g)^*(x^*,y^*) = (f^*\square_2 g^*)(x^*,y^*) \quad \text{și } f^*\square_2 g^* \text{ este exactă pentru orice } (x^*,y^*) \in X^* \times Y^*.$$

4.3.2 Infimal convoluţiile $\square_1^A$ şi $\square_2^A$

Fie X şi Y două spaţii normate cu dualele X^* şi Y^*, şi să considerăm funcţiile proprii, convexe şi inferior semicontinui $f : X \times X^* \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ şi $g : Y \times Y^* \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Fie $A : X \longrightarrow Y$ un operator liniar şi continuu şi fie $A^* : Y^* \longrightarrow X^*$, respectiv $A^{**} : X^{**} \longrightarrow Y^{**}$ operatorul adjunct respectiv biadjunct.

Considerăm următoarele formule de infimal convoluţie generalizate, încă neconsiderate în literatura de specialitate
$f\square_1^A g : Y \times Y^* \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$

$$(f\square_1^A g)(y,y^*) = \inf\{f(x, A^*y^*) + g(y - Ax, y^*) : x \in X\},$$

respectiv $f^*\square_2^A g^* : Y^* \times Y^{**} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$,

$$(f^*\square_2^A g^*)(y^*,y^{**}) = \inf\{f^*(A^*y^*, x^{**}) + g^*(y^*, y^{**} - A^{**}x^{**}) : x^{**} \in X^{**}\}.$$

Teoremă 4.3.3. *Dacă* $\mathrm{pr}_{X^*}(\mathrm{dom}(f)) \cap A^*(\mathrm{pr}_{Y^*}(\mathrm{dom}(g))) \neq \emptyset$ *atunci următoarele condiţii sunt echivalente.*

(i) $(CQ^{\square_1^A})$: $\{(x^*, y^*, A^{**}x^{**} + y^{**}, r) : f^*(x^*, x^{**}) + g^*(y^*, y^{**}) \leq r\}$ *este închisă relativ la* $\Delta_{A^*}^{Y^*} \times Y^{**} \times \mathbb{R}$ *în topologia* $(X^*, w^*) \times (Y^*, w^*) \times (Y^{**}, w^*) \times \mathbb{R}$, *unde* $\Delta_{A^*}^{Y^*} = \{(A^*y^*, y^*) : y^* \in Y^*\}$.

(ii) $(f\square_1^A g)^*(y^*,y^{**}) = (f^*\square_2^A g^*)(y^*,y^{**})$ *şi* $f^*\square_2^A g^*$ *este exactă pentru orice* $(y^*,y^{**}) \in Y^* \times Y^{**}$.

Considerăm următoarea condiţie de regularitate:
$(RC_2^{\square_1^A}) : 0 \in \mathrm{sqri}(\mathrm{pr}_{X^*}(\mathrm{dom}(f)) - A^*\,\mathrm{pr}_{Y^*}(\mathrm{dom}(g)))$.
Avem următorul rezultat.

Teoremă 4.3.4. *Dacă* $(RC_2^{\square_1^A})$ *este satisfăcută atunci*
$(f\square_1^A g)^*(y^*,y^{**}) = (f^*\square_2^A g^*)(y^*,y^{**})$ *şi* $f^*\square_2^A g^*$ *este exactă pentru orice* $(y^*,y^{**}) \in Y^* \times Y^{**}$.

4.3.3 Infimal convoluţiile $\triangle_1^A$ şi $\triangle_2^A$

Fie X şi Y două spaţii normate cu dualele X^* şi Y^*, şi să considerăm funcţiile proprii, convexe şi inferior semicontinui $f : X \times X^* \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ şi $g : Y \times Y^* \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Fie $A : X \longrightarrow Y$ un operator liniar şi continuu şi fie $A^* : Y^* \longrightarrow X^*$, respectiv $A^{**} : X^{**} \longrightarrow Y^{**}$ operatorul adjunct respectiv biadjunct.

Considerăm următoarele formule de inf-convoluţie $f\triangle_2^A g : X \times X^* \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$

$$(f\triangle_2^A g)(x,x^*) = \inf\{f(x, x^* - A^*y^*) + g(Ax, y^*) : y^* \in Y^*\},$$

respectiv $f^*\triangle_1^A g^* : X^* \times X^{**} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$,

$$(f^*\triangle_1^A g^*)(x^*,x^{**}) = \inf\{f^*(x^* - A^*y^*, x^{**}) + g^*(y^*, A^{**}x^{**}) : y^* \in Y^*\}.$$

Teoremă 4.3.5. *Dacă* $A(\mathrm{pr}_X(\mathrm{dom}(f))) \cap (\mathrm{pr}_Y(\mathrm{dom}(g))) \neq \emptyset$ *atunci următoarele condiţii sunt echivalentet.*

(i) $(CQ^{\triangle_2^A}) : \{(x^* + A^*y^*, x^{**}, y^{**}, r) : f^*(x^*, x^{**}) + g^*(y^*, y^{**}) \leq r\}$ *este închisă relativ la* $X^* \times \Delta_{X^{**}}^{A^{**}} \times \mathbb{R}$ *în topologia* $(X^*, w^*) \times (X^{**}, w^*) \times (Y^{**}, w^*) \times \mathbb{R}$, *unde* $\Delta_{X^{**}}^{A^{**}} = \{(x^{**}, A^{**}x^{**}) : x^{**} \in X^{**}\}$.

(ii) $(f \triangle_2^A g)^*(x^*, x^{**}) = (f^* \triangle_1^A g^*)(x^*, x^{**})$ *şi* $f^* \triangle_1^A g^*$ *este exactă pentru orice* $(x^*, x^{**}) \in X^* \times X^{**}$.

Considerăm următoarea condiţie de regularitate:

$(RC_2^{\triangle_2^A}) : 0 \in \mathrm{sqri}(\mathrm{pr}_Y(\mathrm{dom}(g)) - A(\mathrm{pr}_X(\mathrm{dom}(f))))$.

Avem următorul rezultat.

Teoremă 4.3.6. *Dacă* $(RC_2^{\triangle_2^A})$ *are loc atunci* $(f \triangle_2^A g)^*(x^*, x) = (f^* \triangle_1^A g^*)(x^*, x)$ *şi* $f^* \triangle_1^A g^*$ *este exactă pentru orice* $(x^*, x) \in X^* \times X$.

4.3.4 Infimal convoluţiile $\bigcirc_1^A$ şi $\bigcirc_2^A$

Fie X şi Y două spaţii normate cu dualele X^* şi Y^*, şi să considerăm funcţiile proprii, convexe şi inferior semicontinui $f : X \times X^* \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ şi $g : Y \times Y^* \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Fie $A : X \longrightarrow Y$ un operator liniar şi continuu şi fie $A^* : Y^* \longrightarrow X^*$, respectiv $A^{**} : X^{**} \longrightarrow Y^{**}$ operatorul adjunct respectiv biadjunct.

Considerăm următoarele formule de inf-convoluţie încă neconsiderat până acum în literatura de specialitate.

$f \bigcirc_1^A g : X \times X^* \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$

$$(f \bigcirc_1^A g)(x, x^*) = \inf_{\substack{u, w \in X \\ v^* \in Y^*}} \{f(u, x^*) + g(Aw, v^*) : \, u + w = x, \, A^*v^* = x^*\},$$

respectiv $f^* \bigcirc_2^A g^* : X^* \times X^{**} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$,

$$(f^* \bigcirc_2^A g^*)(x^*, x^{**}) = \inf_{\substack{u^{**}, w^{**} \in X^{**} \\ v^* \in Y^*}} \{f^*(x^*, u^{**}) + g^*(v^*, A^{**}w^{**}) : \, u^{**} + w^{**} = x^{**}, \, A^*v^* = x^*\}.$$

Teoremă 4.3.7. *Dacă* $\mathrm{dom}(g) \times \mathrm{pr}_{X^*}(\mathrm{dom}(f)) \cap ImA \times \Delta_{Y^*}^{A^*} \neq \emptyset$, *unde* $\Delta_{Y^*}^{A^*} = \{(y^*, A^*y^*) | y^* \in Y^*\}$, *atunci următoarele condiţii sunt echivalente.*

(i) $(CQ^{\bigcirc_1^A}) : \{(u^*, A^*v^*, A^{**}u^{**} + v^{**}, r) : f^*(u^*, u^{**}) + g^*(v^*, v^{**}) \leq r\}$ *este închisă relativ la* $\Delta_{X^*} \times Im(A^{**}) \times \mathbb{R}$ *în topologia* $(X^*, w^*) \times (X^*, w^*) \times (Y^{**}, w^*) \times \mathbb{R}$, *unde* $\Delta_{X^*} = \{(x^*, x^*) : x^* \in X^*\}$.

(ii) $(f \bigcirc_1^A g)^*(x^*, x^{**}) = (f^* \bigcirc_2^A g^*)(x^*, x^{**})$ *şi* $f^* \bigcirc_2^A g^*$ *este exactă pentru orice* $(x^*, x^{**}) \in X^* \times X^{**}$.

Considerăm următoarea condiţie de regularitate:

$(RC_2^{\bigcirc_1^A}) : (0, 0, 0) \in \mathrm{sqri}(\mathrm{dom}(g) \times \mathrm{pr}_{X^*}(\mathrm{dom}(f)) - Im(A) \times \Delta_{Y^*}^{A^*})$, unde $\Delta_{Y^*}^{A^*} = \{(y^*, A^*y^*) | y^* \in Y^*\}$.

Avem următorul rezultat.

Teoremă 4.3.8. *Dacă* $(RC_2^{\bigcirc_1^A})$ *este satisfăcută atunci* $(f \bigcirc_1^A g)^*(x^*, x^{**}) = (f^* \bigcirc_2^A g^*)(x^*, x^{**})$ *şi* $f^* \bigcirc_2^A g^*$ *este exactă pentru orice* $(x^*, x^{**}) \in X^* \times X^{**}$.

4.4 Maximal monotonia sumelor paralele a doi operatori maximal monotoni de Gossez type (D)

4.4.1 Maximal monotonia sumei paralele $S||T$

Utilizând dualitatea tare stabilă demonstrăm maximal monotonia sumelor paralele a doi operatori maximal monotoni sub cea mai slabă condiţie de regularitate cunoscută în literatura de specialitate.

Peste tot X va fi un spaţiu Banach, X^* dual lui şi X^{**} bidualul lui.

Definiţie 4.4.1. *Pentru operatorii monotoni $S, T : X \rightrightarrows X^*$ suma lor parlelă este definit prin*

$$S||Tx = (S^{-1} + T^{-1})^{-1}x, \forall x \in X.$$

Se poate arăta uşor că $S||Tx = \bigcup_{y \in X}(S(y) \cap T(x-y))$.

Teoremă 4.4.1. *Fie $S, T : X \rightrightarrows X^*$ doi operatori maximal monotoni de Gossez type* (D)*, cu funcţiile tare reprezentative h_S şi h_T, astfel încât $\mathrm{pr}_{X^*}(\mathrm{dom}(h_S)) \cap \mathrm{pr}_{X^*}(\mathrm{dom}(h_T)) \neq \emptyset$, şi considerăm funcţia $h : X \times X^* \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $h(x, x^*) = \mathrm{cl}_{\|\cdot\| \times \|\cdot\|_*}(h_S \Box_1 h_T)(x, x^*)$. Să presupunem că $R(\overline{S}^{-1}) \subseteq X$, (unde $\overline{S}$ este închiderea monotonă Gossez a lui S), şi că una dintre condiţiile următoare are loc.*

(a) Condiţia de regularitate $(RC_2^{\Box_1})$ pentru h_S, respectiv h_T este satisfăcută.

(b) $(CQ^{\Box_1})$ pentru h_S, respectiv h_T este satisfăcută.

Atunci h este o funcţie tare reprezentativă pentru $S||T$ şi $S||T$ este maximal monoton de Gossez type (D).

4.4.2 Maximal monotonia sumei paralele $S||^A T$

Definiţie 4.4.2. *Considerăm operatorii monotoni $S : X \rightrightarrows X^*$ and $T : Y \rightrightarrows Y^*$ şi fie $A : X \longrightarrow Y$ un operator liniar şi continuu, şi A^* operatorul adjunct a lui A. Suma paralelă generalizată $S||^A T : Y \rightrightarrows Y^*$ este definit după cum urmează:*

$$S||^A T := (AS^{-1}A^* + T^{-1})^{-1}.$$

Teoremă 4.4.2. *Considerăm $A : X \longrightarrow Y$ un operator liniar şi continuu, şi A^* operatorul adjunct a lui A iar A^{**} biadjuncta lui A. Fie $S : X \rightrightarrows X^*$, $T : Y \rightrightarrows Y^*$ doi operatori maximal monotoni de Gossez type* (D)*, cu funcţiile tare reprezentative h_S şi h_T, astfel încât $\mathrm{pr}_{X^*}(\mathrm{dom}(h_S)) \cap A^*(\mathrm{pr}_{Y^*}(\mathrm{dom}(h_T))) \neq \emptyset$. Considerăm funcţia $h : Y \times Y^* \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $h(y, y^*) = \mathrm{cl}_{\|\cdot\| \times \|\cdot\|_*}(h_S \Box_1^A h_T)(y, y^*)$. Asumăm că $R(\overline{S}^{-1}) \subseteq X$, şi că una dintre condiţiile următoare are loc.*

(a) Condiţia de regularitate $(RC_2^{\Box_1^A})$ pentru h_S, respectiv h_T este satisfăcută.

(b) $(CQ^{\Box_1^A})$ pentru h_S, respectiv h_T este satisfăcută.

Atunci h este o funcţie tare reprezentativă a lui $S||^A T$ şi $S||^A T$ este un operator maximal monoton de Gossez type (D).

4.4.3 Maximal monotonia operatorului $S + A^*TA$

Definiţie 4.4.3. *Considerăm operatorii monotoni $S : X \rightrightarrows X^*$ and $T : Y \rightrightarrows Y^*$ şi fie $A : X \longrightarrow Y$ un operator liniar şi continuu, şi A^* operatorul adjunct a lui A. O bine cunoscută sumă generalizată este definită ca:*

$$M : X \rightrightarrows X^*,\ M := S + A^*TA.$$

Teoremă 4.4.3. *Considerăm $A : X \longrightarrow Y$ un operator liniar şi continuu, şi A^* operatorul adjunct a lui A iar A^{**} biadjuncta lui A. Fie $S : X \rightrightarrows X^*$, $T : Y \rightrightarrows Y^*$ doi operatori maximal monotoni de Gossez type* (D)*, cu funcţiile tare reprezentative h_S şi h_T, astfel încât $A(\mathrm{pr}_X(\mathrm{dom}(h_S))) \cap (\mathrm{pr}_Y(\mathrm{dom}(h_T))) \neq \emptyset$. Considerăm funcţia $h : X \times X^* \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $h(x, x^*) = \mathrm{cl}_{\|\cdot\|\times\|\cdot\|_*}(h_S \triangle_2^A h_T)(x, x^*)$. Asumăm că una dintre condiţiile următoare are loc.*

(a) Condiţia de regularitate $(RC_2^{\triangle_2^A})$ pentru h_S, respectiv h_T este satisfăcută.

(b) $(CQ^{\triangle_2^A})$ pentru h_S, respectiv h_T este satisfăcută.

Atunci h este o funcţie tare reprezentattivă a lui $S + A^*TA$ şi $S + A^*TA$ este un operator maximal monoton de Gossez type (D)*.*

4.4.4 Maximal monotonia sumei paralele $S||_AT$

Definiţie 4.4.4. *Considerăm operatorii monotoni $S : X \rightrightarrows X^*$ and $T : Y \rightrightarrows Y^*$ şi fie $A : X \longrightarrow Y$ un operator liniar şi continuu, şi A^* operatorul adjunct a lui A. Suma paralelă generalizată $S||_AT$, (vezi [109]) este definit prin*

$$S||_AT : X \rightrightarrows X^*,\ S||_AT := (S^{-1} + (A^*TA)^{-1})^{-1}.$$

Observaţie 4.4.1. Dacă $X = Y$, $A \equiv \mathrm{id}_X$, obţinem suma paralelă

$$S||T : X \rightrightarrows X^*,\ S||T := (S^{-1} + T^{-1})^{-1}.$$

Teoremă 4.4.4. *Considerăm $A : X \longrightarrow Y$ un operator liniar şi continuu, şi A^* operatorul adjunct a lui A iar A^{**} biadjuncta lui A. Fie $S : X \rightrightarrows X^*$, $T : Y \rightrightarrows Y^*$ doi operatori maximal monotoni de Gossez type* (D)*, cu funcţiile tare reprezentative h_S şi h_T, astfel încât $\mathrm{dom}\, h_T \times \mathrm{pr}_{X^*}(\mathrm{dom}\, h_S) \cap \mathrm{Im}\, A \times \Delta_{Y^*}^{A^*} \neq \emptyset$, unde $\Delta_{Y^*}^{A^*} = \{(y^*, A^*y^*) : y^* \in Y^*\}$. Considerăm funcţia*

$$h : X \times X^* \longrightarrow \overline{\mathbb{R}},\ h(x, x^*) = \mathrm{cl}_{\|\cdot\|\times\|\cdot\|_*}(h_S \bigcirc_1^A h_T)(x, x^*),$$

şi asumăm că $R(\overline{S}^{-1}) \subseteq X$, şi că una dintre condiţiile următoare are loc.

(a) Condiţia de regularitate $(RC_2^{\bigcirc_1^A})$ pentru h_S şi h_T este satisfăcută.

(b) $(CQ^{\bigcirc_1^A})$ pentru h_S şi h_T este satisfăcută.

Atunci h este o funcţie tare reprezentativă pentru $S||_AT$ şi suma paralelă generalizată $S||_AT$ este maximal monoton de Gossez type (D)*.*

Bibliografie

[1] C.D. Aliprantis, K.C. Border, *Infinite dimensional analysis, A hitchhiker's guide*, Springer (2006).

[2] W.N. Anderson and R.J. Duffin, *Series and parallel addition of matrices,* J. Math. Anal. Appl., 26, pp. 576-594 (1969).

[3] H. Attouch, Z. Chbani, A. Moudafi, *Une notion doprateur de rcession pour les maximaux monotones*, Séminaire dAnalyse Convexe, Montpellier, Exposé, 22 (12), pp. 1-37 (1992).

[4] M. Avriel, W.T. Diewert, S. Schaible, I. Zang, *Generalized concavity*, Pienn um Publishing Corp., New York (1988).

[5] C. Baiocchi, A. Capelo, *Variational and Quasi-Variational Inequalities,* Wiley, New York (1984).

[6] A. Ballier, B. Durand, E. Jeandel, *Structural Aspects of tillings*, Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (2008 Bordeaux), pp. 61-72, *arxiv.org/pdf*/0802.2828*v*1.

[7] H.H. Bauschke, *Fenchel duality, Fitzpatrick functions and the extension of firmly nonexpansive mappings*, Proceedings of the American Mathematical Society, 135 (1), pp. 135-139 (2007).

[8] H.H. Bauschke, D.A. McLaren, H.S. Sendov, *Fitzpatrick functions: inequalities, examples and remarks on a problem by S. Fitzpatrick*, Journal of Convex Analysis, 13 (3-4), pp. 499-523 (2006).

[9] A. Bensoussan, J.L. Lions, *Applications des Inequations Variationelles en Control et Stochastiques,* Dunod, Paris (1978).

[10] D.P. Bertsekas, E.M. Gafni, *Projection methods for variational inequalities with applications to the traffic assignment problem.* Math. Prog. Study, 17, pp. 139-159 (1982).

[11] J.M. Borwein, *Maximality of sums of two maximal monotone operators in general Banach space*, Proceedings of the American Mathematical Society, 135 (12), pp. 3917-3924 (2007).

[12] J.M. Borwein, A.S. Lewis, *Partially finite convex programming, part I: Quasi relative interiors and duality theory*, Mathematical Programming, 57 (1), pp. 15-48 (1992).

[13] J.M. Borwein, V. Jeyakumar, A.S. Lewis, H. Wolkowicz, *Constrained approximation via convex programming*, Preprint, University of Waterloo, (1988).

[14] J.M. Borwein, R. Goebel, *Notions of relative interior in Banach spaces*, Journal of Mathematical Sciences, 115 (4), pp. 2542-2553 (2003).

[15] R.I. Boţ, *Conjugate duality in convex optimization*, Springer (2010).

[16] R.I. Boţ, E.R. Csetnek, *An application of the bivariate inf-convolution formula to enlargments of monotone operators*, Set-Valued Anal, 16, pp. 983-997 (2008).

[17] R.I. Boţ, E.R. Csetnek, G. Wanka, *A new condition for maximal monotonicity via representative functions*, Nonlinear Analysis, 67, pp. 2390-2402 (2007).

[18] R.I. Boţ, S.-M. Grad, G. Wanka, *Maximal monotonicity for the precomposition with a linear operator*, SIAM Journal on Optimization, 17 (4), pp. 1239-1252 (2006).

[19] R.I. Boţ, S.-M. Grad, G. Wanka, *Weaker constraint qualifications in maximal monotonicity*, Numerical Functional Analysis and Optimization, 28 (1-2), pp. 27-41 (2007).

[20] R.I. Boţ, **S. László**, *On the generalized parallel sum of two maximal monotone operators of Gossez type (D)*, arXiv:1106.2069v1 [math.FA] (submitted 2011).

[21] R.I. Boţ, G. Wanka, *A weaker regularity condition for subdifferential calculus and Fenchel duality in infinite dimentional spaces*, Nonlinear Analysis, 64, pp. 2787-2804 (2006).

[22] F.E. Browder, *Multi-valued monotone nonlinear mappings*, Trans. AMS, 118, pp. 338-551 (1965).

[23] F.E. Browder, *Nonlinear maximal monotone mappings in Banach spaces*, Math. Ann., 175, pp. 89-113 (1968).

[24] F.E. Browder, *The fixed point theory of multi-valued mappings in topological vector spaces*, Math. Ann., 177, pp. 283-301 (1968).

[25] F.E. Browder, P. Hess, *Nonlinear mappings of monotone type in Banach spaces*, J. Functional Analysis, 11, pp. 251-294 (1972).

[26] R.S. Burachik, S. Fitzpatrick, *On a family of convex functions associated to subdifferentials*, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 6 (1), pp. 165-171 (2005).

[27] R.S. Burachik and A.N. Iusem, *Set-Valued Mappings and Enlargements of Monotone Operators,* Springer Optimization and Its Applications, Springer US, (2008).

[28] R.S. Burachik, B.F. Svaiter, *Maximal monotonicity, conjugation and duality product*, Proceedings of the American Mathematical Society, 131 (8), pp. 2379-2383 (2003).

[29] R.S. Burachik, B.F. Svaiter, *Maximal monotone operators, convex functions and a special family of enlargements*, Set-Valued Analysis, 10 (4), pp. 297-316 (2002).

[30] A. Cambini, L. Martein, *Generalized Convexity and Optimization: Theory and Applications,* Springer, (2008).

[31] G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen*, Ed by E. Zermelo, (1932). (Reprinted by Georg Olms Publ., Hildesheim, 1962.)

[32] P.T. Church, *Factorization of differentiable maps with branch set dimension at most n-3*, Transactions of the American Mathematical Society, 115, pp. 370-387 (1965).

[33] P.T. Church, J.G. Timourian, *Differentiable maps with 0-dimensional critical set*, Pacific Journal of Mathematics, 41 (3), pp. 615-630 (1972).

[34] R. Correa, A. Jofre and L. Thibault, *Characterization of lower semicontinuous convex functions*, Proc. AMS., 116, pp. 67-72 (1992).

[35] J.P. Crouzeix, *Criteria for Generalized Convexity and Generalized Monotonicity in the Differentiable Case*, in N. Hadjisavas, S. Komlósi and S. Schaible, Handbook of Generalized Convexity and Generalized Monotonicity, eds., Springer, Series Nonconvex Optimization and its Applications, Springer, New York (2005), pp. 389-420.

[36] J.P. Crouzeix, *Characterizations of Generalized Convexity and Generalized Monotonicity, A survey*, in Generalized Convexity, Generalized Monotonicity: Recent Results, edited by J.P. Crouzeix, J.E. Martinez-Legaz and M. Volle, Nonconvex Optimization and Its Applications, 27, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1998), pp. 237-256.

[37] R.E. Csetnek, *Overcoming the failure of the classical generalized interior-point regularity conditions in convex optimization. Applications of the duality theory to enlargements of maximal monotone operators*, Dissertation, http://archiv.tu-chemnitz.de/pub/2009/0202/data/dissertation.csetnek.pdf.

[38] S. Dafermos, *Exchange price equilibria and variational inequalities,* Math. Programming 46, pp. 391-402 (1990).

[39] A. Daniilidis and P. Georgiev, *Approximate convexity and submonotonicity*, J. Math. Anal. Appl., 291, pp. 292-301 (2004).

[40] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos Santaluca, J. Pelant, V. Zizler, *Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry*, Springer-Verlag, New York (2001).

[41] K. Fan, *A generalization of Tychonoff's fixed point theorem*, Math.Ann., 142, pp. 305-310 (1961).

[42] K. Fan, *Minimax Theorems*, Proc. Nat. Acad. Sci., 39, pp. 42-47 (1953).

[43] R. Ferrentino, *Variational Inequalities and Optimization Problems*, Applied Mathematical Sciences, 1 (47), pp. 2327-2343 (2007).

[44] F. Ferro, *A minimax theorem for vector-valued functions*, Journal of Optimization Theory and Applications, 60, pp. 19-31 (1989).

[45] G. Fichera, *Problemi elastostatici con vincoli unilaterali: il problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno*, Atti Accad. Naz. Lincei Mem. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Sez., 7 (8), pp. 91-140 (1963-64).

[46] S. Fitzpatrick, *Representing monotone operators by convex functions*, in: Workshop/Miniconference on Functional Analysis and Optimization (Canberra, 1988), Proceedings

of the Centre for Mathematical Analysis, 20, Australian National University, Canberra, pp. 59-65 (1988).

[47] D. Gale and H. Nikaido, *The Jacobian matrix and the global univalence of mappings*, Math. Ann., 159, pp. 81-93 (1965).

[48] P. Georgiev, *Submonotone Mappings in Banach Spaces and Applications*, Set-Valued Analysis, 5, pp. 1-35 (1997).

[49] F. Giannessi, A. Maugeri, *Variational Inequalities and Network Equilibrium Problems,* Plenum Press, New York (1995).

[50] A. Goreham, *Sequential Convergence in Topological Spaces,* http://arxiv.org/abs/math/0412 558

[51] J.-P. Gossez, *Opérateurs monotones non lonéaires dans les espaces de Banach non réflexifs*, J. Math. Anal. Appl., 34, pp. 371-395 (1971).

[52] N. Hadjisavas, *Generalized convexity, generalized monotonicity and nonsmooth analysis*, in N. Hadjisavvas, S. Komlósi and S. Schaible, Handbook of generalized convexity and generalized monotonicity, eds., Springer, Series Nonconvex Optimization and its Applications, Springer, New York (2005), pp. 465-499.

[53] N. Hadjisavas, S. Komlósi and S. Schaible, *Handbook of generalized convexity and generalized monotonicity*, eds., Springer, Series Nonconvex Optimization and its Applications, Springer, New York (2005).

[54] N. Hadjisavas, J.E. Martínez-Legaz and J.P. Penot, *Generalized convexity and generalized monotonicity*, Proceedings of the 6th international symposium, Samos, Greece, September 1999, Lecture Notes in Econ. and Math. Systems # 502, Springer, Berlin (2001).

[55] N. Hadjisavas and S. Schaible, *Generalized Monotone Maps*, in N. Hadjisavas, S. Komlósi and S. Schaible, Handbook of Generalized Convexity and Generalized Monotonicity, eds; Springer, Series Nonconvex Optimization and its Applications, Springer, New York (2005), pp. 389-420.

[56] N. Hadjisavas and S. Schaible, *On strong pseudomonotonicity and (semi)strict quasimonotonicity*, J. Optim. Theory Appl., 85 (3), pp. 741-742 (1995).

[57] P. Hartman, G. Stampacchia, *On some nonlinear elliptic differential functional equations,* Acta Math. 115, pp. 271-310 (1966).

[58] A. Hassouni, *Sous-Differentiels des fonctions quasiconvexes*, Thèse de 3ème Cycle, Université Paul Sabatier, Toulouse (1983).

[59] K. Hofman and R. Kunze, *Linear Algebra* (second edition), Prentice Hall (1971).

[60] R.B. Holmes, *Geometric Functional Analysis and its Applications*, Springer-Verlag, Berlin (1975).

[61] V.I. Istrăţescu, *Fixed point theory*, Reidel (1981).

[62] A. Iusem, G. Kassay, W. Sosa, *An existence result for equilibrium problems with some surjectivity consequences*, Journal of Convex Analysis, 16 (3&4), pp. 807-826 (2009).

[63] V. Jeyakumar and D.T. Luc, *Nonsmooth Vector Functions and Continuous Optimization*, Springer Optimization and Its Applications, 10, pp. 207-254 (2008)

[64] V. Jeyakumar, H. Wolkowicz, *Generalizations of Slater's constraint qualification for infinite convex programs*, Mathematical Programming Series B, 57 (1), pp. 85-101 (1992).

[65] A. Jofré, D.T. Luc, M. Théra, $\epsilon-$*Subdifferential and* $\epsilon-$*Monotonicity,* Nonlinear Analysis, 33, pp. 71-90 (1998).

[66] A. Jourani, *Subdifferentiability and Subdifferential monotonicity of* γ *parconvex functions*, Control Cibernet., 25, pp. 721-737 (1996).

[67] S. Karamardian, *Complementarity problems over cones with monotone and pseudomonotone maps*, J. Optim. Theory Appl., 18, pp. 445-454 (1976).

[68] S. Karmardian, S. Schaible, *Seven Kinds of Monotone Maps,* Journal of Optimization Theory and Applications, 66 (1), pp. 37-46 (1990).

[69] S. Karmardian, S. Schaible, and J.P. Crouzeix, *Characterizations of Generalized Monotone Maps*, Journal of Optimization Theory and Applications, 76 (3), pp. 399-413 (1993).

[70] G. Kassay, J. Kolumbán, *Multivalued Parametric Variational Inequalities with* $\alpha-$*Pseudomonotone Maps,* Journal of Optimization Theory and Applications, 107(1), pp. 35-50 (2000).

[71] G. Kassay, C. Pintea, *On preimages of a class of generalized monotone operators*, Nonlinear Analysis Series A: Theory, Methods & Applications, 73 (11), pp. 3537-3545 (2010).

[72] G. Kassay, C. Pintea, **S. László**, *Monotone operators and closed countable sets*, Optimization, doi:10.1080/02331934.2010.505961, (to appear).

[73] G. Kassay, C. Pintea, F. Szenkovits, *On convexity of preimages of monotone operators,* Taiwanese Journal of Mathematics, 13 (2B), pp. 675-686 (2009).

[74] D. Kinderlehrer, G. Stampacchia, *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications,* Academic Press, New York (1980).

[75] M. Kojman, *Convexity ranks in higher dimensions*, Fund. Math., 164, pp. 143-163 (2000).

[76] K. Kuratowski, *Topology*, vol. 1, Academic Press, New York and London (1966).

[77] **S. László**, *Generalized Monotone Operators, Generalized Convex Functions and Closed Countable Sets,* Journal of Convex Analysis, 18 (4) (to appear).

[78] **S. László**, *Some Existence Results of Solutions for General Variational Inequalities*, Journal of Optimization Theory and Applications, 150 (3), pp. 425-443 (2011).

[79] **S. László**, $\theta-$*monotone operators and* $\theta-$*convex functions*, Taiwanese Journal of Mathematics, (accepted).

[80] **S. László**, *Multivalued Variational Inequalities in Banach spaces*, Appl. Math. Lett., (submitted).

[81] **S. László**, *Existence of solutions of inverted variational inequalities*, Carpathian J. Math., (submitted).

[82] **S. László**, *A bivariate inf-convolution formula and the maximal monotonicity of the parallel sum of two maximal monotone operators of Gossez type (D)*, (submitted).

[83] **S. László**, *About the maximal monotonicity of the generalized sum of two maximal monotone operators of Gossez type (D)*, (submitted).

[84] **S. László**, *Some new regularity conditions that ensure the maximal monotonicity of the generalized parallel sum of two maximal monotone operators of Gossez type (D)*, (submitted).

[85] J.E. Martínez-Legaz, M. Théra, *A convex representation of maximal monotone operators*, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 2 (2), pp. 243-247 (2001).

[86] J.E. Martínez-Legaz, B.F. Svaiter, *Monotone operators representable by l.s.c. convex functions*, Set-Valued Analysis, 13 (1), pp. 21-46 (2005).

[87] A. Maugeri, F. Raciti, *On Existence Theorems for Monotone and Nonmonotone Variational Inequalities,* Journal of Convex Analysis, 16, pp. 899-911 (2009).

[88] M. Marques Alves, B.F. Svaiter, *t Bronsted-Rockafellar property and maximality of monotone operators representable by convex functions in non-reflexive Banach spaces*, Journal of Convex Analysis, 15 (4), pp. 693-706 (2008).

[89] M. Marques Alves, B.F. Svaiter, *A new old class of maximal monotone operators*, Journal of Convex Analysis, 16 (3-4), pp. 881-890 (2009).

[90] M. Marques Alves, B.F. Svaiter, *On Gossez type (D) maximal monotone operators*, Journal of Convex Analysis, 17 (3-4), pp. 1077-1088 (2010).

[91] G.J. Minty, *Monotone (nonlinear) operators in Hilbert spaces*, Duke Math. J., 29, pp. 341-346 (1962).

[92] G.J. Minty, *On some aspects of theory of monotone operators*, in Theory and Applications of Monotone Operators, Odersi, Gubbio, pp. 67-82 (1969).

[93] A. Moudafi, *On the Stability of the Parallel Sum of Maximal Monotone Operators*, J. Of Math. Anal. And App., 199, pp. 478-488 (1996).

[94] B.S. Mordukhovich, *Variational Analysis and Generalized Differentiations. I. Basic Theory, II. Applications,* Springer, Series Fundamental Principles of Mathematical Sciences, 330-331, pp. 601-632 (2006).

[95] J.J. Moreau, *Fonctionnelles convexes*, Seminaire sur les Équation aux Dérivées Partielles, Collége de France, Paris (1967).

[96] D.T. Luc, H.V. Ngai, M. Théra, *On $\epsilon-$convexity and $\epsilon-$monotonicity, in: Calculus of Variations and DifferentialE quations,* A. Ioffe, S. Reich, and I. Shafrir (Eds), Research Notes in Mathematics Series, Chapman & Hall, pp. 82-100 (1999).

[97] H.V. Ngai, J.P. Penot, *In Asplund spaces, approximately convex functions and regular functions are generically differentiable,* Taiwanese J. Math., 12 (6), pp. 1477-1492 (2008).

[98] J.W. Nieuwenhuis, *Some Minimax Theorems in Vector-Valued Functions*, Journal of Optimization Theory and Applications, 40, pp. 463-475 (1983).

[99] M.A. Noor,*General variational inequalities, Appl. Math. Letters*, 1, pp. 119-121 (1988).

[100] M.A. Noor, *Projection type methods for general variational inequalities*, Soochow Journal of Mathematics, 28 (2), pp. 171-178 (2002).

[101] M.A. Noor, *Merit functions for general variational inequalities*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 316, pp. 736-752 (2006).

[102] M.A. Noor, *Generalized Set-Valued Variational Inequalities*, Le Matematiche (Catania), 52, pp. 3-24 (1997).

[103] R.G. Otero, A. Iusem, *Regularity results for semimonotone operators,* http://www.preprint.impa.br/ Shadows/SERIE$_A$/2010/672.html.

[104] J.B. Passty, *The parallel sum of nonlinear monotone operators*, Nonlinear Anal. Theory Methods Appl., 10, pp. 215-227 (1986).

[105] J.P.Penot, *Glimpses upon quasiconvex analysis*, ESAIM: Proceedings, 20, pp. 170-194 (2007).

[106] J.P. Penot, *Is convexity useful for the study of monotonicity?*, in: R.P. Agarwal, D. O'Regan (eds.), Nonlinear Analysis and Application, Kluwer, Dordrecht, 1- 2, pp. 807-822 (2003).

[107] J.P. Penot, *A representation of maximal monotone operators by closed convex functions and its impact on calculus rules*, Comptes Rendus Mathématique. Académie des Sciences Paris, 338 (11), pp. 853-858 (2004).

[108] J.P. Penot, *The relevance of convex analysis for the study of monotonicity*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 58 (7-8), pp. 855-871 (2004).

[109] J.P. Penot, C. Zălinescu, *Convex analysis can be helpful for the asymptotic analysis of monotone operators*, Math. Program., Ser. B, 116, pp. 481-498 (2009).

[110] J.P. Penot, C. Zălinescu, *Some problems about the representation of monotone operators by convex functions*, ANZIAM J., 47, pp. 1-20 (2005).

[111] R. John, *Uses of Generalized Convexity and Generalized Monotonicity in Economics,* in Handbook of Generalized Convexity and Generalized Monotonicity, N. Hadjisavas, S. Komlósi and S. Schaible, eds; Springer, Series Nonconvex Optimization and Its Applications, USA (2005), pp. 619-666.

[112] H. Riahi, *About the inverse operations on the hyperspace of nonlinear monotone operators*, Extracta Matematicae, 8 (1), pp. 68-74 (1993).

[113] R.T. Rockafellar, *Conjugate duality and optimization*, Conference Board of the Mathematical Sciences Regional Conference Series in Applied Mathematics, 16, Society for Industrial and Aplied Mathematics, Philadelphia (1974).

[114] R.T. Rockafellar, *On the maximality of sums of nonlinear monotone operators,* Trans. Amer. Math. Soc., 149, pp. 75-88 (1970).

[115] R.T. Rockafellar, *On the maximal monotonicity of subdifferential mappings,* Pacific Journal of Mathematics, 33 (1), pp. 209-216 (1970).

[116] S. Rolewicz, *On* $\alpha(\cdot)$*-monotone multifunctions and differentiability of* γ*-paraconvex functions*, Studia Math., 133, pp. 29-37 (1999).

[117] S. Rolewicz, $\Phi-$*convex functions defined on metric spaces*, Journal of Mathematical Sciences, 115 (5), pp. 2631-2652 (2003).

[118] R. E. Showalter, *Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations*, American Mathematical Society (1997).

[119] S. Simons, *From Hahn-Banach to Monotonicity*, Springer-Verlag, Berlin (2008).

[120] S. Simons, *Minimax and Monotonicity*, Springer-Verlag, Berlin (1998).

[121] S. Simons, *The range os a monotone operator*, J. Math. anal. Appl., 199, pp. 176-201 (1996).

[122] S. Simons, *Quadrivariate existence theorems and strong representability*, arXiv:0809.0325v2 [math.FA](2011).

[123] S. Simons, C. Zălinescu, *Fenchel duality, Fitzpatrick functions and maximal monotonicity*, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 6 (1), pp. 1-22 (2005).

[124] G. Stampacchia, *Formes bilineaires coercitives sur les ensembles convexes*, C.R. Acud. Sci. Paris Sér I. Math., 258, pp. 4413-4416 (1964).

[125] R.U. Verma, *A-monotonicity and its role in nonlinear variational inclusions,* Journal of Optimization Theory and Applications, 129 (3), pp. 457-467 (2006).

[126] M.D. Voisei, *The sum and chain rules for maximal monotone operators*, Set-Valued Anal, 16, pp. 461-476, (2008).

[127] M.D. Voisei, *Calculus rules for maximal monotone operators in general Banach spaces*, Journal of Convex Analysis, 15 (1), pp. 73-85 (2008).

[128] M.D. Voisei, C. Zălinescu, *Linear monotone subspaces of locally convex spaces*, Set-Valued and Variational Analysis, 18 (1), pp. 29-55 (2010).

[129] M.D. Voisei, C. Zălinescu, *Strongly-representable monotone operators*, Journal of Convex Analysis, 16 (3-4), pp. 1011-1033 (2009).

[130] M.D. Voisei, C. Zălinescu, *Maximal monotonicity criteria for the composition and the sum under minimal interiority conditions*, Math. Program. Ser. B, 123, pp. 265-283 (2010).

[131] J.C. Yao, *General variational inequalities in Banach spaces,* Appl. Math. Letters, 5, pp. 51-54 (1992).

[132] L. Yao, *An affirmative answer to a problem posed by Zălinescu*, Journal of Convex Analysis, 18 (3), pp. 621-626 (2011).

[133] C. Zălinescu, *Convex Analysis in General Vector Spaces*, World Scientific, Singapore (2002).

[134] C. Zălinescu, *Solvability results for sublinear functions and operators*, Zeitschrift für Operations Research Series A-B, 31 (3), pp. A79-A101 (1987).

[135] C. Zălinescu, *A comparison of constraint qualifications in infinite-dimensional convex programming revisited*, J. Austral. Math. Soc. Ser. B, 40, pp. 353-378 (1999).

[136] C. Zălinescu, *A new proof of the maximal monotonicity of the sum using the Fitzpatrick function*, in: F. Giannessi, A. Maugeri (eds.), Variational Analysis and Applications, Nonconvex Optimization and its Applications, 79, Springer, New York, pp. 1159-1172 (2005).