Universitatea "Babeş-Bolyai" Cluj-Napoca
Departamentul de Matematică
şi
Universitatea din Sevilia
Departamentul de Analiză Matematică

Teoria punctului fix în spaţii metrice reflexive

Rezumatul tezei de doctorat

Adriana-Maria Nicolae

Conducători ştiinţifici:

Prof. Dr. Adrian Petruşel   Prof. Dr. Rafael Espínola García

Cluj-Napoca, 2011

Cuprins

Cuvinte cheie: punct fix, operator neexpansiv generalizat, contracţie generalizată, operatori care comută, reflexivitate, spaţiu metric, spaţiu geodezic, spaţiu Banach, inegalitatea Ptolemeu, cea mai bună aproximare, problemă de minimizare, problemă de maximizare, proprietatea problemelor de a fi bine puse, Teorema Picăturii

Introducere

Teoria punctului fix este un domeniu al matematicii care a înregistrat o dezvoltare prosperă în ultimii cincizeci de ani. Această teorie a fost extinsă în diverse direcţii, instrumente clasice au fost generalizate, noţiuni şi rezultate noi au fost introduse şi în mod constant îmbunătăţite. Teoremele de punct fix au aplicaţii în multe ramuri ale matematicii precum analiză, geometrie sau sisteme dinamice. În plus, ele constituie instrumente importante folosite în domenii care aparent nu au o legătură imediată cu matematica. Multe probleme de echilibru şi stabilitate pot fi modelate folosind puncte fixe. Astfel de exemple se regăsesc în economie, teoria jocurilor, teoria compilării şi multe altele.

Teoria metrică a punctului fix a luat naştere cu Principiul Contracţiei Banach-Caccioppoli care a fost publicat iniţial în 1922. Acest rezultat afirmă că orice contracţie definită pe un spaţiu metric complet are un punct fix unic şi orice şir de iterate Picard converge la unicul punct fix. De asemenea, se stabileşte viteza de convergenţa a iteratelor Picard către unicul punct fix. De atunci, acest principiu a fost îmbunătăţit permanent şi extins în multe direcţii.

O nouă etapă în dezvoltarea teoriei metrice a punctului fix a fost atinsă prin publicarea unui rezultat de punct fix pentru operatori neexpansivi. Acest rezultat se datorează lui Kirk [42] şi afirmă că într-un spaţiu Banach orice operator neexpansiv definit pe o mulţime nevidă, slab compactă, convexă şi cu structură normală are un punct fix. Această teoremă este de obicei cunoscută într-o formă particulară ca şi Teorema Browder-Göhde-Kirk deoarece Browder [6, 7] şi Göhde [30] au demonstrat şi ei independent rezultatul în spaţii Hilbert şi spaţii Banach uniform convexe. Aceste rezultate au atras atenţia unui număr mare de cercetători care au început să studieze mai în detaliu interacţiunea dintre proprietăţile geometrice ale spaţiului de lucru şi existenţa punctelor fixe precum şi convergenţa iteratelor pentru diverse scheme iterative sau condiţii de tip contracţie.

În mod nesurprinzător, în contextul general al spaţiilor metrice operatorii neexpansivi nu trebuie să aibă puncte fixe. O teoremă de punct fix pentru operatori neexpansivi a fost demonstrată de către Kirk [43] în cadrul spaţiilor metrice mărginite pentru care există o structură de convexitate care e numărabil compactă şi normală.

Spaţiile metrice sunt instrumente importante folosite în modelarea problemelor din viaţa de zi cu zi. Desigur, structura unui spaţiu metric este uneori mult prea generală pentru a aplica teorii existente utilizate în studiul unor astfel de procese. Pentru a asigura o anumită regularitate au fost considerate restricţii specifice asupra spaţiului metric. Unele dintre aceste proprietăţi conferă suficientă informaţie pentru a permite dezvoltarea şi extinderea unor teorii matematice care joacă un rol esenţial în rezolvarea unor astfel de probleme. Existenţa curbelor ce conservă distanţa între oricare două puncte ale spaţiului este una dintre cele mai importante proprietăţi care pot fi impuse într-un spaţiu metric deoarece înzestrează spaţiul cu o structură care se aseamănă întrun fel cu structura liniară a unui spaţiu normat. Astfel de spaţii se numesc spaţii metrice geodezice. Mai precis, având un spaţiu metric (X, d), un drum geodezic de la $x \in X$ la $y \in X$ este un operator care conservă distanţa $c : [0, l] \subseteq \mathbb{R} \to X$ astfel încât $c(0) = x$

şi $c(l) = y$. Imaginea $c([0, l])$ a lui c formează un segment geodezic (nu neapărat unic) care uneşte pe x şi y. Un spaţiu metric este geodezic dacă fiecare două puncte ale sale pot fi unite printr-un drum geodezic. O tratare detaliată a spaţiilor metrice geodezice poate fi găsită, de exemplu, în [5, 8, 64].

În această lucrare ne concentrăm asupra spaţiilor geodezice cu proprietăţi adiţionale care ne permit să studiem probleme de punct fix şi probleme de minimizare respectiv maximizare între două mulţimi. O proprietate importantă care are un impact semnificativ asupra studiului unor astfel de probleme este reflexivitatea unui spaţiu metric. Având un spaţiu metric pentru care este definit un anumit tip de convexitate, spunem că spaţiul este reflexiv dacă intersecţia oricărui şir descendent de submulţimi nevide, mărginite, închise şi convexe este nevidă. Un exemplu simplu de spaţiu metric reflexiv este un spaţiu Banach reflexiv, unde convexitatea este cea uzuală.

În cadrul spaţiilor metrice geodezice, o mulţime este convexă dacă include orice segment geodezic care uneşte fiecare două puncte aparţinând mulţimii. O clasă importantă de spaţii metrice geodezice e cea a spaţiilor de curbură mărginită introdusă de Alexandrov [2]. Mai târziu, Gromov [33] a contribuit la o mai bună înţelegere a acestor spaţii şi le-a numit spaţii CAT(κ) după Cartan, Alexandrov şi Topogonov, fiecare dintre aceştia considerând condiţii similare asupra spaţiilor. Contribuţia lui Gromov a condus la o dezvoltare semnificativă în fizica teoretică atrăgând interesul cercetătorilor. Ideea de bază din spatele conceptului spaţiilor CAT(κ) este faptul că triunghiurile geodezice sunt într-un fel "înguste". Spaţiile CAT(0) complete sunt reflexive, iar pentru $\kappa > 0$, spaţiile CAT(κ) complete sunt într-un fel reflexive. Printre alte exemple de spaţii reflexive se regăsesc spaţiile metrice hiperconvexe sau cele uniform convexe cu un modul de convexitate care este monoton sau semi-continuu inferior la dreapta. Introducem aici o altă clasă de spaţii metrice reflexive, anume spaţiile geodezice Ptolemeu complete care admit un operator de punct mijlociu uniform continuu. Mai multe detalii despre aceste spaţii pot fi găsite în capitolele următoare.

Mai recent, teoria metrică a punctului fix pentru operatori neexpansivi a început să fie studiată în spaţii metrice reflexive. Baillon a arătat în [4] că orice operator neexpansiv definit pe un spaţiu hiperconvex mărginit are puncte fixe. Kirk a adaptat în [45, 46] Teorema Browder-Göhde-Kirk în spaţii de curbură mărginită superior. Anume, a fost demonstrat că orice operator neexpansiv are un punct fix când este definit pe o submulţime a unui spaţiu CAT(κ) complet care este nevidă, mărginită, închisă, convexă şi de diametru mărginit superior de $\pi/(2\sqrt{\kappa})$ pentru $\kappa > 0$. Un rezultat similar Teoremei Browder-Göhde-Kirk în cadrul spaţiilor metrice uniform convexe a fost dat în [15]. Mai precis, s-a arătat că orice operator neexpansiv definit pe o submulţime nevidă, mărginită, închisă şi convexă a unui spaţiu geodezic uniform convex complet având un modul de convexitate care este monoton sau semi-continuu inferior la dreapta are un punct fix. Demonstrăm aici că acelaşi rezultat are loc în spaţii geodezice Ptolemeu complete care admit un operator de punct mijlociu uniform continuu.

Scopul acestei teze este de a demonstra în cadrul spaţiilor metrice reflexive rezultate de punct fix şi convergenţă pentru clase de operatori univoci şi multivoci de tip contractiv sau neexpansiv. Investigăm regularitatea spaţiilor geodezice Ptolemeu şi descriem câteva proprietăţi geometrice ale acestora care constituie elemente cheie pentru demonstrarea teoremelor de punct fix în astfel de contexte. De asemenea, studiem probleme de minimizare şi maximizare între două mulţimi în diferite spaţii geodezice şi includem rezultate generice asupra proprietăţii acestor probleme de a fi bine puse. Această lucrare este împărţită în cinci capitole care sunt organizate în felul următor. Mai multe detalii despre rezultatele demonstrate aici pot fi găsite la începutul fiecarui capitol.

Capitolul 1 conţine noţiuni şi rezultate preliminare care sunt folosite pe parcursul acestei lucrări.

În Capitolul 2 folosim condiţia (C) introdusă în [74] care este o condiţie de neexpansivitate generalizată pentru a demonstra rezultate de punct fix şi convergenţă în diferite spaţii metrice reflexive. Pentru cazul multivoc presupunem condiţia (C) ca în [66]. Includem, de asemenea, extensii ale condiţiei (C) şi aplicăm rezultatele obţinute pentru a demonstra teoreme de existenţă a punctelor fixe comune pentru operatori care comută.

În Capitolul 3 studiem probleme de punct fix precum şi proprietatea acestor probleme de a fi bine puse şi demonstrăm principii demi-închise pentru operatori ce satisfac ipoteze mai slabe decât condiţiile de contracţie sau neexpansivitate folosind orbite. Ne concentrăm asupra contracţiilor generalizate în sensul lui Walter [77] şi asupra diferitor tipuri de operatori care extind contracţii punctuale, asimptotice, asimptotic punctuale precum şi operatori neexpansivi şi asimptotic punctual neexpansivi. În cazul multivoc extindem operatorii uniform Lipschitz şi asimptotic neexpansivi.

Capitolul 4 reaminteşte inegalitatea Ptolemeu şi studiază regularitatea spaţiilor geodezice Ptolemeu ca şi relaţia acestora cu spaţiile CAT(0). Arătăm că dacă aceste spaţii sunt complete şi satisfac o anumită condiţie de tip convexitate, atunci ele sunt reflexive. De asemenea, demonstrăm alte proprietăţi importante care ne permit să deducem o serie de rezultate de punct fix. Studiem şi alte variante ale inegalităţii Ptolemeu care au loc în spaţii CAT(κ).

Capitolul 5 studiază probleme de minimizare şi maximizare a distanţei dintre două mulţimi punând accentul pe proprietatea acestor probleme de a fi bine puse. Considerăm condiţii diferite pentru cele două mulţimi în contextul spaţiilor geodezice. Dăm o versiune a Teoremei Picăturii în spaţii geodezice Busemann convexe şi o aplicăm pentru a obţine un rezultat de optimizare pentru funcţionale convexe.

Majoritatea rezultatelor originale demonstrate în această lucrare sunt incluse în următoarele publicaţii:

- R. Espínola, P. Lorenzo, A. Nicolae, Fixed points, selections and common fixed points for nonexpansive-type mappings, J. Math. Anal. Appl., 382 (2011), 503-515.

- R. Espínola, A. Nicolae, Geodesic Ptolemy spaces and fixed points, Nonlinear Anal., 74 (2011), 27-34.

- R. Espínola, A. Nicolae, Mutually nearest and farthest points of sets and the Drop Theorem in geodesic spaces, Monatsh. Math., doi 10.1007/s00605-010-0266-0 (în curs de publicare).

- A. Nicolae, On some generalized contraction type mappings, Appl. Math. Lett., 23 (2010), 133-136.

- A. Nicolae, Generalized asymptotic pointwise contractions and nonexpansive mappings involving orbits, Fixed Point Theory Appl., 2010 (2010), Article ID 458265, 19 pages.

- A. Nicolae, Fixed point theorems for multi-valued mappings of Feng-Liu type, Fixed Point Theory, 12 (2011), 145-154.

- A. Nicolae, Fixed points of uniformly Lipschitz type and asymptotically nonexpansive multivalued mappings (trimisă spre publicare).

- A. Nicolae, D. O'Regan, A. Petruşel, Fixed point theorems for single and multi-valued generalized contractions in metric spaces endowed with a graph, Georgian Math. J., 18 (2011), 307-327.

Capitolul 1

Preliminarii

În Capitolul 1 amintim noţiuni şi rezultate preliminare care vor fi necesare ulterior. Fiecare din secţiunile acestui capitol introduce un cadru relevant în care lucrăm punând accentul pe aspectele geometrice ale acestor spaţii care joacă un rol important în teoria metrică a punctului fix. Unele dintre aceste secţiuni conţin de asemenea rezultate de punct fix care au loc în cadrul descris şi sunt semnificative pentru această lucrare.

1.1 Spaţii metrice

Secţiunea 1.1 prezintă noţiunea de spaţiu metric precum şi definiţii de bază, notaţii şi proprietăţi în legătură cu aceste spaţii. Definiţiile introduse aici se pot adapta în cadrul spaţiilor normate renunţând la metrică în favoarea unei norme. Definim spaţiile metrice reflexive care constituie cadrul general principal în care lucrăm în această teză. În acelaşi timp includem rezultate binecunoscute de punct fix pentru cazul univoc şi multivoc care au loc în contextul general al spaţiilor metrice. Majoritatea noţiunilor şi rezultatelor amintite aici pof fi găsite, de exemplu, în [29, 32, 34, 39, 51, 69].

1.2 Spaţii Banach

Deşi această lucrare se centrează în principal asupra cadrului metric, introducem în Secţiunea 1.2 concepte de bază privind geometria spaţiilor Banach care vor fi utilizate ulterior. Reamintim, de asemenea, rezultate clasice de punct fix pentru operatori neexpansivi în spaţii Banach. Pentru o discuţie mai detaliată despre proprietăţilor spaţiilor Banach care sunt semnificative în teoria punctului fix, a se vedea [29, 51].

1.3 Spaţii geodezice

În Secţiunea 1.3 definim spaţiile de lungime şi cele geodezice, mulţimi convexe şi diferite concepte de convexitate în spaţii geodezice. Introducem noţiunile de triunghi şi unghi de comparaţie în planul euclidian şi definim unghiul Alexandrov între două drumuri geodezice. O tratare detaliată a spaţiilor de lungime şi celor geodezice poate fi găsită, de exemplu, în [5, 8, 64].

1.4 Spaţiile model M_κ^n

Secţiunea 1.4 introduce spaţii geodezice binecunoscute punând accentul pe spaţiul sferic, hiperbolic şi spaţiul model M_κ^2. Definim triunghiul şi unghiul de κ-comparaţie în M_κ^2 şi enunţăm Lema lui Alexandrov ce reprezintă o proprietate geometrică importantă a spaţiului M_κ^2. Mai multe despre spaţii sferice, hiperbolice şi teme conexe pot fi găsite în [5, 33].

1.4.1 Sfera n-dimensională

1.4.2 Spaţiul hiperbolic n-dimensional

1.4.3 Spaţiile model M_κ^2

1.5 Spaţii CAT(κ)

Secţiunea 1.5 conţine noţiunea de spaţiu CAT(κ) şi caracterizări ale acestor spaţii. Definim spaţiile de curbură mărginită superior şi inferior şi punem în evidenţă proprietăţi ale spaţiilor CAT(0), CAT(1) şi ale $\mathbb{R}$-arborilor incluzând rezultate de punct fix importante. Mai multe detalii despre spaţii CAT(κ) pot fi găsite în [5, 8, 45, 46].

1.5.1 Spaţii CAT(0)

1.5.2 Spaţii CAT(1)

1.5.3 $\mathbb{R}$-arbori

1.6 Spaţii hiperconvexe

Secţiunea 1.6 defineşte noţiunea de hiperconvexitate punând în evidenţă exemple şi alte noţiuni în legătură cu acest concept precum convexitatea metrică, proprietatea intersecţiei binare sau hiperconvexitatea externă şi slab externă. Caracterizăm hiperconvexitatea în termenii existenţei retracţiilor neexpansive şi reamintim rezultate de punct fix şi de selecţie. Pentru o discuţie mai detaliată despre teoria punctului fix în spaţii hiperconvexe, a se vedea, de exemplu, [4, 40, 51, 72].

1.7 Spaţii metrice uniform convexe

În Secţiunea 1.7 definim spaţiile geodezice uniform convexe şi modulul de convexitate uniformă pentru un spaţiu geodezic. Analizăm modulul de convexitate în spaţiile CAT(0) şi CAT(1) şi enunţăm rezultate de punct fix în spaţii uniform convexe ce admit un modul de convexitate care este monoton sau semi-continuu inferior la dreapta (numite aici spaţii UC). Mai multe detalii despre spaţii metrice uniform convexe pot fi găsite în [15, 53].

Capitolul 2

O clasă de operatori de tip neexpansiv în spaţii geodezice, hiperconvexe şi Banach

Scopul acestui capitol este de a prezenta rezultate de punct fix şi convergenţă în spaţii metrice reflexive pentru clase de operatori ce satisfac o condiţie generalizată de tip neexpansiv introdusă recent în [74]. De asemenea, studiem extensii ale acestei condiţii atât pentru cazul univoc cât şi pentru cel multivoc. Majoritatea rezultatelor din acest capitol fac parte din [18].

În Secţiunea 2.1 reamintim condiţia (C) care este o extensie a conceptului de neexpansivitate pentru operatori univoci. Această condiţie a fost introdusă de către Suzuki în [74]. Prezentăm proprietăţi de bază şi rezultate de punct fix şi convergenţă pentru această clasă de operatori în spaţii Banach, spaţii metrice uniform convexe şi hiperconvexe precum şi în $\mathbb{R}$-arbori. Această secţiune este împărţită în patru subsecţiuni. Prima se concentrează asupra unor generalizări ale condiţiei (C) considerate de García-Falset, Llorens-Fuster şi Suzuki în [24]. În cea de-a doua subsecţiune adaptăm rezultate date anterior în spaţii Banach sau CAT(0) (a se vedea [66, 74]) în contextul spaţiilor metrice uniform convexe (Lema 2.1.1, Teoremele 2.1.3, 2.1.4). Alte contribuţii sunt incluse în următoarea subsecţiune unde studiem întrebarea dacă operatori ce satisfac condiţia (C) au puncte fixe atunci când sunt definiţi pe spaţii hiperconvexe mărginite. În cazul compact furnizăm un răspuns afirmativ (Teorema 2.1.5). Pentru cazul general avem nevoie să introducem o nouă condiţie asupra operatorilor consideraţi (Definiţia 2.1.5). În particular, demonstrăm că un operator 2-Lipschitz care satisface condiţia (C) definit pe un spaţiu hiperconvex mărginit are un punct fix (Teorema 2.1.6, Corolarul 2.1.3). Acest rezultat este semnificativ în rândul clasei de rezultate cunoscute pentru operatori având condiţia (C) deoarece este primul unde nu se presupune compactitatea şi nu sunt necesare unicitatea centrului asimptotic sau condiţii asociate proprietăţii Opial. În ultima subsecţiune studiem operatori ce satisfac condiţia (C) în $\mathbb{R}$-arbori compleţi care sunt geodezic mărginiţi. Demonstrăm că un operator având condiţia (C) definit pe un $\mathbb{R}$-arbore complet şi geodezic mărginit are un punct fix.

Secţiunea 2.2 conţine rezultatele principale ale acestui capitol. Studiem condiţia (C) pentru operatori multivoci în contextul spaţiilor metrice geodezice (acordând atenţie deosebită $\mathbb{R}$-arborilor) şi al spaţiilor Banach. Folosim varianta multivocă a condiţiei (C) definită în [66] unde au fost obţinute diferite rezultate pe această direcţie în spaţii CAT(0). Contribuţiile noastre sunt structurate în două subsecţiuni. Prima se concentrează asupra spaţiilor geodezice unde demonstrăm o proprietate tehnică (Lema 2.2.1) care este de fapt o versiune multivocă a elementului cheie pe care se bazează demonstraţiile rezultatelor principale din [24, 74]. Rezultatele noastre (Propoziţia 2.2.1, Teoremele 2.2.1, 2.2.2) sunt mai întâi obţinute pentru spaţii geodezice uniform convexe complete pentru care metrica este convexă, iar apoi sunt particularizate pentru structuri mai precise. Deoarece spaţiile CAT(0) sunt o clasă specială a spaţiilor geodezice uniform convexe pentru care metrica este convexă, obţinem rezultate mai generale decât cele din [66]. Introducem în continuare condiţia (C') care este o nouă condiţie pentru operatori multivoci similară condiţiei (C) (Definiţia 2.2.3). Furnizăm exemple care arată că această condiţie este într-adevăr mai slabă decât condiţia (C) (Propoziţia 2.2.2) şi demonstrăm o teoremă de selecţie în $\mathbb{R}$-arbori pentru operatori ce satisfac această condiţie nou introdusă (Teorema 2.2.4), de unde deducem un rezultat mai tare de punct fix pentru operatori multivoci (Corolarul 2.2.1). Această teoremă de selecţie se aseamănă unui rezultat important (a se vedea [40, 72]) în spaţii hiperconvexe (un $\mathbb{R}$-arbore complet este hiperconvex, a se vedea [44]), dar abordarea demonstraţiei noastre este complet diferită bazându-se pe proprietăţi specifice $\mathbb{R}$-arborilor şi nu pe hiperconvexitate. Încheiem această subsecţiune cu o generalizare a condiţiei (C') pentru operatori multivoci (Definiţia 2.2.4) şi un rezultat de selecţie în contextul $\mathbb{R}$-arborilor pentru operatori care satisfac această condiţie (Teorema 2.2.5). În cea de-a doua subsecţiune revizuim teoria clasică a operatorilor neexpansivi în spaţii Banach pentru a o studia sub condiţia (C). Arătăm existenţa punctelor fixe pentru astfel de operatori în spaţii Banach cu proprietatea Opial (Teorema 2.2.6). Metoda centrelor asimptotice ne permite să stabilim acelaşi rezultat în spaţii Banach uniform convexe în fiecare direcţie (Teorema 2.2.7). În plus, dacă presupunem şi continuitatea operatorului putem demonstra existenţa punctelor fixe în spaţii Banach pentru care centrul asimptotic al oricărui şir mărginit în raport cu o submulţime mărginită, închisă şi convexă este o mulţime nevidă şi compactă, adică o versiune a Teoremei Kirk-Massa (Teorema 2.2.8). Încheiem această subsecţiune cu altă extensie a condiţiei (C) în cazul multivoc.

În Secţiunea 2.3 aplicăm unele din teoremele de punct fix demonstrate în secţiunile anterioare pentru a obţine rezultate asupra existenţei punctelor fixe comune pentru operatori care comută. Mai precis, ne concentrăm asupra comutativităţii între operatori univoci şi multivoci. Extindem un rezultat din [66] în cadrul spaţiilor geodezice uniform convexe pentru care metrica este convexă (Teorema 2.3.1). De asemenea, demonstrăm un rezultat similar în $\mathbb{R}$-arbori (Teorema 2.3.2).

2.1 Puncte fixe pentru operatori univoci

În această secţiune introducem o condiţie mai generală decât neexpansivitatea şi dăm rezultate de convergenţa şi de punct fix pentru această clasă de operatori în spaţii Banach, UC complete, hiperconvexe şi $\mathbb{R}$-arbori.

Suzuki a extins în [74] conceptul de operator univoc neexpansiv în felul următor.

Definiţia 2.1.1 (Suzuki [74]). *Fie X un spaţiu Banach şi $K \in \mathcal{P}(X)$. Spunem că un operator $T : K \to X$ satisface condiţia (C) dacă pentru fiecare $x, y \in K$,*

$$\frac{1}{2}\|x - T(x)\| \leq \|x - y\| \quad \Longrightarrow \quad \|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\|.$$

Suzuki [74] a demonstrat următoarea teoremă de convergenţă pentru operatori ce satisfac condiţia (C).

Teorema 2.1.1 (Suzuki [74]). *Fie X un spaţiu Banach şi $K \in \mathcal{P}_{cp,cv}(X)$. Presupunem că operatorul $T : K \to K$ satisface condiţia (C). Fie $\alpha \in [1/2, 1)$. Definim şirul $(x_n) \subseteq K$ considerând $x_1 \in K$, iar pentru $n \in \mathbb{N}$,*

$$x_{n+1} = (1-\alpha)x_n + \alpha T(x_n).$$

Atunci (x_n) converge către un punct fix al lui T.

Suzuki [74] a dat şi o variantă a Teoremei Browder-Göhde-Kirk pentru operatori având condiţia (C).

Teorema 2.1.2 (Suzuki [74]). *Fie X un spaţiu Banach UCED şi $K \in \mathcal{P}_{cv}(X)$ slab compactă. Presupunem că $T : K \to K$ satisface condiţia (C). Atunci* $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$.

2.1.1 Generalizări ale condiţiei (C) în spaţii Banach

Motivaţi de rezultatele din [74], García-Falset, Llorens-Fuster şi Suzuki au considerat în [24] două generalizări ale condiţiei (C) incluzând exemple şi stabilind rezultate de punct fix. Prima condiţie studiată este următoarea.

Definiţia 2.1.2 (García-Falset, Llorens-Fuster, Suzuki [24]). *Fie X un spaţiu Banach, $K \in \mathcal{P}(X)$, $T : K \to X$ şi $\mu \geq 1$. Operatorul T satisface condiţia (E_μ) dacă pentru orice $x, y \in K$,*

$$\|x - T(y)\| \leq \mu \|T(x) - x\| + \|x - y\|.$$

Spunem că T satisface *condiţia* (E) dacă satisface (E_μ) pentru un $\mu \geq 1$. Condiţia (C) implică (E_3), dar implicaţia inversă nu are loc.

O altă extensie naturală a condiţiei (C) studiată în [24] este dată în continuare.

Definiţia 2.1.3 (García-Falset, Llorens-Fuster, Suzuki [24]). *Fie X un spaţiu Banach, $K \in \mathcal{P}(X)$, $T : K \to X$ şi $\lambda \in (0, 1)$. Operatorul T satisface condiţia (C_λ) dacă pentru orice $x, y \in K$,*

$$\lambda\|x - T(x)\| \leq \|x - y\| \quad \Longrightarrow \quad \|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\|.$$

Mai multe detalii despre condiţiile (E) şi (C_λ), precum şi rezultate de punct fix pentru operatori ce satisfac astfel de condiţii pot fi găsite în [24].

2.1.2 Condiţia (C) în spaţii UC

În restul acestei secţiuni ne concentrăm asupra condiţiei (C) în cadrul metric. Începem prin a formula un alt caz special al Propoziţiei 2 din [28] în contextul spaţiilor metrice geodezice pentru care metrica este convexă.

Lema 2.1.1 (Goebel, Kirk [28]). *Fie X un spaţiu metric geodezic pentru care metrica este convexă, $\alpha \in (0, 1)$ şi (x_n),(y_n) şiruri mărginite în X astfel încât pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$,*

$$x_{n+1} = (1-\alpha)x_n + \alpha y_n \quad \text{şi} \quad d(y_{n+1}, y_n) \leq d(x_{n+1}, x_n).$$

Atunci $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$.

Teorema 2.1.3. *Fie X un spaţiu unic geodezic şi $K \in \mathcal{P}_{cl,cv}(X)$. Presupunem că $T : K \to K$ satisface condiţia (C) şi* $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$. *Atunci* $\mathrm{Fix}(T)$ *este închisă şi mărginită.*

Teorema 2.1.4. *Fie X un spaţiu UC complet pentru care metrica este convexă şi $K \in \mathcal{P}_{b,cl,cv}(X)$. Dacă $T : K \to K$ satisface condiţia (C) atunci* $\mathrm{Fix}(T)$ *este nevidă, închisă şi convexă.*

2.1.3 Condiţia (C) în spaţii hiperconvexe

Spaţiile hiperconvexe constituie o clasă specifică şi interesantă de spaţii metrice cu o largă literatură axată pe rezultate de punct fix pentru operatori neexpansivi (a se vedea Capitolul 13 din [51] sau [40, 72] şi referinţele menţionate). Este binecunoscut faptul că operatorii neexpansivi definiţi pe spaţii hiperconvexe nevide şi mărginite au puncte fixe. De aceea, este natural să punem întrebarea dacă şi operatorii ce satisfac condiţia (C) au puncte fixe atunci când sunt definiţi pe spaţii hiperconvexe mărginite. Scopul acestei subsecţiuni este de a studia această problemă. Oferim aici răspunsuri parţial pozitive la această întrebare.

Deşi un operator având condiţia (C) nu este în mod necesar continuu, s-a arătat în Teorema 2.1.1 că dacă T este un operator care satisface condiţia (C) şi este definit pe o submulţime nevidă, compactă şi convexă a unui spaţiu Banach, atunci T are un punct fix. Pentru a obţine acelaşi rezultat în spaţii hiperconvexe, mai întâi trebuie să dăm o semnificaţie combinaţiilor convexe a două puncte în astfel de spaţii.

Fie H un spaţiu hiperconvex. Spaţiul H se scufundă izometric în $\ell^\infty(H)$ şi există o retracţie neexpansivă R de la $\ell^\infty(H)$ la H (a se vedea Capitolul 13 din [51] pentru detalii).

Definiţia 2.1.4. *Fie H un spaţiu metric hiperconvex şi R ca mai sus. Atunci, pentru $x, y \in H$ şi $\alpha \in [0,1]$, definim*

$$(1-\alpha)x \oplus \alpha y = R((1-\alpha)x + \alpha y),$$

unde $(1-\alpha)x + \alpha y$ simbolizează combinaţia convexă uzuală în $\ell^\infty(H)$.

Observăm că această definiţie furnizează o structură de segmente care asigură convexitatea metricii aşa cum se cere în Lema 2.1.1. În consecinţă, adaptarea acestei leme în noul cadru (a se vedea şi Propoziţia 2 din [28]) este imediată.

Lema 2.1.2. *Fie H un spaţiu metric hiperconvex. Considerăm structura de segmente definită mai sus, $\alpha \in (0,1)$ şi (x_n), (y_n) două şiruri mărginite în H astfel încât pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$,*

$$x_{n+1} = (1-\alpha)x_n \oplus \alpha y_n \quad \text{şi} \quad d(y_{n+1}, y_n) \leq d(x_{n+1}, x_n).$$

Atunci $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$.

Teorema 2.1.1 poate fi acum adaptată cu uşurinţă în contextul nostru.

Teorema 2.1.5. *Fie H un spaţiu metric hiperconvex compact. Presupunem că $T : H \to H$ satisface condiţia (C) şi considerăm o structură de segmente în H ca mai sus. Fie $\alpha \in [1/2, 1)$. Definim şirul $(x_n) \subseteq H$ considerând $x_1 \in H$, iar pentru $n \in \mathbb{N}$,*

$$x_{n+1} = (1-\alpha)x_n \oplus \alpha T(x_n).$$

Atunci (x_n) converge către un punct fix al lui T.

În teorema precedentă, compactitatea este folosită doar pentru a obţine punctul fix odată ce avem că $\lim_{n\to\infty} d(x_n, T(x_n)) = 0$. Astfel, deducem următorul corolar.

Corolarul 2.1.1. *Dacă T şi (x_n) sunt ca mai sus, şi H este un spaţiu metric hiperconvex, nu neapărat compact, atunci (x_n) este un şir de puncte fixe aproximative pentru T.*

Următorul corolar rezultă din faptul că operatorii ce satisfac condiţia (C) sunt cvasi-neexpansivi.

Corolarul 2.1.2. *În condiţiile Teoremei 2.1.5,* $\mathrm{Fix}(T)$ *este hiperconvexă.*

Pentru a aborda cazul necompact considerăm o nouă condiţie.

Definiţia 2.1.5. *Fie X un spaţiu metric, $K \subseteq X$ şi $T : K \to X$. Spunem că T satisface condiţia (D) dacă, pentru orice $x, y \in K$,*

$$\frac{1}{2}d(x, T(x)) \geq d(x, y) \quad \Longrightarrow \quad d(T(x), T(y)) \leq d(x, T(x)).$$

Atunci când condiţiile (C) şi (D) au loc simultan, putem adapta demonstraţia clasică a lui Baillon (a se vedea Teorema 5 din [4]) pentru existenţa punctelor fixe pentru operatori neexpansivi în spaţii hiperconvexe.

Teorema 2.1.6. *Fie X un spaţiu hiperconvex nevid şi mărginit. Presupunem că $T : X \to X$ satisface condiţiile (C) şi (D). Atunci* $\mathrm{Fix}(T)$ *este nevidă şi hiperconvexă.*

Corolarul 2.1.3. *Fie X un spaţiu hiperconvex nevid şi mărginit. Presupunem că $T : X \to X$ este un operator 2-Lipschitz care satisface condiţia (C). Atunci* $\mathrm{Fix}(T)$ *este nevidă şi hiperconvexă.*

2.1.4 Condiţia (C) în $\mathbb{R}$-arbori

$\mathbb{R}$-arborii formează o clasă de spaţii geodezice şi hiperconvexe particulară, dar totuşi vastă şi importantă în aplicaţii. Geometria lor particulară a permis demonstrarea, de exemplu, a faptului că operatorii continui definiţi pe $\mathbb{R}$-arbori compleţi şi geodezic mărginiţi (şi astfel nu neapărat mărginiţi) au puncte fixe. În continuare, dăm un rezultat similar pentru operatori care satisfac condiţia (C). Reamintim faptul că nu există o relaţie directă între continuitate şi condiţia (C).

Teorema 2.1.7. *Fie X un $\mathbb{R}$-arbore complet şi geodezic mărginit, iar $T : X \to X$ un operator care satisface condiţia (C). Atunci* $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$.

Observaţia 2.1.1. În rezultatul anterior nu se poate renunţa la ipoteza că X este geodezic mărginit.

2.2 Puncte fixe pentru operatori multivoci

În această secţiune studiem condiţia (C) pentru operatori multivoci în contextul spaţiilor metrice geodezice (acordând atenţie specială $\mathbb{R}$-arborilor) şi al spaţiilor Banach. Folosim definiţia condiţiei (C) pentru operatori multivoci care a fost dată în [66], unde s-au obţinut diferite rezultate în această direcţie în spaţii CAT(0).

Definiţia 2.2.1 (Razani, Salahifard [66]). *Fie X un spaţiu metric şi $K \in \mathcal{P}(X)$. Spunem că $T : K \to \mathcal{P}(X)$ satisface condiţia (C) dacă pentru fiecare $x, y \in K$ şi $u_x \in T(x)$ astfel încât*

$$\frac{1}{2}d(x, u_x) \leq d(x, y),$$

există $u_y \in T(y)$ pentru care

$$d(u_x, u_y) \leq d(x, y).$$

În restul acestui capitol folosim condiţia (C) atât pentru cazul univoc, cât şi pentru cel multivoc, contextul facând distincţie între cele două cazuri. Acelaşi lucru este valabil şi pentru alte condiţii pe care le vom utiliza.

2.2.1 Condiţia (C) în spaţii geodezice

Asemenea cazului univoc, introducem următoarea condiţie şi demonstrăm că, pentru $\mu = 3$, aceasta este o generalizare a condiţiei (C).

Definiţia 2.2.2. *Fie X un spaţiu metric, $K \in \mathcal{P}(X)$, $T : K \to \mathcal{P}(X)$ şi $\mu \geq 1$. Operatorul T satisface condiţia (E_μ) dacă pentru orice $x, y \in K$ şi $u_x \in T(x)$ există $u_y \in T(y)$ astfel încât*

$$d(x, u_y) \leq \mu d(x, u_x) + d(x, y).$$

Lema 2.2.1. *Fie X un spaţiu metric, $K \in \mathcal{P}(X)$ şi $T : K \to \mathcal{P}(K)$ un operator care satisface condiţia (C). Atunci T satisface condiţia (E_3).*

Următorul rezultat pune în evidenţă un şir de puncte fixe aproximative pentru un operator multivoc care satisface condiţia (C).

Propoziţia 2.2.1. *Fie X un spaţiu metric geodezic pentru care metrica este convexă, $K \in \mathcal{P}_{b,cv}(X)$ şi $T : K \to \mathcal{P}(K)$. Dacă T satisface condiţia (C), atunci T are un şir de puncte fixe aproximative.*

Primul rezultat de punct fix pentru operatori multivoci pe care îl demonstrăm aici are loc pentru operatori definiţi pe o mulţime compactă şi convexă.

Teorema 2.2.1. *Fie X un spaţiu geodezic pentru care metrica este convexă şi $K \in \mathcal{P}_{cp,cv}(X)$. Presupunem că $T : K \to \mathcal{P}_{cl}(K)$ satisface condiţia (C). Atunci* $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$.

În continuare ne concentrăm asupra unor rezultate în care condiţia de compactitate este mutată de la domeniul la imaginea operatorului.

Teorema 2.2.2. *Fie X un spaţiu UC complet pentru care metrica este convexă şi $K \in \mathcal{P}_{b,cl,cv}(X)$. Presupunem că $T : K \to \mathcal{P}_{cp}(K)$ satisface condiţia (C). Atunci* $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$.

În rezultatul de mai sus putem renunţa la convexitatea metricii şi presupune în loc că operatorul admite un şir de puncte fixe aproximative.

Teorema 2.2.3. *Fie X un spaţiu UC complet şi $K \in \mathcal{P}_{b,cl,cv}(X)$. Presupunem că $T : K \to \mathcal{P}_{cp}(K)$ satisface condiţia (C) şi admite un şir de puncte fixe aproximative. Atunci* $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$.

În rezultatul următor considerăm o nouă condiţie pentru operatori multivoci şi arătăm că această condiţie este mai slabă decât condiţia (C).

Definiţia 2.2.3. *Fie X un spaţiu metric, $K \in \mathcal{P}(X)$ şi $T : K \to \mathcal{P}(X)$. Spunem că operatorul T satisface condiţia (C') dacă pentru fiecare $x, y \in K$ şi $u_x \in T(x)$ pentru care*

$$d(x, u_x) = \mathrm{dist}(x, T(x)) \quad \text{şi} \quad \frac{1}{2} d(x, u_x) \leq d(x, y),$$

există $u_y \in T(y)$ astfel încât

$$d(u_x, u_y) \leq d(x, y).$$

Demonstrăm în continuare o teoremă de selecţie în $\mathbb{R}$-arbori pentru operatori multivoci care satisfac condiţia (C') şi analizăm apoi relaţia dintre condiţiile (C') şi (C), respectiv (E_3).

Teorema 2.2.4. *Fie X un $\mathbb{R}$-arbore, $K \in \mathcal{P}(X)$ şi $T : K \to \mathcal{P}_{cl,cv}(X)$ un operator care satisface condiţia (C'). Atunci operatorul $f : K \to X$ definit prin $f(x) = P_{T(x)}(x)$, pentru orice $x \in K$, este o selecţie a lui T care satisface condiţia (C).*

Corolarul 2.2.1. *Fie X un $\mathbb{R}$-arbore complet şi mărginit. Presupunem că $T : X \to \mathcal{P}_{cl,cv}(X)$ satisface condiţia (C'). Atunci* $\mathrm{Fix}(T)$ *este un $\mathbb{R}$-arbore nevid şi complet.*

Propoziţia 2.2.2. *Fie K o submulţime mărginită, închisă şi convexă a unui $\mathbb{R}$-arbore complet şi $T : K \to \mathcal{P}_{cl,cv}(K)$. Următoarele afirmaţii au loc:*

(i) *dacă T satisface (C), atunci satisface şi (C'), dar reciproca nu are loc;*

(ii) *dacă T satisface (C'), atunci satisface şi (E_3), dar reciproca este falsă.*

După modelul definiţiei condiţiei (C_λ) în cazul univoc, introducem următoarea versiune generalizată a condiţiei (C') pentru operatori multivoci.

Definiţia 2.2.4. *Fie X un spaţiu metric, $K \in \mathcal{P}(X)$, $T : K \to \mathcal{P}(X)$ şi $\lambda \in (0, 1)$. Operatorul T satisface condiţia (C'_λ) dacă pentru orice $x, y \in K$ şi $u_x \in T(x)$ pentru care*

$$d(x, u_x) = \mathrm{dist}(x, T(x)) \quad \text{şi} \quad \lambda d(x, u_x) \leq d(x, y),$$

există $u_y \in T(y)$ astfel încât

$$d(u_x, u_y) \leq d(x, y).$$

Teorema 2.2.5. *Fie X un $\mathbb{R}$-arbore, $K \in \mathcal{P}(X)$ şi $T : K \to \mathcal{P}_{cl,cv}(X)$ un operator care satisface (C'_λ). Atunci operatorul $f : K \to X$ definit prin $f(x) = P_{T(x)}(x)$, pentru orice $x \in K$, este o selecţie a lui T care satisface condiţia (C_λ).*

2.2.2 Condiţia (C) în spaţii Banach

În această subsecţiune revizuim teoria clasică a operatorilor neexpansivi în spaţii Banach pentru a o studia sub condiţia (C). Începem prin a demonstra existenţa punctelor fixe pentru operatori care satisfac condiţia (C) în spaţii Banach cu proprietatea Opial.

Teorema 2.2.6. *Fie X un spaţiu Banach cu proprietatea Opial în raport cu τ. Presupunem că mulţimea $K \in \mathcal{P}_{b,cv}(X)$ este τ-secvenţial compactă şi $T : K \to \mathcal{P}_{cp}(K)$ este un operator care satisface condiţia (C). Atunci* $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$.

Următorul rezultat este o analoagă multivocă a Teoremei 2.1.2.

Teorema 2.2.7. *Fie X un spaţiu Banach UCED şi $K \in \mathcal{P}_{cv}(X)$ slab compactă. Presupunem că $T : K \to \mathcal{P}_{cp}(K)$ satisface condiţia (C). Atunci* $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$.

Demonstrăm în continuare un rezultat similar Teoremei Kirk-Massa [49] pentru operatori ce satisfac condiţia (C).

Teorema 2.2.8. *Fie X un spaţiu Banach, $K \in \mathcal{P}_{b,cl,cv}(X)$ şi $T : K \to \mathcal{P}_{cp,cv}(K)$ un operator continuu în raport cu distanţa Pompeiu-Hausdorff care satisface, în plus, condiţia (C). Presupunem că orice şir în K are un centru asimptotic nevid şi compact relativ la K. Atunci* $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$.

Menţionăm că o altă extensie naturală a condiţiei (C) pentru un operator multivoc $T : K \to \mathcal{P}_{b,cl}(X)$ este următoarea: pentru orice $x, y \in K$

$$\frac{1}{2}\operatorname{dist}(x, T(x)) \leq \|x - y\| \quad \Longrightarrow \quad H(T(x), T(y)) \leq \|x - y\|.$$

Ne referim la această condiţie drept *condiţia* (C'').

Evident, un operator neexpansiv îndeplineşte condiţia (C''). Nu este însa clar dacă un operator ce satisface condiţia de mai sus, satisface, de asemenea, (C). Totuşi, dacă T are valori compacte, este uşor de văzut că această nouă condiţie atrage după sine condiţia (C). Deoarece în teoremele demonstrate aici, T are valori compacte, aceste rezultate generalizează teoreme clasice de punct fix pentru operatori neexpansivi (a se vedea [49, 54, 57]).

2.3 Puncte fixe comune pentru operatori care comută

În această secţiune aplicăm unele teoreme de punct fix demonstrate în secţiunile anterioare pentru a obţine rezultate de existenţă a punctelor fixe comune. Ne concentrăm asupra comutativităţii între operatori univoci şi multivoci. Reamintim că, dacă X este un spaţiu metric, $K \in \mathcal{P}(X)$, $f : K \to K$ şi $T : K \to \mathcal{P}(K)$, atunci f şi T *comută* dacă $f(y) \in T(f(x))$ pentru orice $x \in K$ şi $y \in T(x)$.

Lema de mai jos constituie un instrument important în demonstrarea rezultatelor noastre.

Lema 2.3.1. *Fie X un spaţiu metric, $K \in \mathcal{P}(X)$, $f : K \to K$ un operator care satisface condiţia (C) pentru care $\operatorname{Fix}(f) \neq \emptyset$. Presupunem că $T : K \to \mathcal{P}(K)$ este astfel încât pentru fiecare $x, y \in \operatorname{Fix}(f)$, mulţimea $P_{T(y)}(x)$ este singleton. Dacă f şi T comută, atunci $P_{T(y)}(x) \in \operatorname{Fix}(f)$ pentru orice $x, y \in \operatorname{Fix}(f)$.*

Teorema 2.3.1. *Fie X un spaţiu UC complet pentru care metrica este convexă şi $K \in \mathcal{P}_{b,cl,cv}(X)$. Presupunem că $f : K \to K$ şi $T : K \to \mathcal{P}_{cp,cv}(K)$ satisfac condiţia (C). Dacă f şi T comută, atunci există $z \in K$ astfel încât $z = f(z) \in T(z)$.*

Teorema 2.3.2. *Fie X un $\mathbb{R}$-arbore complet şi mărginit. Presupunem că $f : X \to X$ şi $T : X \to \mathcal{P}_{cl,cv}(X)$ satisfac condiţia (C), respectiv (C'). Dacă f şi T comută, atunci există $z \in K$ astfel încât $z = f(z) \in T(z)$.*

Capitolul 3

Generalizări ale contracţiilor şi ale operatorilor neexpansivi utilizând orbite

În acest capitol studiem probleme de punct fix precum şi proprietatea acestor probleme de a fi bine puse şi demonstrăm principii demi-închise pentru clase de operatori univoci care satisfac ipoteze mai slabe decât condiţiile de contracţie sau neexpansivitate folosind conceptul de orbită. De asemenea, generalizăm operatori multivoci uniform Lipschitz şi asimptotic neexpansivi. Considerăm drept cadru de lucru spaţiile metrice, Banach, CAT(0) şi cele geodezice uniform convexe. Majoritatea rezultatelor demonstrate aici sunt incluse în [59, 60, 62].

În Secţiunea 3.1 demonstrăm rezultate de punct fix pentru operatori univoci care satisfac anumite condiţii de tip contracţie. În acelaşi timp ne concentrăm asupra unor extensii ale operatorilor neexpansivi. Această secţiune este divizată în trei subsecţiuni. Prima subsecţiune prezintă variante locale (Teoremele 3.1.3, 3.1.4) ale unei teoreme de punct fix demonstrate de Walter [77] care foloseşte o condiţie de tip contracţie definită cu ajutorul funcţiilor gauge contractive. De asemenea, răspundem negativ la o întrebare deschisă pusă de Kirk şi Saliga [50] (Exemplul 3.1.1) şi formulăm condiţii adiţionale care oferă un răspuns afirmativ la această problemă. Mai exact, demonstrăm că dacă funcţia contractivă gauge este în plus subaditivă sau dacă spaţiul este compact atunci se poate răspunde afirmativ la această întrebare (Observaţia 3.1.1, Teorema 3.1.5). Subsecţiunea următoare studiază probleme de punct fix şi proprietatea acestor probleme de a fi bine puse pentru operatori care generalizează variaţii ale condiţiilor de tip contractiv sau neexpansiv (Teoremele 3.1.6, 3.1.7, 3.1.8, 3.1.10, 3.1.11). Demonstrăm un principiu demi-închis (Teorema 3.1.9) şi o versiune asimptotică (Teorema 3.1.12) a unui rezultat obţinut de Walter [77]. Aceste generalizări sunt definite considerând raza sau diametrul orbitei. În ultima subsecţiune introducem două extensii ale operatorilor neexpansivi în spaţii CAT(0) şi demonstrăm teoreme de punct fix pentru aceste clase de operatori (Teoremele 3.1.13, 3.1.14). Arătăm, prin exemple, că aceste condiţii sunt diferite nu doar între ele dar şi de neexpansivitate. Includem şi un principiu demi-închis folosind o condiţie care generalizează aceste două condiţii (Teorema 3.1.15).

Secţiunea 3.2 reaminteşte conceptul de operator uniform k-Lipschitz care a fost introdus în [27]. În aceeaşi lucrare a fost demonstrat că în spaţii Banach uniform convexe orice operator uniform k-Lipschitz are un punct fix atunci când k satisface o relaţie ce depinde de modulul de convexitate. Multe alte teoreme de punct fix pentru operatori uniform Lipschitz au fost demonstrate în diferite contexte. O astfel de teoremă celebră a fost demonstrată de către Lifšic [56] în cadrul general al spaţiilor metrice. O altă abordare importantă a fost pusă în evidenţă de Lim şi Xu [58]. În lucrarea recentă [41], Khamsi şi Kirk definesc operatori multivoci uniform Lipschitz şi folosesc acest concept pentru a extinde Teorema Lifšic în cazul multivoc. În această secţiune studiem în continuare şi generalizăm noţiunea de operator multivoc uniform Lipschitz în contextul spaţiilor Banach, metrice şi CAT(0). În plus, investigăm o extensie a operatorilor multivoci asimptotic neexpansivi în spaţii geodezice uniform convexe. În prima subsecţiune introducem o generalizare a operatorilor multivoci uniform k-Lipschitz, anume operatorii k-GL (Definiţia 3.2.2), pentru care demonstrăm Teorema 3.2.1, o variantă a primului rezultat de punct fix pentru operatori uniform Lipschitz dat în [27]. De asemenea, arătăm că versiunea multivocă a Teoremei Lifšic demonstrată în [41] este valabilă şi pentru operatori k-GL (Teorema 3.2.2). În cea de-a doua subsecţiune demonstrăm un rezultat de punct fix în spaţii CAT(0) pentru altă clasă de operatori multivoci care extind operatorii uniform Lipschitz folosind matrice ergodice (Teorema 3.2.3). Acest rezultat generalizează o teoremă de punct fix în spaţii Hilbert pentru operatori cu iterate Lipschitz demonstrată de către Górnicki [31]. Ultima subsecţiune conţine o variantă multivocă a unei binecunoscute teoreme de punct fix pentru operatori multivoci asimptotic neexpansivi (Teorema 3.2.4).

3.1 Puncte fixe pentru operatori univoci

În această secţiune demonstrăm rezultate de punct fix pentru operatori care satisfac diferite condiţii generalizate de tip contractiv sau neexpansiv. De asemenea, studiem proprietatea unora dintre aceste probleme de a fi bine puse şi demonstrăm principii demiînchise. Înainte de a da mai multe detalii, definim noţiunea de orbită pentru operatori univoci. În acest scop, fie (X, d) un spaţiu metric şi $T : X \to X$. Pentru $x \in X$, definim *orbita pornind din* x prin

$$O_T(x) = \{x, T(x), \ldots, T^n(x), \ldots\},$$

unde $T^{n+1}(x) = T(T^n(x))$ pentru $n \geq 0$ şi $T^0(x) = x$. *Orbita pornind din* x *şi* y este definită prin $O_T(x, y) = O_T(x) \cup O_T(y)$. Cu toate acestea, orbita pornind din x poate fi, de asemenea, definită ca şirul $(T^n(x))$ în sine şi nu mulţimea elementelor şirului. În această secţiune prima definiţie este mai convenabilă.

3.1.1 Operatori generalizaţi de tip contracţie

Începem prin a reaminti că o funcţie $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ este *contractivă gauge* daca este continuă, crescătoare şi $\varphi(r) < r$ pentru fiecare $r > 0$ (a se vedea [77]).

Teorema 3.1.1 (Walter [77]). *Fie* (X, d) *un spaţiu metric complet şi* $T : X \to X$ *un operator cu orbite mărginite. Dacă există o funcţie contractivă gauge* φ *astfel încât*

$$d(T(x), T(y)) \leq \varphi(\mathrm{diam}(O_T(x, y))) \quad \textit{pentru fiecare } x, y \in X,$$

atunci T *este un operator Picard.*

Notăm, pentru $\epsilon \geq 0$, $L_\epsilon = \{x \in X : d(x, T(x)) \leq \epsilon\}$. Kirk şi Saliga [50] au demonstrat următorul rezultat conex.

Teorema 3.1.2 (Kirk, Saliga [50]). *Fie (X, d) un spaţiu metric complet şi $T : X \to X$ un operator cu orbite mărginite. Dacă există $\alpha < 1$ astfel încât*

$$d\left(T(x), T(y)\right) \leq \alpha \mathrm{diam}\left(O_T(x, y)\right) \quad \textit{pentru fiecare } x, y \in X,$$

atunci T este un operator Picard şi $\lim_{\epsilon \searrow 0} \mathrm{diam}\left(L_\epsilon\right) = 0$. În plus, $(x_n) \subseteq X$ este un şir de puncte fixe aproximative dacă şi numai dacă (x_n) converge la unicul punct fix al lui T.

Kirk şi Saliga [50] au pus, de asemenea, întrebarea dacă putem demonstra concluziile teoremei anterioare în contextul mai larg al Teoremei 3.1.1. Abordând această întrebare, Akkouchi a arătat în [1] că răspunsul este afirmativ pentru clasa particulară Φ (a se vedea [1]) constând în funcţiile continue şi crescătoare $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ pentru care funcţia $r \longmapsto r - \varphi(r)$ de la $\mathbb{R}_+$ la $\mathbb{R}_+$ este strict crescătoare. Akkouchi [1] a observat în acelaşi timp că o funcţie $\varphi \in \Phi$ este contractivă gauge. Totuşi, clasa funcţiilor contractive gauge este mai largă decât Φ (a se vedea Exemplul 2.2 din [1]).

Dăm în continuare două variante locale ale Teoremei 3.1.1.

Teorema 3.1.3. *Fie (X, d) un spaţiu metric complet, $x_0 \in X$ şi $r > 0$. Presupunem că $T : \widetilde{B}(x_0, r) \to X$ este un operator cu $\mathrm{diam}\left(O_T(x_0)\right) \leq r$ şi există o funcţie contractivă gauge φ astfel încât*

$$d\left(T(x), T(y)\right) \leq \varphi\left(\mathrm{diam}\left(O_T(x, y)\right)\right) \quad \textit{pentru fiecare } x, y \in O_T(x_0). \tag{3.1}$$

Dacă T are graficul închis sau funcţia $x \longmapsto d\left(x, T(x)\right)$, pentru $x \in \widetilde{B}(x_0, r)$, este T-orbital semi-continuă inferior, atunci T are un punct fix.

Teorema 3.1.4. *Fie (X, d) un spaţiu metric complet, $x_0 \in X, r > 0$ şi $T : \widetilde{B}(x_0, r) \to X$ un operator cu $\mathrm{diam}\left(O_T(x_0)\right) \leq r$. Presupunem că există o funcţie contractivă gauge φ astfel încât pentru fiecare $x, y \in \widetilde{B}(x_0, r)$ cu $O_T(x) \subseteq \widetilde{B}(x_0, r)$ şi $O_T(y) \subseteq \widetilde{B}(x_0, r)$,*

$$d\left(T(x), T(y)\right) \leq \varphi\left(\mathrm{diam}\left(O_T(x, y)\right)\right).$$

Dacă T are graficul închis sau funcţia $x \longmapsto d\left(x, T(x)\right)$, pentru $x \in \widetilde{B}(x_0, r)$, este T-orbital semi-continuă inferior, atunci T are un unic punct fix z şi pentru orice $x \in X$ cu $O_T(x) \subseteq \widetilde{B}(x_0, r)$, $\lim_{n\to\infty} T^n(x) = z$.

Ne îndreptăm acum atenţia către problema menţionată mai sus, care a fost pusă de Kirk şi Saliga în [50].

Observaţia 3.1.1. Fie φ o funcţie contractivă gauge care este subaditivă. Atunci $\varphi \in \Phi$.

Astfel, ştim că pentru funcţii contractive gauge care sunt şi subaditive, răspunsul la întrebarea lui Kirk şi Saliga [50] este pozitiv. Dar, în cazul general, fără a presupune condiţii adiţionale, răspunsul este negativ. Următorul exemplu ilustrează acest lucru.

Exemplul 3.1.1. *Fie $X = [0, \infty)$ împreună cu metrica uzuală şi $T, \varphi : X \to X$,*

$$T(x) = \varphi(x) = \begin{cases} x/2 & \textit{dacă } x \leq \sqrt{2}, \\ x - 1/x & \textit{dacă } x > \sqrt{2}. \end{cases}$$

Atunci T şi φ satisfac ipotezele Teoremei 3.1.1, dar există un şir $(x_n) \subseteq X$ astfel încât $\lim_{n\to\infty} |x_n - T(x_n)| = 0$ şi (x_n) nu converge la 0, unicul punct fix al lui T.

Cu toate acestea, dacă spaţiul X se presupune a fi compact, întrebarea formulată de către Kirk şi Saliga în [50] referitoare la posibilitatea de a slăbi ipotezele Teoremei 3.1.2 în sensul Teoremei 3.1.1 are un răspuns afirmativ.

Teorema 3.1.5. *Fie (X, d) un spaţiu metric compact şi $T : X \to X$. Presupunem că există o funcţie contractivă gauge φ astfel încât*

$$d\left(T(x), T(y)\right) \leq \varphi\left(\operatorname{diam}\left(O_T(x, y)\right)\right) \quad \textit{pentru orice } x, y \in X.$$

Atunci

(a) *T este un operator Picard;*

(b) *un şir $(x_n) \subseteq X$ este un şir de puncte fixe aproximative dacă şi numai dacă el converge la unicul punct fix al lui T;*

(c) $\lim_{\epsilon \searrow 0} \operatorname{diam}\left(L_\epsilon\right) = 0$.

3.1.2 Contracţii punctuale, asimptotic punctuale şi tare asimptotic punctuale generalizate

Patru lucrări recente [15, 16, 35, 52] prezintă demonstraţii simple şi elegante ale unor rezultate de punct fix pentru contracţii punctuale, asimptotic punctuale sau chiar pentru operatori asimptotic punctual neexpansivi. Kirk şi Xu [52] au studiat aceşti operatori în contextul submulţimilor slab compacte şi convexe ale spaţiilor Banach precum şi în spaţii Banach uniform convexe. Hussain şi Khamsi [35] au considerat astfel de probleme în cadrul spaţiilor metrice şi CAT(0). În [16], Espínola şi Hussain au demonstrat rezultate de coincidenţa pentru operatori asimptotic punctuali neexpansivi. Espínola, Fernández-León şi Piątek [15] au examinat existenţa punctelor fixe şi convergenţa iteratelor pentru contracţii asimptotic punctuale în spaţii metrice uniform convexe. În această subsecţiune formulăm condiţii mai puţin restrictive decât cele care apar în definiţiile clasice ale acestor operatori şi arătăm că rămân valabile concluziile teoremelor de punct fix. De asemenea, studiem proprietatea acestor probleme de punct fix de a fi bine puse.

Un operator $T : X \to X$ se numeşte *contracţie punctuală* dacă există $\alpha : X \to [0, 1)$ astfel încât

$$d\left(T(x), T(y)\right) \leq \alpha(x)d(x, y) \quad \text{pentru fiecare } x, y \in X.$$

Fie $T : X \to X$ şi, pentru $n \in \mathbb{N}$, fie $\alpha_n : X \to \mathbb{R}_+$ astfel încât

$$d\left(T^n(x), T^n(y)\right) \leq \alpha_n(x)d(x, y) \quad \text{pentru fiecare } x, y \in X.$$

Dacă şirul (α_n) converge punctual la $\alpha : X \to [0, 1)$, atunci T este o *contracţie asimptotic punctuală.*

Dacă pentru orice $x \in X$, $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n(x) \leq 1$, atunci T se numeşte *operator asimptotic punctual neexpansiv.*

Dacă există $0 < k < 1$ astfel încât pentru orice $x \in X$, $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n(x) \leq k$, atunci T se numeşte *contracţie tare asimptotic punctuală.*

În continuare extindem rezultatele obţinute de către Hussain şi Khamsi în [35] folosind raza orbitei. Începem prin a introduce o proprietate pentru un operator $T : X \to X$, unde X este un spaţiu metric. Mai precis, spunem că T satisface proprietatea (S) dacă

(S) pentru orice şir de puncte fixe aproximative (x_n) şi pentru orice $m \in \mathbb{N}$, şirul $(d(x_n, T^m(x_n)))$ converge la 0 când $n \to \infty$ uniform în raport cu m.

Teorema 3.1.6. *Fie X un spaţiu metric mărginit astfel încât $\mathcal{A}(X)$ este imbricat compactă. De asemenea, fie $T : X \to X$ pentru care există $\alpha : X \to [0,1)$ astfel încât*

$$d\left(T(x), T(y)\right) \leq \alpha(x) r_x\left(O_T(y)\right) \quad \textit{pentru fiecare } x, y \in X. \tag{3.2}$$

Atunci T este un operator Picard. În plus, dacă T satisface şi proprietatea (S), atunci problema de punct fix este bine pusă.

Teorema 3.1.7. *Fie X un spaţiu metric mărginit, $T : X \to X$ şi presupunem că există o structură de convexitate $\mathcal{F}$ care este imbricat compactă şi T-stabilă. Presupunem, de asemenea, că*

$$d\left(T^n(x), T^n(y)\right) \leq \alpha_n(x) r_x\left(O_T(y)\right) \quad \textit{pentru fiecare } x, y \in X,$$

unde, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}, \alpha_n : X \to \mathbb{R}_+$, iar şirul (α_n) converge punctual la $\alpha : X \to [0,1)$. Atunci T este un operator Picard. În plus, dacă T satisface şi proprietatea (S), atunci problema de punct fix este bine pusă.

Teorema 3.1.8. *Fie X un spaţiu CAT(0) complet, $K \in \mathcal{P}_{b,cl,cv}(X)$, $T : K \to K$, iar pentru $n \in \mathbb{N}$, fie $\alpha_n : K \to \mathbb{R}_+$ astfel încât $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n(x) \leq 1$ pentru orice $x \in K$. Dacă, pentru $n \in \mathbb{N}$,*

$$d\left(T^n(x), T^n(y)\right) \leq \alpha_n(x) r_x\left(O_T(y)\right) \quad \textit{pentru fiecare } x, y \in K$$

atunci $\mathrm{Fix}(T)$ este nevidă, închisă şi convexă.

Demonstrăm mai jos un principiu demi-închis similar Propoziţiei 1 din [35]. În acest scop, pentru $K \in \mathcal{P}_{cl,cv}(X)$, $(x_n) \subseteq K$ un şir mărginit şi $\varphi : K \to \mathbb{R}_+, \varphi(x) = \limsup_{n\to\infty} d(x, x_n)$, ca şi în [35], introducem următoarea notaţie

$$x_n \overset{\varphi}{\rightharpoonup} \omega \quad \text{dacă şi numai dacă} \quad \varphi(\omega) = \inf_{x \in K} \varphi(x).$$

Teorema 3.1.9. *Fie X un spaţiu CAT(0) şi $K \in \mathcal{P}_{b,cl,cv}(X)$. Presupunem că $T : K \to K$ satisface proprietatea (S), iar pentru $n \in \mathbb{N}$, fie $\alpha_n : K \to \mathbb{R}_+$ astfel încât $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n(x) \leq 1$ pentru orice $x \in K$. Presupunem, de asemenea, că, pentru $n \in \mathbb{N}$,*

$$d\left(T^n(x), T^n(y)\right) \leq \alpha_n(x) r_x\left(O_T(y)\right) \quad \textit{pentru orice } x, y \in K.$$

Dacă $(x_n) \subseteq K$ este un şir de puncte fixe aproximative astfel încât $x_n \overset{\varphi}{\rightharpoonup} \omega$, atunci $\omega \in \mathrm{Fix}(T)$.

În continuare, generalizăm condiţia de contracţie tare asimptotic punctuală folosind diametrul orbitei.

Teorema 3.1.10. *Fie X un spaţiu metric complet şi $T : X \to X$ un operator cu orbite mărginite care este orbital continuu. De asemenea, pentru $n \in \mathbb{N}$, fie $\alpha_n : X \to \mathbb{R}_+$ pentru care există $0 < k < 1$ astfel încât pentru orice $x \in X$, $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n(x) \leq k$. Dacă, pentru $n \in \mathbb{N}$,*

$$d\left(T^n(x), T^n(y)\right) \leq \alpha_n(x) \mathrm{diam}\left(O_T(x,y)\right) \quad \textit{pentru orice } x, y \in X,$$

atunci T este un operator Picard. În plus, dacă T satisface şi proprietatea (S), atunci problema de punct fix este bine pusă.

Teorema 3.1.11. *Fie X un spaţiu metric mărginit astfel încât $\mathcal{A}(X)$ este imbricat compactă şi fie $T : X \to X$ un operator orbital continuu. De asemenea, pentru $n \in \mathbb{N}$, fie $\alpha_n : X \to \mathbb{R}_+$ pentru care există $0 < k < 1$ astfel încât pentru orice $x \in X$, $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n(x) \leq k$. Dacă, pentru $n \in \mathbb{N}$,*

$$d\left(T^n(x), T^n(y)\right) \leq \alpha_n(x)\mathrm{diam}\left(O_T(x,y)\right) \quad \text{pentru fiecare } x, y \in X,$$

atunci T este un operator Picard. În plus, dacă T satisface şi proprietatea (S), atunci problema de punct fix este bine pusă.

Încheiem această subsecţiune demonstrând o versiune asimptotică a Teoremei 3.1.1 din subsecţiunea precedentă.

Teorema 3.1.12. *Fie (X,d) un spaţiu metric complet şi $T : X \to X$ un operator orbital continuu cu orbite mărginite. Presupunem că există o funcţie continuă $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ pentru care $\varphi(t) < t$ pentru orice $t > 0$ şi funcţiile $\varphi_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ astfel încât şirul (φ_n) converge punctual la φ, iar pentru $n \in \mathbb{N}$,*

$$d(T^n(x), T^n(y)) \leq \varphi_n\left(\mathrm{diam}(O_T(x,y))\right) \quad \text{pentru fiecare } x, y \in X.$$

Atunci T este un operator Picard. În plus, dacă T satisface şi proprietatea (S) şi φ_n este continuă pentru orice $n \in \mathbb{N}$, atunci problema de punct fix este bine pusă.

3.1.3 Operatori neexpansivi generalizaţi

În această subsecţiune demonstrăm rezultate de punct fix în spaţii CAT(0) pentru două clase de operatori care sunt mai generali decât cei neexpansivi.

Teorema 3.1.13. *Fie X un spaţiu CAT(0) mărginit şi complet, iar $T : X \to X$ astfel încât pentru orice $x, y \in X$,*

$$d\left(T(x), T(y)\right) \leq r_x\left(O_T(y)\right). \tag{3.3}$$

Atunci $\mathrm{Fix}(T)$ *este nevidă, închisă şi convexă.*

Teorema 3.1.14. *Fie X un spaţiu CAT(0) mărginit şi complet, iar $T : X \to X$ astfel încât pentru orice $x, y \in X$,*

$$d(T(x), T(y)) \leq \mathrm{diam}\left(\{x\} \cup O_T(y)\right), \tag{3.4}$$

şi

$$d(T(x),T(y)) \leq r_x(O_T(y)) + \sup_{k,p\in\mathbb{N}}\{\mathrm{diam}(\{T^k(x)\}\cup O_T(T^{k+p}(y))) - \mathrm{diam}(O_T(T^{k+p}(y)))\}. \tag{3.5}$$

Atunci $\mathrm{Fix}(T)$ *este nevidă, închisă şi convexă.*

Demonstrăm mai jos un principiu demi-închis.

Teorema 3.1.15. *Fie X un spaţiu CAT(0) şi $K \in \mathcal{P}_{b,cl,cv}(X)$. Fie $T : K \to K$ un operator care satisface proprietatea (S) şi (3.4) pentru orice $x, y \in K$. De asemenea, fie $(x_n) \subseteq K$ un şir de puncte fixe aproximative astfel încât $x_n \xrightarrow{\varphi} \omega$. Atunci $\omega \in \mathrm{Fix}(T)$.*

3.2 Puncte fixe pentru operatori multivoci

Fie (X,d) un spaţiu metric. Un operator $T : X \to X$ se numeşte *uniform Lipschitz* dacă există $k \geq 0$ astfel încât pentru fiecare $x, y \in X$, $d(T^n(x), T^n(y)) \leq kd(x,y)$ pentru orice $n \geq 1$. Operatorul T se numeşte şi *uniform k-Lipschitz*. Aceşti operatori au fost introduşi în [27].

În [41], Khamsi şi Kirk au considerat conceptul de operatori uniform Lipschitz multivoci folosind orbite. Pentru un operator multivoc $T : X \to \mathcal{P}(X)$, o *orbită pornind din* x este un şir $(x_n) \subseteq X$ cu $x_0 = x$ şi $x_{n+1} \in T(x_n)$ pentru orice $n \geq 0$. Mulţimea tuturor orbitelor lui T pornind din x este notată prin $O_T(x)$.

Definiţia 3.2.1 (Khamsi, Kirk [41])**.** *Fie (X,d) un spaţiu metric. Operatorul multivoc $T : X \to \mathcal{P}(X)$ este uniform k-Lipschitz (cu $k \geq 0$) dacă pentru fiecare $x, y \in X$ şi fiecare $(x_n) \in O_T(x)$ există $(y_n) \in O_T(y)$ astfel încât*

$$d(x_{n+h}, y_n) \leq kd(x_h, y) \quad \textit{pentru orice } n \geq 1, h \geq 0.$$

Rezultatul principal din [41] extinde Teorema lui Lifšic în cazul multivoc.

3.2.1 Operatori *k*-GL în spaţii geodezice şi Banach

Începem această subsecţiune întroducând o noţiune care generalizează conceptul de operator multivoc uniform Lipschitz.

Definiţia 3.2.2. *Fie (X,d) un spaţiu metric. Un operator multivoc $T : X \to \mathcal{P}(X)$ se numeşte k-GL (cu $k \geq 0$) dacă pentru $n \in \mathbb{N}$ există $\alpha_n : X \to \mathbb{R}_+$ astfel încât*

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n(x) \leq k \quad \textit{pentru orice } x \in X,$$

şi pentru fiecare $x, y \in X$ şi fiecare $(x_n) \in O_T(x)$ există $(y_n) \in O_T(y)$ cu

$$d(x_{n+h}, y_n) \leq \alpha_n(y) \sup_{i \geq h} d(x_i, y) \quad \textit{pentru orice } n \geq 1, h \geq 0.$$

Folosind operatori k-GL, dăm în continuare o variantă multivocă generalizată a primului rezultat de punct fix pentru operatori uniform Lipschitz demonstrat în [27].

Teorema 3.2.1. *Fie X un spaţiu Banach uniform convex având modulul de convexitate δ_X. Fie $C \in \mathcal{P}_{b,cl,cv}(X)$ şi $T : C \to \mathcal{P}_{cl}(C)$ un operator k-GL astfel încât*

$$k\left(1 - \delta_X\left(\frac{1}{k}\right)\right) < 1 \quad \textit{pentru } k \geq 1.$$

Atunci $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$.

Generalizăm mai jos versiunea multivocă a Teoremei Lifšic demonstrată în [41].

Teorema 3.2.2. *Fie (X,d) un spaţiu metric mărginit şi complet, iar $T : X \to \mathcal{P}_{cl}(X)$ un operator k-GL, unde $k < \kappa(X)$. Atunci* $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$.

Corolarul 3.2.1. *Fie (X,d) un spaţiu CAT(0) mărginit şi complet, $T : X \to X$, iar pentru $n \in \mathbb{N}$, fie $\alpha_n : X \to \mathbb{R}_+$ astfel încât există $k < \sqrt{2}$ cu $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n(x) \leq k$ pentru orice $x \in X$. Dacă pentru fiecare $x, y \in X$,*

$$d\left(T^n(x), T^n(y)\right) \leq \alpha_n(x) \sup_{i \geq 0} d(T^i(y), x) \quad \textit{pentru orice } n \geq 1,$$

atunci $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$.

3.2.2 Operatori uniform Lipschitz generalizaţi folosind matrice tare ergodice

În această subsecţiune studiem altă clasă de operatori care generalizează operatori multivoci uniform Lipschitz folosind matrice tare ergodice. O matrice de numere reale pozitive $[a_{n,k}]_{n,k\geq 1}$ se numeşte *tare ergodică* dacă

(i) $\lim_{n\to\infty} a_{n,k} = 0$ pentru fiecare $k \geq 0$;

(ii) $\sum_{k\geq 1} a_{n,k} = 1$ pentru fiecare $n \geq 1$;

(iii) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k\geq 1} |a_{n,k+1} - a_{n,k}| = 0$.

Ideea acestei extensii a operatorilor uniform Lipschitz provine din [31], unde Górnicki a demonstrat un rezultat de punct fix în spaţii Hilbert pentru operatori cu iterate Lipschitz.

Teorema 3.2.3. *Fie (X, d) un spaţiu CAT(0) complet, $C \in \mathcal{P}_{b,cl,cv}(X)$ şi $T : C \to \mathcal{P}_{cl}(C)$ astfel încât pentru fiecare $x, y \in C$ şi fiecare $(x_n) \in O_T(x)$ există $(y_n) \in O_T(y)$ cu*

$$d(x_{n+h}, y_n) \leq \alpha(n)d(x_h, y) \quad \text{pentru orice } n \geq 1, h \geq 0,$$

unde $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$. Presupunem, de asemenea, că $[a_{n,k}]_{n,k\geq 1}$ este o matrice tare ergodică şi

$$\liminf_{n\to\infty} \inf_{m\geq 0} \sum_{k\geq 1} a_{n,k}\alpha(k + m)^2 < 2.$$

Atunci $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$.

3.2.3 Operatori asimptotic neexpansivi

În [26], Goebel şi Kirk au definit operatorii asimptotic neexpansivi ca extensie naturală a celor neexpansivi. Fie (X, d) un spaţiu metric. Un operator $T : X \to X$ este *asimptotic neexpansiv* dacă există $(k_n) \subseteq [0, \infty)$ cu $\lim_{n\to\infty} k_n = 0$ astfel încât

$$d(T^n(x), T^n(y)) \leq (1 + k_n)d(x, y) \quad \text{pentru fiecare } x, y \in X \text{ şi orice } n \geq 1.$$

Demonstrăm un rezultat de punct fix în spaţii UC pentru o generalizare multivocă a acestei noţiuni.

Teorema 3.2.4. *Fie (X, d) un spaţiu UC complet şi δ_X un modul de convexitatea care este monoton sau semi-continuu inferior la dreapta. Fie $C \in \mathcal{P}_{b,cl,cv}(X)$ şi $T : C \to \mathcal{P}(C)$ astfel încât pentru fiecare $x, y \in C$ şi fiecare $(x_n) \in O_T(x)$ există $(y_n) \in O_T(y)$ cu*

$$d(x_{n+h}, y_n) \leq (1 + k_n) \sup_{i\geq h} d(x_i, y) \quad \text{pentru orice } n \geq 1, h \geq 0,$$

unde $(k_n) \subseteq [0, \infty)$ cu $\lim_{n\to\infty} k_n = 0$. Atunci $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$.

Capitolul 4

Aspecte geometrice ale spaţiilor geodezice Ptolemeu şi puncte fixe

În acest capitol studiem regularitatea spaţiilor geodezice Ptolemeu şi aplicăm rezultatele obţinute în teoria metrică a punctului fix. Este o întrebare deschisă dacă astfel de spaţii care admit în plus un operator de punct mijlociu continuu sunt CAT(0). Demonstrăm că dacă impunem o condiţie de uniform continuitate asupra unui astfel de operator de punct mijlociu, atunci aceste spaţii, dacă sunt complete, sunt reflexive, iar şirurile mărginite au un centru asimptotic unic. În acelaşi timp arătăm că aceste spaţii sunt uniform convexe. Mai mult decât atât, dacă spaţiul este mărginit şi presupunem o variantă mai tare a uniform continuităţii a unui operator de punct mijlociu, atunci modulul de convexitate nu depinde de raza bilelor. Proprietăţile de regularitate demonstrate aici sunt aplicate pentru a obţine o serie de rezultate de punct fix specifice spaţiilor CAT(0). De asemenea, studiem forme ale inegalităţii Ptolemeu şi ale convexităţii Busemann pentru spaţii CAT(κ) şi punem problema caracterizării spaţiilor CAT(κ) folosind aceste noţiuni. Unele dintre rezultatele din acest capitol fac parte din [19].

Un spaţiu metric (X, d) se numeşte *spaţiu Ptolemeu* dacă

$$d(x,z)d(y,p) \leq d(x,y)d(z,p) + d(x,p)d(y,z) \quad \text{pentru fiecare } x, y, z, p \in X.$$

Relaţia de mai sus este cunoscută drept *inegalitatea Ptolemeu.*

Teorema clasică a lui Ptolemeu spune că în planul euclidian, inegalitatea lui Ptolemeu are loc cu egalitate dacă şi numai dacă x, y, z, p se află în această ordine pe un cerc. În cazul spaţiilor normate, inegalitatea Ptolemeu are un impact major asupra regularităţii spaţiului. Mai precis, a fost demonstrat în [71] că un spaţiu normat este cu produs scalar dacă şi numai dacă este un spaţiu Ptolemeu.

Inegalitatea Ptolemeu a fost folosită de către Foertsch şi Schroeder în [22] pentru a studia frontiera la infinit a spaţiilor CAT(-1). S-a arătat că frontiera unui spaţiu CAT(-1) înzestrată cu o metrică Bourdon sau Hamenstädt este un spaţiu Ptolemeu. În acelaşi timp, s-a introdus şi o condiţie care asigură egalitate în inegalitatea Ptolemeu. Această proprietate a condus la studiul relaţiei dintre spaţiile hiperbolice Gromov şi cele CAT(-1) (a se vedea [23] pentru detalii). Având această motivaţie, spaţiile Ptolemeu au fost investigate mai departe în [21], unde s-a demonstrat o caracterizare a spaţiilor CAT(0) în termenii inegalităţii Ptolemeu.

Spaţiile CAT(0) sunt Ptolemeu, dar un spaţiu geodezic Ptolemeu nu este neapărat unic geodezic (a se vedea [21]) şi astfel nu poate satisface condiţia CAT(0). Cu toate acestea, s-a arătat în aceeaşi lucrare că un spaţiu geodezic Ptolemeu propriu este unic geodezic, unde condiţia de a fi propriu se poate înlocui cu existenţa unui operator de punct mijlociu continuu. În mod natural, autorii au pus apoi întrebarea înca deschisă dacă un spaţiu geodezic Ptolemeu propriu (sau un spaţiu geodezic Ptolemeu cu un operator de punct mijlociu continuu) este CAT(0).

O consecinţă directă a condiţiei CAT(0) este faptul că spaţiile CAT(0) sunt Busemann convexe, însă convexitatea Busemann este o proprietate mai slabă decât condiţia CAT(0). Totuşi, a fost demonstrat în [21] că în contextul spaţiilor Ptolemeu, convexitatea Busemann implică faptul că spaţiul este CAT(0).

Mai mult decât atât, Foertsch şi Schroeder au arătat în [22] că spaţiile geodezice Ptolemeu proprii sunt, în particular, strict convexe. Drept urmare a acestui rezultat, autorii au demonstrat că operatorul proiecţie pe submulţimi închise şi convexe este univoc şi continuu. Este încă o întrebare deschisă dacă această proiecţie este neexpansivă ca şi în cazul spaţiilor CAT(0).

În Secţiunea 4.1 studiem regularitatea spaţiilor geodezice Ptolemeu. Contribuţiile noastre sunt structurate în trei subsecţiuni. În prima subsecţiune cerem puţin mai mult decât continuitatea unui operator de punct mijlociu şi arătăm că anumite proprietăţi care până în prezent au fost demonstrate în unele spaţii uniform convexe au loc şi în spaţii geodezice Ptolemeu. Mai precis, demonstrăm că un spaţiu geodezic Ptolemeu complet care admite un operator de punct mijlociu uniform continuu este reflexiv (Teorema 4.1.1). Ca o consecinţă a acestui rezultat demonstrăm că şirurile mărginite au un centru asimptotic unic (Teorema 4.1.2). Dăm un exemplu care arată că proprietatea de continuitate uniformă impusă asupra unui operator de punct mijlociu este mai slabă decât convexitatea Busemann (Exemplul 4.1.1). În a doua subsecţiune demonstrăm că orice spaţiu geodezic Ptolemeu este uniform convex dacă admite un operator de punct mijlociu uniform continuu (Teorema 4.1.3). Ca o consecinţă, arătăm că, dacă un astfel de spaţiu este în plus mărginit, atunci operatorul proiecţie pe mulţimi închise şi convexe este univoc şi uniform continuu (Propoziţia 4.1.1). Introducem apoi o variantă mai tare a uniform continuităţii a unui operator de punct mijlociu (Definiţia 4.1.2) şi demonstrăm că şi această noţiune este mai slabă decât convexitatea Busemann. Concluzionăm că orice spaţiu Ptolemeu mărginit ce admite un astfel de operator de punct mijlociu este uniform convex, iar modulul de convexitate nu depinde de raza bilelor (Teorema 4.1.4). În ultima subsecţiune introducem inegalitatea κ-Ptolemeu care este o variantă a inegalităţii Ptolemeu pentru spaţiile model M_κ^2. Astfel, putem defini spaţiile κ-Ptolemeu. Arătăm mai întai că atunci când κ tinde la zero, această inegalitate devine inegalitatea Ptolemeu (Propoziţia 4.1.2). Justificăm de ce spaţiile CAT(κ) satisfac inegalitatea κ-Ptolemeu (Teorema 4.1.5) şi punem în evidenţă anumite proprietăţi ale spaţiilor κ-Ptolemeu (Propoziţiile 4.1.3, 4.1.4, Observaţia 4.1.4). Demonstrăm că un spaţiu geodezic κ-Ptolemeu (unde $\kappa < 0$) care admite un operator de punct mijlociu continuu este unic geodezic (Teorema 4.1.6). Introducem conceptul de convexitate κ-Busemann care este o variantă a convexităţii Busemann în spaţiile CAT(κ) şi observăm că, atunci când κ tinde la zero, convexitatea κ-Busemann devine cea clasică Busemann (Propoziţia 4.1.5). Arătăm că un spaţiu κ-Busemann convex (având $\kappa < 0$) este Busemann convex (Observaţia 4.1.5) şi punem problema obţinerii unei caracterizări a spaţiilor CAT(κ) folosind aceste noţiuni (Observaţia 4.1.6).

În Secţiunea 4.2 aplicăm rezultatele obţinute în secţiunea anterioară pentru a demonstra teoreme de punct fix în spaţii geodezice Ptolemeu. Arătăm că multe rezultate de punct fix cunoscute în spaţii CAT(0) pot fi formulate în contextul spaţiilor geodezice Ptolemeu care admit un operator de punct mijlociu uniform continuu. Pornim de la Teorema lui Kirk (Teorema 4.2.1), continuăm cu generalizări ale contracţiilor punctuale, contracţiilor asimptotic punctuale şi ale operatorilor neexpansivi, şi încheiem cu un rezultat de punct fix pentru operatori multivoci.

4.1 Regularitatea spaţiilor geodezice Ptolemeu

În această secţiune demonstrăm rezultate asupra regularităţii spaţiilor geodezice Ptolemeu. Începem prin a observa că metrica unui spaţiu geodezic Ptolemeu este convexă.

În continuare folosim conceptul de operator de punct mijlociu continuu. Spunem că X admite un *operator de punct mijlociu continuu* dacă există $m : X \times X \to X$ astfel încât

$$d(x, m(x,y)) = d(y, m(x,y)) = \frac{d(x,y)}{2} \quad \text{pentru fiecare } x, y \in X,$$

şi pentru $x, y, x_n, y_n \in X$, unde $n \in \mathbb{N}$, cu $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$ şi $\lim_{n\to\infty} d(y_n, y) = 0$ avem că $\lim_{n\to\infty} d(m(x_n, y_n), m(x,y)) = 0$.

În [21], autorii au pus întrebarea, rămasă încă deschisă, dacă un spaţiu geodezic propriu (sau, mai general, un spaţiu geodezic Ptolemeu cu un operator de punct mijlociu continuu) este CAT(0). Folosind convexitatea Busemann, au demonstrat că un spaţiu metric este CAT(0) dacă şi numai dacă este Ptolemeu şi Busemann convex. Observăm că un spaţiu Busemann convex este unic geodezic, iar singurul operator de punct mijlociu care poate fi definit este continuu.

4.1.1 Reflexivitate şi centre asimptotice

În această subsecţiune obţinem noi rezultate legate de regularitatea spaţiilor geodezice Ptolemeu atunci când se consideră o condiţie mai restrictivă decât continuitatea asupra unui operator de punct mijlociu. Începem cu un rezultat care arată că spaţiile geodezice Ptolemeu cu un operator de punct mijlociu uniform continuu sunt reflexive. Reamintim mai întâi următoarea noţiune.

Definiţia 4.1.1. *Fie X un spaţiu geodezic. Spunem că X admite un operator de punct mijlociu uniform continuu dacă există $m : X \times X \to X$ astfel încât*

$$d(x, m(x,y)) = d(y, m(x,y)) = \frac{d(x,y)}{2} \quad \textit{pentru fiecare } x, y \in X,$$

şi pentru $n \in \mathbb{N}$ şi $x_n, x'_n, y_n, y'_n \in X$ cu

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x'_n) = 0 \quad \textit{şi} \quad \lim_{n\to\infty} d(y_n, y'_n) = 0$$

avem că

$$\lim_{n\to\infty} d(m(x_n, y_n), m(x'_n, y'_n)) = 0.$$

Orice spaţiu geodezic Busemann convex admite un operator de punct mijlociu uniform continuu. Următorul exemplu arată că există însă spaţii cu un operator de punct mijlociu uniform continuu, dar care nu sunt Busemann convexe.

Exemplul 4.1.1. *Fie X octantul pozitiv al spaţiului sferic $(\mathbb{S}^2, d)$. Atunci X nu este Busemann convex, dar admite un operator de punct mijlociu uniform continuu.*

Deoarece orice spaţiu geodezic Ptolemeu cu un operator de punct mijlociu este unic geodezic, rezultă imediat că orice spaţiu geodezic Ptolemeu cu un operator de punct mijlociu uniform continuu este, de asemenea, unic geodezic. Demonstrăm mai jos reflexivitatea spaţiilor geodezice Ptolemeu cu un operator de punct mijlociu uniform continuu. Acest rezultat constituie un instrument cheie în demonstraţia Teoremei 4.1.2.

Teorema 4.1.1. *Un spaţiu geodezic Ptolemeu complet cu un operator de punct mijlociu uniform continuu este reflexiv.*

Observaţia 4.1.1. Până acum reflexivitatea spaţiilor metrice geodezice s-a demonstrat doar pentru spaţii UC. În subsecţiunea următoare studiem convexitatea uniformă a spaţiilor geodezice Ptolemeu atunci când se presupun anumite proprietăţi adiţionale de continuitate asupra unui operator de punct mijlociu. Observăm că această problemă se află undeva între ceea ce este cunoscut şi întrebarea deschisă pusă în [21] dacă aceste spaţii sunt CAT(0).

Următoarea teoremă ocupă un rol important în demonstrarea rezultatelor de punct fix în spaţii geodezice Ptolemeu.

Teorema 4.1.2. *Într-un spaţiu geodezic Ptolemeu complet cu un operator de punct mijlociu uniform continuu, centrul asimptotic al oricărui şir mărginit în raport cu o submulţime închisă şi convexă este singleton.*

4.1.2 Convexitate uniformă

În această subsecţiune studiem convexitatea uniformă a spaţiilor geodezice Ptolemeu atunci când presupunem condiţii adiţionale de tip convexitate. Începem cu rezultatul următor pentru spaţii geodezice Ptolemeu cu un operator de punct mijlociu uniform continuu.

Teorema 4.1.3. *Un spaţiu geodezic Ptolemeu cu un operator de punct mijlociu uniform continuu e uniform convex.*

Observaţia 4.1.2. *Un spaţiu geodezic Ptolemeu propriu este punctual uniform convex.*

Observaţia 4.1.3. *Un spaţiu geodezic Ptolemeu compact este uniform convex.*

Pentru a întelege relaţia dintre spaţiile CAT(0) şi cele geodezice Ptolemeu cu un operator de punct mijlociu uniform continuu, ar fi interesant de studiat regularitatea unui modul de convexitate uniformă. O primă întrebare este aceea dacă există un astfel de modul care nu depinde de raza bilelor.

Corolarul 4.1.1. *Fie X un spaţiu geodezic Ptolemeu cu un operator de punct mijlociu uniform continuu. Atunci pentru fiecare $\epsilon \in (0,2]$ şi fiecare $R > 0$, există $\delta(\epsilon) \in (0,1]$ astfel încât este un modul de convexitate pentru orice bilă de rază r cu $\frac{1}{R} \leq r \leq R$.*

Studiem în continuare proiecţia metrică în cadrul spaţiilor Ptolemeu mărginite şi complete care admit un operator de punct mijlociu uniform continuu.

Propoziţia 4.1.1. *Fie X un spaţiu geodezic Ptolemeu mărginit şi complet care admite un operator de punct mijlociu uniform continuu şi fie $C \in \mathcal{P}_{cl,cv}(X)$. Atunci proiecţia metrică P_C este un operator univoc şi uniform continuu.*

Am văzut în Corolarul 4.1.1 că, pentru bile de rază care nu converge la zero sau infinit, modulul de convexitate nu depinde de rază. O modalitate de a evita aceste două situaţii extreme este de a considera spaţiul mărginit şi satisfăcând următoarea proprietate.

Definiţia 4.1.2. *Fie X un spaţiu geodezic. Spunem că X admite un operator de punct mijlociu tare uniform continuu dacă există $m : X \times X \to X$ astfel încât*

$$d(x, m(x, y)) = d(y, m(x, y)) = \frac{d(x, y)}{2} \quad \text{pentru fiecare } x, y \in X,$$

şi pentru $n \in \mathbb{N}$ şi $\varphi_n \geq 0$, $x_n, x'_n, y_n, y'_n \in X$ cu

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n d(x_n, x'_n) = 0 \quad \text{şi} \quad \lim_{n\to\infty} \varphi_n d(y_n, y'_n) = 0$$

avem că

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n d(m(x_n, y_n), m(x'_n, y'_n)) = 0.$$

Evident, un operator de punct mijlociu tare uniform continuu este şi uniform continuu. Este uşor de văzut că un spaţiu geodezic Busemann convex admite un operator de punct mijlociu tare uniform continuu. În acelaşi timp există spaţii care au un operator de punct mijlociu tare uniform continuu, dar care nu sunt Busemann convexe.

Următorul rezultat este o consecinţă a celor menţionate mai sus.

Teorema 4.1.4. *Un spaţiu geodezic Ptolemeu mărginit cu un operator de punct mijlociu uniform continuu este uniform convex şi admite un modul de convexitate care nu depinde de raza bilelor.*

4.1.3 Versiuni sferice şi hiperbolice ale inegalităţii Ptolemeu

În această subsecţiune prezentăm două analoage ale inegalităţii Ptolemeu pentru spaţii sferice şi hiperbolice. Aceste inegalităţi au fost studiate de către Valentine în [75, 76]. Aici suntem interesaţi de variante ale acestor inegalităţi pentru spaţiile M^2_κ. Demonstrăm că aceste inegalităţi de tip Ptolemeu sunt satisfăcute în spaţiile CAT(κ) şi introducem versiuni generalizate ale convexităţii Busemann. Punem apoi întrebarea dacă se pot folosi aceste noţiuni pentru a da o caracterizare a spaţiilor CAT(κ) similară cu cea pentru spaţii CAT(0) din [21]. Nu avem un răspuns la această întrebare, dar includem rezultate care studiază aceste noţiuni.

Începem prin a observa că sfera din $\mathbb{E}^3$ nu este un spaţiu Ptolemeu. Pe de altă parte, Valentine [75] a arătat că pentru orice $x, y, z, p \in \mathbb{S}^2$,

$$\sin\frac{d(x,z)}{2}\sin\frac{d(y,p)}{2} \leq \sin\frac{d(x,y)}{2}\sin\frac{d(z,p)}{2} + \sin\frac{d(x,p)}{2}\sin\frac{d(y,z)}{2}.$$

Pe baza acestei inegalităţi, este imediat că pentru orice $x, y, z, p \in M^2_\kappa$, unde $\kappa > 0$,

$$\sin\frac{d(x,z)\sqrt{\kappa}}{2}\sin\frac{d(y,p)\sqrt{\kappa}}{2} \leq \sin\frac{d(x,y)\sqrt{\kappa}}{2}\sin\frac{d(z,p)\sqrt{\kappa}}{2} + \sin\frac{d(x,p)\sqrt{\kappa}}{2}\sin\frac{d(y,z)\sqrt{\kappa}}{2}. \tag{4.1}$$

Un rezultat similar a fost demonstrat în [76] pentru spaţii hiperbolice folosind funcţia sinus hiperbolic în locul funcţiei sinus. Mai precis, pentru orice $x, y, z, p \in \mathbb{H}^2$,

$$\sinh\frac{d(x,z)}{2}\sinh\frac{d(y,p)}{2} \leq \sinh\frac{d(x,y)}{2}\sinh\frac{d(z,p)}{2} + \sinh\frac{d(x,p)}{2}\sinh\frac{d(y,z)}{2}.$$

Astfel, pentru orice $x, y, z, p \in M^2_\kappa$, unde $\kappa < 0$,

$$\begin{aligned}\sinh\frac{d(x,z)\sqrt{-\kappa}}{2}\sinh\frac{d(y,p)\sqrt{-\kappa}}{2} \leq{} & \sinh\frac{d(x,y)\sqrt{-\kappa}}{2}\sinh\frac{d(z,p)\sqrt{-\kappa}}{2} \\ & + \sinh\frac{d(x,p)\sqrt{-\kappa}}{2}\sinh\frac{d(y,z)\sqrt{-\kappa}}{2}.\end{aligned} \tag{4.2}$$

În continuare ne vom referi la inegalităţile (4.1) şi (4.2) drept *inegalitatea κ-Ptolemeu*, valoarea lui κ (mai mică sau mai mare decât 0) făcând diferenţa între cele două cazuri. Observăm că putem defini inegalitatea 0-Ptolemeu ca fiind inegalitatea clasică Ptolemeu. Un *spaţiu κ-Ptolemeu* este un spaţiu metric în care este satisfăcută inegalitatea κ-Ptolemeu. Demonstrăm mai jos o proprietate de continuitate.

Propoziţia 4.1.2. *Inegalitatea κ-Ptolemeu devine inegalitatea clasică Ptolemeu atunci când κ tinde la 0.*

Demonstrăm că spaţiile $\mathrm{CAT}(\kappa)$ sunt spaţii κ-Ptolemeu.

Teorema 4.1.5. *Fie X un spaţiu $\mathrm{CAT}(\kappa)$ având $\operatorname{diam}(X) < \pi/(2\sqrt{\kappa})$ pentru $\kappa > 0$. Atunci X este un spaţiu κ-Ptolemeu.*

În continuare includem proprietăţi ale spaţiilor geodezice κ-Ptolemeu.

Propoziţia 4.1.3. *Fie X un spaţiu geodezic κ-Ptolemeu, unde $\kappa > 0$ şi $\operatorname{diam}(X) < 2\pi/\sqrt{\kappa}$. Atunci, pentru fiecare $x, y, z \in X$ şi m un punct mijlociu al unui segment care uneşte pe x şi y, avem că*

$$\sin \frac{d(z,m)\sqrt{\kappa}}{2} \le \frac{1}{2} \frac{1}{\cos \frac{d(x,y)\sqrt{\kappa}}{4}} \left(\sin \frac{d(z,x)\sqrt{\kappa}}{2} + \sin \frac{d(z,y)\sqrt{\kappa}}{2} \right).$$

Propoziţia 4.1.4. *Fie X un spaţiu geodezic κ-Ptolemeu, unde $\kappa < 0$. Atunci, pentru fiecare $x, y, z \in X$ şi m un punct mijlociu al unui segment care uneşte pe x şi y, avem că*

$$\sinh \frac{d(z,m)\sqrt{-\kappa}}{2} \le \frac{1}{2} \frac{1}{\cosh \frac{d(x,y)\sqrt{-\kappa}}{4}} \left(\sinh \frac{d(z,x)\sqrt{-\kappa}}{2} + \sinh \frac{d(z,y)\sqrt{-\kappa}}{2} \right).$$

Observaţia 4.1.4. Metrica unui spaţiu geodezic κ-Ptolemeu, unde $\kappa < 0$, este convexă.

Teorema 4.1.6. *Fie X un spaţiu geodezic κ-Ptolemeu, unde $\kappa < 0$, care admite un operator de punct mijlociu continuu. Atunci X este unic geodezic.*

Definim mai jos versiuni generalizate ale convexităţii Busemann. Considerăm un triunghi geodezic având lungimile laturilor a, b, c şi fie m lungimea a unui segment care uneşte puncte mijlocii ale laturilor de lungime a, respectiv b.

Definiţia 4.1.3. *Fie X un spaţiu geodezic cu $\operatorname{diam}(X) < \pi/\sqrt{\kappa}$ pentru $\kappa > 0$. Spunem că X este κ-Busemann convex dacă*

$$\cos\left(m\sqrt{\kappa}\right) \ge \frac{1 + \cos\left(a\sqrt{\kappa}\right) + \cos\left(b\sqrt{\kappa}\right) + \cos\left(c\sqrt{\kappa}\right)}{4 \cos \frac{a\sqrt{\kappa}}{2} \cos \frac{b\sqrt{\kappa}}{2}} \quad \textit{pentru } \kappa > 0$$

şi

$$\cosh\left(m\sqrt{-\kappa}\right) \le \frac{1 + \cosh\left(a\sqrt{-\kappa}\right) + \cosh\left(b\sqrt{-\kappa}\right) + \cosh\left(c\sqrt{-\kappa}\right)}{4 \cosh \frac{a\sqrt{-\kappa}}{2} \cosh \frac{b\sqrt{-\kappa}}{2}} \quad \textit{pentru } \kappa < 0,$$

unde a, b, c şi m sunt ca mai sus.

Convexitatea 0-Busemann se poate defini drept convexitatea Busemann în sensul clasic. Pe baza definiţiei, este clar că un spaţiu $\mathrm{CAT}(\kappa)$ (de diametru $< \pi/\sqrt{\kappa}$ pentru $\kappa > 0$) este κ-Busemann convex. De asemenea, un spaţiu κ-Busemann convex (de diametru $< \pi/\sqrt{\kappa}$ pentru $\kappa > 0$) este unic geodezic. Demonstrăm în continuare următoarea proprietate de continuitate.

Propoziţia 4.1.5. *Convexitatea κ-Busemann devine convexitatea Busemann atunci când κ tinde la* 0.

Observaţia 4.1.5. Fie X un spaţiu geodezic care este κ-Busemann convex pentru $\kappa < 0$. Atunci X este Busemann convex.

Observaţia 4.1.6. Punem întrebarea dacă se pot caracteriza spaţiile CAT(κ) folosind inegalitatea κ-Ptolemeu şi convexitatea κ-Busemann. Mai precis, este un spaţiu geodezic κ-Ptolemeu care este κ-Busemann convex un spaţiu CAT(κ)?

4.2 Puncte fixe în spaţii geodezice Ptolemeu

Proprietăţile spaţiilor geodezice Ptolemeu stabilite în Subsecţiunea 4.1.1, în special Teorema 4.1.2, ne permit să demonstrăm o clasă largă de rezultate de punct fix în acest cadru. Aici menţionăm doar Teorema lui Kirk în spaţii geodezice Ptolemeu, cu observaţia că multe rezultate de punct fix a căror demonstraţie se bazează pe unicitatea centrelor asimptotice şi pe convexitatea metricii pot fi transpuse în acest context.

Teorema 4.2.1. *Fie X un spaţiu geodezic Ptolemeu complet cu un operator de punct mijlociu uniform continuu şi $K \in \mathcal{P}_{b,cl,cv}(X)$. Presupunem că $T : K \to K$ este un operator neexpansiv. Atunci* $\mathrm{Fix}(T)$ *este nevidă, închisă şi convexă.*

Capitolul 5

Puncte reciproc apropiate şi îndepărtate ale două mulţimi şi Teorema Picăturii în spaţii geodezice

Fie A şi X submulţimi nevide, mărginite şi închise ale unui spaţiu metric (E, d). *Problema de minimizare* (resp. *maximizare*) notată prin $\min(A, X)$ (resp. $\max(A, X)$) constă în a determina $(a_0, x_0) \in A \times X$ astfel încât $d(a_0, x_0) = \inf \{d(a, x) : a \in A, x \in X\}$ (resp. $d(a_0, x_0) = \sup \{d(a, x) : a \in A, x \in X\}$). În acest capitol studiem astfel de probleme în diferite spaţii geodezice presupunând condiţii diferite asupra celor două mulţimi, unde mulţimea A este fixă. Includem rezultate generice asupra proprietăţii acestor probleme de a fi bine puse. În plus, analizăm situaţiile când una dintre mulţimi sau ambele sunt compacte şi demonstrăm rezultate specifice spaţiilor CAT(0). Demonstrăm şi o variantă a Teoremei Picăturii în spaţii geodezice Busemann convexe pe care o aplicăm pentru a obţine un rezultat de optimizare pentru funcţionale convexe. Majoritatea rezultatelor din acest capitol sunt incluse în [20].

Pentru $A \in \mathcal{P}_{cl}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{P}_{b,cl}(E)$) şi $x \in E \setminus A$, *problema celui mai apropiat punct* (resp. *problema celui mai îndepărtat punct*) al lui x faţă de A constă în a determina un punct $a_0 \in A$ (soluţia problemei) astfel încât $d(x, a_0) = \operatorname{dist}(x, A)$ (resp. $d(x, a_0) = \operatorname{Dist}(x, A)$). Stečkin [73] a fost unul dintre primii care a realizat că, în cazul în care E este un spaţiu Banach, proprietăţi geometrice precum convexitatea strictă, convexitatea uniformă, reflexivitatea şi altele joacă un rol important în studiul problemelor celor mai apropiate şi îndepărtate puncte. Contribuţiile sale au lansat o serie de rezultate numite "în spiritul lui Stečkin" deoarece ideile pe care le-a folosit au fost adaptate de către diferiţi autori în diverse contexte (a se vedea, de exemplu, [12, 13]). În [73], Stečkin a demonstrat, în particular, că pentru orice submulţime A nevidă şi închisă a unui spaţiu Banach uniform convex, complementara mulţimii punctelor $x \in E$, pentru care problema celui mai apropiat punct al lui x faţă de A are o soluţie unică, este de prima categorie Baire.

În [13], De Blasi, Myjak şi Papini au studiat probleme mai generale decât cele ale celui mai apropiat şi celui mai îndepărtat punct. Mai exact, au considerat problema determinării a două puncte care minimizează (resp. maximizează) distanţa dintre două submulţimi ale unui spaţiu Banach. Autorii s-au concentrat asupra proprietăţii acestor probleme de a fi bine puse, adică, a arăta unicitatea soluţiei şi convergenţa fiecărui şir de soluţii aproximative către această soluţie (a se vedea Secţiunea 5.3 pentru detalii). De asemenea, au demonstrat că dacă A este o submulţime nevidă, mărginită şi închisă a unui spaţiu Banach uniform convex E, familia mulţimilor din $\mathcal{P}_{b,cl,cv}(E)$ pentru care problema de maximizare, $\max(A,X)$, este bine pusă este o mulţime G_δ densă în familia $\mathcal{P}_{b,cl,cv}(E)$ înzestrată cu distanţa Pompeiu-Hausdorff. Pentru problema de minimizare, $\min(A,X)$, un rezultat similar este demonstrat, unde X aparţine unui subspaţiu particular al lui $\mathcal{P}_{b,cl,cv}(E)$. O sinteză bună legată de aspecte ale problemelor celor mai apropiate respectiv îndepărtate puncte în relaţie cu proprietăţi geometrice ale spaţiilor Banach poate fi găsită în [9].

Zamfirescu a iniţiat în [78] investigarea acestui tip de probleme în contextul spaţiilor geodezice. Mai târziu, cercetătorii s-au concentrat asupra adaptării ideilor lui Stečkin [73] în cadrul spaţiilor geodezice. În particular, Zamfirescu [79] a demonstrat că, într-un spaţiu geodezic complet E fără geodezice care se bifurcă, având o mulţime compactă şi fixată A, mulţimea punctelor $x \in E$, pentru care problema celui mai apropiat punct al lui x faţă de A are o soluţie unică, este de a doua categorie Baire. Motivaţi de acest rezultat, Kaewcharoen şi Kirk [36] au arătat că dacă E este un spaţiu CAT(0) complet cu proprietatea extensiei geodezicelor şi de curbură mărginită inferior global, iar A este o mulţime închisă şi fixată, atunci mulţimea punctelor $x \in E$ pentru care problema celui mai apropiat punct al lui x faţă de A are o soluţie unică, este de a doua categorie Baire. Un rezultat similar a fost demonstrat pentru problema celui mai îndepărtat punct. Rezultate foarte recente în contextul spaţiilor de curbură mărginită inferior global au fost obţinute în [17], unde autorii au demonstrat teoreme de porozitate care sunt rezultate mai tari decât cele din [36].

În acest capitol suntem interesaţi şi de rezultatul geometric cunoscut drept Teorema Picăturii. Versiunea originală a acestei teoreme a fost demonstrată de către Daneš [10] şi este un instrument foarte folosit în analiza neliniară. În plus, este echivalentă cu Principiul Variaţional Ekeland şi cu Teorema Petalei [65]. În [25], sunt demonstrate versiuni generalizate ale Teoremei Picăturii şi apoi utilizate în demonstraţiile diferitor probleme de minimizare.

Scopul acestui capitol este de a studia în contextul spaţiilor metrice geodezice problema de minimizare (resp. maximizare) a distanţei dintre două mulţimi, considerată iniţial de către De Blasi, Myjak şi Papini în [13] pentru spaţii Banach uniform convexe.

La începutul acestui capitol includem o secţiune preliminară ce conţine noţiuni şi rezultate cunoscute pe care le folosim în continuare.

Secţiunea 5.2 introduce probleme de cea mai bună aproximare a unui punct faţă de o mulţime atât în cadrul Banach cât şi în cel metric şi prezintă rezultate de existenţa şi rezultate asupra proprietăţii acestor probleme de a fi bine puse.

Secţiunea 5.3 începe cu probleme de minimizare şi maximizare în spaţii Banach uniform convexe amintind un rezultat demonstrat în [13] legat de proprietatea acestor probleme de a fi bine puse. Contribuţiile noastre sunt structurate în două subsecţiuni. Prima subsecţiune demonstrează o proprietate a învelitorii convexe a reuniunii unei mulţimi convexe cu un punct în spaţii geodezice Busemann convexe (Lema 5.3.1). Majoritatea rezultatelor pe care le demonstrăm în acest capitol se bazează pe această lemă. Fie A o submulţime nevidă, mărginită şi închisă a unui spaţiu geodezic, E, care este Busemann convex, de curbură mărginită inferior global şi are proprietatea extensiei geodezicelor. Demonstrăm că familia submulţimilor din $\mathcal{P}_{b,cl,cv}(E)$, pentru care problema maximizării, $\max(A,X)$, este bine pusă, este o mulţime G_δ densă în familia $\mathcal{P}_{b,cl,cv}(E)$ înzestrată cu distanţa Pompeiu-Hausdorff (Teorema 5.3.4). Dăm un rezultat similar pentru problema de minimizare, $\min(A,X)$, fără a necesita proprietatea extensiei geodezicelor (Teorema 5.3.3). Aceste rezultate sunt analoage celor obţinute de către De Blasi, Myjak şi Papini [13] în cadrul spaţiilor Banach uniform convexe. Încheiem această subsecţiune concentrându-ne asupra cazului spaţiilor CAT(0) unde geometria bogată a acestor spaţii este folosită pentru a relaxa anumite condiţii legate de proprietatea acestor probleme de a fi bine puse (Propoziţia 5.3.3). În cea de-a doua subsecţiune începem prin a demonstra că orice spaţiu reflexiv Busemann convex este complet (Lema 5.3.3). Această proprietate este folosită în următoarele rezultate unde arătăm că dacă presupunem condiţii de compactitate asupra mulţimilor, atunci condiţia ca spaţiul să fie de curbură mărginită inferior global nu mai este necesară. Discutăm atât problema minimizării (Teorema 5.3.5) cât şi pe cea a maximizării (Teorema 5.3.6) atunci când înlocuim condiţia asupra curburii cu proprietatea spaţiului de a nu avea geodezice care se bifurcă introdusă de către Zamfirescu în [79]. Obţinem, de asemenea, un corolar în legătură cu proprietatea problemei de minimizare de a fi bine pusă în contextul spaţiilor CAT(0) (Corolarul 5.3.1).

În Secţiunea 5.4 demonstrăm Teorema Picăturii în spaţii geodezice Busemann convexe (Teorema 5.4.2). Utilizăm apoi această teoremă pentru a studia o problemă de optimizare pentru funcţionale convexe şi continue definite pe spaţii geodezice (Teorema 5.4.3). Acest rezultat este semnificativ deoarece poate fi folosit pentru a deduce rezultate de cea mai bună aproximare ca şi consecinţe simple ale sale (de exemplu Corolarul 5.4.1).

5.1 Preliminarii

În această secţiune reamintim noţiuni şi rezultate pe care le folosim în acest capitol şi care nu au fost necesare până în acest punct.

5.2 Problemele celor mai apropiate şi celor mai îndepărtate puncte

Includem în această secţiune rezultate legate de problemele celor mai apropiate şi îndepărtate puncte, acordând atenţie, în special, existenţei soluţiilor şi proprietăţii acestor probleme de a fi bine puse (a se vedea [17, 12, 36, 73, 79]).

5.3 Probleme de minimizare şi maximizare între două mulţimi

În [13], De Blasi, Myjak şi Papini au studiat problema determinării a două puncte care minimizează (resp. maximizează) distanţa dintre două submulţimi ale unui spaţiu Banach. Deşi următoarele noţiuni precum şi propoziţia de mai jos au fost date iniţial în cadrul spaţiilor Banach, ele pot fi introduse în contextul spaţiilor metrice geodezice (sau chiar a celor metrice). În această secţiune, dacă nu se menţionează altceva, E este un spaţiu metric geodezic complet. La fel ca şi în [13], pentru $X, Y \in \mathcal{P}_{b,cl}(E)$ şi $\sigma > 0$, considerăm mulţimile

$$\lambda_{XY} = \inf\{d(x,y) : x \in X, y \in Y\}, \quad \mu_{XY} = \sup\{d(x,y) : x \in X, y \in Y\},$$

$$L_{XY}(\sigma) = \{x \in X : \operatorname{dist}(x,Y) \leq \lambda_{XY} + \sigma\},$$
$$M_{XY}(\sigma) = \{x \in X : \operatorname{Dist}(x,Y) \geq \mu_{XY} - \sigma\}.$$

Problema de minimizare (resp. *maximizare*) notată prin $\min(X,Y)$ (resp. $\max(X,Y)$) constă în determinarea $(x_0, y_0) \in X \times Y$ (*soluţia* problemei) astfel încât $d(x_0, y_0) = \lambda_{XY}$

(resp. $d(x_0, y_0) = \mu_{XY}$). Un şir (x_n, y_n) din $X \times Y$ pentru care $d(x_n, y_n) \to \lambda_{XY}$ (resp. $d(x_n, y_n) \to \mu_{XY}$) se numeşte şir *minimizant* (resp. *maximizant*). Problema $\min(X, Y)$ (resp. $\max(X, Y)$) este *bine pusă* dacă are o soluţie unică $(x_0, y_0) \in X \times Y$ şi pentru fiecare şir minimizant (resp. maximizant) (x_n, y_n) avem că $x_n \to x_0$ şi $y_n \to y_0$. În continuare, dăm o caracterizare a proprietăţii problemelor $\min(X, Y)$ (resp. $\max(X, Y)$) de a fi bine puse.

Propoziţia 5.3.1 (De Blasi, Myjak, Papini [13]). *Fie (E, d) un spaţiu metric geodezic complet şi $X, Y \in \mathcal{P}_{b,cl}(E)$. Problema $\min(X, Y)$ (resp. $\max(X, Y)$) este bine pusă dacă şi numai dacă*

$$\inf_{\sigma>0} \operatorname{diam}(L_{XY}(\sigma)) = 0 \quad \text{şi} \quad \inf_{\sigma>0} \operatorname{diam}(L_{YX}(\sigma)) = 0,$$

$$(\text{resp.} \inf_{\sigma>0} \operatorname{diam}(M_{XY}(\sigma)) = 0 \quad \text{şi} \quad \inf_{\sigma>0} \operatorname{diam}(M_{YX}(\sigma)) = 0).$$

Pentru a enunţa rezultatele demonstrate în [13], considerăm E un spaţiu Banach uniform convex, $A \in \mathcal{P}_{b,cl}(E)$ şi

$$\mathcal{P}^A_{b,cl,cv}(E) = \overline{\{X \in \mathcal{P}_{b,cl,cv}(E) : \lambda_{AX} > 0\}}.$$

Atunci, $(\mathcal{P}^A_{b,cl,cv}(E), H)$ este un spaţiu metric complet. Următoarele rezultate de minimizare şi maximizare au fost date în [13].

Teorema 5.3.1 (De Blasi, Myjak, Papini [13]). *Fie E un spaţiu Banach uniform convex şi $A \in \mathcal{P}_{b,cl}(E)$. Atunci,*

$$\{X \in \mathcal{P}^A_{b,cl,cv}(E) : \min(A, X) \text{ este bine pusă}\}$$

este o mulţime G_δ densă în $\mathcal{P}^A_{b,cl,cv}(E)$.

Teorema 5.3.2 (De Blasi, Myjak, Papini [13]). *Fie E un spaţiu Banach uniform convex şi $A \in \mathcal{P}_{b,cl}(E)$. Atunci,*

$$\{X \in \mathcal{P}_{b,cl,cv}(E) : \max(A, X) \text{ este bine pusă}\}$$

este o mulţime G_δ densă în $\mathcal{P}_{b,cl,cv}(E)$.

În următoarele două subsecţiuni studiem probleme de minimizare şi maximizare între mulţimi în spaţii metrice geodezice particulare.

5.3.1 Rezultate în spaţii Busemann convexe de curbură mărginită inferior global

Începem această subsecţiune prin a da o estimare pentru $\operatorname{dist}(y, X)$, unde $X \in \mathcal{P}_{b,cv}(E)$, $x' \in E$ astfel încât $\operatorname{dist}(x', X) > 0$ şi $y \in \overline{\operatorname{co}}(X \cup \{x'\})$. Este uşor de văzut că într-un spaţiu metric geodezic Busemann convex, $\operatorname{dist}(y, X) < \operatorname{dist}(x', X)$ pentru fiecare $y \in \operatorname{co}(X \cup \{x'\})$ cu $y \neq x'$. Îmbunătăţim această margine superioară în felul următor.

Lema 5.3.1. *Fie E un spaţiu metric Busemann convex şi $X \in \mathcal{P}_{b,cv}(E)$. Presupunem că $x' \in E$ astfel încât $\operatorname{dist}(x', X) > 0$. Atunci, pentru orice $y \in \overline{\operatorname{co}}(X \cup \{x'\})$,*

$$\operatorname{dist}(y, X) \leq \operatorname{dist}(x', X) - \frac{\operatorname{dist}(x', X)}{\operatorname{dist}(x', X) + \operatorname{diam}(X)} d(x', y). \tag{5.1}$$

Enunţăm mai jos o proprietate a spaţiilor Banach care a fost folosită în [13] pentru a demonstra probleme de minimizare şi maximizare între două mulţimi în spaţii Banach.

Propoziţia 5.3.2 (De Blasi, Myjak, Papini [13]). *Fie E un spaţiu Banach, $X \in \mathcal{P}_{b,cl,cv}(E)$ şi $\epsilon, r > 0$. Atunci există $0 < \tau_0 < r$ astfel încât pentru orice $u \in E$ cu $\operatorname{dist}(u, X) \geq r$ şi pentru orice $0 < \tau \leq \tau_0$ avem că*

$$\operatorname{diam}(C_{X,u}(\tau)) < \epsilon,$$

unde

$$C_{X,u}(\tau) = [\overline{\operatorname{co}}(X \cup \{u\})] \setminus [X + (\operatorname{dist}(u, X) - \tau)B(0, 1)].$$

Următoarea lemă este o variantă în cadrul metric a propoziţiei de mai sus.

Lema 5.3.2. *Fie E un spaţiu metric Busemann convex şi $X \in \mathcal{P}_{b,cv}(E)$. Pentru $r > 0$, $x' \in E$ cu $\operatorname{dist}(x', X) \geq r$ şi $n \in \mathbb{N}$ cu $1/n < r$ definim*

$$C_n = \overline{\operatorname{co}}\,(X \cup \{x'\}) \setminus \bigcup_{x \in X} B(x, \operatorname{dist}(x', X) - 1/n).$$

Atunci, şirul $(\operatorname{diam}(C_n))$ converge la 0 uniform în raport cu $x' \in E$ pentru care $\operatorname{dist}(x', X) \geq r$.

Pentru a prezenta rezultatele noastre principale, introducem următoarele notaţii. Fie $A \in \mathcal{P}_{b,cl}(E)$ fixată. Atunci, notăm $\lambda_X = \lambda_{XA}$ şi $\mu_X = \mu_{XA}$ pentru $X \in \mathcal{P}_{b,cl}(E)$. Ca şi în [13], considerăm

$$\mathcal{P}^A_{b,cl,cv}(E) = \overline{\{X \in \mathcal{P}_{b,cl,cv}(E) : \lambda_X > 0\}}.$$

Înzestrată cu distanţa Pompeiu-Hausdorff, $\mathcal{P}^A_{b,cl,cv}(E)$ este un spaţiu metric complet dacă E este Busemann convex.

Demonstrăm cele două rezultate principale ale acestei subsecţiuni, care sunt analoage în cadrul geodezic ale Teoremelor 5.3.1 şi 5.3.2.

Teorema 5.3.3. *Fie E un spaţiu metric complet Busemann convex de curbură mărginită inferior global de $\kappa < 0$. Presupunem că $A \in \mathcal{P}_{b,cl}(E)$. Atunci,*

$$\mathcal{W}_{min} = \left\{X \in \mathcal{P}^A_{b,cl,cv}(E) : \min(A, X) \text{ este bine pusă}\right\}$$

este o mulţime G_δ densă în $\mathcal{P}^A_{b,cl,cv}(E)$.

Teorema 5.3.4. *Fie E un spaţiu metric complet Busemann convex cu proprietatea extensiei geodezicelor şi de curbură mărginită inferior global de $\kappa < 0$. Presupunem că $A \in \mathcal{P}_{b,cl}(E)$. Atunci,*

$$\mathcal{W}_{max} = \{X \in \mathcal{P}_{b,cl,cv}(E) : \max(A, X) \text{ este bine pusă}\}$$

este o mulţime G_δ densă în $\mathcal{P}_{b,cl,cv}(E)$.

Încheiem această subsecţiune cu o caracterizare a proprietăţii problemei $\min(X, Y)$ de a fi bine pusă în spaţii CAT(0) complete. Demonstrăm că, în următorul context particular, condiţiile din Propoziţia 5.3.1 pot fi relaxate.

Propoziţia 5.3.3. *Fie E un spaţiu CAT(0) complet, $X \in \mathcal{P}_{b,cl,cv}(E)$ şi $Y \in \mathcal{P}_{b,cl}(E)$. Problema $\min(X, Y)$ este bine pusă dacă şi numai dacă*

$$\inf_{\sigma > 0} \operatorname{diam}(L_{YX}(\sigma)) = 0.$$

5.3.2 Rezultate utilizând compactitatea

În această subsecţiune studiem aceleaşi probleme, dar modificăm anumite condiţii pe care le impunem în rezultatele noastre. Mai precis, ne concentrăm asupra situaţiei când mulţimea A este compactă. Arătăm că în această ipoteză, putem slăbi condiţiile asupra spaţiului geodezic de la a fi de curbură mărginită inferior global la a nu avea geodezice care se bifurcă. Totuşi, în prima teoremă avem nevoie sa adăugăm condiţia de reflexivitate asupra spaţiului. Începem cu următoarea proprietate a spaţiilor geodezice reflexive Busemann convexe.

Lema 5.3.3. *Fie (E, d) un spaţiu metric reflexiv Busemann convex. Atunci E este complet.*

Teorema 5.3.5. *Fie E un spaţiu metric reflexiv Busemann convex fără geodezice care se bifurcă. Presupunem că $A \in \mathcal{P}_{cp}(E)$. Atunci,*

$$\mathcal{W}_{min} = \left\{X \in \mathcal{P}^A_{b,cl,cv}(E) : \min(A, X) \text{ este bine pusă}\right\}$$

este o mulţime G_δ densă în $\mathcal{P}^A_{b,cl,cv}(E)$.

Corolarul 5.3.1. *Fie E un spaţiu $CAT(0)$ complet fără geodezice care se bifurcă. Presupunem că $A \in \mathcal{P}_{cp}(E)$. Atunci,*

$$\mathcal{W}_{min} = \left\{X \in \mathcal{P}^A_{b,cl,cv}(E) : \min(A, X) \text{ este bine pusă}\right\}$$

este o mulţime G_δ densă în $\mathcal{P}^A_{b,cl,cv}(E)$.

Observaţia 5.3.1. Demonstraţia Teoremei 5.3.5 se bazează pe faptul că problema $\min(A, X)$ are întotdeauna o soluţie. De fapt, reflexivitatea spaţiului este folosită în principal pentru a asigura această condiţie. De aceea, este natural să punem întrebarea dacă este posibil să renunţăm la condiţia ca problema să aibă o soluţie.

În continuare ne concentrăm asupra problemei de maximizare pentru A compactă. Pentru a urma aceeaşi direcţie de argumentare ca şi în rezultatul precedent, avem nevoie ca problema $\max(A, X)$ să aibă o soluţie. Dar, în [70], a fost demonstrat că într-un spaţiu Banach reflexiv, distanţa maximă de la un punct la o mulţime mărginită, închisă şi convexă se atinge dacă şi numai dacă spaţiul este finit dimensional. Acesta este motivul pentru care este natural să impunem condiţia de compactitate asupra mulţimii X în rezultatul nostru de mai jos.

Teorema 5.3.6. *Fie E un spaţiu geodezic complet fără geodezice care se bifurcă şi cu proprietatea extensiei geodezicelor. Presupunem că $A \in \mathcal{P}_{cp}(E)$. Atunci,*

$$\mathcal{W}_{max} = \{X \in \mathcal{P}_{cp}(E) : \max(A, X) \text{ este bine pusă}\}$$

este o mulţime G_δ densă în $\mathcal{P}_{cp}(E)$.

Observaţia 5.3.2. În ceea ce priveşte problema $\max(A, X)$, unde mulţimea fixată A este compactă, punem următoarea întrebare: este

$$\mathcal{W}_{max} = \{X \in \mathcal{P}_{cp,cv}(E) : \max(A, X) \text{ este bine pusă}\}$$

o mulţime G_δ densă în $\mathcal{P}_{cp,cv}(E)$? Teorema Hopf-Rinow (a se vedea Propoziţia 3.7, Capitolul I.3 din [5]) afirmă că dacă E este complet şi local compact, atunci este propriu. Astfel, dacă spaţiul este în plus local compact şi Busemann convex, atunci putem răspunde afirmativ la întrebare.

5.4 Teorema Picăturii în spaţii Busemann convexe

În [10], Daneš a demonstrat următorul rezultat geometric cunoscut drept Teorema Picăturii.

Teorema 5.4.1 (Drop Theorem). *Fie* $(E, \|\cdot\|)$ *un spaţiu Banach şi* $A \in \mathcal{P}_{cl}(E)$ *astfel încât* $\inf\{\|x\| : x \in A\} > 1$. *Atunci există* $a \in A$ *astfel încât*

$$\mathrm{co}\,(B(0,1) \cup \{a\}) \cap A = \{a\}.$$

Denumirea acestei teoreme provine de la faptul că mulţimea $\mathrm{co}\,(B(0,1) \cup \{a\})$ a fost numită *picătură*. Echivalenţe ale acestui rezultat sau ale versiuni generalizate ale sale cu alte teoreme fundamentale din analiza neliniară, precum şi aplicaţii sunt discutate, de exemplu, în [25, 65].

În această secţiune demonstrăm o variantă a Teoremei Picăturii în cadrul spaţiilor metrice Busemann convexe.

Teorema 5.4.2. *Fie* (E, d) *un spaţiu metric complet Busemann convex şi fie* $A \in \mathcal{P}_{cl}(E)$ *şi* $B \in \mathcal{P}_{b,cl,cv}(E)$ *astfel încât* $\lambda_{AB} > 0$. *Presupunem că* $\epsilon > 0$. *Atunci există* $a \in A$ *astfel încât*

(i) $\mathrm{dist}(a, B) < \lambda_{AB} + \epsilon$;

(ii) $\overline{\mathrm{co}}\,(B \cup \{a\}) \cap A = \{a\}$;

(iii) $x_n \to a$ *pentru orice şir* (x_n) *din* $\overline{\mathrm{co}}\,(B \cup \{a\})$ *cu* $\mathrm{dist}(x_n, A) \to 0$.

Ca şi aplicaţie a acestei versiuni a Teoremei Picăturii, obţinem o analoagă a unui rezultat de optimizare demonstrat de Georgiev (a se vedea Teorema 4.2 din [25]) în contextul spaţiilor Banach. Pentru a enunţa acest rezultat, avem nevoie să introducem anumite noţiuni care pot fi găsite în [25].

Fie (E, d) un spaţiu metric complet, $f : E \to \mathbb{R}$ o funcţională semi-continuă inferior care este mărginită inferior, şi $A \in \mathcal{P}_{b,cl}(E)$. *Problema de minimizare*, notată prin $\min(A, f)$, constă în determinarea unui $x_0 \in A$ (soluţia problemei) astfel încât $f(x_0) = \inf\{f(x) : x \in A\}$.
Pentru $\sigma > 0$, fie

$$L_{A,f}(\sigma) = \left\{ x \in E : f(x) \le \inf_{y \in A} f(y) + \sigma \text{ şi } \mathrm{dist}(x, A) \le \sigma \right\}.$$

Problema $\min(A, f)$ este *bine pusă în sensul Levitin-Polyak* (a se vedea [55, 68]) dacă

$$\inf_{\sigma > 0} \mathrm{diam}\,(L_{A,f}(\sigma)) = 0.$$

Această proprietate este echivalentă cu cerinţa ca problema să aibă o soluţie unică $x_0 \in A$ şi orice şir (x_n) din E converge la x_0 dacă $f(x_n) \to f(x_0)$ şi $\mathrm{dist}(x_n, A) \to 0$.

Următoarea lemă este o variantă similară a Lemei 4.1 din [25] pentru spaţii metrice geodezice.

Lema 5.4.1. *Fie* E *un spaţiu geodezic,* $X \in \mathcal{P}_b(E)$ *şi* $f : E \to \mathbb{R}$ *continuă şi convexă. Pentru* $c \in \mathbb{R}$, *fie* $A = \{x \in E : f(x) \le c\}$. *Presupunem că există* $z \in E$ *astfel încât* $f(z) < c$. *Atunci, pentru fiecare* $\epsilon > 0$, *există* $\delta > 0$ *astfel încât* $\mathrm{dist}(x, A) < \epsilon$ *pentru orice* $x \in X$ *cu* $f(x) < c + \delta$.

Demonstrăm următorul rezultat de optimizare.

Teorema 5.4.3. *Fie E un spaţiu metric complet Busemann convex şi fie $f : E \to \mathbb{R}$ o funcţională continuă, convexă, mărginită inferior pe mulţimi mărginite şi care satisface una dintre următoarele condiţii:*

(i) $\inf_{x \in E} f(x) = -\infty$;

(ii) *există $z_0 \in E$ astfel încât $f(z_0) = \inf_{x \in E} f(x)$ şi orice şir (x_n) din E converge la z_0 dacă $f(x_n) \to f(z_0)$.*

Atunci,

$$\mathcal{W}_{min} = \{X \in \mathcal{P}_{b,cl,cv}(E) : \min(X, f) \textit{ este bine pusă în sensul Levitin-Polyak}\}$$

este o mulţime G_δ densă în $\mathcal{P}_{b,cl,cv}(E)$.

Teorema 5.4.3 nu este doar interesantă în sine, ci este şi importantă deoarece diverse rezultate de cea mai bună aproximare rezultă ca simple consecinţe ale acesteia. Încheiem prezentarea noastră derivând o astfel de consecinţă care este, de fapt, o extensie a unui rezultat demonstrat în [11].

Corolarul 5.4.1. *Fie E un spaţiu metric complet Busemann convex şi $y \in E$. Atunci,*

$$\mathcal{W}_{min} = \{X \in \mathcal{P}_{b,cl,cv}(E) : \min(y, X) \textit{ este bine pusă}\}$$

este o mulţime G_δ densă în $\mathcal{P}_{b,cl,cv}(E)$.

Bibliografie

[1] M. Akkouchi, On a result of W.A. Kirk and L.M. Saliga, J. Comput. Appl. Math., 142 (2002), 445-448.

[2] A.D. Alexandrov, A theorem on triangles in a metric space and some of its applications, Trudy Mat. Inst. Steklov, 38 (1951), 5-23.

[3] N. Aronszajn, P. Panitchpakdi, Extensions of uniformly continuous transformations and hyperconvex metric spaces, Pacific J. Math., 6 (1956), 405-439.

[4] J.B. Baillon, Nonexpansive mapping and hyperconvex spaces, Contemp. Math., 72 (1988), 11-19.

[5] M.R. Bridson, A. Haefliger, Metric Spaces of Non-positive Curvature, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[6] F.E. Browder, Fixed point theorems for noncompact mappings in Hilbert spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 43 (1965), 1272-1276.

[7] F.E. Browder, Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 54 (1965), 1041-1044.

[8] D. Burago, Y. Burago, S. Ivanov, A Course in Metric Geometry, Amer. Math. Soc., Providence RI, 2001.

[9] Ş. Cobzaş, Geometric properties of Banach spaces and the existence of nearest and farthest points, Abstr. Appl. Anal., 2005 (2005), 259-285.

[10] J. Daneš, A geometric theorem useful in nonlinear functional analysis, Boll. Un. Mat. Ital, 6 (1972), 369-372.

[11] F.S. De Blasi, J. Myjak, On the minimum distance theorem to a closed convex set in a Banach space, Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math., 29 (1981), 373-376.

[12] F.S. De Blasi, J. Myjak, P.L. Papini, Porous sets in best approximation theory, J. London Math. Soc., 44 (1991), 135-142.

[13] F.S. De Blasi, J. Myjak, P.L. Papini, On mutually nearest and mutually furthest points of sets in Banach spaces, J. Approx. Theory, 70 (1992), 142-155.

[14] R. Espínola, A. Fernández-León, CAT(κ)-spaces, weak convergence and fixed points, J. Math. Anal. Appl., 353 (2009), 410-427.

[15] R. Espínola, A. Fernández-León, B. Piątek, Fixed points of single- and set-valued mappings in uniformly convex metric spaces with no metric convexity, Fixed Point Theory Appl., 2009 (2009), Article ID 169837, 16 pages.

[16] R. Espínola, N. Hussain, Common fixed points for multimaps in metric spaces, Fixed Point Theory Appl., 2010 (2010), Article ID 204981, 14 pages.

[17] R. Espínola, C. Li, G. López, Nearest and farthest points in spaces of curvature bounded below, J. Approx. Theory, 162 (2010), 1364-1380.

[18] R. Espínola, P. Lorenzo, A. Nicolae, Fixed points, selections and common fixed points for nonexpansive-type mappings, J. Math. Anal. Appl., 382 (2011), 503-515.

[19] R. Espínola, A. Nicolae, Geodesic Ptolemy spaces and fixed points, Nonlinear Anal., 74 (2011), 27-34.

[20] R. Espínola, A. Nicolae, Mutually nearest and farthest points of sets and the Drop Theorem in geodesic spaces, Monatsh. Math., doi 10.1007/s00605-010-0266-0 (în curs de publicare).

[21] T. Foertsch, A. Lytchak, V. Schroeder, Nonpositive curvature and the Ptolemy inequality, Int. Math. Res. Not. IMRN, 2007 (2007), Article ID rnm100, 15 pages.

[22] T. Foertsch, V. Schroeder, Group actions on geodesic Ptolemy spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 363 (2011), 2891-2906.

[23] T. Foertsch, V. Schroeder, Hyperbolicity, CAT(-1)-spaces and the Ptolemy inequality, Math. Annalen, 350 (2011), 339-356.

[24] J. García-Falset, E. Llorens-Fuster, T. Suzuki, Fixed point theory for a class of generalized nonexpansive mappings, J. Math. Anal. Appl., 375 (2011), 185-195.

[25] P.G. Georgiev, The Strong Ekeland Variational Principle, the Strong Drop Theorem and applications, J. Math. Anal. Appl., 131 (1988), 1-21.

[26] K. Goebel, W.A. Kirk, A fixed point theorem for asymptotically nonexpansive mappings, Proc. Amer. Math. Soc., 35 (1972), 171-174.

[27] K. Goebel, W.A. Kirk, A fixed point theorem for transformations whose iterates have uniform Lipschitz constant, Studia Math., 47 (1973), 135-140.

[28] K. Goebel, W.A. Kirk, Iteration processes for nonexpansive mappings, Contemp. Math., 21 (1983), 115-123.

[29] K. Goebel, W.A. Kirk, Topics in Metric Fixed Point Theory, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

[30] D. Göhde, Zum Prinzip der kontraktiven Abbildung, Math. Nach., 30 (1965), 251-258.

[31] J. Górnicki, A remark on fixed point theorems for Lipschitzian mappings, J. Math. Anal. Appl., 183 (1994), 495-508.

[32] A. Granas, J. Dugundji, Fixed Point Theory, Springer-Verlag, New York, 2003.

[33] M. Gromov, Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces, Birkhäuser, Boston, 1999.

[34] S. Hu, N. Papageorgiou, Handbook of Multivalued Analysis, vol. 1, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.

[35] N. Hussain, M.A. Khamsi, On asymptotic pointwise contractions in metric spaces, Nonlinear Anal., 71 (2009), 4423-4429.

[36] A. Kaewcharoen, W.A. Kirk, Proximinality in geodesic spaces, Abstr. Appl. Anal., 2006 (2006), Article ID 43591, 10 pages.

[37] J.L. Kelley, General Topology, Van Nostrand, Princeton NJ, 1955.

[38] M.A. Khamsi, Reflexive metric spaces and the fixed point property, in: H. Fetter Nathansky, B. Gamboa de Buen, K. Goebel, W.A. Kirk, B. Sims eds., Fixed Point Theory and its Applications, Yokohama Publ., Yokohama, 2006, pp. 137-147.

[39] M.A. Khamsi, W.A. Kirk, An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory, Wiley-Intersc., New York, 2001.

[40] M.A. Khamsi, W.A. Kirk, C. Martinez Yañez, Fixed point and selection theorems in hyperconvex spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 128 (2000), 3275-3283.

[41] M.A. Khamsi, W.A. Kirk, On uniformly Lipschitzian multivalued mappings in Banach and metric spaces, Nonlinear Anal., 72 (2010), 2080-2085.

[42] W.A. Kirk, A fixed point theorem for mappings which do not increase distances, Amer. Math. Monthly, 72 (1965), 1004-1006.

[43] W.A. Kirk, An abstract fixed point theorem for nonexpansive mappings, Proc. Amer. Math. Soc., 82 (1981), 640-642.

[44] W.A. Kirk, Hyperconvexity of $\mathbb{R}$-trees, Fund. Math., 156 (1998), 67-72.

[45] W.A. Kirk, Geodesic geometry and fixed point theory, in: D. Girela, G. López, R. Villa eds., Seminar of Mathematical Analysis, Proceedings, Universities of Malaga and Seville, Sept. 2002-Feb. 2003, Universidad de Sevilla, Sevilla, 2003, pp. 195-225.

[46] W.A. Kirk, Geodesic geometry and fixed point theory II, in: J. García-Falset, E. Llorens-Fuster, B. Sims eds., Fixed Point Theory and its Applications, Yokohama Publ., Yokohama, 2004, pp. 113-142.

[47] W.A. Kirk, Fixed point theorems in CAT(0) spaces and $\mathbb{R}$-trees, Fixed Point Theory Appl., 4 (2004), 309-316.

[48] W.A. Kirk, Some recent results in metric fixed point theory, J. Fixed Point Theory Appl., 2 (2007), 195-207.

[49] W.A. Kirk, S. Massa, Remarks on asymptotic and Chebyshev centers, Houston J. Math., 16 (1990), 357-364.

[50] W.A. Kirk, L.M. Saliga, Some results on existence and approximation in metric fixed point theory, J. Comput. Appl. Math., 113 (2000), 141-152.

[51] W.A. Kirk, B. Sims eds., Handbook of Metric Fixed Point Theory, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.

[52] W.A. Kirk, H.K. Xu, Asymptotic pointwise contractions, Nonlinear Anal., 69 (2008), 4706-4712.

[53] U. Kohlenbach, L. Leuştean, Asymptotically nonexpansive mappings in uniformly convex hyperbolic spaces, J. Eur. Math. Soc., 12 (2010), 71-92.

[54] E. Lami Dozo, Multivalued nonexpansive mappings and Opial's condition, Proc. Amer. Math. Soc., 38 (1973), 286-292.

[55] E.S. Levitin, B.T. Polyak, Convergence of minimizing sequences in conditional extremum problems, Soviet Math. Doklady, 7 (1966), 764-767.

[56] E.A. Lifšic, A fixed point theorem for operators in strongly convex spaces, Vorone z. Gos. Univ. Trudy Mat. Fak., 16 (1975), 23-28.

[57] T.C. Lim, A fixed point theorem for multivalued nonexpansive mappings in a uniformly convex Banach space, Bull. Amer. Math. Soc., 80 (1974), 1123-1126.

[58] T.C. Lim, H.K. Xu, Uniformly Lipschitzian mappings in metric spaces with uniform normal structure, Nonlinear Anal., 25 (1995), 1231-1235.

[59] A. Nicolae, On some generalized contraction type mappings, Appl. Math. Lett., 23 (2010), 133-136.

[60] A. Nicolae, Generalized asymptotic pointwise contractions and nonexpansive mappings involving orbits, Fixed Point Theory Appl., 2010 (2010), Article ID 458265, 19 pages.

[61] A. Nicolae, Fixed point theorems for multi-valued mappings of Feng-Liu type, Fixed Point Theory, 12 (2011), 145-154.

[62] A. Nicolae, Fixed points of uniformly Lipschitz type and asymptotically nonexpansive multivalued mappings (trimisă spre publicare).

[63] A. Nicolae, D. O'Regan, A. Petruşel, Fixed point theorems for single and multivalued generalized contractions in metric spaces endowed with a graph, Georgian Math. J., 18 (2011), 307-327.

[64] A. Papadopoulos, Metric Spaces, Convexity and Nonpositive Curvature, European Math. Soc., Zürich, 2005.

[65] J.P. Penot, The Drop Theorem, the Petal Theorem and Ekeland's Variational Principle, Nonlinear Anal., 10 (1986), 813-822.

[66] A. Razani, H. Salahifard, Invariant approximation for CAT(0) spaces, Nonlinear Anal., 72 (2010), 2421-2425.

[67] S. Reich, A.J. Zaslavski, Well-posedness of fixed point problems, Far East J. Math. Sci., Special Volume Part III (2001), 393-401.

[68] J.P. Revalski, Generic properties concerning well-posed optimization problems, C. R. Acad. Bulgar. Sci., 38 (1985), 1431-1434.

[69] I.A. Rus, A. Petruşel, G. Petruşel, Fixed Point Theory, Cluj Univ. Press, Cluj-Napoca, 2008.

[70] M. Sababheh, R. Khalil, Remotality of closed bounded convex sets in reflexive spaces, Numer. Funct. Anal. Optim., 29 (2008), 1166-1170.

[71] I.J. Schoenberg, A remark on M.M. Day's characterization of inner-product spaces and a conjecture of L.M. Blumenthal, Proc. Amer. Math. Soc., 3 (1952), 961-964.

[72] R. Sine, Hyperconvexity and nonexpansive multifunctions, Trans. Amer. Math. Soc., 315 (1989), 755-767.

[73] S.B. Stečkin, Approximation properties of sets in normed linear spaces, Rev. Roum. Math. Pures Appl., 8 (1963), 5-18.

[74] T. Suzuki, Fixed point theorems and convergence theorems for some generalized nonexpansive mappings, J. Math. Anal. Appl., 340 (2008), 1088-1095.

[75] J.E. Valentine, An analogue of Ptolemy's theorem in spherical geometry, Amer. Math. Monthly, 77 (1970), 47-51.

[76] J.E. Valentine, An analogue of Ptolemy's theorem and its converse in hyperbolic geometry, Pacific J. Math., 34 (1970), 817-825.

[77] W. Walter, Remarks on a paper by F. Browder about contractions, Nonlinear Anal., 5 (1981), 21-25.

[78] T. Zamfirescu, On the cut locus in Alexandrov spaces and applications to convex surfaces, Pacific J. Math., 217 (2004), 375-386.

[79] T. Zamfirescu, Extending Stechkin's theorem and beyond, Abstr. Appl. Anal., 2005 (2005), 255-258.