UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI, CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

DUALITĂŢI ŞI ECHIVALENŢE INDUSE DE FUNCTORI ADJUNCŢI

Rezumatul tezei

Conducător ştiinţific
Prof.Dr. Andrei Mărcuş

Doctorand
Flaviu Pop

Cluj-Napoca
2011

DUALITĂŢI ŞI ECHIVALENŢE INDUSE DE FUNCTORI ADJUNCŢI

FLAVIU POP

Contents

Cuvinte cheie: categorie abeliană; functori adjuncţi; functori covarianţi; functori contravarianţi; categorie Grothendieck; modul costar; rezoluţie dominantă; obiect faithful; obiect reflexiv; obiect static; dualitate; echivalenţă; dualitate Morita; modul tilting; modul cotilting; finitistic.

Introducere

O istorie a studiului echivalenţelor şi dualităţilor induse de perechi de functori adjuncţi, ca topic important în teoria modulelor, are ca punct de pornire anii '50. Atunci, Morita [38] şi Azumaya [6] au demonstrat câteva rezultate importante care generalizează câteva proprietăţi clasice ale modulelor peste inele de matrici peste corpuri, respectiv dualitatea clasică pentru spaţii vectoriale. Rezultatele lor caracterizează:

(1) o echivalenţă între două categorii de module drepte (stângi) peste două inele ca fiind reprezentată de functorii Hom covariant şi tensor, induşi de un bimodul *balanced* care este un progenerator, şi

(2) o dualitate între subcategorii de module drepte şi module stângi peste două inele, ca fiind reprezentate de către functorii contravarianţi Hom induşi de un bimodule *balanced* care este un cogenerator injectiv în ambele părţi.

Studiul echivalenţelor şi dualităţilor a dezvoltat concepte importante în teoria modulelor, ca *modul tilting* (introdus de către Brenner şi Butler [17]), *modul star* (introdus de către Menini şi Orsatti [36]), respectively *modul cotilting* (introdus de către Colby [20] şi Happel [31]) şi *modul costar* (introdus de către Colby şi Fuller [22]). Pentru un studiu aprofundat corespunzător acestor subiecte ne referim la cărţiile [23] şi [51] precum şi la articolele [21], [25], [52], [53] şi [54]. Toate aceste noţiuni menţionate sunt folosite de mulţi cercetători pentru a generaliza rezultatele clasice demonstrate de către Morita şi Azumaya.

Acest tip de studiu este deasemenea folositor într-un context mult mai general, pentru a aplica aceste rezultate şi la alte tipuri de categorii. De exemplu, Castaño-Iglesias, Gómez-Torrecillas şi Wisbauer au aplicat studiul perechilor de functori adjuncţi între categorii Grothendieck la categorii de module graduate şi la categorii de comodule [19]. Marcus şi Modoi [35] au folosit alte tipuri de echivalenţe pentru a studia categorii de module graduate. Colpi [24], Gregorio [30] şi Rump [47] au construit o teorie generală a obiectelor tilting în diverse categorii. Recent, Bazzoni [7] a considerat câteva categorii particulare de fracţii (care nu au, în general, sume directe infinite), iar Breaz [8], [10] a studiat functorii şi echivalenţele între categorii similare de fracţii pentru a aplica aceste rezultate la categoria grupurilor abeliene şi a quasi-omomorfismelor [1].

Oricum, pornind cu o pereche de functori adjuncţi între categorii abeliene, în particular categorii Grothendieck, putem construi alte perechi de functori adjuncţi. Este bine de ştiut dacă conceptele dezvoltate pentru categorii de module au loc şi în acest caz. De exemplu Castaño-Iglesias, Gómez-Torrecillas şi Wisbauer [19] au extins studiul echivalenţelor induse de functorii Hom covariant şi tensor la categorii Grothendieck, iar Castaño-Iglesias [18] a demonstrat că noţiunea de modul costar poate sa fie extinsă la categorii Grothendieck.

Urmărind acest punct de vedere, în această teză vom extinde noţiuni şi vom generaliza câteva rezultate de la categorii de module la categorii abeliene, pornind de la o pereche de functori (adjuncţi) F : $\mathcal{A} \rightleftarrows \mathcal{B}$: G între categorii abeliene. Mai precis, pe de o parte, dacă functorii consideraţi sunt contravarianţi şi adjuncţi la dreapta atunci vom extinde studiul dualităţilor induse de functorii contravarianţi Hom, iar pe de altă parte, dacă functorii consideraţi sunt covarianţi şi G este un adjunct la stânga pentru F, atunci vom extinde studiul echivalenţelor induse de functorii Hom covariant şi tensor.

Teza este structurată în două capitole, fiecare conţinând mai multe secţiuni, pe care le vom prezenta în continuare:

Capitolul 1. Dualităţi induse de functori adjuncţi. Acest capitol, dedicat studiului dualităţilor, este format din cinci secţiuni, după cum urmează:

1.1 Introducere, în care vom prezenta cadrul de lucru şi vom da exemple de perechi de functori aditivi contravarianţi care sunt adjuncţi la dreapta.

1.2 Preliminarii, care este dedicat prezentării noţiunilor de bază şi a rezultatelor de bază folosite pe parcursul acestui capitol. De exemplu sunt date şi demonstrate proprietăţi ale clasei add(X), pentru un obiect X, şi deasemenea sunt date şi demonstrate caracterizări ale termenilor reflexivi ale unor şiruri scurte exacte. Majoritatea rezultatelor pot fi găsite în [15], [16] şi [41].

1.3 Obiecte Costar. Finitistic-1-F-cotilting, în care mai întâi caracterizăm situaţia când F este U-w-π_f-exact printr-o dualitate între subcategorii pline ale lui $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$. Apoi, vom introduce o nouă versiune a noţiunii de *obiect costar*, similar cu cea introdusă de către Colby şi Fuller în categoriile de module şi vom demonstra deasemenea un rezultat care caracterizează această noţiune. În final, prezentăm două rezultate, unul dintre ele inspirat de un articol al lui Wisbauer [54], iar celălalt rezultat este o generalizare a [12, Theorem 2.8] la categorii abeliene. Exceptând ultimul rezultat, care este demonstrat în [16], toate celelalte rezultate ale acestei secţiuni sunt date şi demonstrate în [15].

1.4 Rezoluţii dominante, în care vom introduce noţiunile de *rezoluţii dominante* şi vom da o teoremă generală pentru categorii abeliene care dezvoltă anumite dualităţi induse de o pereche de functori contravarianţi adjuncţi la dreapta. Vom folosi acest rezultat pentru a generaliza câteva dualităţi cunoscute obţinute de către Wakamatsu [50] şi de către Breaz [12]. Deasemenea, este introdusă noţiunea de *obiect finitistic-n-F-cotilting* şi este caracterizată această noţiune cu ajutorul unei dualităţi. Toate rezultatele acestei secţiuni sunt publicate în [41].

1.5 Categoria $\mathrm{add}(U)$**-coplex** , în care este definită noţiunea de $\mathrm{add}(U)$-coplex, pentru un obiect reflexiv U, şi este deasemenea definită categoria $\mathrm{add}(U)$-coplexelor. Apoi, pornind de la perechea de functori $\mathrm{F} : \mathcal{A} \rightleftarrows \mathcal{B} : \mathrm{G}$, definim o nouă pereche de functori $(\mathrm{F}^U, \mathrm{G}^U)$ şi vom arăta că această nouă pereche de functori induce o dualitate. Această dualitate este o generalizare a dualităţii date de către Faticoni [27, Cap. 9].

Capitolul 2. Echivalenţe induse de functori adjuncţi. Acest capitol, focusat pe studiul echivalenţelor induse de o pereche de functori aditivi covaranţi ce sunt adjuncţi, este structurat astfel:

2.1 Introducere, în care prezentăm cadrul în care vom lucra şi vom da exemple de perechi de functori aditivi şi covarianţi, între anumite categorii, care sunt adjuncţi.

2.2 Preliminarii, în care sunt prezentate noţiuni şi rezultate de bază ce urmează a fi folosite pe tot parcursul capitolului. Ne referim aici la [42].

2.3 Proprietăţi de închidere în raport cu factorii θ**-Faithful**, în care suntem interesaţi de proprietăţi de închidere ale unor subcategorii pline $\overline{\mathcal{A}}$ şi $\overline{\mathcal{B}}$ astfel încât restricţiile $\mathrm{F} : \overline{\mathcal{A}} \rightleftarrows \overline{\mathcal{B}} : \mathrm{G}$ să inducă o echivalenţă. Un prim rezultat important este Propozitia 2.3.3, unde caracterizăm situaţia când $\overline{\mathcal{B}}$ este închisă la factorii faithful printr-o proprietate de închidere a lui $\overline{\mathcal{A}}$ şi printr-o proprietate de exactitate a lui F. Cel mai important rezultat este Teorema 2.3.4, unde caracterizăm situaţia când $\mathrm{F} : \overline{\mathcal{A}} \rightleftarrows \overline{\mathcal{B}} : \mathrm{G}$ este o echivalenţă cu clasa $\overline{\mathcal{B}}$ închisă la factorii θ-faithful. Apoi, acest rezultat este aplicat pentru proprietăţi de închidere ale unor clase construite pornind de la add(V), unde $V = \mathrm{F}(U)$, pentru un obiect static U. În continuare, continuăm şi dezvoltăm acest studiu, setând o nouă condiţie asupra lui $\overline{\mathcal{A}}$. Vom obţine noi versiuni ale rezultatelor prezentate anterior şi apoi aplicăm aceste noi rezultate la clasa particulară add(V). Toate aceste rezultate prezentate aici pot fi găsite în [42] şi [43].

În final aş vrea să menţionez că, pentru teoria categoriilor ne referim la cărţile [32], [37], [44], [45], pentru teoria modulelor ne referim la cărţile [4], [46], [48]. Deasemenea, ne referim pentru teoria modulelor graduate la [34] şi [40]. Alte cărti la care ne referim şi care sunt folositoare pentru studiul care se găseşte în această teză sunt [11], [13].

Sunt cu adevărat recunoscător domnului profesor Andrei Marcus pentru îndrumarea şi suportul privind munca mea şi aş vrea să multumesc şi domnului profesor Simion Breaz pentru tot sprijinul constant şi răbdarea pe care a avut-o , amândoi având un rol crucial în finalizarea acestei teze. Consideraţiile mele se îndreaptă şi către departamentul de algebră, pentru ajutorul pe care l-am primit din partea lor. Deasemenea aş vrea să îi mulţumesc lui Anca, soţia mea, pentru răbdarea şi suportul oferit.

Doctorand

Flaviu Pop

1. Dualităţi induse de functori adjuncţi

1.1. **Introducere.** Fie $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ categorii abeliene şi fie $\mathrm{F} : \mathcal{A} \rightleftarrows \mathcal{B} : \mathrm{G}$ o pereche de functori aditivi şi contravarianţi care sunt adjuncţi la dreapta, adică există izomorfismele naturale

$$\eta_{X,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \mathrm{G}(Y)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Y, \mathrm{F}(X)),$$

pentru orice $X \in \mathcal{A}$ şi pentru orice $Y \in \mathcal{B}$. Transformăriile naturale asociate adjuncţiei la dreapta $\eta_{X,Y}$ sunt definite astfel:

$$\delta : 1_{\mathcal{A}} \to \mathrm{GF},\ \delta_X = \eta^{-1}_{X,\mathrm{F}(X)}(1_{\mathrm{F}(X)}) \text{ si } \zeta : 1_{\mathcal{B}} \to \mathrm{FG},\ \zeta_Y = \eta^{-1}_{\mathrm{G}(Y),Y}(1_{\mathrm{G}(Y)}).$$

Un obiect X se numeşte *δ-faithful* (respectiv, *ζ-faithful*) dacă δ_X (respectiv, ζ_X) este un monomorfism şi vom nota prin Faith_δ (respectiv, Faith_ζ) clasa tuturor obiectelor δ-faithful (respectiv, ζ-faithful). Menţionăm că exista autori folosesc termenul de *torsionless* în locul lui *faithful*. Un obiect X se numeşte *δ-reflexiv* (respectiv, *ζ-reflexiv*) dacă δ_X (respectiv, ζ_X) este un izomorfism şi vom nota prin Refl_δ (respectiv, Refl_ζ) clasa tuturor obiectelor δ-reflexive (respectiv, ζ-reflexive).

Menţionăm că functorii contravarianţi F şi G sunt exacţi la stânga. Mai mult, transformăriile naturale δ şi ζ, asociate perechii de functori considerate, satisfac identităţiile

$$\mathrm{F}(\delta_X) \circ \zeta_{\mathrm{F}(X)} = 1_{\mathrm{F}(X)} \text{ pentru orice } X \in \mathcal{A}$$

şi

$$\mathrm{G}(\zeta_Y) \circ \delta_{\mathrm{G}(Y)} = 1_{\mathrm{G}(Y)} \text{ pentru orice } Y \in \mathcal{B}.$$

În plus, restricţile lui F şi G la clasele obiectelor reflexive induc o dualitate $\mathrm{F} : \mathrm{Refl}_\delta \rightleftarrows \mathrm{Refl}_\zeta : \mathrm{G}$. Mai mult, dacă $\mathrm{F} : \mathcal{A} \rightleftarrows \mathcal{B} : \mathrm{G}$ este o dualitate atunci $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Refl}_\delta$ şi $\mathcal{B} \subseteq \mathrm{Refl}_\zeta$ ([51, Theorem 47.11]).

Reamintim că prin $\mathrm{add}(X)$ am notat clasa tuturor sumanziilor direcţi ai sumelor directe finite de copi ale lui X. Presupunem că pe parcursul acestui capitol toate subcategoriile considerate sunt izomorf închise.

1.2. **Preliminarii.** Pe parcursul acestui capitol, considerăm o pereche de functori aditivi şi contravarianţi $\mathrm{F} : \mathcal{A} \rightleftarrows \mathcal{B} : \mathrm{G}$ care sunt adjuncţi la dreapta, între categoriile abeliene $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$. Deasemenea, considerăm în acest capitol un obiect δ-reflexiv U cu $\mathrm{F}(U) = V$.

Lema 1.2.1. *Următoarele afirmaţii au loc:*

(a) *V este ζ-reflexiv;*

(b) $\mathrm{add}(U) \subseteq \mathrm{Refl}_\delta$ *şi* $\mathrm{add}(V) \subseteq \mathrm{Refl}_\zeta$*;*

(c) $\mathrm{F}(\mathrm{add}(U)) = \mathrm{add}(V)$ *şi* $\mathrm{G}(\mathrm{add}(V)) = \mathrm{add}(U)$*;*

(d) *Dacă V este un obiect proiectiv în $\mathcal{B}$ atunci* $\mathrm{add}(V) \subseteq \mathrm{Proj}(\mathcal{B})$ *(aici nu este necesar ca U să fie δ-reflexiv).*

Observaţia 1.2.2. Din Lema 1.2.1, avem $\mathrm{F}(\mathrm{add}(U)) = \mathrm{add}(V)$, $\mathrm{add}(U) \subseteq \mathrm{Refl}_\delta$ şi $\mathrm{G}(\mathrm{add}(V)) = \mathrm{add}(U)$, $\mathrm{add}(V) \subseteq \mathrm{Refl}_\zeta$. Rezultă că

$$\mathrm{F} : \mathrm{add}(U) \rightleftarrows \mathrm{add}(V) : \mathrm{G}$$

este o dualitate. Izomorfismele naturale corespunzătoare acestei dualităţi sunt:

- $\delta : 1_{\mathrm{add}(U)} \to \mathrm{GF}$, adică restricţia lui $\delta : 1_{\mathcal{A}} \to \mathrm{GF}$ la clasa $\mathrm{add}(U)$;
- $\zeta : 1_{\mathrm{add}(V)} \to \mathrm{FG}$, adică restricţia lui $\zeta : 1_{\mathcal{B}} \to \mathrm{FG}$ la clasa $\mathrm{add}(V)$.

Lema 1.2.3. *Următoarele afirmaţii au loc:*

(a) $\mathrm{F}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{Faith}_\zeta$ *şi* $\mathrm{G}(\mathcal{B}) \subseteq \mathrm{Faith}_\delta$*;*

(b) *Clasele* Faith_δ *şi* Faith_ζ *sunt închise la subobiecte.*

Lema 1.2.4. *Dacă $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ este un şir exact în $\mathcal{A}$ atunci unicul morfism α, pentru care următoarea diagramă cu rânduri exacte*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle\alpha}\big\downarrow & & {\scriptstyle\delta_Y}\big\downarrow & & {\scriptstyle\delta_Z}\big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{G}(\mathrm{Im}\mathrm{F}(f)) & \xrightarrow{\mathrm{G}(\pi)} & \mathrm{GF}(Y) & \xrightarrow{\mathrm{GF}(g)} & \mathrm{GF}(Z) & & \end{array}$$

este comutativă este dat de formula $\alpha = \mathrm{G}(\sigma) \circ \delta_X$, unde $\mathrm{F}(f) = \sigma \circ \pi$ este descompunerea canonică.

Acum vom da câteva caracterizări ale termenilor reflexivi a şirurilor exacte scurte. În cazul categoriei de module, aceste leme pot fi găsite în [28].

Lema 1.2.5. *Fie* $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ *un şir exact cu* $Y \in \mathrm{Refl}_\delta$ *şi* $\mathrm{F}(f)$ *un epimorfism. Atunci* $X \in \mathrm{Refl}_\delta$ *dacă şi numai dacă* $Z \in \mathrm{Faith}_\delta$*.*

Lema 1.2.6. *Fie* $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ *un şir exact cu* $Y \in \mathrm{Refl}_\delta$ *şi* $Z \in \mathrm{Faith}_\delta$*. Atunci* $\mathrm{F}(f)$ *este un epimorfism dacă şi numai dacă* $\mathrm{ImF}(f) \in \mathrm{Refl}_\zeta$*.*

Cu alte cuvinte, F *este exact în raport cu şirul considerat dacă şi numai dacă* $\mathrm{ImF}(f)$ *este un obiect* ζ*-reflexiv.*

Lema 1.2.7. *Fie* $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ *un şir exact cu* $Y \in \mathrm{Refl}_\delta$ *şi* $Z \in \mathrm{Faith}_\delta$*. Atunci* $Z \in \mathrm{Refl}_\delta$ *dacă şi numai dacă* $\mathrm{GF}(g)$ *este un epimorfism.*

Lema 1.2.8. *Fie* $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ *un şir exact cu* $Y \in \mathrm{Refl}_\delta$ *şi* $Z \in \mathrm{Faith}_\delta$*. Atunci* $X \in \mathrm{Refl}_\delta$ *dacă şi numai dacă* $\mathrm{GF}(f)$ *este un monomorphism.*

Fie A un obiect în $\mathcal{A}$. Vom spune că Y este *finit-A-generat* dacă există un epimorfism $A^n \to Y \to 0$, pentru un întreg pozitiv n. Notăm prin $\mathrm{gen}(A)$ clasa tuturor obiectelor finit-A-generate. Vom spune că Y este *finit-A-prezentat* dacă există un şir exact $A^m \to A^n \to Y \to 0$, pentru întregii pozitivi m şi n. Notăm prin $\mathrm{pres}(A)$ clasa tuturor obiectelor finit-A-prezentate. Vom spune că X este *finit-A-cogenerat* dacă există un monomorphism $0 \to X \to A^n$, pentru un întreg pozitiv n. Notăm prin $\mathrm{cog}(A)$ clasa tuturor obiectelor finit-A-cogenerate. Vom spune că X este *finit-A-coprezentat* dacă există un şir exact $0 \to X \to A^m \to A^n$, pentru întregii pozitivi m şi n. Notăm prin $\mathrm{cop}(A)$ clasa tuturor obiectelor finit-A-coprezentate.

Lema 1.2.9. *Un obiect* $X \in \mathcal{A}$ *este* δ*-faithful cu* $\mathrm{F}(X) \in \mathrm{gen}(V)$ *dacă şi numai dacă există un monomorphism* $f : X \to U^n$ *astfel încât* $\mathrm{F}(f)$ *este un epimorfism.*

Notăm prin $\mathrm{cop}_\delta(U)$ clasa tuturor obiectelor $X \in \mathcal{A}$ pentru care există un şir exact $0 \to X \to U^n \to Z \to 0$ cu $Z \in \mathrm{Faith}_\delta$. Vom spune că F este *$U$-$w$-$\pi_f$-exact* dacă este exact în raport cu şirurile exacte scurte $0 \to X \to U^n \to Z \to 0$ cu $Z \in \mathrm{Faith}_\delta$.

Lema 1.2.10. *Dacă* F *este* U*-*w*-*π_f*-exact atunci au loc următoarele afirmaţii:*

(a) ζ_Y *este un epimorfism, pentru orice* $Y \in \mathrm{gen}(V)$*;*

(b) $\mathrm{gen}(V) \cap \mathrm{Faith}_\zeta \subseteq \mathrm{Refl}_\zeta$*.*

1.3. **Obiecte Costar. Finitistic-1-F-cotilting.**

Lema 1.3.1. *Dacă* F *este U-w-π_f-exact atunci următoarele afirmaţii au loc:*

(a) $\mathrm{cop}_\delta(U) \subseteq \mathrm{Refl}_\delta$;

(b) $\mathrm{F}(\mathrm{cop}_\delta(U)) \subseteq \mathrm{gen}(V)$.

Acum vom caracteriza situaţia când F este U-w-π_f-exact, printr-o dualitate indusă de pereche de functori considerată $\mathrm{F} : \mathcal{A} \rightleftarrows \mathcal{B} : \mathrm{G}$.

Teorema 1.3.2. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(a) F *este U-w-π_f-exact;*

(b) $\mathrm{F} : \mathrm{cop}_\delta(U) \rightleftarrows \mathrm{gen}(V) \cap \mathrm{Faith}_\zeta : \mathrm{G}$ *este o dualitate.*

În 2001, Colby şi Fuller au introdus noţiunea de *modul costar*, care este duala noţiunii de *modul star*, şi caracterizează această noţiune. Inspiraţi de munca lor, definim noţiunea de *obiect costar*, care extinde la categorii abeliene noţiunea de modul costar.

Vom spune că tripletul $\mathfrak{D} = (U, \mathrm{F}, \mathrm{G})$ este *costar* (sau, U *este un obiect costar relativ la* F *şi* G) dacă

$$\mathrm{F} : \mathrm{F}^{-1}(\mathrm{gen}(V)) \cap \mathrm{Faith}_\delta \rightleftarrows \mathrm{gen}(V) \cap \mathrm{Faith}_\zeta : \mathrm{G}$$

este o dualitate.

Acum vom da condiţii echivalente pentru ca tripletul $\mathfrak{D}$ să fie costar.

Teorema 1.3.3. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(a) $\mathfrak{D}$ *este costar;*

(b) (1) $\mathrm{F} : \mathrm{cop}_\delta(U) \rightleftarrows \mathrm{gen}(V) \cap \mathrm{Faith}_\zeta : \mathrm{G}$ *este o dualitate;*

(2) $\mathrm{cop}_\delta(U) = \mathrm{F}^{-1}(\mathrm{gen}(V)) \cap \mathrm{Faith}_\delta$;

(c) (1) δ_X *este un epimorfism, pentru orice* $X \in \mathrm{F}^{-1}(\mathrm{gen}(V))$;

(2) ζ_Y *este un epimorfism, pentru orice* $Y \in \mathrm{gen}(V)$;

(d) F *păstrează exactitatea unui şir exact de forma*

$$0 \to X \to U^n \to Z \to 0$$

dacă şi numai dacă $Z \in \mathrm{Faith}_\delta$.

Următorul rezultat descrie un alt tip de dualităţi induse de o pereche de functori contravarianţi adjuncţi la dreapta. Dacă are loc în contextul clasic al functorilor contravarianţi induşi de un modul Q, atunci Wisbauer a numit acest modul *f-cotilting* (see [54]).

Teorema 1.3.4. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(a) $\mathrm{F} : \mathrm{cog}(U) \rightleftarrows \mathrm{gen}(V) \cap \mathrm{Faith}_{\zeta} : \mathrm{G}$ *este o dualitate;*

(b) (1) $\mathrm{cog}(U) = \mathrm{cop}_{\delta}(U)$*;*

(2) F *este U-w-π_f-exact.*

Următorul rezultat este o extindere la categorii abeliene a rezultatului [12, Theorem 2.8].

Teorema 1.3.5. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(a) $\mathrm{F} : \mathrm{cog}(U) \rightleftarrows \mathrm{pres}(V) \cap \mathrm{Faith}_{\zeta} : \mathrm{G}$ *este o dualitate;*

(b) (1) $\mathrm{cog}(U) = \mathrm{cop}(U)$*;*

(2) F *este exact în raport cu şirurile exacte scurte*

$$0 \to X \to U^n \to Z \to 0$$

cu $Z \in \mathrm{cog}(U)$*.*

Vom spune că obiectul U este *finitistic*-1-F-*cotilting* dacă satisface condiţiile de la (b) din Teorema anterioară. Deci, Teorema 1.3.5 caracterizează obiectele finitistic-1-F-cotilting cu ajutorul unei dualităţi.

1.4. **Rezoluţii Dominante.** Pentru parcursul acestei secţiuni fixăm un întreg pozitiv n.

Acum vom defini noţiunile de rezoluţii dominante (finite), folosind terminologia lui Wakamatsu [50]. Fie $\mathcal{C}$ o clasă în $\mathcal{A}$.

Un şir exact

$$0 \to X \to A_0 \to A_1 \to \dots$$

în $\mathcal{A}$ se numeşte *rezoluţie-$\mathcal{C}$-dominantă-stângă a lui* X dacă $A_i \in \mathcal{C}$ pentru toţi $i \geq 0$ şi cu şirul indus

$$\cdots \to \mathrm{F}(A_1) \to \mathrm{F}(A_0) \to \mathrm{F}(X) \to 0$$

deasemenea exact. Notăm prin $\operatorname{cog}^\star(\mathcal{C})$ clasa tuturor obiectelor $X \in \mathcal{A}$ care au o rezoluţie-$\mathcal{C}$-dominantă-stânga.

Un şir exact

$$0 \to X \to A_0 \to A_1 \to \cdots \to A_{n-1} \to A_n$$

în $\mathcal{A}$ se numeşte *n-rezoluţie-$\mathcal{C}$-dominantă-stânga pentru* X dacă $A_i \in \mathcal{C}$ pentru toţi $i = \overline{0, n}$ şi cu şirul indus

$$\mathrm{F}(A_n) \to \mathrm{F}(A_{n-1}) \to \cdots \to \mathrm{F}(A_1) \to \mathrm{F}(A_0) \to \mathrm{F}(X) \to 0$$

deasemenea exact. Notăm prin n-$\operatorname{cog}^\star(\mathcal{C})$ clasa tuturor obiectelor $X \in \mathcal{A}$ pentru care există o n-rezoluţie-$\mathcal{C}$-dominantă-stânga.

Un şir exact

$$\cdots \to B_1 \to B_0 \to Y \to 0$$

in $\mathcal{A}$ se numeşte *rezoluţie-$\mathcal{C}$-dominantă-dreaptă pentru* Y dacă $B_i \in \mathcal{C}$ pentru toţi $i \geq 0$ şi cu şirul indus

$$0 \to \mathrm{F}(Y) \to \mathrm{F}(B_0) \to \mathrm{F}(B_1) \to \dots$$

desemenea exact. Notăm prin $\operatorname{gen}^\star(\mathcal{C})$ clasa tuturor obiectelor $Y \in \mathcal{A}$ care au o rezoluţie-$\mathcal{C}$-dominantă-dreaptă.

Un şir exact

$$B_n \to B_{n-1} \to \cdots \to B_1 \to B_0 \to Y \to 0$$

in $\mathcal{A}$ se numeşte *n-rezoluţie-$\mathcal{C}$-dominantă-dreaptă a lui* Y dacă $B_i \in \mathcal{C}$ pentru toţi $i = \overline{0, n}$ iar şirul indus

$$0 \to \mathrm{F}(Y) \to \mathrm{F}(B_0) \to \mathrm{F}(B_1) \to \cdots \to \mathrm{F}(B_{n-1}) \to \mathrm{F}(B_n)$$

dasemenea exact. Notăm prin n-$\operatorname{gen}^\star(\mathcal{C})$ clasa tuturor obiectelor $Y \in \mathcal{A}$ pentru care există o n-rezoluţie-$\mathcal{C}$-dominantă-dreaptă.

Rezultatul principal al acestei secţiuni este următoarea teoremă:

Teorema 1.4.1. *Dacă* $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Refl}_\delta$ *atunci*

$$\mathrm{F} : n\text{-}\operatorname{cog}^\star(\mathcal{C}) \rightleftarrows n\text{-}\operatorname{gen}^\star(\mathrm{F}(\mathcal{C})) \cap \mathrm{Refl}_\zeta : \mathrm{G}$$

este o dualitate.

În continuare vom aplica Teorema 1.4.1, setând $\mathcal{C}$ cu clase particulare, pentru a obţine generalizări ale unor dulităţi cunoscute.

Cazul $\mathcal{C} = \mathrm{add}(U)$. Setând $\mathcal{C} = \mathrm{add}(U)$ avem, din Lema 1.2.1, că $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Refl}_\delta$ şi $\mathrm{F}(\mathcal{C}) = \mathrm{add}(V)$. Acum Teorema 1.4.1 devine:

Corolar 1.4.2. *Functorii* F *şi* G *induc următoarea dualitate:*

$$\mathrm{F} : n\text{-}\mathrm{cog}^\star(\mathrm{add}(U)) \rightleftarrows n\text{-}\mathrm{gen}^\star(\mathrm{add}(V)) \cap \mathrm{Refl}_\zeta : \mathrm{G}.$$

Cu ajutorul lui Lema 1.2.10, dacă F este U-w-π_f-exact, avem următoarea egalitate

$$n\text{-}\mathrm{gen}^\star(\mathrm{add}(V)) \cap \mathrm{Refl}_\zeta = n\text{-}\mathrm{gen}^\star(\mathrm{add}(V)) \cap \mathrm{Faith}_\zeta.$$

Corolar 1.4.3. *Dacă* F *este U-w-π_f-exact, atunci*

$$\mathrm{F} : n\text{-}\mathrm{cog}^\star(\mathrm{add}(U)) \rightleftarrows n\text{-}\mathrm{gen}^\star(\mathrm{add}(V)) \cap \mathrm{Faith}_\zeta : \mathrm{G}$$

este o dualitate.

Teorema 1.4.4. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(a) $\mathrm{F} : \mathrm{F}^{-1}(n\text{-}\mathrm{gen}^\star(\mathrm{add}(V))) \cap \mathrm{Faith}_\delta \rightleftarrows n\text{-}\mathrm{gen}^\star(\mathrm{add}(V)) \cap \mathrm{Faith}_\zeta : \mathrm{G}$ *este o dualitate;*

(b) (1) $\mathrm{F} : n\text{-}\mathrm{cog}^\star(\mathrm{add}(U)) \rightleftarrows n\text{-}\mathrm{gen}^\star(\mathrm{add}(V)) \cap \mathrm{Faith}_\zeta : \mathrm{G}$ *este o dualitate;*
   (2) $n\text{-}\mathrm{cog}^\star(\mathrm{add}(U)) = \mathrm{F}^{-1}(n\text{-}\mathrm{gen}^\star(\mathrm{add}(V))) \cap \mathrm{Faith}_\delta$*;*

(c) (1) δ_X *este un epimorphism, pentru orice* $X \in \mathrm{F}^{-1}(n\text{-}\mathrm{gen}^\star(\mathrm{add}(V)))$*;*
   (2) ζ_Y *este un epimorphism, pentru orice* $Y \in n\text{-}\mathrm{gen}^\star(\mathrm{add}(V)) \cap \mathrm{Faith}_\zeta$*;*

Mai mult, dacă au loc afirmaţiile de mai sus atunci are loc:

(d) F *este exact în raport cu şirurile exacte scurte*

$$0 \to X \to Y \to Z \to 0$$

cu $Y \in \mathrm{add}(U)$ *şi* $Z \in \mathrm{F}^{-1}(n\text{-}\mathrm{gen}^\star(\mathrm{add}(V))) \cap \mathrm{Faith}_\delta$.

Deasemenea avem următoarea teoremă care caracterizează dualitatea din Corolarul 1.4.3 în cazul $n = 0$. Reamintim că $\mathrm{cop}_\delta(U)$ reprezintă clasa tututror obiectelor $X \in \mathcal{A}$ pentru care există un şir exact scurt $0 \to X \to U^m \to Z \to 0$ cu $Z \in \mathrm{Faith}_\delta$.

Teorema 1.4.5. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(a) (1) $\mathrm{F} : 0\text{-cog}^{\star}(\mathrm{add}(U)) \rightleftarrows 0\text{-gen}^{\star}(\mathrm{add}(V)) \cap \mathrm{Faith}_{\zeta} : \mathrm{G}$ *este o dualitate;*

(2) F *este U-w-π_f-exact.*

(b) (1) $\mathrm{F} : \mathrm{cop}_{\delta}(U) \rightleftarrows 0\text{-gen}^{\star}(\mathrm{add}(V)) \cap \mathrm{Faith}_{\zeta} : \mathrm{G}$ *este o dualitate;*

(2) δ_X *este un epimorphism, pentru orice* $X \in 0\text{-cog}^{\star}(\mathrm{add}(U))$.

Pentru restul acestei secţiuni, presupunem că $\mathcal{B}$ *are destule proiective*. Fie $B \in \mathcal{B}$. O *rezoluţie proiectivă*

$$\cdots \to P_1 \to P_0 \to Y \to 0$$

a lui Y se numeşte *finit*-add(B)-*generată* dacă $P_i \in \mathrm{add}(B)$ pentru toţi $i \geq 0$. Vom nota prin $\mathrm{gen}^{\bullet}(\mathrm{add}(B))$ clasa tuturor obiectelor $Y \in \mathcal{B}$ care au o rezoluţie proiectivă finit-add(B)-generată.

O *rezoluţie proiectivă*

$$\cdots \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to Y \to 0$$

a lui Y se numeşte n-*finit*-add(B)-*generată* dacă $P_i \in \mathrm{add}(B)$ pentru toţi $i = \overline{0, n}$. Vom nota prin $n\text{-gen}^{\bullet}(\mathrm{add}(B))$ clasa tuturor obiectelor $Y \in \mathcal{B}$ care au o rezoluţie proiectivă n-finit-add(B)-generată.

Deasemenea notăm prin $\mathrm{R}^j\mathrm{G}$ functorul derivat la dreapta de ordin j al lui G. Considerăm următoarele clase ortogonale:

$$^{\perp_{<n}}\mathcal{B} = \{Y \in \mathcal{B} \mid \mathrm{R}^j\mathrm{G}(Y) = 0, \text{ pentru toţi } 0 < j < n\}$$

şi

$$^{\perp}\mathcal{B} = \{Y \in \mathcal{B} \mid \mathrm{R}^j\mathrm{G}(Y) = 0, \text{ pentru toţi } j \geq 1\}.$$

Dacă V este proiectiv în $\mathcal{B}$, atunci are loc egalitatea

$$n\text{-gen}^{\star}(\mathrm{add}(V)) = {}^{\perp_{<n}}\mathcal{B} \cap n\text{-gen}^{\bullet}(\mathrm{add}(V)).$$

Din Corolarul 1.4.2, obţinem următorul rezultat:

Corolar 1.4.6. *Dacă V este un obiect proiectiv în $\mathcal{B}$, atunci*

$$\mathrm{F} : n\text{-cog}^{\star}(\mathrm{add}(U)) \rightleftarrows {}^{\perp_{<n}}\mathcal{B} \cap n\text{-gen}^{\bullet}(\mathrm{add}(V)) \cap \mathrm{Refl}_{\zeta} : \mathrm{G}$$

este o dualitate.

Folosind corolarul de mai sus, vom obţine următoarele dualităţi, care sunt generalizări ale [50, Proposition 4.1 si Theorem 4.2] la categorii abeliene. Acum vom presupune că ambele categorii abeliene $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ au *destule proiective*. Deasemenea considerăm clasa perpendiculară ${}^{\perp}\mathcal{A} = \{X \in \mathcal{A} \mid \mathrm{R}^j\mathrm{F}(X) = 0, \text{ pentru toţi } j \geq 1\}$, unde $\mathrm{R}^j\mathrm{F}$ este functotul derivat la dreapta de ordin j al lui F.

Corolar 1.4.7. *Presupunem că V este un obiect proiectiv în $\mathcal{B}$. Fie A un obiect δ-reflexiv şi proiectiv în $\mathcal{A}$. Atunci:*

(a) $\mathrm{F} : \mathrm{cog}^{\star}(\mathrm{add}(U)) \rightleftarrows {}^{\perp}\mathcal{B} \cap \mathrm{gen}^{\bullet}(\mathrm{add}(V)) \cap \mathrm{Refl}_{\zeta} : \mathrm{G}$ *este o dualitate;*

(b) $\mathrm{G} : \mathrm{cog}^{\star}(\mathrm{add}(\mathrm{F}(A))) \rightleftarrows {}^{\perp}\mathcal{A} \cap \mathrm{gen}^{\bullet}(\mathrm{add}(A)) \cap \mathrm{Refl}_{\delta} : \mathrm{F}$ *este o dualitate.*

Corolar 1.4.8. *Presupunem că V este un obiect proiectiv în $\mathcal{B}$. Fie A un obiect δ-reflexiv şi proiectiv în $\mathcal{A}$. Atunci*

$$\mathrm{F} : {}^{\perp}\mathcal{A} \cap \mathrm{gen}^{\bullet}(\mathrm{add}(A)) \cap \mathrm{cog}^{\star}(\mathrm{add}(U)) \rightleftarrows$$

$$\rightleftarrows {}^{\perp}\mathcal{B} \cap \mathrm{gen}^{\bullet}(\mathrm{add}(V)) \cap \mathrm{cog}^{\star}(\mathrm{add}(\mathrm{F}(A))) : \mathrm{G}$$

este o dualitate.

Finitistic-n-F-cotilting. Fie A un obiect în $\mathcal{A}$.
Vom spune că X este *n-finit-A-coprezentat* dacă există un şir exact

$$0 \to X \to A^{m_0} \to A^{m_1} \to \cdots \to A^{m_{n-2}} \to A^{m_{n-1}},$$

unde toţi m_k sunt întregi pozitivi. Notăm prin n-cop(A) clasa tuturor obiectelor n-finit-A-coprezentate. În particular, 1-cop$(A) = \mathrm{cog}(A)$ şi 2-cop$(A) = \mathrm{cop}(A)$.
Vom spune că Y este *n-finit-A-prezentat* dacă există un şir exact

$$A^{m_{n-1}} \to A^{m_{n-2}} \to \cdots \to A^{m_1} \to A^{m_0} \to Y \to 0,$$

unde toţi m_k sunt întregi pozitivi. Notăm prin $\mathrm{FP}_n(A)$ clasa tuturor obiectelor n-finit-A-prezentate. În particular, $\mathrm{FP}_1(A) = \mathrm{gen}(A)$ şi $\mathrm{FP}_2(A) = \mathrm{pres}(A)$.

Un obiect A se numeşte *n-w_f-F-exact* dacă orice şir exact scurt din $\mathcal{A}$ de forma $0 \to X \to A^m \to Z \to 0$, cu $Z \in n$-cop(A), ramâne exact prin aplicarea lui F. Un obiect A se numeşte *finitistic-n-F-cotilting* dacă A este n-w_f-F-exact şi n-cop$(A) =$ $(n+1)$-cop(A).

Reamintim că este presupus faptul că $\mathcal{B}$ are destule proiective.

Lema 1.4.9. *Presupunem că U este finitistic-n-F-cotilting. Dacă $X \in n\text{-cop}(U)$ atunci există un şir exact lung*

$$0 \to X \longrightarrow U^{m_0} \longrightarrow U^{m_1} \longrightarrow U^{m_2} \longrightarrow \dots$$

cu şirul indus

$$\dots \longrightarrow \mathrm{F}(U^{m_2}) \longrightarrow \mathrm{F}(U^{m_1}) \longrightarrow \mathrm{F}(U^{m_0}) \longrightarrow \mathrm{F}(X) \to 0$$

deasemenea exact.

Presupunem că $V = \mathrm{F}(U)$ este un obiect proiectiv în $\mathcal{B}$. Setăm $\mathcal{C} = \{U^k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$. Rezultă că $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Refl}_\delta$ şi $\mathrm{F}(\mathcal{C}) = \{V^k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$.

Lema 1.4.10. *Dacă U este finitistic-n-F-cotilting, atunci avem:*

(a) $n\text{-cog}^\star(\mathcal{C}) = n\text{-cop}(U)$;

(b) $n\text{-gen}^\star(\mathrm{F}(\mathcal{C})) \cap \mathrm{Refl}_\zeta = {}^{\perp_{<n}}\mathcal{B} \cap \mathrm{FP}_{(n+1)}(V) \cap \mathrm{Faith}_\zeta$;

(c) $n\text{-gen}^\star(\mathrm{F}(\mathcal{C})) \cap \mathrm{Refl}_\zeta = {}^{\perp}\mathcal{B} \cap \mathrm{FP}_{(n+1)}(V) \cap \mathrm{Faith}_\zeta$.

Pentru următorul rezultat, nu este necesar ca categoria abeliană $\mathcal{B}$ să aibă destule proiective.

Propoziţia 1.4.11. *Dacă $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Refl}_\delta$, atunci următoarele afirmaţii au loc:*

(a) *Dacă $X \in \mathrm{Refl}_\delta$ cu $\mathrm{F}(X) \in n\text{-gen}^\star(\mathrm{F}(\mathcal{C}))$ atunci $X \in n\text{-cog}^\star(\mathcal{C})$;*

(b) *Dacă $n\text{-gen}^\star(\mathrm{F}(\mathcal{C})) \cap \mathrm{Faith}_\zeta \subseteq \mathrm{Refl}_\zeta$ atunci F este exact în raport cu şirurile exacte scurte*

$$0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$$

cu $Y \in \mathcal{C}$ şi $Z \in \mathrm{Refl}_\delta \cap \mathrm{F}^{-1}(n\text{-gen}^\star(\mathrm{F}(\mathcal{C})))$.

Având în vedere Propoziţia 1.4.11 şi deoarece $n\text{-gen}^\star(\mathrm{F}(\mathcal{C})) = {}^{\perp_{<n}}\mathcal{B} \cap \mathrm{FP}_{(n+1)}(V)$, unde $\mathcal{C} = \{U^k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$,avem următorul corolar:

Corolar 1.4.12. *Fie $X \in \mathrm{Refl}_\delta$ astfel încât $\mathrm{F}(X) \in {}^{\perp_{<n}}\mathcal{B} \cap \mathrm{FP}_{(n+1)}(V)$. Atunci $X \in (n+1)\text{-cop}(U)$.*

Următoarea teoremă este o generalizare a lui [12, Theorem 2.7].

Teorema 1.4.13. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente pentru un obiect* $U \in \mathrm{Refl}_\delta$ *cu* $\mathrm{F}(U) = V$ *obiect proiectiv în* $\mathcal{B}$ *şi pentru un întreg pozitiv* n*:*

(a) U *este finitistic-*n*-*F*-cotilting;*

(b) $\mathrm{F} : n\text{-cop}(U) \rightleftarrows {}^{\perp<n}\mathcal{B} \cap \mathrm{FP}_{(n+1)}(V) \cap \mathrm{Faith}_\zeta : \mathrm{G}$ *este o dualitate;*

(c) $\mathrm{F} : n\text{-cop}(U) \rightleftarrows {}^{\perp}\mathcal{B} \cap \mathrm{FP}_{(n+1)}(V) \cap \mathrm{Faith}_\zeta : \mathrm{G}$ *este o dualitate.*

1.5. **Categoria** $\mathrm{add}(U)$**-coplex.** Prin $\mathrm{Comp}_\mathcal{A}$ vom nota categoria tuturor complexelor din $\mathcal{A}$. Deasemenea, vom nota prin $H_n(\mathcal{C})$ *homologia de rang* n *a lui* $\mathcal{C}$, pentru un complex $\mathcal{C} \in \mathrm{Comp}_\mathcal{A}$ şi pentru un întreg n. Pentru proprietăţi de bază ale categoriei $\mathrm{Comp}_\mathcal{A}$ ne referim la [46, Chapter 10]. Pe parcursul acestei secţiuni presupunem că categoria abeliană $\mathcal{B}$ are destule proiective. Deasemenea presupunem că $V = \mathrm{F}(U)$ este un obiect proiectiv în $\mathcal{B}$.

Considerăm un obiect $A \in \mathcal{A}$.

Definiţia 1.5.1. Un complex

$$\mathcal{C} : C_0 \xrightarrow{\sigma_1} C_1 \xrightarrow{\sigma_2} C_2 \xrightarrow{\sigma_3} C_3 \xrightarrow{\sigma_4} \ldots$$

din $\mathcal{A}$ se numeşte $\mathrm{add}(A)$*-coplex* (sau, *semi-rezoluţie-dominantă-*$\mathrm{add}(A)$*-dreaptă*) dacă următoarele condiţii sunt satisfăcute:

(1) $C_k \in \mathrm{add}(A)$, pentru toţi $k \geq 0$;

(2) Complexul indus

$$\mathrm{F}(\mathcal{C}) : \ldots \xrightarrow{\mathrm{F}(\sigma_4)} \mathrm{F}(C_3) \xrightarrow{\mathrm{F}(\sigma_3)} \mathrm{F}(C_2) \xrightarrow{\mathrm{F}(\sigma_2)} \mathrm{F}(C_1) \xrightarrow{\mathrm{F}(\sigma_1)} \mathrm{F}(C_0)$$

este un şir exact în $\mathcal{B}$.

Definiţia 1.5.2. Fie $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{C}'$ două $\mathrm{add}(A)$-coplexe în $\mathcal{A}$. Un şir de morfisme $f = (f_0, f_1, f_2, f_3, \ldots)$, unde $f_k \in \mathrm{Hom}_\mathcal{A}(C_k, C'_k)$, se numeşte *aplicaţie lanţ între* $\mathrm{add}(A)$*-coplexele* $\mathcal{C}$ *şi* $\mathcal{C}'$ dacă următoarea diagramă este comutativă

$$\begin{array}{ccccccccc} C_0 & \xrightarrow{\sigma_1} & C_1 & \xrightarrow{\sigma_2} & C_2 & \xrightarrow{\sigma_3} & C_3 & \xrightarrow{\sigma_4} & \cdots \\ \downarrow{\scriptstyle f_0} & & \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_2} & & \downarrow{\scriptstyle f_3} & & \\ C'_0 & \xrightarrow{\sigma'_1} & C'_1 & \xrightarrow{\sigma'_2} & C'_2 & \xrightarrow{\sigma'_3} & C'_3 & \xrightarrow{\sigma'_4} & \cdots \end{array}$$

adică $f_k \circ \sigma_k = \sigma'_k \circ f_{k-1}$, pentru toţi întregii $k \geq 1$.

Definiţia 1.5.3. Fie $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{C}'$ două add(A)-coplexe.

(a) Fie $f = (f_0, f_1, f_2, f_3, \dots) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ o aplicaţie lanţ între add(A)-coplexele $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{C}'$. Vom spune că f *este nul-homotopică* (sau, f *este homotopică cu zero*) dacă există, pentru toţi $k \geq 1$, morfismele $s_k : C_k \to C'_{k-1}$ în $\mathcal{A}$ astfel încât:

(1) $f_k = s_{k+1} \circ \sigma_{k+1} + \sigma'_k \circ s_k$, pentru toţi întregii $k \geq 1$;

(2) $f_0 = s_1 \circ \sigma_1$.

Şirul $s = (s_1, s_2, s_3, \dots)$ se numeşte *o homotopie a lui* f (sau, *o homotopie între* f *şi* 0). Morfismele sunt ilustrate în următoarea diagramă:

$$\begin{tikzcd}
C_0 \arrow[r, "\sigma_1"] \arrow[d, "f_0"] & C_1 \arrow[r, "\sigma_2"] \arrow[d, "f_1"] \arrow[dl, dotted, "s_1"'] & C_2 \arrow[r, "\sigma_3"] \arrow[d, "f_2"] \arrow[dl, dotted, "s_2"'] & C_3 \arrow[r, "\sigma_4"] \arrow[d, "f_3"] \arrow[dl, dotted, "s_3"'] & \cdots \arrow[dl, dotted, "s_4"'] \\
C'_0 \arrow[r, "\sigma'_1"] & C'_1 \arrow[r, "\sigma'_2"] & C'_2 \arrow[r, "\sigma'_3"] & C'_3 \arrow[r, "\sigma'_4"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Condiţia ca s să fie o homotopie a lui f afirmă că fiecare aplicaţie verticală este suma laturilor paralelogramului care o conţine.

(b) Fie $f = (f_0, f_1, f_2, f_3, \dots) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ şi $g = (g_0, g_1, g_2, g_3, \dots) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ două aplicaţii lanţ. Vom spune că *f şi g sunt homotopice* (sau, f *este homotopică cu* g), notat $f \simeq g$, dacă

$$f - g = (f_0 - g_0, f_1 - g_1, f_2 - g_2, f_3 - g_3, \dots) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$$

este o aplicaţie lanţ nul-homotopică. O homotopie între $f - g$ şi 0 este deasemenea numită *o homotopie între f şi g*. Relaţia de homotopie " $\simeq$ " este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea aplicaţiilor lanţ $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$. Notăm prin $[f]$ clasa de homotopie (echivalenţă) a lui f.

(c) Vom spune că *$\mathcal{C}$ şi $\mathcal{C}'$ au acelaşi tip de homotopie* dacă există două aplicaţii lanţ $f = (f_0, f_1, f_2, f_3, \dots) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ şi $g = (g_0, g_1, g_2, g_3, \dots) : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ astfel încât

$$[g \circ f] = [(g_0 \circ f_0, g_1 \circ f_1, g_2 \circ f_2, g_3 \circ f_3, \dots)] = [(1_{C_0}, 1_{C_1}, 1_{C_2}, 1_{C_3}, \dots)] = [1_{\mathcal{C}}]$$

şi

$$[f \circ g] = [(f_0 \circ g_0, f_1 \circ g_1, f_2 \circ g_2, f_3 \circ g_3, \dots)] = [(1_{C'_0}, 1_{C'_1}, 1_{C'_2}, 1_{C'_3}, \dots)] = [1_{\mathcal{C}'}].$$

Acum definim *categoria* add(A)-*coplexelor*, notată prin add(A)-coplex, astfel:

- Obiectele constă în clasa tuturor $\mathrm{add}(A)$-coplexelor $\mathcal{C}$;
- Morfismele $[f] : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$, constă în mulţimea tuturor claselor de homotopie ale aplicaţiilor lanţ $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$. Mai precis,

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{add}(A)\text{-coplex}}(\mathcal{C}, \mathcal{C}') = \{[f] \mid f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}' \text{ este o aplicaţie lanţ}\}$$

Lema 1.5.4. *Fie* $\mathcal{C} : C_0 \xrightarrow{\sigma_1} C_1 \xrightarrow{\sigma_2} C_2 \xrightarrow{\sigma_3} C_3 \xrightarrow{\sigma_4} \dots$ *un complex în* $\mathcal{A}$ *cu* $C_k \in \mathrm{add}(U)$, *pentru toţi* $k \geq 0$. *Atunci următoarele afirmaţii au loc:*

(a) $\mathcal{C}$ *este un* $\mathrm{add}(U)$*-coplex dacă şi numai dacă* $\mathrm{F}(\mathcal{C})$ *este o rezoluţie proiectivă finit-*$\mathrm{add}(V)$*-generată a lui* $H_0(\mathrm{F}(\mathcal{C}))$;

(b) *Dacă* $f, g : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ *sunt aplicaţii lanţ homotopice între complexeele* $\mathcal{C}$ *şi* $\mathcal{C}'$, *atunci* $H_0(\mathrm{F}(f)) = H_0(\mathrm{F}(g))$.

Definiţia 1.5.5. Definim functorul $\mathrm{F}^U : \mathrm{add}(U)\text{-coplex} \to \mathrm{gen}^\bullet(\mathrm{add}(V))$ după cum urmează:

- Pe obiecte: $\mathrm{F}^U(\mathcal{C}) = H_0(\mathrm{F}(\mathcal{C}))$, pentru orice $\mathcal{C} \in \mathrm{add}(U)$-coplex;
- Pe morfisme: $\mathrm{F}^U([f]) = H_0(\mathrm{F}(f))$, pentru orice $[f] \in \mathrm{add}(U)$-coplex.

Teorema 1.5.6. *Functorul* F^U *este un functor contravariant bine definit.*

Definiţia 1.5.7. Definim functorul $\mathrm{G}^U : \mathrm{gen}^\bullet(\mathrm{add}(V)) \to \mathrm{add}(U)$-coplex astfel:

- Pe obiecte. Fie $Y \in \mathrm{gen}^\bullet(\mathrm{add}(V))$. Atunci Y are o rezoluţie proiectivă finit-$\mathrm{add}(V)$-generată

$$\mathcal{P}(Y) = \dots \xrightarrow{\partial_3} P_2 \xrightarrow{\partial_2} P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\partial_0} Y \to 0.$$

Aplicând functorul G rezoluţiei proiective $\mathcal{P}(Y)$, avem următorul complex în $\mathcal{A}$

$$\mathrm{G}(\mathcal{P}(Y)) = \mathrm{G}(P_0) \xrightarrow{\mathrm{G}(\partial_1)} \mathrm{G}(P_1) \xrightarrow{\mathrm{G}(\partial_2)} \mathrm{G}(P_2) \xrightarrow{\mathrm{G}(\partial_3)} \dots$$

Deoarece $\mathcal{P}(Y)$ este finit-$\mathrm{add}(V)$-generată, avem că $P_k \in \mathrm{add}(V)$, pentru orice $k \geq 0$, şi, deoarece $\zeta : 1_{\mathrm{add}(V)} \to \mathrm{FG}$ este un izomorfism natural, următoarea diagramă este comutativă cu aplicaţiile verticale izomorfisme

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{P}(Y) = \dots & \xrightarrow{\partial_3} & P_2 & \xrightarrow{\partial_2} & P_1 & \xrightarrow{\partial_1} & P_0 \\
 & & \downarrow \zeta_{P_2} & & \downarrow \zeta_{P_1} & & \downarrow \zeta_{P_0} \\
\mathrm{FG}(\mathcal{P}(Y)) = \dots & \xrightarrow{\mathrm{FG}(\partial_3)} & \mathrm{FG}(P_2) & \xrightarrow{\mathrm{FG}(\partial_2)} & \mathrm{FG}(P_1) & \xrightarrow{\mathrm{FG}(\partial_1)} & \mathrm{FG}(P_0)
\end{array}$$

Deoarece şirul de sus este un şir exact, rezultă că şirul de jos este exact. Din Lema 1.2.1, $\mathrm{G}(P_k) \in \mathrm{add}(U)$, pentru orice $k \geq 0$. Astfel $\mathrm{G}(\mathcal{P}(Y))$ este un complex în $\mathcal{A}$ cu toţi termenii $\mathrm{G}(P_k) \in \mathrm{add}(U)$ şi cu şirul indus $\mathrm{F}(\mathrm{G}(\mathcal{P}(Y)))$ exact. Atunci $\mathrm{G}(\mathcal{P}(Y))$ este un $\mathrm{add}(U)$-coplex. Luăm

$$\mathrm{G}^U(Y) := \mathrm{G}(\mathcal{P}(Y)) \in \mathrm{add}(U)\text{-coplex}.$$

- Pe morfisme. Fie $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{gen}^\bullet(\mathrm{add}(V))}(Y, Y')$. Deoarece $Y \in \mathrm{gen}^\bullet(\mathrm{add}(V))$, Y are o rezoluţie proiectivă finit-$\mathrm{add}(V)$-generată

$$\mathcal{P}(Y) = \dots \xrightarrow{\partial_4} P_3 \xrightarrow{\partial_3} P_2 \xrightarrow{\partial_2} P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\partial_0} Y \to 0.$$

Deoarece $Y' \in \mathrm{gen}^\bullet(\mathrm{add}(V))$, Y' are o rezoluţie proiectivă finit-$\mathrm{add}(V)$-generată

$$\mathcal{P}(Y') = \dots \xrightarrow{\partial'_4} P'_3 \xrightarrow{\partial'_3} P'_2 \xrightarrow{\partial'_2} P'_1 \xrightarrow{\partial'_1} P'_0 \xrightarrow{\partial'_0} Y' \to 0.$$

Deoarece $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{gen}^\bullet(\mathrm{add}(V))}(Y, Y')$, avem $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Y, Y')$, deci ϕ se ridică la o aplicaţie lanţ

$$f = (\dots, f_3, f_2, f_1, f_0) : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(Y'),$$

ca în diagrama următoare

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\cdots & \xrightarrow{\partial_4} & P_3 & \xrightarrow{\partial_3} & P_2 & \xrightarrow{\partial_2} & P_1 & \xrightarrow{\partial_1} & P_0 & \xrightarrow{\partial_0} & Y & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 & & \downarrow \phi & & \\
\cdots & \xrightarrow{\partial'_4} & P'_3 & \xrightarrow{\partial'_3} & P'_2 & \xrightarrow{\partial'_2} & P'_1 & \xrightarrow{\partial'_1} & P'_0 & \xrightarrow{\partial'_0} & Y' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Aplicând functorul G aplicaţiei lanţ f, obţinem o aplicaţie lanţ în $\mathcal{A}$

$$\mathrm{G}(f) = (\mathrm{G}(f_0), \mathrm{G}(f_1), \mathrm{G}(f_2), \mathrm{G}(f_3), \dots) : \mathrm{G}(\mathcal{P}(Y')) \to \mathrm{G}(\mathcal{P}(Y))$$

ilustrată în diagrama de mai jos

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{G}(P_0') \arrow[r, "\mathrm{G}(\partial_1')"] \arrow[d, "\mathrm{G}(f_0)"] & \mathrm{G}(P_1') \arrow[r, "\mathrm{G}(\partial_2')"] \arrow[d, "\mathrm{G}(f_1)"] & \mathrm{G}(P_2') \arrow[r, "\mathrm{G}(\partial_3')"] \arrow[d, "\mathrm{G}(f_2)"] & \mathrm{G}(P_3') \arrow[r, "\mathrm{G}(\partial_4')"] \arrow[d, "\mathrm{G}(f_3)"] & \cdots \\
\mathrm{G}(P_0) \arrow[r, "\mathrm{G}(\partial_1)"] & \mathrm{G}(P_1) \arrow[r, "\mathrm{G}(\partial_2)"] & \mathrm{G}(P_2) \arrow[r, "\mathrm{G}(\partial_3)"] & \mathrm{G}(P_3) \arrow[r, "\mathrm{G}(\partial_4)"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Deoarece $\mathrm{G}(\mathcal{P}(Y))$ si $\mathrm{G}(\mathcal{P}(Y'))$ sunt $\mathrm{add}(U)$-coplexes, rezultă că $[\mathrm{G}(f)]$ este un morfism în $\mathrm{add}(U)$-coplex, adică $[\mathrm{G}(f)] \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{add}(U)\text{-coplex}}(\mathrm{G}(\mathcal{P}(Y')), \mathrm{G}(\mathcal{P}(Y)))$. Luăm

$$\mathrm{G}^U(\phi) = [\mathrm{G}(f)] \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{add}(U)\text{-coplex}}(\mathrm{G}^U(Y'), \mathrm{G}^U(Y)).$$

Teorema 1.5.8. *Functorul* $\mathrm{G}^U : \mathrm{gen}^\bullet(\mathrm{add}(V)) \to \mathrm{add}(U)$-coplex *este un functor contravariant bine definit.*

Fie $H : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un functor aditiv şi contravariant. Atunci, pentru orice pereche de obiecte $X, Y \in \mathcal{A}$, H induce o aplicaţie $H_{X,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(H(Y), H(X))$, definită prin $H_{X,Y}(\alpha) := H(\alpha)$.

- Vom spune că H este *faithful*, dacă aplicaţia $H_{X,Y}$ este injectivă, pentru orice pereche de obiecte $X, Y \in \mathcal{A}$.
- Vom spune că H este *full*, dacă aplicaţia $H_{X,Y}$ este surjectivă, pentru orice pereche de obiecte $X, Y \in \mathcal{A}$.
- Vom spune că H este *dense*, dacă satisface următoarea condiţie, notată prin (#):

Pentru orice obiect $Y \in \mathcal{B}$, există un obiect $X \in \mathcal{A}$

şi un izomorfism $H(X) \cong Y$.

Teorema 1.5.9. *Functorul* $\mathrm{F}^U : \mathrm{add}(U)\text{-coplex} \to \mathrm{gen}^\bullet(\mathrm{add}(V))$ *este full, faithful şi satisface condiţia (#).*

Teorema 1.5.10. *Functorul* $\mathrm{G}^U : \mathrm{gen}^\bullet(\mathrm{add}(V)) \to \mathrm{add}(U)$-coplex *este full, faithful şi satisface condiţia (#).*

Teorema 1.5.11. *Functorii* F^U *şi* G^U *induc următoarea dualitate*

$$\mathrm{F}^U : \mathrm{add}(U)\text{-coplex} \rightleftarrows \mathrm{gen}^\bullet(\mathrm{add}(V)) : \mathrm{G}^U$$

2. Echivalenţe induse de functori adjuncţi

2.1. **Introducere.** Pe parcursul acestui capitol, considerăm o pereche de functori aditivi şi covarianţi $\mathrm{F} : \mathcal{A} \rightleftarrows \mathcal{B} : \mathrm{G}$ între două categorii abeliene astfel încât G este un adjunct la stânga pentru F, adică există izomorfismele naturale

$$\varphi_{X,M} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathrm{G}(X), M) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(X, \mathrm{F}(M)),$$

pentru orice $M \in \mathcal{A}$ şi pentru orice $X \in \mathcal{B}$. Aceste izomorfisme naturale induc două transformări naturale

$$\phi : \mathrm{GF} \to 1_{\mathcal{A}},\ \text{definită prin } \phi_M = \varphi^{-1}_{\mathrm{F}(M),M}(1_{\mathrm{F}(M)})$$

şi

$$\theta : 1_{\mathcal{B}} \to \mathrm{FG},\ \text{definită prin } \theta_X = \varphi_{X,\mathrm{G}(X)}(1_{\mathrm{G}(X)}).$$

Menţionăm că F este exact la stânga, iar G este exact la dreapta. Mai mult, sunt satisfăcute identităţile:

$$\mathrm{F}(\phi_M) \circ \theta_{\mathrm{F}(M)} = 1_{\mathrm{F}(M)}$$

şi

$$\phi_{\mathrm{G}(X)} \circ \mathrm{G}(\theta_X) = 1_{\mathrm{G}(X)},$$

pentru orice $M \in \mathcal{A}$ şi pentru orice $X \in \mathcal{B}$. Deasemenea presupunem că toate subcategoriile considerate sunt izomorf închise.

Un obiect $M \in \mathcal{A}$ (respectiv, $X \in \mathcal{B}$) se numeşte *ϕ-faithful* (respectiv, *θ-faithful*) dacă ϕ_M (respectiv, θ_X) este un monomorfism. Notăm prin Faith_ϕ (respectiv, Faith_θ) clasa tuturor obiectelor ϕ-faithful (respectiv, θ-faithful). Un obiect $M \in \mathcal{A}$ (respectiv, $X \in \mathcal{B}$) se numeşte *ϕ-generat* (respectiv, *θ-generat*) dacă ϕ_M (respectiv, θ_X) este un epimorfism. Notăm prin Gen_ϕ (respectiv, Gen_θ) clasa tuturor obiectelor ϕ-generate (respectiv, θ-generate). Un obiect $M \in \mathcal{A}$ (respectiv, $X \in \mathcal{B}$) se numeşte F-*static* (respectiv, F-*adstatic*) dacă ϕ_M (respectiv, θ_X) este un izomorfism. Notăm prin $\mathrm{Stat}_{\mathrm{F}}$ (respectiv, $\mathrm{Adstat}_{\mathrm{F}}$) clasa tuturor obiectelor F-statice (respectiv, F-adstatice).

2.2. **Preliminarii.** În următoarea lemă, dăm proprietăţi de închidere ale claselor definite în secţiunea 2.1. Această lemă este folosită foarte des în acest capitol.

Lema 2.2.1. *Următoarele afirmaţii au loc:*

(a) $\mathrm{F}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{Faith}_\theta$ *şi* $\mathrm{G}(\mathcal{B}) \subseteq \mathrm{Gen}_\phi$*;*

(b) $\mathrm{F}(\mathrm{Stat}_\mathrm{F}) = \mathrm{Adstat}_\mathrm{F}$ *şi* $\mathrm{G}(\mathrm{Adstat}_\mathrm{F}) = \mathrm{Stat}_\mathrm{F}$*;*

(c) *Clasa* Gen_ϕ *este închisă la factori;*

(d) *Clasa* Faith_θ *este închisă la subobiecte;*

(e) Stat_F *şi* $\mathrm{Adstat}_\mathrm{F}$ *sunt închise în raport cu sumele directe finite şi în raport cu sumanzii direcţi.*

Mai mult, dacă U *este un obiect* F*-static cu* $\mathrm{F}(U) = V$ *atunci:*

(f) $\mathrm{add}(U) \subseteq \mathrm{Stat}_\mathrm{F}$ *şi* $\mathrm{add}(V) \subseteq \mathrm{Adstat}_\mathrm{F}$*;*

(g) $\mathrm{F}(\mathrm{add}(U)) = \mathrm{add}(V)$ *şi* $\mathrm{G}(\mathrm{add}(V)) = \mathrm{add}(U)$.

Corolar 2.2.2. *Dacă* $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ *este un şir exact în* $\mathcal{B}$*, atunci* $\mathrm{ImG}(f) = \mathrm{KerG}(g) \in \mathrm{Gen}_\phi$.

Lema 2.2.3. *Dacă* $0 \to K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ *este un şir exact în* $\mathcal{A}$*, atunci unicul morfism* β*, pentru care următoarea diagramă cu rânduri exacte*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{GF}(K) \arrow[r, "\mathrm{GF}(f)"] \arrow[d, "\phi_K"'] & \mathrm{GF}(M) \arrow[r, "\mathrm{G}(\pi)"] \arrow[d, "\phi_M"] & \mathrm{G}(\mathrm{ImF}(g)) \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

este comutativă, este dat de formula $\beta = \phi_N \circ \mathrm{G}(\sigma)$*, unde* π *şi* σ *provin din descompunerea canonică a lui* $\mathrm{F}(g)$.

Lema 2.2.4. *Dacă* $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ *este un şir exact în* $\mathcal{B}$*, atunci unicul morfism* α*, pentru care următoarea diagramă cu rânduri exacte*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\theta_Y"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\theta_Z"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{F}(\mathrm{ImG}(f)) \arrow[r, "\mathrm{F}(\sigma)"] & \mathrm{FG}(Y) \arrow[r, "\mathrm{FG}(g)"] & \mathrm{FG}(Z) &
\end{tikzcd}$$

este comutativă este dat de formula $\alpha = \mathrm{F}(\pi) \circ \theta_X$*, unde* π *şi* σ *provin din descompunerea canonică a lui* $\mathrm{G}(f)$.

În continuare vom enunţa câteva leme ce caracterizează termenii F-statici (respectiv, F-adstatici) ai şirurilor scurte exacte.

Lema 2.2.5. *Fie* $0 \to K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ *un şir scurt exact în* $\mathcal{A}$*, cu* $M \in \mathrm{Stat}_{\mathrm{F}}$ *şi* $\mathrm{F}(g)$ *un epimorfism. Atunci* $K \in \mathrm{Gen}_{\phi}$ *dacă şi numai dacă* $N \in \mathrm{Stat}_{\mathrm{F}}$*.*

Lema 2.2.6. *Fie* $0 \to K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ *un şir scurt exact în* $\mathcal{A}$*, cu* $M \in \mathrm{Stat}_{\mathrm{F}}$ *şi* $K \in \mathrm{Gen}_{\phi}$*. Atunci* $\mathrm{F}(g)$ *este un epimorfism dacă şi numai dacă* $\mathrm{ImF}(g) \in \mathrm{Adstat}_{\mathrm{F}}$*.*

Lema 2.2.7. *Fie* $0 \to K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ *un şir scurt exact în* $\mathcal{A}$*, cu* $M \in \mathrm{Stat}_{\mathrm{F}}$ *şi* $K \in \mathrm{Gen}_{\phi}$*. Atunci* $K \in \mathrm{Stat}_{\mathrm{F}}$ *dacă şi numai dacă* $\mathrm{GF}(f)$ *este un monomorfism.*

Lema 2.2.8. *Fie* $0 \to K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ *un şir scurt exact în* $\mathcal{A}$*, cu* $M \in \mathrm{Stat}_{\mathrm{F}}$ *şi* $K \in \mathrm{Gen}_{\phi}$*. Atunci* $N \in \mathrm{Stat}_{\mathrm{F}}$ *dacă şi numai dacă* $\mathrm{GF}(g)$ *este un epimorfism.*

Lema 2.2.9. *Fie* $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ *un şir scurt exact în* $\mathcal{B}$*, cu* $Y \in \mathrm{Adstat}_{\mathrm{F}}$ *şi* $\mathrm{G}(f)$ *un monomorfism. Atunci* $Z \in \mathrm{Faith}_{\theta}$ *dacă şi numai dacă* $X \in \mathrm{Adstat}_{\mathrm{F}}$*.*

Lema 2.2.10. *Fie* $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ *un şir scurt exact în* $\mathcal{B}$*, cu* $Y \in \mathrm{Adstat}_{\mathrm{F}}$ *şi* $Z \in \mathrm{Faith}_{\theta}$*. Atunci* $\mathrm{G}(f)$ *este un monomorfism dacă şi numai dacă* $\mathrm{ImG}(f) = \mathrm{KerG}(g) \in \mathrm{Stat}_{\mathrm{F}}$*.*

Lema 2.2.11. *Fie* $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ *un şir scurt exact în* $\mathcal{B}$*, cu* $Y \in \mathrm{Adstat}_{\mathrm{F}}$ *şi* $Z \in \mathrm{Faith}_{\theta}$*. Atunci* $Z \in \mathrm{Adstat}_{\mathrm{F}}$ *dacă şi numai dacă* $\mathrm{FG}(g)$ *este un epimorfism.*

Lema 2.2.12. *Fie* $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ *un şir scurt exact în* $\mathcal{B}$*, cu* $Y \in \mathrm{Adstat}_{\mathrm{F}}$ *şi* $Z \in \mathrm{Faith}_{\theta}$*. Atunci* $X \in \mathrm{Adstat}_{\mathrm{F}}$ *dacă şi numai dacă* $\mathrm{FG}(f)$ *este un monomorphism.*

Dacă M este un obiect în $\mathcal{A}$, atunci obiectul $\mathrm{Im}(\phi_M)$ se numeşte F-*soclul lui* M şi este notat prin $\mathrm{S}_{\mathrm{F}}(M)$. Dacă X este un obiect în $\mathcal{B}$, atunci obiectul $\mathrm{Ker}(\theta_X)$ se numeşte F-*radicalul lui* X şi este notat prin $\mathrm{R}_{\mathrm{F}}(X)$.

Din identităţile $\mathrm{F}(\phi_M) \circ \theta_{\mathrm{F}(M)} = 1_{\mathrm{F}(M)}$ şi $\phi_{\mathrm{G}(X)} \circ \mathrm{G}(\theta_X) = 1_{\mathrm{G}(X)}$, avem că $\theta_{\mathrm{F}(M)}$, $\mathrm{G}(\theta_X)$ sunt monomorfisme şi $\mathrm{F}(\phi_M)$, $\phi_{\mathrm{G}(X)}$ sunt epimorfisme.

Lema 2.2.13. *Fie* $M \in \mathcal{A}$ *şi* $X \in \mathcal{B}$*. Următoarele afirmaţii au loc:*

(a) *Dacă* $i : \mathrm{S_F}(M) \to M$ *este incluziunea canonică atunci* $\mathrm{F}(i) : \mathrm{F}(\mathrm{S_F}(M)) \to \mathrm{F}(M)$ *este un izomorfism;*

(b) *Dacă* $q : X \to X/\mathrm{R_F}(X)$ *este epimorfismul canonic atunci* $\mathrm{G}(q) : \mathrm{G}(X) \to \mathrm{G}(X/\mathrm{R_F}(X))$ *este un izomorfism.*

Lema 2.2.14. *Fie* $M \in \mathcal{A}$ *şi* $Y \in \mathcal{B}$. *Următoarele afirmaţii au loc:*

(a) *Dacă* K *este un subobiect al lui* M, *cu* $K \in \mathrm{Gen}_\phi$, *atunci* K *este un subobiect al lui* $\mathrm{S_F}(M)$*;*

(b) *Dacă* X *este un subobiect al lui* Y, *cu* $Y/X \in \mathrm{Faith}_\theta$, *atunci* $\mathrm{R_F}(Y)$ *este un subobiect al lui* X*;*

(c) *Dacă* $f : X \to Y$ *este un monomorfism, adică* X *este un subobiect al lui* Y*,astfel încât* $\mathrm{G}(f) = 0$, *atunci* X *este un subobiect al lui* $\mathrm{R_F}(Y)$.

Lema 2.2.15. *Dacă* $M \in \mathcal{A}$ *şi* $X \in \mathcal{B}$, *atunci:*

(a) (1) $\mathrm{S_F}(M) \in \mathrm{Gen}_\phi$*;*

(2) $\mathrm{S_F}(M) \in \mathrm{Faith}_\phi$ *dacă şi numai dacă* $M \in \mathrm{Faith}_\phi$*;*

(b) (1) $X/\mathrm{R_F}(X) \in \mathrm{Faith}_\theta$*;*

(2) $X/\mathrm{R_F}(X) \in \mathrm{Gen}_\theta$ *dacă şi numai dacă* $X \in \mathrm{Gen}_\theta$.

Observaţia 2.2.16. Dacă $M \in \mathcal{A}$ şi $X \in \mathcal{B}$ atunci:

(i) $\mathrm{S_F}(M)$ este cel mai mare subobiect ϕ-generat al lui M;

(ii) $\mathrm{R_F}(X)$ este cel mai mic subobiect al lui X astfel încât $X/\mathrm{R_F}(X) \in \mathrm{Faith}_\theta$.

Lema 2.2.17. *Fie* $M \in \mathcal{A}$ *şi* $X \in \mathcal{B}$. *Atunci:*

(a) *Dacă* $M \in \mathrm{Gen}_\phi$, *atunci* $M/\mathrm{S_F}(M) \in \mathrm{Gen}_\phi$*;*

(b) *Dacă* $X \in \mathrm{Faith}_\theta$, *atunci* $\mathrm{R_F}(X) \in \mathrm{Faith}_\theta$.

2.3. **Proprietăţi de închidere în raport cu factorii θ-faithful.**

Propoziţia 2.3.1. *Fie* Y *un obiect* F*-adstatic. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(a) *Dacă* Z *este un factor* θ*-faithful al lui* Y, *atunci* $Z \in \mathrm{Adstat_F}$*;*

(b) *Dacă* $0 \to K \xrightarrow{f} \mathrm{G}(Y) \xrightarrow{g} N \to 0$ *este un şir exact în* $\mathcal{A}$ *cu* $K \in \mathrm{Gen}_\phi$, *atunci* $\mathrm{F}(g)$ *este un epimorfism.*

Corolar 2.3.2. *Fie Y un obiect* F*-adstatic care satisface condiţiile echivalente ale rezultatului anterior. Dacă $K \in \mathrm{Gen}_\phi$ este un subobiect al lui $\mathrm{G}(Y)$ atunci $\mathrm{G}(Y)/K$ este* F*-static.*

Propoziţia 2.3.3. *Fie $\mathrm{F} : \overline{\mathcal{A}} \rightleftarrows \overline{\mathcal{B}} : \mathrm{G}$ o echivalenţă între subcategoriile pline aditive $\overline{\mathcal{A}}$ şi $\overline{\mathcal{B}}$ ale lui $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$, respectiv. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(a) *$\overline{\mathcal{B}}$ este închisă la factorii θ-faithful;*

(b) (1) *$\overline{\mathcal{A}}$ este închisă în raport cu factorii modulo subobiecte ϕ-generate;*

(2) *F este exact în raport cu şirurile exacte scurte $0 \to K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ cu $M \in \overline{\mathcal{A}}$ şi $K \in \mathrm{Gen}_\phi$.*

Teorema 2.3.4. *Fie $\mathcal{B}_0$ o subcategorie plină aditivă a lui $\mathcal{B}$ constând în obiecte* F*-adstatice şi fie $\mathcal{A}_0 = \mathrm{G}(\mathcal{B}_0)$. Fie $\overline{\mathcal{B}}$ clasa tuturor factorilor θ-faithful ale obiectelor din $\mathcal{B}_0$ şi fie $\overline{\mathcal{A}} = \{M/K \mid M \in \mathcal{A}_0,\ K \in \mathrm{Gen}_\phi\}$. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(a) *$\mathrm{F} : \overline{\mathcal{A}} \rightleftarrows \overline{\mathcal{B}} : \mathrm{G}$ este o echivalenţă şi clasa $\overline{\mathcal{B}}$ este închisă la factorii θ-faithful;*

(b) *$\overline{\mathcal{B}} \subseteq \mathrm{Adstat}_\mathrm{F}$;*

(c) *Dacă $0 \to K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ este un şir exact în $\mathcal{A}$, cu $M \in \mathcal{A}_0$ şi $K \in \mathrm{Gen}_\phi$, atunci $\mathrm{F}(g)$ este un epimorfism.*

Aplicaţie. Cazul add(U).

Fie $U \in \mathrm{Stat}_\mathrm{F}$ cu $\mathrm{F}(U) = V$. Dacă setăm $\mathcal{B}_0 = \mathrm{add}(V)$ avem, conform lemei 2.2.1, că $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathrm{Adstat}_\mathrm{F}$ şi $\mathcal{A}_0 = \mathrm{add}(U)$. Este uşor de verificat că $\overline{\mathcal{B}} = \mathrm{gen}(V) \cap \mathrm{Faith}_\theta$. Mai mult, în aceste setări, putem vedea că $\overline{\mathcal{A}} = \{M/K \mid M \in \mathrm{add}(U),\ K \in \mathrm{Gen}_\phi\}$.

Corolar 2.3.5. *Fie $U \in \mathrm{Stat}_\mathrm{F}$ cu $\mathrm{F}(U) = V$. Fie $\mathcal{B}^\star = \mathrm{gen}(V) \cap \mathrm{Faith}_\theta$ şi fie $\mathcal{A}^\star = \{M/K \mid M \in \mathrm{add}(U),\ K \in \mathrm{Gen}_\phi\}$. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(a) *$\mathrm{F} : \mathcal{A}^\star \rightleftarrows \mathcal{B}^\star : \mathrm{G}$ este o echivalenţă şi $\mathcal{B}^\star$ este închisă la factorii θ-faithful;*

(b) *$\mathcal{B}^\star \subseteq \mathrm{Adstat}_\mathrm{F}$;*

(c) *Dacă $0 \to K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ este un şir exact în $\mathcal{A}$ cu $M \in \mathrm{add}(U)$ şi $K \in \mathrm{Gen}_\phi$, atunci $\mathrm{F}(g)$ este un epimorfism;*

(d) *Dacă $0 \to K \xrightarrow{f} U^n \xrightarrow{g} N \to 0$ este un şir exact în $\mathcal{A}$ cu $K \in \mathrm{Gen}_\phi$, atunci $\mathrm{F}(g)$ este un epimorfism.*

Corolar 2.3.6. *Fie* $\overline{\mathcal{A}}$ *şi* $\overline{\mathcal{B}}$ *subcategorii pline aditive ale lui* $\mathcal{A}$ *şi* $\mathcal{B}$*, respectiv. Fie* $U \in \overline{\mathcal{A}}$ *cu* $\mathrm{F}(U) = V$*. Presupunem că* $V^k \in \overline{\mathcal{B}}$*, pentru toţi întregii pozitivi* k*. Fie* $\mathcal{B}^\star = \mathrm{gen}(V) \cap \mathrm{Faith}_\theta$ *şi fie* $\mathcal{A}^\star = \{M/K \mid M \in \mathrm{add}(U),\ K \in \mathrm{Gen}_\phi\}$*. Dacă* $\mathrm{F} : \overline{\mathcal{A}} \rightleftarrows \overline{\mathcal{B}} : \mathrm{G}$ *este o echivalenţă cu* $\overline{\mathcal{B}}$ *închisă la factorii* θ*-faithful, atunci* $\mathrm{F} : \mathcal{A}^\star \rightleftarrows \mathcal{B}^\star : \mathrm{G}$ *este o echivalenţă cu* $\mathcal{B}^\star$ *închisă la factorii* θ*-faithful.*

References

[1] Albrecht U., Breaz S., Wickless W., *The finite quasi-Baer property*, J.Algebra, 2005, 293(1), 1-16.

[2] Albrecht U., Breaz S., Wickless W., *A-solvability and mixed abelian groups*, Comm. Algebra, 2009, 37(2), 439-452.

[3] Albrecht U., Breaz S., Wickless W., *S^*-groups*, J. Algebra Appl., 2011, (10)(2), 357-363.

[4] Anderson F.W., Fuller K.R., *Rings and Categories of Modules*, Springer-Verlag, Inc., New-York, Heidelberg, Berlin, second edition, 1992.

[5] Arnold, D. M., *Endomorphism rings and subgroups of finite rank torsion-free abelian groups*, Rocky Mountain J.Math, 1982, 12, 241-256.

[6] Azumaya G., *A duality theory for injective modules*, Amer. J. Math., 1959, 81(1), 249-278.

[7] Bazzoni S., *Equivalences induced by infinitely generated tilting modules*, Proc. Amer. Math. Soc., 2010, 138(2), 533-544.

[8] Breaz S., *Almost-flat modules*, Czechoslovak Math. J., 2003, 53(128)(2), 479-489.

[9] Breaz S., *The quasi-Baer-splitting property for mixed Abelian groups*, J. Pure Appl. Algebra, 2004, 191(1-2), 75-87.

[10] Breaz S., *A Morita type theorem for a sort of quotient categories*, Czechoslovak Math. J., 2005, 55(130)(1), 133-144.

[11] Breaz S., *Modules over Endomorphism rings (in Romanian)*, Editura Fundaţiei pentru Studii Europene, Cluj-Napoca, 2006.

[12] Breaz S., *Finitistic n-self-cotilting modules*, Comm. Algebra, 2009, 37(9), 3152-3170.

[13] Breaz S., Calugareanu G., *Fundamentals of Abelian Group Theory (in Romanian)*, Editura Academiei Române, Bucureşti, 2005.

[14] Breaz S., Modoi C., *On a quotient category*, Studia Univ. Babes-Bolyai Math., 2002, 47(2), 17-28.

[15] Breaz S., Modoi C., Pop F., *Natural equivalences and dualities*, In: Proceedings of the International Conference on Modules and Representation Theory, Cluj-Napoca, July 7-12, 2008, Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 2009, 25-40.

[16] Breaz S., Pop F., *Dualities induced by right adjoint contravariant functors*, Studia Univ. Babes-Bolyai Math., 2010, 55(1), 75-83.

[17] Brenner S., Butler M.C.R., *Generalizations of the Bernstein-Gelfand-Ponomarev reflection functors*, Springer-Verlag, 1980, 103-170.

[18] Castaño-Iglesias F., *On a natural duality between Grothendieck categories*, Comm. Algebra, 2008, 36(6), 2079-2091.

[19] Castaño-Iglesias F., Gómez-Torrecillas J., Wisbauer R., *Adjoint functors and equivalences of subcategories*, Bull. Sci. Math., 2003, 127(5), 379-395.

[20] Colby R.R., *A generalization of Morita duality and the tilting theorem*, Comm.Algebra, 1989, 17(7), 1709-1722.

[21] Colby R.R., Fuller K.R., *Tilting, cotilting and serially tilted rings*, Comm.Algebra, 1990, 18, 1585-1615.

[22] Colby R.R., Fuller K.R., *Costar modules*, J. Algebra, 2001, 242(1), 146-159.

[23] Colby R.R., Fuller K.R., *Equivalence and Duality for Module Categories*, Cambridge Tracts in Math., 161, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[24] Colpi R., *Tilting in Grothendieck categories*, Forum Mathematicum, 1999, 11(6), 735-759.

[25] Colpi R., Fuller K.R., *Cotilting modules and bimodules*, Pacific J. Math., 2000, 192(2), 275-291.

[26] Colpi R., Fuller K.R., *Tilting objects in abelian categories and quasitilted rings*, Trans. Amer. Math. Soc., 2007, 359(2), 741-765.

[27] Faticoni T.G., *Modules over Endomorphism Rings*, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[28] Fuller K.R., *Natural and doubly natural dualities*, Comm. Algebra, 2006, 34(2), 749-762.

[29] Gabriel P., *Des catégories abeliennes*, Bull. Soc. Math. France, 1962, 90, 323-448.

[30] Gregorio E., *Tilting equivalences for Grothendieck categories*, J. Algebra, 2000, 232(2), 541-563.

[31] Happel D., *Triangulated Categories in the Representation Theory of Finite Dimensional Algebras*, vol 118, London Math.Soc.Lecture Notes Series, 1988.

[32] Maclane S., *Categories for the Working Mathematician*, Graduate Text in Mathematics, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1971.

[33] Mantese F., Tonolo A., *Natural Dualities*, Algebr. Represent. Theory, 2004, 7, 43-52.

[34] Marcus A., *Representation Theory of Group Graded Algebras*, Nova Science Publishers, Inc., Commack N.Y., 1999.

[35] Marcus A., Modoi C., *Graded endomorphism rings and equivalences*, Comm. Algebra, 2003, 31(7), 3219-3249.

[36] Menini C., Orsatti A., *Representable equivalences between categories of modules and applications*, Rend. Semin. Mat. Univ. Padova, 1989, 82, 203-231.

[37] Mitchell B., *Theory of Categories*, Pure and Applied Mathematics Academic Press, Inc., New York and London, 1965.

[38] Morita K., *Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum conditions*, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku Sect. A, 1958, 6, 83-142.

[39] Năstăsescu C., Torrecillas B., *Morita duality for Grothendieck categories with applications to coalgebras*, Comm. Algebra, 2005, 33(11), 4083-4096.

[40] Năstăsescu C., Van Oystaeyen F., *Methods of Graded Rings*, Lectures Notes in Math., 1836, Springer, Berlin, 2004.

[41] Pop F., *Natural dualities between abelian categories*, Cent.Eur.J.Math., 2011, 9(5), 1088-1099.

[42] Pop F., *Closure properties associated to natural equivalences*, Comm.Algebra (submitted), 2011.

[43] Pop F., *Closure properties associated to natural equivalences II*, (in progress), 2011.

[44] Popescu N., *Categorii Abeliene*, Editura Academiei Române, Bucureşti, 1971.

[45] Purdea I., *Tratat de Algebră Modernă*, vol. II, Editura Academiei Române, Bucureşti, 1982.

[46] Rotman J.J., *Advanced Modern Algebra*, Pearson Education, Inc., New Jersey, 2002.

[47] Rump W., *$*$-modules, tilting, and almost abelian categories*, Comm. Algebra, 2001, 29(8), 3293-3325.

[48] Stenstrom B., *Rings of Quotients*, Springer-Verlag LNM, vol. 76, New York, Heidelberg, Berlin, 1970.

[49] Tonolo A., *On a finitistic cotilting type duality*, Comm. Algebra, 2002, 30(10), 5091-5106.

[50] Wakamatsu T., *Tilting modules and Auslander's Gorenstein property*, J. Algebra, 2004, 275(1), 3-39.

[51] Wisbauer R., *Foundations of Module and Ring Theory, Algebra, Logic and Applications*, 3, Gordon and Breach, Philadelphia, 1991.

[52] Wisbauer R., *Tilting in module categories*, Abelian groups, module theory, and topology (Padova, 1997), Lect. Notes Pure Appl. Math., 1998, 201, Marcel Dekker, New York, 421-444.

[53] Wisbauer R., *Static objects and equivalences*, Interactions Between Ring Theory and Representations of Algebras, F.van Oystaeyen and M.Saorin, Marcel Dekker, 2000, 423-449.

[54] Wisbauer R., *Cotilting objects and dualities*, In: Representations of Algebras, Sao Paulo, 1999, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 224, Marcel Dekker, New York, 2002, 215-233.

Universitatea "Babeş-Bolyai", Facultatea de Matematică şi Informatică, Str. Mihail Kogălniceanu 1, 400084, Cluj-Napoca, România

E-mail address: flaviu.v@gmail.com