Universitatea „Babeş-Bolyai”, Cluj-Napoca
Facultatea de Matematată şi Informatică

Module Kronecker şi fascicule de matrice

Rezumatul tezei de doctorat

Conducător ştiinţific:
Prof. Dr. Andrei Mărcuş

Student doctorand:
Ştefan L. Şuteu-Szöllősi

Cluj-Napoca

2011

Cuprins

1 Preliminarii **9**

1.1 Categoria modulelor Kronecker 9

1.2 Algebre Ringel-Hall în cazul Kronecker 14

2 Şiruri scurte exacte de module Kronecker **17**

2.1 Monomorfisme între preinjective şi epimorfisme între preproiective 17

2.2 Câteva şiruri scurte exacte particulare de preinjective şi preproiective 19

2.3 Independenţa de corpul de bază a şirurilor scurte exacte de module preinjective şi preproiective 19

2.4 Extensii de module Kronecker peste corpuri arbitrare 20

2.5 Produsul monoidal de extensii al modulelor Kronecker preinjective (preproiective) 21

2.6 Produsul monoidal de extensii al unui modul Kronecker preinjectiv cu un modul preproiectiv 24

2.7 Calculul produsului monoidal de extensii de module Kronecker preinjective şi preproiective 25

3 Fascicule de matrice **27**

3.1 Matrice polinomiale 27

3.2 Formele normale ale unei matrice 27

3.3 Fascicule lineare de matrice 28

3.4 Problema subfasciculului de matrice 29

3.5 Legătura dintre fasciculele de matrice şi modulele Kronecker 29

3.6 Soluţia problemei subfasciculului de matrice într-un caz particular 30

Introducere

Fie $K: 1 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\leftleftarrows}} 2$ tolba Kronecker şi κ un corp arbitrar. Algebra de drumuri κK peste tolba Kronecker este algebra Kronecker. Considerăm categoria modulelor drepte peste această algebră (categoria modulelor Kronecker), notată cu mod-κK. Categoria mod-κK poate fi identificată cu categoria reprezentărilor κ-lineare finit dimensionale a tolbei Kronecker, notată cu rep-κK . Problema clasificării modulelor Kronecker simple a fost parţial rezolvată de către Weierstrass[1]. Clasificarea a fost completată de către Kronecker[2] în 1890, acest fapt explicând denumirea tolbei, algebrei şi a modulelor corespunzătoare.

Algebra Kronecker este un caz special de algebră ereditară blândă. Importanţa ei este dobândită prin faptul că modelează „comportamentul" tuturor algebrelor ereditare blânde (a se vedea [2, 18]). Mai mult, stă în strânsă legătură cu alte ramuri ale matematicii, cum ar fi geometria, algebra lineară şi matematica aplicată (teoria controlului, câteva probleme în inginerie, etc.). Pe de o parte categoria mod-κK are o interpretare geometrică, fiind derivat echivalentă cu categoria $\mathrm{Coh}(\mathbb{P}^1(\kappa))$ a fasciculelor coerente peste dreapta proiectivă – tolba Kronecker este de fapt tolba Beilinson pentru $\mathbb{P}^1$ (a se vedea [4]). Pe de altă parte, modulele Kronecker corespund fasciculelor de matrice din algebra lineară (detaliem această corespondenţă în Secţiunea 3.5). Această corespondenţă permite tratarea problemelor legate de fascicule de matrice din algebra lineară şi din teoria controlului cu noţiunile legate de modulele Kronecker, folosind rezultate şi tehnici din algebra abstractă. Datorită utilităţii sale, categoria modulelor Kronecker a fost studiată şi tolba Auslander-Reiten (care dezvăluie obiectele indecompozabile şi aşa-zisele morfisme ireductibile) e bine cunoscută. Informaţii generale despre categoria mod-κK se pot regăsi în multe lucrări clasice de teoria reprezentărilor (a se vedea de exemplu [1, 2, 18]).

Teza de faţă are două obiective majore. Pe de o parte intenţionează să îmbogăţească setul de informaţii disponibile privind categoria mod-κK, prin oferirea unor răspunsuri la întrebări fundamentale, cum ar fi condiţiile de existenţă a scufundărilor, proiecţiilor şi a şirurilor scurte exacte între module Kronecker decompozabile peste un corp arbitrar. Menţionăm că datorită rezultatelor obţinute de Cs. Szántó în domeniu, avem răspunsuri la problemele privind cazul modulelor Kronecker indecompozabile peste un corp finit (a se vedea [22, 21]). Generalizăm câteva dintre aceste rezultate în două direcţii: prin trecerea de la corpul finit la un corp κ

[1] *Karl Theodor Wilhelm Weierstrass* (1815 – 1897), matematician german – „părintele analizei matematice".
[2] *Leopold Kronecker* (1823 – 1891), matematician german – contribuţii în teoria numerelor şi algebră.

oarecare şi prin generalizarea condiţiilor (numerice) de existenţă pentru module Kronecker decompozabile. În consecinţă, la baza rezultatelor noi obţinute în cadrul acestei teze stau rezultatele din [22] şi [21], prin urmare prezenta teză poate fi considerată o continuare a cercetării lui Cs. Szántó în acest domeniu. De asemenea, rezultatele din această teză aduc contribuţii în aria modulelor Kronecker peste corpuri finite, pentru că furnizează informaţii cu privire la produsul Ringel-Hall al diferitelor module Kronecker decompozabile. Pe de altă parte, prin exploatarea conexiunii dintre modulele Kronecker şi fasciculele de matrice, ne propunem, în ultima parte a tezei, să exemplificăm importanţa şi utilitatea rezultatelor obţinute (referitoare la scufundări, proiecţii şi şiruri scurte exacte de module) printr-o aplicaţie imediată în soluţionarea parţială a problemei subfasciculului de matrice, într-un caz particular important. Problema subfasciculului de matrice este o problemă deschisă importantă, cu aplicaţii în inginerie şi fizică.

Teza este organizată în trei capitole, fiecare capitol având mai multe secţiuni.

Capitolul 1 este dedicat prezentării terminologiei şi unor rezultate bine cunoscute în teoria modulelor Kronecker. Secţiunea 1.1 conţine definiţii şi informaţii despre categoria mod-κK şi despre obiectele indecompozabile. Conform celor menţionate anterior, sursele principale sunt [1, 2, 18]. În Secţiunea 1.2 extragem rezultatele relevante din [22] şi [21] şi le prezentăm într-un mod concis. Teoremele din această secţiune stau la baza lucrării noastre.

Capitolul 2 conţine majoritatea contribuţiilor noastre la teoria modulelor Kronecker. În Secţiunea 2.1 stabilim o serie de criterii numerice în funcţie de aşa-numiţii invarianţi Kronecker (parametri întregi, care determină clasa de izomorfism a modulului Kronecker) pentru existenţa unui monomorfism între module Kronecker preinjective (decompozabile) şi în mod dual, pentru existenţa unui epimorfism între module preproiective. După caracterizarea termenilor din mijloc din şirurile scurte exacte (Secţiunea 2.2), în Secţiunile 2.3 şi 2.4 arătăm că aceste condiţii sunt independente de corpul de bază κ – dăm o demonstraţie detaliată pentru cazul modulelor preinjective şi preproiective. Produsul monoidal de extensii introdus de Reineke (a se vedea [17]) se dovedeşte a fi un instrument foarte convenabil în studiul şirurilor scurte exacte de module Kronecker în acest cadru independent de corpul de bază. În consecinţă, acest produs monoidal reprezintă subiectul principal în toate celelalte secţiuni din Capitolul 2. În Secţiunile 2.5 şi 2.6 descriem complet acest produs în cazul modulelor preinjective şi/sau preproiective, dezvăluindu-i proprietăţile combinatorice. În Secţiunea 2.7 transformăm unele condiţii implicite în condiţii total explicite şi descriem astfel termenii din mijloc din $\mathrm{Ext}^1(I, I')$ – unde I şi I' sunt preinjective – printr-un sistem de condiţii numerice uşor de verificat. Ca urmare, obţinem un algoritm care decide în timp linear (în numărul total al componentelor indecompozabile) dacă un modul dat poate fi sau nu poate fi termen din mijloc într-un şir scurt exact de module preinjective. Propunem şi o metodă de generare a tuturor termenilor din mijloc şi dăm o a doua demonstraţie pentru teorema care stabileşte condiţiile pentru existenţa unei scufundări $I' \hookrightarrow I$. Toate aceste rezultate se pot aplica în mod dual modulelor preproiective.

În **Capitolul 3** exemplificăm utilitatea rezultatelor obţinute prin aplicarea acestora pentru o problemă deschisă importantă, care provine din teoria controlului (a se vedea de exemplu [14]). Pe baza cărţii [10], facem o scurtă introducere în teoria fasciculelor de matrice (Secţiunea 3.1, 3.2 şi 3.3), explicând pe scurt noţiunile, şi înşiruim rezultatele relevante, care sunt necesare pentru înţelegerea problemei subfasciculului de matrice, prezentată în Secţiunea 3.4. Fasciculele de matrice sunt determinate (până la o relaţie de echivalenţă strictă) de invarianţii Kronecker clasici, în mod analog invarianţilor Kronecker care determină modulele Kronecker până la un izomorfism. Legătura dintre modulele Kronecker şi fasciculele de matrice este detaliată în Secţiunea 3.5. În final, soluţia noastră pentru problema subfasciculului (în caz particular) este prezentată în Secţiunea 3.6.

Accentuăm faptul că toate rezultatele sunt valide în mod independent de corpul de bază iar condiţiile numerice sunt uşor de verificat. Practic ele sunt nişte sisteme de inegalităţi care implică doar numere întregi (invarianţii Kronecker, respectiv invarianţii Kronecker clasici). Dacă doream să scriem un motto tezei, ar fi fost o alegere bună citatul „*Dumnezeu a creat numerele întregi, toate celelalte sunt opera oamenilor.*" – atribuit chiar lui Leopold Kronecker.[5]

Menţionăm de asemenea, că această lucrare este descrierea unei cercetări în curs de desfăşurare. Scopul eforturilor noastre continue este de a găsi criterii explicite numerice pentru existenţa scufundărilor, proiecţiilor şi a şirurilor scurte exacte, care implică modul Kronecker arbitrare (preproiective, regulare şi preinjectiv). Ca urmare, ne aşteptăm să putem rezolva problema subfasciculului de matrice în cazul general, oferind un sistem de condiţii numerice explicite, ca şi în cazul special tratat în ultimul capitol.

Teza de faţă este bazată pe următoarele patru articole ale autorului: [25, 26, 27, 28] – dintre care primele două sunt scrise în colaborare cu Cs. Szántó. Rezultatele din Secţiunea 2.6 şi 3.6 sunt încă nepublicate. Principalele rezultate incluse aici au fost prezentate şi în cadrul următoarelor conferinţe ştiinţifice internaţionale:

1. I. Szöllősi, *Kronecker modules and matrix pencils*, 13th Postgraduate Group Theory Conference, University of Aberdeen, Aberdeen, Scotland, June 23-25, 2011.

2. Cs. Szántó, I. Szöllősi, *Short exact sequences of Kronecker modules (poster)*, New developments in noncommutative algebra and its applications (Workshop), Sabhal Mòr Ostaig, Isle of Skye, Scotland, Jun 26 - Jul 2, 2011.

3. I. Szöllősi, *Computing the extensions of preinjective and preprojective Kronecker modules*, Groups and Semigroups: Interactions and Computations (Conference), University of Lisbon, Lisbon, Portugal, July 25-29, 2011.

4. I. Szöllősi, *Computational methods in the theory of Kronecker modules*, A^3 Abstract Algebra and Algorithms Conference, Eszterházy Károly College, Eger, Hungary, August 14-17, 2011.

5. I. Szöllősi, *On short exact sequences of Kronecker modules*, Algebraic Representation Theory, Uppsala University, Uppsala, Sweden, September 1-3, 2011.

Mulţumiri

Aş dori să mulţumesc conducătorului meu de doctorat, domnului profesor Dr. Andrei Mărcuş pentru sprijinul acordat de-a lungul anilor de studiu. Sunt extrem de recunoscător domnului profesor Dr. Szántó Csaba – profesionalismul lui matematic, sfaturile constructive şi ajutorul lui generos au făcut posibilă această lucrare, în ciuda intervalului scurt de timp şi condiţiilor solicitante de lucru. Adresez mulţumiri speciale domnului profesor Dr. Septimiu Crivei şi doamnei profesoare Dr. Gabriela Olteanu pentru includerea mea în echipele lor de cercetare. Îndrumarea şi prietenia domnului profesor Dr. Septimiu Crivei începând din anii studenţiei au fost printre factorii decisivi în alegerea vocaţiei mele.

În mod natural, îi mulţumesc familiei mele şi prietenilor mei.

Nu în ultimul rând aş dori să îmi exprim recunoştinţa faţă de nenumăraţii programatori de soft liber şi open source şi pentru membri comunităţilor respective, care donează din timpul lor şi pun pentru folosul public abilităţile lor de programare şi/sau matematice pentru a crea şi a face disponibilă în mod gratuit o întreagă gamă de instrumente indispensabile în lucrul academic, de la sisteme de operare (cum ar fi GNU Linux), sisteme de culegere şi prelucrare a documentelor şi editori grafici (de exemplu LaTeX, LyX, Inkscape, etc.) până la sisteme de algebră computaţională (cum ar fi GAP, Maxima, etc.). Contribuţia lor la progresul ştiinţei şi bunăstarea socială este enormă şi mult apreciată.

Doresc să mulţumesc pentru suportul financiar din Programul co-finanţat de Programul Operaţional Sectorial pentru Dezvoltarea Resurselor Umane 2007–2013, Contract POSDRU 6/ 1.5/S/3 – „STUDII DOCTORALE: PRIN ŞTIINŢĂ SPRE SOCIETATE".

Cuvinte cheie: algebră Kronecker, modul Kronecker (preinjectiv şi/sau preproiectiv), şir scurt exact, produs monoidal de extensii, fascicul de matrice, problema subfasciculului de matrice.

Capitolul 1

Preliminarii

1.1 Categoria modulelor Kronecker

Fie K **tolba Kronecker**, adică tolba care are două vârfuri şi două săgeţi paralele

$$K:\ 1 \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\leftleftarrows}} 2\ ,$$

şi κ un corp arbitrar. Algebra de drumuri a tolbei Kronecker este **algebra Kronecker** pe care o vom nota cu κK. Baza algebrei de drumuri κK este determinată de mulţimea tuturor drumurilor în K. Modulele la dreapta, finit dimensionale peste algebra Kronecker sunt **modulele Kronecker**. Notăm cu mod-κK categoria modulelor Kronecker.

O reprezentare κ-liniară (finit dimensională) a tolbei K este un cvadruplu $M = (V_1, V_2; \varphi_\alpha, \varphi_\beta)$, unde V_1, V_2 sunt κ-spaţii vectoriale de dimensiuni finite (corespunzând vârfurilor) şi $\varphi_\alpha, \varphi_\beta : V_2 \to V_1$ sunt funcţii κ-lineare (corespunzând săgeţilor). Prin urmare o reprezentare κ-liniară a tolbei K asociază spaţii vectoriale vârfurilor şi funcţii lineare compatibile (sau, în mod echivalent, matrice) săgeţilor. Notăm cu rep-κK categoria reprezentărilor finit dimensionale a tolbei Kronecker. Date fiind două reprezentări $M = (V_1, V_2; \varphi_\alpha, \varphi_\beta)$ şi $M' = (V_1', V_2'; \varphi_\alpha', \varphi_\beta')$, un morfism în rep-$\kappa K$ între M şi M' este o pereche de funcţii κ-lineare $f = (f_1, f_2)$, unde $f_1 : V_1 \to V_1'$ şi $f_2 : V_2 \to V_2'$, aşa încât următoarea diagramă este comutativă ($f_1\varphi_\alpha = \varphi_\alpha' f_2$ şi $f_1\varphi_\beta = \varphi_\beta' f_2$):

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \overset{\varphi_\alpha}{\underset{\varphi_\beta}{\leftleftarrows}} & V_2 \\ {\scriptstyle f_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_2} \\ V_1' & \overset{\varphi_\alpha'}{\underset{\varphi_\beta'}{\leftleftarrows}} & V_2' \end{array} .$$

Categoria modulelor Kronecker este echivalentă cu categoria reprezentărilor tolbei Kronecker, această echivalenţă fiind dată de functorii F şi G, definiţi în felul următor:

- $F : \text{mod-}\kappa K \to \text{rep-}\kappa K$ cu $F(M) = (F(M)_1, F(M)_2; F(M)_\alpha, F(M)_\beta) = (V_1, V_2; \varphi_\alpha, \varphi_\beta)$, unde $V_1 = M\varepsilon_1$, $V_2 = M\varepsilon_2$ şi $\varphi_\alpha, \varphi_\beta : V_2 \to V_1$, aşa încât $\varphi_\alpha(x) = x\alpha$ şi $\varphi_\beta(x) = x\beta$ pentru oricare $x \in V_2$. Dacă $f : M \to M'$ este un morfism de module Kronecker, atunci $F(f) : F(M) \to F(M')$, $F(f) = (f_1, f_2)$, unde $f_1 = f|_{F(M)_1}$ şi $f_2 = f|_{F(M)_2}$.

- G : rep-$\kappa K \to$ mod-κK cu $G(M) = M_1 \oplus M_2$ fiind un κ-spaţiu, cu structura de κK-modul la dreapta dată de $x\varepsilon_1 = (x_1+x_2)\varepsilon_1 = x_1$, $x\varepsilon_2 = (x_1+x_2)\varepsilon_2 = x_2$, $x\alpha = \varphi_\alpha(x_2)$, $x\beta = \varphi_\beta(x_2)$ şi $G(f) = f_1 \oplus f_2$.

Echivalenţa categoriilor mod-κK şi rep-κK fiind clară, de acum încolo vom identifica un modul $M \in$ mod-κK cu reprezentarea κ-liniară corespunzătoare tolbei K şi vom folosi notaţia $M : V_1 \underset{\varphi_\beta}{\overset{\varphi_\alpha}{\leftleftarrows}} V_2$ sau $M : V_1 \underset{[\varphi_\beta]}{\overset{[\varphi_\alpha]}{\leftleftarrows}} V_2$, unde $[\varphi_\alpha]$ şi $[\varphi_\beta]$ sunt matricele funcţiilor lineare φ_α şi φ_β într-o bază oarecare.

Categoria mod-κK a fost studiată în profunzime, deoarece algebra Kronecker este un exemplu foarte important de algebră ereditară blândă. Mai mult, categoria mod-κK are şi o interpretare geometrică, din moment ce este derivat echivalentă cu categoria fasciculelor coerente peste dreapta proiectivă.

În cele ce urmează, facem o scurtă compilaţie de definiţii şi rezultate bine cunoscute despre categoria modulelor Kronecker. Calculele, justificările şi demonstraţiile prin care se ajunge la aceste rezultate se pot regăsi în diverse cărţi şi articole de specialitate, de exemplu în [1, 19, 2, 18]. Nu intenţionăm replicarea argumentelor aici, doar revizuirea scurtă a materialului pe baza cărui se pot înţelege rezultate noi obţinute în Capitolul 2 şi 3.

Modulele Kronecker simple (până la izomorfism) sunt

$$S_1 : \kappa \leftleftarrows 0 \quad \text{şi} \quad S_2 : 0 \leftleftarrows \kappa.$$

În cazul unui modul Kronecker M notăm cu $\underline{\dim} M$ **dimensiunea** lui. Dimensiunea lui M este un vector $\underline{\dim} M = ((\dim M)_1, (\dim M)_2) = (m_{S_1}(M), m_{S_2}(M))$, unde $m_{S_i}(M)$ este numărul factorilor izomorfi cu modulul simplu S_i în seria de compoziţie a lui M, $i = \overline{1,2}$. Privită ca şi o reprezentare $M : V_1 \underset{\varphi_\beta}{\overset{\varphi_\alpha}{\leftleftarrows}} V_2$, avem $\underline{\dim} M = (\dim_\kappa V_1, \dim_\kappa V_2)$.

Un modul indecompozabil $M \in$ mod-κK e membru într-una dintre următoarele trei familii: preproiective, regulare şi preinjective.

Modulele Kronecker indecompozabile preproiective sunt determinate până la izomorfism de către vectorul de dimensiuni. Pentru $n \in \mathbb{N}$ vom nota cu P_n un indecompozabil preproiectiv de dimensiune $(n+1, n)$. Deci P_0 şi P_1 sunt indecompozabilele proiective ($P_0 = S_1$ fiind simplu). Se ştie, că (până la izomorfism) $P_n = (\kappa^{n+1}, \kappa^n; f, g)$, unde alegând baza canonică în κ^n şi κ^{n+1}, matricele funcţiilor $f : \kappa^n \to \kappa^{n+1}$ şi $g : \kappa^n \to \kappa^{n+1}$ sunt $\begin{pmatrix} E_n \\ 0 \end{pmatrix}$, respectiv

$\begin{pmatrix} 0 \\ E_n \end{pmatrix}$. Deci în acest caz avem:

$$P_n:\ \kappa^{n+1} \underset{\binom{E_n}{0}}{\overset{\binom{0}{E_n}}{\leftleftarrows}} \kappa^n\ ,$$

unde E_n este matricea identitate. Defectul unui modul indecompozabil preproiectiv este $\partial P_n = -1$.

Definim un **modul Kronecker preproiectiv** P ca fiind sumă directă de indecompozabile preproiective $P = P_{a_1} \oplus P_{a_2} \oplus \cdots \oplus P_{a_l}$, unde am folosit convenţia $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_l$.

Modulele Kronecker indecompozabile preinjective sunt şi ele determinate până la izomorfism de către vectorul de dimensiuni. Pentru $n \in \mathbb{N}$ vom nota cu I_n un indecompozabil preproiectiv de dimensiune $(n, n+1)$. Deci I_0 şi I_1 sunt indecompozabilele proiective ($I_0 = S_1$ fiind simplu). Se ştie, că (până la izomorfism) $I_n = (\kappa^n, \kappa^{n+1}; f, g)$, unde alegând baza canonică în κ^{n+1} şi κ^n, matricele funcţiilor $f : \kappa^{n+1} \to \kappa^n$ şi $g : \kappa^{n+1} \to \kappa^n$ sunt $\begin{pmatrix} E_n & 0 \end{pmatrix}$, respectiv $\begin{pmatrix} 0 & E_n \end{pmatrix}$. Deci în acest caz avem:

$$I_n:\ \kappa^n \underset{(0\, E_n)}{\overset{(E_n\, 0)}{\leftleftarrows}} \kappa^{n+1}\ ,$$

unde E_n este matricea identitate. Defectul unui modul indecompozabil preproiectiv este $\partial P_n = 1$.

Definim un **modul Kronecker preinjectiv** P ca fiind sumă directă de indecompozabile preproiective $I = I_{a_1} \oplus I_{a_2} \oplus \cdots \oplus I_{a_l}$, unde am folosit convenţia $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_l$.

Modulele Kronecker indecompozabile regulare sunt modulele indecompozabile, care nu sunt nici proiective, nici preinjective. Un indecompozabil regular este izomorf cu una dintre următoarele reprezentări (unde f_X este multiplicarea cu X, iar id este funcţia identică şi $n \geq 1$):

- $R_\infty(n):\ \kappa[X]/(X^n) \underset{id}{\overset{f_X}{\leftleftarrows}} \kappa[X]/(X^n)$;
- $R_\phi(n):\ \kappa[X]/(\phi(X)^n) \underset{f_X}{\overset{id}{\leftleftarrows}} \kappa[X]/(\phi(X)^n)$, unde ϕ este un polinom monic cu gradul $\deg \phi \geq 2$, ireductibil în κ;
- $R_k(n):\ \kappa[X]/((X-k)^n) \underset{f_X}{\overset{id}{\leftleftarrows}} \kappa[X]/((X-a)^n)$, unde $k \in \kappa$ (deci $R_k(n)$ este doar o notaţie pentru $R_{X-k}(n)$).

Aceasta este în conformitate cu cele spuse până acum, deoarece avem următorul izomorfism g de reprezentări, unde ϕ este un polinom monic arbitrar ireductibil, de grad $\deg \phi = d \geq 1$:

$$\begin{tikzcd}
\kappa^{nd} \arrow[d, "g"'] & \kappa^{nd} \arrow[l, shift right, "id"'] \arrow[l, shift left, "C_{\phi(X)^n}"'] \arrow[d, "g"] \\
\kappa[X]/(\phi(X)^n) & \kappa[X]/(\phi(X)^n) \arrow[l, shift right, "id"'] \arrow[l, shift left, "X"']
\end{tikzcd},$$

unde $g : \kappa^{nd} \to \kappa[X]/(\phi(X)^n)$, $g(k_0, k_1, \ldots, k_{nd-1}) = k_0 + k_1 X + \cdots + k_{nd-1}X^{nd-1} + (\phi(X)^n)$ pentru oricare $(k_0, k_1, \ldots, k_{nd-1}) \in \kappa^{nd}$ şi $C_{\phi(X)^n}$ este matricea de companie a polinomului $\phi(X)^n$. **Matricea de companie** a unui polinom monic arbitrar $A(X) = X^d + k_{d-1}X^{d-1} + \cdots + k_0 \in \kappa[X]$ cu grad d este $C_{A(X)} \in \mathcal{M}_d(\kappa)$, unde

$$C_{A(X)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -k_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -k_1 \\ 0 & 1 & & 0 & -k_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & -k_{d-1} \end{pmatrix}.$$

Avem şi izomorfismul

$$\begin{tikzcd}
\kappa^{n} \arrow[d, "g"'] & \kappa^{n} \arrow[l, shift right, "J_0^{(n)}"'] \arrow[l, shift left, "id"'] \arrow[d, "g"] \\
\kappa[X]/(X^n) & \kappa[X]/(X^n) \arrow[l, shift right, "f_X"'] \arrow[l, shift left, "id"']
\end{tikzcd},$$

unde $g : \kappa^n \to \kappa[X]/(X^n)$ este definit ca şi înainte, cu $J_0^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ fiind matricea nilpotentă de grad n.

Pentru simplificarea notaţiilor şi a terminologiei, introducem următoarea mulţime:

$$\mathcal{P} = \{\infty\} \cup \kappa \cup \{\phi | \phi \text{ este un polinom monic cu grad } \deg\phi \geq 2 \text{ ireductibil peste } \kappa\}$$

şi vom numi un element $p \in \mathcal{P}$ un „punct". Notăm cu d_p gradul punctului p, unde

$$d_p = \begin{cases} 1 & p \in \{\infty\} \cup \kappa \\ \deg\phi & p \in \mathcal{P} \setminus (\{\infty\} \cup \kappa) \end{cases}.$$

Folosim convenţia $R_p(0) = 0$, pentru oricare $p \in \mathcal{P}$.

În consecinţă, dimensiunea unui modul indecompozabil regular este $\underline{\dim} R_p(n) = (nd_p, nd_p)$, iar defectul lui va fi $\partial R_p(n) = 0$. Rezultă din structura tolbei Auslander-Reiten că modulele indecompozabile regulare fac parte din aşa-zise tuburi (a se vedea [18, 19]). Fiecare punct $p \in \mathcal{P}$ determină un tub (fiecare polinom monic ireductibil $\phi \in \kappa[X]$ determină un tub $\mathcal{T}_\phi$, la care se adaugă tubul $\mathcal{T}_\infty$ al modulelor $R_\infty(n)$.

Dacă $\kappa = \bar{\kappa}$ este algebric închis, atunci toate polinoamele ireductibile au forma $\phi(X) = X - k$ şi matricea de companie $C_{(X-k)^n}$ este similară cu $J_k^{(n)}$, unde $J_k^{(n)}$ este blocul Jordan de $n \times n$, $J_k^{(n)} = \begin{pmatrix} k & 1 & & \\ & k & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & k \end{pmatrix} = kE_n + J_0^{(n)}$. În acest caz $\mathcal{P} = \{\infty\} \cup \kappa$ şi indecompozabilele regulare sunt

$$R_k(n):\ \kappa^n \underset{E_n}{\overset{pE_n + J_0^{(n)}}{\leftleftarrows}} \kappa^n \ \text{ pentru } k \in \kappa \text{ and } R_\infty(n):\ \kappa^n \underset{J_0^{(n)}}{\overset{E_n}{\leftleftarrows}} \kappa^n\ .$$

Un modul $R \in$ mod-κK va fi numit **modul Kronecker regular** dacă este sumă directă de indecompozabile regulare. Dacă $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ este o partiţie, atunci folosim notaţia $R_p(\lambda) = R_p(\lambda_1) \oplus R_p(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus R_p(\lambda_m)$.

Categoria mod-κK este o **categorie Krull-Schmidt**, deci avem următoarea teoremă de descompunere:

Teoremă 1.1.1 (Krull-Schmidt)**.** *Fiecare modul în $M \in$ mod-κK se descompune în următoarea sumă directă*

$$M = (P_{c_1} \oplus \cdots \oplus P_{c_n}) \oplus (\oplus_{p \in \mathcal{P}} R_p(\lambda^{(p)})) \oplus (I_{d_1} \oplus \cdots \oplus I_{d_m})$$

până la izomorfism, unde:

- $(c_1, \ldots, c_n)$ *este un şir crescător de numere naturale;*
- $\lambda^{(p)} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t)$ *este o partiţie nenulă pentru un număr finit de puncte $p \in \mathcal{P}$;*
- $(d_1, \ldots, d_m)$ *este un şir descrescător de numere naturale.*

Şirurile crescătoare $(c_1, \ldots, c_n)$ şi $(d_1, \ldots, d_m)$ împreună cu partiţiile $\lambda^{(p)}$ corespunzătoare fiecărui punct $p \in \mathcal{P}$ sunt **invarianţii Kronecker** ai modulului M. În concluzie, invarianţii Kronecker determină modulul $M \in$ mod-κK până la izomorfism.

Terminăm această secţiune cu următoarele leme bine cunoscute, în legătură cu proprietăţile morfismelor, extensiilor şi ale şirurilor scurte exacte în mod-κK:

Lemă 1.1.2. *Notând cu R, P şi I un modul preproiectiv, regular, respectiv preinjectiv, următoarele afirmaţii sunt adevărate (unde $m, n, t, t_1, t_2 \in \mathbb{N}$, $p \in \mathcal{P}$ şi d_p este gradul punctului p):*

(a) $\mathrm{Hom}(R, P) = \mathrm{Hom}(I, P) = \mathrm{Hom}(I, R) = \mathrm{Ext}^1(P, R) = \mathrm{Ext}^1(P, I) = \mathrm{Ext}^1(R, I) = 0.$

(b) *Pentru* $n \leq m$, *avem* $\dim_\kappa \operatorname{Hom}(P_n, P_m) = m-n+1$ *şi* $\operatorname{Ext}^1(P_n, P_m) = 0$; *în caz contrar* $\operatorname{Hom}(P_n, P_m) = 0$ *şi* $\dim_\kappa \operatorname{Ext}^1(P_n, P_m) = n-m-1$. *În particular* $\operatorname{End}(P_n) \cong \kappa$ *şi* $\operatorname{Ext}^1(P_n, P_n) = 0$.

(c) *Pentru* $n \geq m$, *avem* $\dim_\kappa \operatorname{Hom}(I_n, I_m) = n-m+1$ *şi* $\operatorname{Ext}^1(I_n, I_m) = 0$; *în caz contrar* $\operatorname{Hom}(I_n, I_m) = 0$ *şi* $\dim_\kappa \operatorname{Ext}^1(I_n, I_m) = m-n-1$. *În particular* $\operatorname{End}(I_n) \cong \kappa$ *şi* $\operatorname{Ext}^1(I_n, I_n) = 0$.

(d) *Dacă* $p \neq p'$, *atunci* $\operatorname{Hom}(R_p(t), R_{p'}(t)) = \operatorname{Ext}^1(R_p(t), R_{p'}(t)) = 0$.

(e) $\dim_\kappa \operatorname{Hom}(P_n, I_m) = n+m$ *şi* $\dim_\kappa \operatorname{Ext}^1(I_m, P_n) = m+n+2$.

(f) $\dim_\kappa \operatorname{Hom}(P_n, R_p(t)) = \dim_\kappa \operatorname{Hom}(R_p(t), I_n) = d_p t$ *şi* $\dim_\kappa \operatorname{Ext}^1(R_p(t), P_n) = \dim_\kappa \operatorname{Ext}^1(I_n, R_p(t)) = d_p t$.

(g) $\dim_\kappa \operatorname{Hom}(R_p(t_1), R_p(t_2)) = \dim_\kappa \operatorname{Ext}^1(R_p(t_1), R_p(t_2)) = d_p \min(t_1, t_2)$.

Lemă 1.1.3. *Dacă există un şir scurt exact* $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ *de module Kronecker, atunci* $\underline{\dim} M = \underline{\dim} M' + \underline{\dim} M''$ *şi* $\partial M = \partial M' + \partial M''$.

1.2 Algebre Ringel-Hall în cazul Kronecker

Fie κ un corp finit (această restricţie se aplică numai în cadrul acestei secţiuni). În cazul unui modul $X \in$ mod-κK cu $[X]$ notăm clasa de izomorfism a modulului şi $tM := M \oplus ... \oplus M$ (de t ori).

Algebra Ringel-Hall $\mathcal{H}(\kappa K, \mathbb{Q})$ asociată algebrei Kronecker κK este $\mathbb{Q}$-spaţiul liber, care are o bază formată din clasele de izomorfism din mod-κK, cu structura de algebră dată de produsul definit în următorul fel (numit **produsul Ringel-Hall**):

$$[N_1][N_2] = \sum_{[M]} F^M_{N_1 N_2}[M],$$

unde constantele $F^M_{N_1 N_2} = |\{M \supseteq U| \ U \cong N_2, \ M/U \cong N_1\}|$ sunt numite **numerele Ringel-Hall**. Prin urmare, $\mathcal{H}(\kappa K, \mathbb{Q})$ este o algebră asociativă, de obicei necomutativă, având ca şi element neutru clasa de izomorfism a modulului zero.

În general, pentru $M, N_1, ..., N_t \in$ mod-κK definim

$$F^M_{N_1 \ldots N_t} = |\{M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq ... \supseteq M_t = 0| \ M_{i-1}/M_i \cong N_i, \forall 1 \leq i \leq t\}|.$$

Din asociativitate rezultă, că

$$[N_1]...[N_t] = \sum_{[M]} F^M_{N_1 \ldots N_t}[M].$$

În cele ce urmează prezentăm câteva proprietăţi ale algebrei Ringel-Hall asociate algebrei Kronecker.

Lemă 1.2.1 ([22]). *Pentru* $N_1, N_2 \in \text{mod-}kK$ *cu* $\text{Ext}^1(N_1, N_2) = 0$ *şi* $\text{Hom}(N_2, N_1) = 0$ *avem* $[N_1][N_2] = [N_1 \oplus N_2]$.

Conform celor spuse în prima secţiune, clasa de izomorfism a modulului $M \in \text{mod-}kK$ este de forma $[M] = [P \oplus R \oplus I]$, unde P, R şi I este preproiectiv, regular respectiv preinjectiv. Din Lema 1.1.2 (a) şi Lema 1.2.1 rezultă că $[P \oplus R \oplus I] = [P][R][I]$, deci pentru $[M'] = [P' \oplus R' \oplus I']$ avem

$$[M][M'] = [P][R][I][P'][R'][I'].$$

Asta înseamnă, că pentru a obţine toate numerele Ringel-Hall, trebuie descrise produsele de forma

$$[I][I'], [I][P], [I][R], [R][R'], [R][P], [P][P'].$$

Avem o listă de formule pentru produsul Ringel-Hall în cazul unor module specifice, datorită lui Szántó (a se vedea de exemplu [22] şi [21]).

Dacă $F^M_{N_1 \ldots N_t} \neq 0$ atunci vom numi $[M]$ un **termen** în $[N_1]...[N_t]$ şi vom folosi notaţia $[M] \in \{[N_1]...[N_t]\}$ ($\{[N_1]...[N_t]\}$ pentru mulţimea termenilor din $[N_1]...[N_t]$). Folosind această notaţie şi asociativitatea produsului Ringel-Hall, următoarea lema rezultă uşor:

Lemă 1.2.2. Fie $N_1, N_2, M, M' \in \text{mod-}\kappa K$. Următoarele afirmaţii sunt adevărate:

(a) $\{[N_1][N_2]\} = \{[M] | F^M_{N_1 N_2} \neq 0\} = \{[M] | \exists$ *şir scurt exact* $0 \to N_2 \to M \to N_1 \to 0\}$.

(b) $M' \hookrightarrow M \Leftrightarrow F^M_{XM'} \neq 0$ *pentru un* $X \in \text{mod-}\kappa K \Leftrightarrow \exists$ *şir scurt exact* $0 \to M' \to M \to X \to 0$ *pentru un* $X \in \text{mod-}\kappa K \Leftrightarrow [M] \in \{[X][M']\}$ *pentru un* $X \in \text{mod-}\kappa K$.

(c) $M \twoheadrightarrow M \Leftrightarrow F^M_{M'X} \neq 0$ *pentru un* $X \in \text{mod-}\kappa K \Leftrightarrow \exists$ *şir scurt exact* $0 \to X \to M \to M' \to 0$ *pentru un* $X \in \text{mod-}\kappa K \Leftrightarrow [M] \in \{[M'][X]\}$ *pentru un* $X \in \text{mod-}\kappa K$.

În conseţintă, pentru a verifica existenţa unei scufundări, proiecţii sau şir scurt exact, tot ce avem de făcut e să vedem dacă termenul corespunzător din produsul Ringel-Hall este nul sau nu. Ca şi o consecinţă a rezultatelor din [22] şi [21] deducem următorul corolar:

Corolar 1.2.3. *Avem următorii termeni în produsul Ringel-Hall al diferitelor module Kronecker:*

(a) $\{[P][R][I]\} = \{[P \oplus R \oplus I]\}$, *unde* $P, R, I \in \text{mod-}\kappa K$ *sunt module preproiective, regulare, respectiv preinjective;*

(b) $\{[R][R']\} = \{[R'][R]\}$, *iar acestă mulţime conţine numai module regulare (pentru* $R, R' \in \text{mod-}\kappa K$ *module regulare arbitrare);*

(c) $\{[I_i][I_j]\} = \begin{cases} \{[I_i \oplus I_j]\} & i - j \geq -1 \\ \{[I_j \oplus I_i], [I_{j-1} \oplus I_{i+1}], ..., [I_{j-[\frac{j-i}{2}]} \oplus I_{i+[\frac{j-i}{2}]}]\} & i - j < -1 \end{cases}$

(d) $\{[P_i][P_j]\} = \begin{cases} \{[P_i \oplus P_j]\} & i-j \leq -1 \\ \{[P_j \oplus P_i], [P_{j+1} \oplus P_{i-1}], ..., [P_{j+[\frac{i-j}{2}]} \oplus P_{i-[\frac{i-j}{2}]}]\} & i-j > -1 \end{cases}$

(e) $\{[I_{n-1-i}][P_i]\} = R_n \cup \{[P_i \oplus I_{n-1-i}]\}$, *unde*

$$\mathcal{R}_n = \{[R_{p_1}(t_1) \oplus ... \oplus R_{p_s}(t_s)] \,|\, s \in \mathbb{N}^*, p_i \neq p_j \text{ dacă } i \neq j, t_1 d_{p_1} + ... + t_s d_{p_s} = n\}$$

(f) $\{[I_m]\mathcal{R}_n\} = \{\mathcal{R}_n[I_m]\} \cup \{\mathcal{R}_{n-1}[I_{m+1}]\} \cup ... \cup \{[I_{m+n}]\}$, *cu* $[I_{m+n}] \in \{[I_m][R_n]\}$ *pentru oricare* $R_n = R_{p_1}(t_1) \oplus ... \oplus R_{p_s}(t_s)$ *aşa încât* $p_1, \ldots p_s \in \mathcal{P}$ *sunt puncte diferite luate două câte două, şi* $t_1 d_{p_1} + ... + t_s d_{p_s} = n$.

(g) $\{\mathcal{R}_n[P_m]\} = \{[P_m]\mathcal{R}_n\} \cup \{[P_{m+1}]\mathcal{R}_{n-1}]\} \cup ... \cup \{[P_{m+n}]\}$, *cu* $[P_{m+n}] \in \{[R_n][P_m]\}$ *pentru oricare* $R_n = R_{p_1}(t_1) \oplus ... \oplus R_{p_s}(t_s)$ *aşa încât* $p_1, \ldots p_s \in \mathcal{P}$ *puncte diferite luate două câte două, şi* $t_1 d_{p_1} + ... + t_s d_{p_s} = n$.

După cum vom vedea, generalizarea Corolarului 1.2.3 are rol decisiv în studiul şirurilor scurt exacte de module Kronecker (în Capitolul 2) şi în rezolvarea problemei subfasciculului de matrice (în Capitolul 3). Deşi în cadrul acestei secţiuni s-a pus o condiţie de finitudine pe corpul de bază κ, vom arăta în Secţiunea 2.3 cum putem depăşi această restricţie, cel puţin în cazul modulelor preproiective şi preinjective. Prin înlocuirea produsului Ringel-Hall cu produsul monoidal de extensii al lui Reineke, ajungem la un set analog de reguli pentru produse de diferite mulţimi de clase de izomorfism ale modulelor Kronecker, care ne permit studiul şirurilor scurte exacte într-un cadru independent de corpul de bază.

Capitolul 2

Şiruri scurte exacte de module Kronecker

2.1 Monomorfisme între preinjective şi epimorfisme între preproiective

Scopul nostre este să dăm criterii numerice în funcţie de invarianţii Kronecker pentru $I' \hookrightarrow I$ (unde I', I sunt preinjective) şi pentru $P \twoheadrightarrow P'$ (unde P', P sunt preproiective).

Începem cu două leme, care permit descompunerea modulelor „mai mici" din şirul scurt exact.

Lemă 2.1.1 ([25]). *Fie* $N_1, N_2, M_1, M_2 \in \text{mod-}\kappa K$ *module Kronecker (unde* κ *este un corp arbitrar) aşa încât* $\text{Ext}^1(N_1, N_2) = 0$ *şi* $\text{Hom}(N_2, M_1) = 0$*. Atunci există un şir exact de forma*

$$0 \to N_1 \oplus N_2 \to M_1 \oplus M_2 \to Y \to 0$$

dacă şi numai dacă există un modul X *cu următoarele şiruri exacte:*

$$0 \to N_2 \to M_2 \to X \to 0$$

$$0 \to N_1 \to M_1 \oplus X \to Y \to 0.$$

Dual avem:

Lemă 2.1.2. *Fie* $N_1, N_2, M_1, M_2 \in \text{mod-}\kappa K$ *aşa încât* $\text{Ext}^1(N_1, N_2) = 0$ *şi* $\text{Hom}(M_2, N_1) = 0$*. Atunci există un şir exact de forma*

$$0 \to Y \to M_1 \oplus M_2 \to N_1 \oplus N_2 \to 0$$

dacă şi numai dacă există un modul X cu următoarele şiruri exacte:

$$0 \to X \to M_1 \to N_1 \to 0$$

$$0 \to Y \to X \oplus M_2 \to N_2 \to 0.$$

Următoarea lemă stabileşte condiţiile pentru existenţa unui monomorfism $f : I_n \to I_{n_1} \oplus \cdots \oplus I_{n_p}$ cu $n \geq n_1 \geq \cdots \geq n_p \geq 0$.

Lemă 2.1.3. *Considerăm module preinjective în* mod-κK *unde κ este an corp arbitrar. Fie $n \geq n_1 \geq \cdots \geq n_p \geq 0$ numere întregi aşa încât $s = \sum_{i=1}^{p} n_i \geq n$. Atunci există un monomorfism $f : I_n \to I_{n_1} \oplus \cdots \oplus I_{n_p}$. Mai mult,* $\mathrm{coker} f \cong I_{m_1} \oplus ... \oplus I_{m_{p-1}}$*, unde $n \geq m_1 \geq \cdots \geq m_{p-1} \geq 0$.*

Pornind de la lemele precedente, putem da condiţiile numerice pentru existenţa unei scufundări $f : I' \to I$ între modulele preinjective I şi I'.

Teoremă 2.1.4 ([25])**.** *Fie numerele întregi $d_1 \geq ... \geq d_n > 0$ şi $c_1 \geq ... \geq c_m > 0$. Avem un monomorfism*

$$f : I_{d_1} \oplus ... \oplus I_{d_n} \oplus dI_0 \to I_{c_1} \oplus ... \oplus I_{c_m} \oplus cI_0$$

dacă şi numai dacă $d \leq c$ şi $d_i + ... + d_n \leq \sum_{c_j \leq d_i} c_j$ pentru $i = \overline{1,n}$ (suma vidă fiind 0).

Remarcă 2.1.5. Folosind notaţia $I' = (a_0 I_0) \oplus ... \oplus (a_n I_n) \oplus ...$, $I = (b_0 I_0) \oplus ... \oplus (b_n I_n) \oplus ...$ avem o scufundare $f : I' \to I$ dacă şi numai dacă

$$\begin{aligned}
a_0 &\leq b_0 \\
a_1 &\leq b_1 \\
a_1 + 2a_2 &\leq b_1 + 2b_2 \\
&\vdots \\
a_1 + 2a_2 + ... + na_n &\leq b_1 + 2b_2 + ... + nb_n \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Deci precum se vede, un fel de relaţie de „dominanţă" descrie condiţia de existenţă a monomorfismului.

Teorema 2.1.4 poate fi dualizată uşor pentru cazul preproiectivelor:

Teoremă 2.1.6 ([25])**.** *Fie numerele întregi $d_1 \geq ... \geq d_n > 0$ şi $c_1 \geq ... \geq c_m > 0$. Există un epimorfism*

$$f : cP_0 \oplus P_{c_m} \oplus ... \oplus P_{c_1} \to dP_0 \oplus P_{d_n} \oplus ... \oplus P_{d_1}$$

dacă şi numai dacă $d \leq c$ şi $d_i + ... + d_n \leq \sum_{c_j \leq d_i} c_j$ pentru $i = \overline{1,n}$ (suma vidă fiind 0).

2.2 Câteva şiruri scurte exacte particulare de preinjective şi preproiective

Aplicând Teoremele 2.1.4 şi 2.1.6 descriem posibilii termeni din mijloc în câteva cazuri particulare de şiruri scurte exacte.

Proprietatea următoare este bine cunoscută:

Teoremă 2.2.1. *Dacă I', I'' sunt preinjective şi X este un termen din mijloc în* $\mathrm{Ext}^1(I', I'')$ *atunci şi X este preinjectiv. Dual, dacă P', P'' sunt preproiective şi Y este un termen din mijloc în* $\mathrm{Ext}^1(P', P'')$ *atunci şi Y este preproiectiv.*

Corolar 2.2.2 ([25]). *Fie $d_1 \geq ... \geq d_n > 0$, $c_1 \geq ... \geq c_m > 0$ şi $a > 0$ numere întregi. Atunci:*

(a) *$I_{c_1} \oplus ... \oplus I_{c_m} \oplus cI_0$ este un termen din mijloc în* $\mathrm{Ext}^1(I_a, I_{d_1} \oplus ... \oplus I_{d_n} \oplus dI_0)$ *dacă şi numai dacă $m + c = n + d + 1$, $\sum_{i=1}^m c_i = a + \sum_{j=1}^n d_j$, $d \leq c$ şi $d_i + ... + d_n \leq \sum_{c_j \leq d_i} c_j$ pentru $i = \overline{1, n}$.*

(b) *$I_{c_1} \oplus ... \oplus I_{c_m} \oplus cI_0$ este un termen din mijloc în* $\mathrm{Ext}^1(aI_0, I_{d_1} \oplus ... \oplus I_{d_n} \oplus dI_0)$ *dacă şi numai dacă $m + c = n + d + a$, $\sum_{i=1}^m c_i = \sum_{j=1}^n d_j$, $d \leq c$ şi $d_i + ... + d_n \leq \sum_{c_j \leq d_i} c_j$ pentru $i = \overline{1, n}$.*

Dual, pentru preproiective:

Corolar 2.2.3 ([25]). *Fie $d_1 \geq ... \geq d_n > 0$, $c_1 \geq ... \geq c_m > 0$ şi $a > 0$ numere întregi. Atunci:*

(a) *$cP_0 \oplus P_{c_m} \oplus ... \oplus P_{c_1}$ este un termen din mijloc în* $\mathrm{Ext}^1(dP_0 \oplus P_{d_n} \oplus ... \oplus P_{d_1}, P_a)$ *dacă şi numai dacă $m + c = n + d + 1$, $\sum_{i=1}^m c_i = a + \sum_{j=1}^n d_j$, $d \leq c$ şi $d_i + ... + d_n \leq \sum_{c_j \leq d_i} c_j$ pentru $i = \overline{1, n}$.*

(b) *$cP_0 \oplus P_{c_m} \oplus ... \oplus P_{c_1}$ este un termen din mijloc în* $\mathrm{Ext}^1(dP_0 \oplus P_{d_n} \oplus ... \oplus P_{d_1}, aP_0)$ *dacă şi numai dacă $m + c = n + d + a$, $\sum_{i=1}^m c_i = \sum_{j=1}^n d_j$, $d \leq c$ şi $d_i + ... + d_n \leq \sum_{c_j \leq d_i} c_j$ pentru $i = \overline{1, n}$.*

2.3 Independenţa de corpul de bază a şirurilor scurte exacte de module preinjective şi preproiective

Demonstrăm că termenii din mijloc în şirurile scurte exacte de module Kronecker preinjective şi preproiective nu depind de corpul de bază κ. Vom nota acum cu $I_n^{(\kappa)}$ preinjectivul indecompozabil în mod-κK de dimensiune $(n, n+1)$. Enunţăm următoarea teoremă:

Teoremă 2.3.1 ([25]). *Fie $d_1 \geq ... \geq d_n \geq 0$, $c_1 \geq ... \geq c_m \geq 0$ şi $e_1 \geq ... \geq e_p \geq 0$ numere întregi, κ şi κ' corpuri arbitrare. Dacă există un şir scurt exact în* mod-κK

$$0 \to I_{d_1}^{(\kappa)} \oplus ... \oplus I_{d_n}^{(\kappa)} \to I_{c_1}^{(\kappa)} \oplus ... \oplus I_{c_m}^{(\kappa)} \to I_{e_1}^{(\kappa)} \oplus ... \oplus I_{e_p}^{(\kappa)} \to 0,$$

atunci există un şir scurt exact similar în mod-$\kappa' K$*:*

$$0 \to I_{d_1}^{(\kappa')} \oplus ... \oplus I_{d_n}^{(\kappa')} \to I_{c_1}^{(\kappa')} \oplus ... \oplus I_{c_m}^{(\kappa')} \to I_{e_1}^{(\kappa')} \oplus ... \oplus I_{e_p}^{(\kappa')} \to 0.$$

În mod dual avem:

Teoremă 2.3.2 ([25])**.** *Fie $d_1 \geq ... \geq d_n \geq 0$, $c_1 \geq ... \geq c_m \geq 0$ şi $e_1 \geq ... \geq e_p \geq 0$ numere întregi, κ şi κ' corpuri arbitrare. Dacă există un şir scurt exact în* mod-κK

$$0 \to P_{d_n}^{(\kappa)} \oplus ... \oplus P_{d_1}^{(\kappa)} \to P_{c_m}^{(\kappa)} \oplus ... \oplus P_{c_1}^{(\kappa)} \to P_{e_p}^{(\kappa)} \oplus ... \oplus P_{e_1}^{(\kappa)} \to 0,$$

atunci există un şir scurt exact similar în mod-$\kappa' K$*:*

$$0 \to P_{d_n}^{(\kappa')} \oplus ... \oplus P_{d_1}^{(\kappa')} \to P_{c_m}^{(\kappa')} \oplus ... \oplus P_{c_1}^{(\kappa')} \to P_{e_p}^{(\kappa')} \oplus ... \oplus P_{e_1}^{(\kappa')} \to 0.$$

2.4 Extensii de module Kronecker peste corpuri arbitrare

Pentru $d \in \mathbb{N}^2$ fie $M_d = \{[M] | M \in \text{mod-}\kappa K, \underline{\dim} M = d\}$ mulţimea claselor de izomorfism ale modulelor Kronecker de dimensiune d. Pornind de la noţiunea introdusă de Reineke în [17] pentru submulţimi $\mathcal{A} \subset M_d$, $\mathcal{B} \subset M_e$, definim

$$\mathcal{A} * \mathcal{B} = \{[X] \in M_{d+e} \,|\, \exists\, 0 \to N \to X \to M \to 0 \text{ exact pentru un } [M] \in \mathcal{A}, [N] \in \mathcal{B}\}.$$

Deci produsul $\mathcal{A} * \mathcal{B}$ este mulţimea claselor de izomorfism ale tuturor extensiilor modulelor M cu $[M] \in \mathcal{A}$ prin modulele N cu $[N] \in \mathcal{B}$. Aceste este de fapt produsul monoidal de extensii al lui Reineke, cu clase de izomorfisme în loc de module. Este foarte important de ştiut că acest produs este asociativ (a se vedea [17]), adică pentru pentru $\mathcal{A} \subset M_d$, $\mathcal{B} \subset M_e$, $\mathcal{C} \subset M_f$ avem $(\mathcal{A} * \mathcal{B}) * \mathcal{C} = \mathcal{A} * (\mathcal{B} * \mathcal{C})$. În mod natural $\{[0]\} * \mathcal{A} = \mathcal{A} * \{[0]\} = \mathcal{A}$. Vom numi operaţia "$*$" produsul monoidal de extensii.

Remarcă 2.4.1. Pentru $M, N \in \text{mod-}\kappa K$ şi κ finit, $\{[M]\} * \{[N]\} = \{[M][N]\}$, adică produsul monoidal de extensii, rezultă chiar termenii din produsul Ringel-Hall (a se vedea Secţiunea 1.2).

În cadrul acestei secţiuni ne propunem să descriem produsele de forma $\{[M]\} * \{[N]\}$, adică să descriem extensiile lui M prin N. Este important de menţionat că printr-o „extensie a lui M prin N" înţelegem un modul X, care este termen din mijloc în $\text{Ext}^1(M, N)$. Accentuăm că toate rezultatele sunt valide în mod independent de corpul de bază.

Teoremă 2.4.2. *Avem următoarele reguli pentru produsele monoidale de extensii în cazurile următoare:*

(a) $\{[P]\} * \{[R]\} * \{[I]\} = \{[P \oplus R \oplus I]\}$*, unde $P, R, I \in$* mod-κK *sunt module arbitrare preproiective, regulare respectiv preinjective;*

(b) $\{[R]\}*\{[R']\} = \{[R']\}*\{[R]\}$, *iar această mulţime conţine numai module regulare (pentru $R, R' \in$ mod-κK module regulare arbitrare);*

(c) $\{[I_i]\} * \{[I_j]\} = \begin{cases} \{[I_i \oplus I_j]\} & i - j \geq -1 \\ \{[I_j \oplus I_i], [I_{j-1} \oplus I_{i+1}], ..., [I_{j-[\frac{j-i}{2}]} \oplus I_{i+[\frac{j-i}{2}]}]\} & i - j < -1 \end{cases}$

(d) $\{[P_i]\} * \{[P_j]\} = \begin{cases} \{[P_i \oplus P_j]\} & i - j \leq -1 \\ \{[P_j \oplus P_i], [P_{j+1} \oplus P_{i-1}], ..., [P_{j+[\frac{i-j}{2}]} \oplus P_{i-[\frac{i-j}{2}]}]\} & i - j > -1 \end{cases}$

(e) $\{[I_{n-1-i}]\} * \{[P_i]\} = \mathcal{R}_n \cup \{[P_i \oplus I_{n-1-i}]\}$, *unde*

$$\mathcal{R}_n = \{[R_{p_1}(t_1) \oplus ... \oplus R_{p_s}(t_s)] \,|\, s \in \mathbb{N}^*, p_i \neq p_j \text{ dacă } i \neq j, t_1 d_{p_1} + ... + t_s d_{p_s} = n\}.$$

(f) $\{[I_m]\} * \mathcal{R}_n = \mathcal{R}_n * \{[I_m]\} \cup \mathcal{R}_{n-1} * \{[I_{m+1}]\} \cup ... \cup \{[I_{m+n}]\}$.

(g) $\mathcal{R}_n * \{[P_m]\} = \{[P_m]\} * \mathcal{R}_n \cup \{[P_{m+1}]\} * \mathcal{R}_{n-1} \cup ... \cup \{[P_{m+n}]\}$.

2.5 Produsul monoidal de extensii al modulelor Kronecker preinjective (preproiective)

Fie $I' = I_{a_1} \oplus \cdots \oplus I_{a_p}$ şi $I = I_{b_1} \oplus \cdots \oplus I_{b_n}$ module Kronecker preinjective, unde $a_1 \geq \cdots \geq a_p$ şi $b_1 \geq \cdots \geq b_n$. Ne propunem să descriem mulţimea $\{[I']\} * \{[I]\}$, adică clasele de izomorfism care apar în produsul monoidal de extensii al lui $[I']$ cu $[I]$. Toate aceste rezultate pot fi enunţate în mod dual pentru cazul modulelor preproiective.

Lemă 2.5.1 ([26]). *Fie $a_1 \geq \cdots \geq a_n \geq 0$, $c_1 \geq \cdots \geq c_p \geq 0$ şi $b \geq 0$ numere întregi. Atunci*

$$[I_{c_1} \oplus \cdots \oplus I_{c_p}] \in \{[I_{a_1} \oplus \cdots \oplus I_{a_n}]\} * \{[I_b]\}$$

dacă şi numai dacă $p = n + 1$, $c_1 = a_1$, $\ldots$, $c_{k-1} = a_{k-1}$, $c_{k+1} \geq a_k$, $\ldots$, $c_{n+1} \geq a_n$ pentru un $k \in \{1, \ldots, n + 1\}$ şi $\sum_{i=1}^{n} a_i + b = \sum_{i=1}^{n+1} c_i$.

Lema 2.5.1 poate fi enunţată şi în felul următor:

Lemă 2.5.2 ([26]). *Fie $a_1 \geq \cdots \geq a_n \geq 0$, $c_1 \geq \cdots \geq c_p \geq 0$ şi $b \geq 0$ numere întregi. Atunci*

$$[I_{c_1} \oplus \cdots \oplus I_{c_p}] \in \{[I_{a_1} \oplus \cdots \oplus I_{a_n}]\} * \{[I_b]\}$$

dacă şi numai dacă $p = n + 1$, $c_1 = a_1$, $\ldots$, $c_{k-1} = a_{k-1}$, $c_k = b - \sum_{i=k}^{n} m_i$, $c_{k+1} = a_k + m_k$, $\ldots$, $c_{n+1} = a_n + m_n$ pentru un $k \in \{1, \ldots, n + 1\}$ şi $m_i \geq 0$, $i = \overline{k, n}$.

Pornind de la această lemă, putem enunţa teorema principală a acestei secţiuni:

Teoremă 2.5.3 ([26]). *Dacă* $a_1 \geq \dots a_p \geq 0$, $b_1 \geq \dots \geq b_n \geq 0$ *şi* $c_1 \geq \dots \geq c_r \geq 0$ *sunt numere întregi, atunci* $[I_{c_1} \oplus \dots \oplus I_{c_r}] \in \{[I_{a_1} \oplus \dots \oplus I_{a_p}]\} * \{[I_{b_1} \oplus \dots \oplus I_{b_n}]\}$ *dacă şi numai dacă* $r = n+p$, $\exists \beta : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n+p\}$, $\exists \alpha : \{1, \dots, p\} \to \{1, \dots, n+p\}$ *funcţii strict crescătoare cu* $\mathrm{Im}\alpha \cap \mathrm{Im}\beta = \emptyset$ *şi* $\exists m_j^i \geq 0$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$, *aşa încât* $\forall \ell \in \{1, \dots, n+p\}$

$$c_\ell = \begin{cases} b_i - \sum_{\substack{\beta(i)<\alpha(j) \\ 1\leq j\leq p}} m_j^i, \ \textit{unde}\ i = \beta^{-1}(\ell) & \ell \in \mathrm{Im}\beta \\ a_j + \sum_{\substack{\beta(i)<\alpha(j) \\ 1\leq i\leq n}} m_j^i, \ \textit{unde}\ j = \alpha^{-1}(\ell) & \ell \in \mathrm{Im}\alpha \end{cases}. \tag{2.5.1}$$

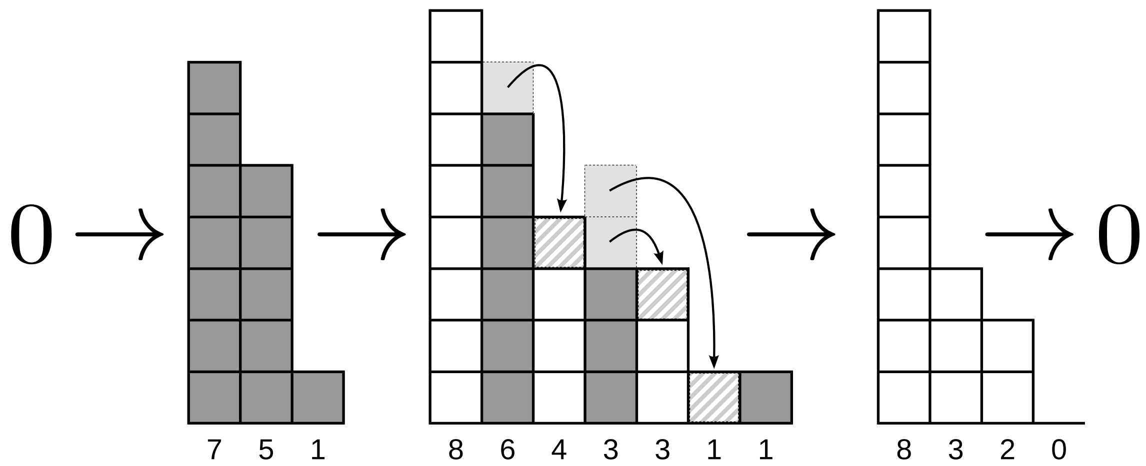
Exemplu 2.5.4. În mod-κK avem

$$[I_8 \oplus I_6 \oplus I_4 \oplus I_3 \oplus I_3 \oplus I_1 \oplus I_1] \in \{[I_8 \oplus I_3 \oplus I_2 \oplus I_0]\} * \{[I_7 \oplus I_5 \oplus I_1]\}.$$

Folosind notaţia din enunţul teoremei 2.5.3, avem $p = 4$, $n = 3$, $r = 7$ şi funcţiile strict crescătoare $\beta : \{1, 2, 3\} \to \{1, \dots, 7\}$ cu $\beta(1) = 2$, $\beta(2) = 4$, $\beta(3) = 7$ şi $\alpha : \{1, \dots, 4\} \to \{1, \dots, 7\}$ cu $\alpha(1) = 1$, $\alpha(2) = 3$, $\alpha(3) = 5$, $\alpha(4) = 6$. Pentru valorile m_j^i, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$, avem $m_2^1 = m_3^2 = m_4^2 = 1$ şi $m_j^i = 0$ în toate celelalte cazuri. Deci există un şir scurt exact

$$0 \to I_7 \oplus I_5 \oplus I_1 \to I_8 \oplus I_6 \oplus I_4 \oplus I_3 \oplus I_3 \oplus I_1 \oplus I_1 \to I_8 \oplus I_3 \oplus I_2 \oplus I_0 \to 0,$$

ilustrat în felul următor:



Deci, mai puţin formal, Teorema 2.5.3 spune că $[I_{c_1} \oplus \dots \oplus I_{c_r}] \in \{[I_{a_1} \oplus \dots \oplus I_{a_p}]\} * \{[I_{b_1} \oplus \dots \oplus I_{b_n}]\}$ dacă şi numai dacă şirul $c_1 \geq \dots \geq c_r \geq 0$ poate fi obţinut prin interclasarea şirurilor $a_1 \geq \dots \geq a_p \geq 0$ şi $b_1 \geq \dots \geq b_n \geq 0$ prin aplicarea unei reguli, ilustrate în desenul de mai sus. Această regulă spune că în termenul din mijloc un pătrat poate fi mutat numai de la stânga spre dreapta şi numai de pe coloanele negre (corespunzătoare elementelor din şirul $b_1 \geq \dots \geq b_n \geq 0$) pe coloanele albe (corespunzătoare elementelor din şirul $a_1 \geq \dots \geq a_p \geq 0$). Valorile m_j^i din teoremă reprezintă numărul de pătrate mutate din coloana corespunzătoare elementului b_i în coloana corespunzătoare elementului a_j.

Ca şi consecinţe imediate, obţinem următoarele corolare:

Corolar 2.5.5. *Fie $I, I', I'' \in$ mod-κK module Kronecker preinjective, unde $I = I_{c_1} \oplus \cdots \oplus I_{c_r}$, $I' = I_{a_1} \oplus \cdots \oplus I_{a_p}$ şi $I'' = I_{b_1} \oplus \cdots \oplus I_{b_n}$. Atunci există un şir scurt exact*

$$0 \to I_{b_1} \oplus \cdots \oplus I_{b_n} \to I_{c_1} \oplus \cdots \oplus I_{c_r} \to I_{a_1} \oplus \cdots \oplus I_{a_p} \to 0$$

dacă şi numai dacă există un şir scurt exact

$$0 \to I_{b_1+m} \oplus \cdots \oplus I_{b_n+m} \to I_{c_1+m} \oplus \cdots \oplus I_{c_r+m} \to I_{a_1+m} \oplus \cdots \oplus I_{a_p+m} \to 0$$

pentru o anumită valoare $m \in \mathbb{N}$.

Corolar 2.5.6. *Pentru $a_1 \geq \cdots \geq a_n \geq 0$, $c_1 \geq \cdots \geq c_p \geq 0$ şi $b \geq 0$ numere întregi, avem*

$$[I_{c_1} \oplus \cdots \oplus I_{c_p}] \in \{[I_b]\} * \{[I_{a_1} \oplus \cdots \oplus I_{a_n}]\}$$

dacă şi numai dacă $p = n + 1$, $c_1 = a_1 - m_1, \ldots, c_{k-1} = a_{k-1} - m_{k-1}$, $c_k = b + \sum_{i=1}^{k-1} m_i$, $c_{k+1} = a_k, \ldots, c_{n+1} = a_n$ pentru un anumit $k \in \{1, \ldots, n+1\}$ şi $m_i \geq 0$, $i = \overline{k, n}$.

Teorema 2.5.3 poate fi dualizată uşor pentru module preproiective:

Teoremă 2.5.7 ([26]). *Dacă $a_1 \geq \ldots a_p \geq 0$, $b_1 \geq \cdots \geq b_n \geq 0$ şi $c_1 \geq \cdots \geq c_r \geq 0$ sunt numere întregi, atunci $[P_{c_r} \oplus \cdots \oplus P_{c_1}] \in \{[P_{b_n} \oplus \cdots \oplus P_{b_1}]\} * \{[P_{a_p} \oplus \cdots \oplus P_{a_1}]\}$ dacă şi numai dacă $r = n+p$, $\exists \beta : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n+p\}$, $\exists \alpha : \{1, \ldots, p\} \to \{1, \ldots, n+p\}$ funcţii strict crescătoare cu $\mathrm{Im}\alpha \cap \mathrm{Im}\beta = \emptyset$ şi $\exists m_j^i \geq 0$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$, aşa încât $\forall \ell \in \{1, \ldots, n+p\}$*

$$c_\ell = \begin{cases} b_i - \sum_{\substack{\beta(i)<\alpha(j) \\ 1\leq j\leq p}} m_j^i, \ \textit{unde } i = \beta^{-1}(\ell) & \ell \in \mathrm{Im}\beta \\ a_j + \sum_{\substack{\beta(i)<\alpha(j) \\ 1\leq i\leq n}} m_j^i, \ \textit{unde } j = \alpha^{-1}(\ell) & \ell \in \mathrm{Im}\alpha \end{cases}.$$

Am văzut că Teorema 2.5.3 descrie proprietăţile combinatorice ale produsului monoidal de extensii a două module preinjective. Demonstrăm un rezultat mai general în [28]:

Teoremă 2.5.8 ([28]). *Pentru $a_1, \ldots, a_n, c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{N}$, $c_1 \geq \cdots \geq c_r \geq 0$, $r, n \geq 2$ avem $[I_{c_1} \oplus \cdots \oplus I_{c_r}] \in \{[I_{a_1}]\} * \cdots * \{[I_{a_n}]\}$ dacă şi numai dacă $r = n$, $\exists \sigma \in \mathcal{S}_n$ o permutare şi $\exists m_j^i \geq 0$ numere întregi, $1 \leq j < i \leq n$, aşa încât $\forall \ell \in \{1, \ldots, n\}$*

$$c_\ell = a_{\sigma(\ell)} + \sum_{i=\sigma(\ell)+1}^{n} m_{\sigma(\ell)}^i - \sum_{j=1}^{\sigma(\ell)-1} m_j^{\sigma(\ell)},$$

şi următoarele condiţiile sunt îndeplinite:

(i) $m_j^i > 0 \Longrightarrow \sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(j)$,

(ii) $a_j > a_i \Longrightarrow \sigma^{-1}(i) > \sigma^{-1}(j)$.

Folosind această teoremă putem (re)demonstra relativ uşor un corolar interesant, care a fost observat pentru prima dată în [23]:

Corolar 2.5.9. *Fie* $0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n$ *numere întregi. Atunci* $[I_{c_1} \oplus \cdots \oplus I_{c_n}] \in \{[I_{a_1}]\} * \cdots * \{[I_{a_n}]\}$ *dacă şi numai dacă* $c_1 \geq \cdots \geq c_n \geq 0$, $\sum_{i=1}^n c_i = \sum_{i=1}^n a_i$ *şi* $\sum_{i=1}^k c_i \leq \sum_{i=1}^k a_{n-i+1}$, *unde* $\mu = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ *şi* $\lambda = (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1)$.

2.6 Produsul monoidal de extensii al unui modul Kronecker preinjectiv cu un modul preproiectiv

În cele ce urmează enunţăm nişte rezultate care ne vor fi de folos în rezolvarea problemei subfasciculului de matrice în Capitolul 3.

Lemă 2.6.1. *Fie* $d_1 \geq \cdots \geq d_q \geq 0$ *şi* $c_1 \geq \cdots \geq c_r \geq 0$ *numere întregi. Atunci* $[I_{c_1} \oplus \cdots \oplus I_{c_r}] \in \{[I_{d_1} \oplus \cdots \oplus I_{d_q}]\} * \{[P_n]\}$ *dacă şi numai dacă* $r = q - 1$ *şi avem* $c_1 = d_1 + m_1, \ldots, c_l = d_l + m_l$, $c_{l+1} = d_{l+2}, \ldots, c_{q-1} = d_q$ *pentru un anumit* $l \in \{1, \ldots, q-1\}$ *cu* $m_i \geq 0$, $i = \overline{1,l}$ *şi* $\sum_{i=1}^l m_i = d_{l+1} + n + 1$.

Lemă 2.6.2. *Fie* $d_1 \geq \cdots \geq d_q \geq 0$ *şi* $c_1 \geq \cdots \geq c_{q-1} \geq 0$ *numere întregi. Atunci* $[I_{c_1} \oplus \cdots \oplus I_{c_{q-1}}] \in \{[I_{d_1} \oplus \cdots \oplus I_{d_q}]\} * \{[P_n]\}$ *dacă şi numai dacă* $[I_{d_1+n+1} \oplus \cdots \oplus I_{d_q+n+1}] \in \{[I_0]\} * \{[I_{c_1+n+1} \oplus \cdots \oplus I_{c_{q-1}+n+1}]\}$.

Teoremă 2.6.3. *Fie* $q > n > 0$, $d_1 \geq \cdots \geq d_q \geq 0$, $c_1 \geq \cdots \geq c_{q-n} \geq 0$ *şi* $0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n$ *numere întregi. Atunci* $[I_{c_1} \oplus \cdots \oplus I_{c_{q-n}}] \in \{[I_{d_1} \oplus \cdots \oplus I_{d_q}]\} * \{[P_{a_1} \oplus \cdots \oplus P_{a_n}]\}$ *dacă şi numai dacă* $[I_{d_1+a_n+1} \oplus \cdots \oplus I_{d_q+a_n+1}] \in \{[I_{a_n-a_1} \oplus \cdots \oplus I_{a_n-a_{n-1}} \oplus I_0]\} * \{[I_{c_1+a_n+1} \oplus \cdots \oplus I_{c_{q-n}+a_n+1}]\}$, *sau echivalent există un şir scurt exact*

$$0 \to P_{a_1} \oplus \cdots \oplus P_{a_n} \to I_{c_1} \oplus \cdots \oplus I_{c_{q-n}} \to I_{d_1} \oplus \cdots \oplus I_{d_q} \to 0$$

dacă şi numai dacă există un şir scurt exact

$$0 \to I_{c_1+a_n+1} \oplus \cdots \oplus I_{c_{q-n}+a_n+1} \to I_{d_1+a_n+1} \oplus \cdots \oplus I_{d_q+a_n+1} \to I_{a_n-a_1} \oplus \cdots \oplus I_{a_n-a_{n-1}} \oplus I_0 \to 0.$$

Corolar 2.6.4. *Fie* $q > \alpha > 0$, $d_1 \geq \cdots \geq d_q \geq 0$ *şi* $c_1 \geq \cdots \geq c_{q-n} \geq 0$ *numere întregi. Atunci* $[I_{c_1} \oplus \cdots \oplus I_{c_{q-\alpha}}] \in \{[I_{d_1} \oplus \cdots \oplus I_{d_q}]\} * \{[\alpha P_0]\}$ *dacă şi numai dacă* $[I_{d_1+1} \oplus \cdots \oplus I_{d_q+1}] \in \{[\alpha I_0]\} * \{[I_{c_1+1} \oplus \cdots \oplus I_{c_{q-\alpha}+1}]\}$, *sau echivalent există un şir scurt exact*

$$0 \to \alpha P_0 \to I_{c_1} \oplus \cdots \oplus I_{c_{q-\alpha}} \to I_{d_1} \oplus \cdots \oplus I_{d_q} \to 0$$

dacă şi numai dacă există un şir scurt exact

$$0 \to I_{c_1+1} \oplus \cdots \oplus I_{c_{q-\alpha}+1} \to I_{d_1+1} \oplus \cdots \oplus I_{d_q+1} \to \alpha I_0 \to 0.$$

2.7 Calculul produsului monoidal de extensii de module Kronecker preinjective şi preproiective

Pentru o abordare computaţională a teoremei de caracterizare (Teorema 2.5.3) într-un mod cât mai eficient posibil, trebuie să eliminăm condiţia implicită de existenţă a valorilor m_j^i din teoremă. În această secţiune demonstrăm o altă versiune a Teoremei 2.5.3, în care înlocuim condiţia de existenţă a valorilor m_j^i cu nişte inegalităţi care se pot scrie numai în funcţie de şirurile $(a_1, \dots, a_p)$, $(b_1, \dots, b_n)$ şi $(c_1, \dots, c_r)$.

Următoarea teoremă caracterizează extensiile modulelor Kronecker preinjective prin condiţii explicite, uşor de verificat:

Teoremă 2.7.1 ([27]). *Fie $a_1 \geq \dots a_p \geq 0$, $b_1 \geq \dots \geq b_n \geq 0$, $c_1 \geq \dots \geq c_r \geq 0$ şiruri de numere întregi şi fie $B_j = \{l \in \{0, \dots, n\} | \sum_{k=1}^{l} b_k + \sum_{k=1}^{j} a_k \geq \sum_{k=1}^{l+j} c_k\}$ pentru $j = \overline{1,p}$. Atunci*

$$[I_{c_1} \oplus \dots \oplus I_{c_r}] \in \{[I_{a_1} \oplus \dots \oplus I_{a_p}]\} * \{[I_{b_1} \oplus \dots \oplus I_{b_n}]\}$$

dacă şi numai dacă $r = p + n$, $\sum_{i=1}^{r} c_i = \sum_{i=1}^{p} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$, $B_j \neq \emptyset$, $a_j \leq c_{\alpha_j}$ şi $b_i \geq c_{\beta_i}$ pentru $j = \overline{1,p}$ şi $i = \overline{1,n}$, unde

$$\alpha_j = \begin{cases} \min B_1 + 1 & j = 1 \\ \max\{\alpha_{j-1} + 1, \min B_j + j\} & 1 < j \leq p \end{cases}$$

şi

$$\beta_i = \begin{cases} \min\{l \in \{1, \dots, r\} | l \neq \alpha_j, j = \overline{1,p}\} & i = 1 \\ \min\{l \in \{\beta_{i-1} + 1, \dots, r\} | l \neq \alpha_j, j = \overline{1,p}\} & 1 < i \leq n \end{cases}.$$

Teorema 2.7.1 poate părea greoaie la prima vedere, deci vom arăta cum se poate folosi pentru a obţine un algoritm care decide în timp linear dacă un modul Kronecker preinjectiv dat poate fi sau nu extensia altor două module Kronecker date.

Presupunem că sunt date modulele $I_{a_1} \oplus \dots \oplus I_{a_p}$, $I_{b_1} \oplus \dots \oplus I_{b_n}$ şi $I_{c_1} \oplus \dots \oplus I_{c_r}$ şi vrem să verificăm dacă $[I_{c_1} \oplus \dots \oplus I_{c_r}] \in \{[I_{a_1} \oplus \dots \oplus I_{a_p}]\} * \{[I_{b_1} \oplus \dots \oplus I_{b_n}]\}$. Evident, dacă $r \neq p + n$ sau $\sum_{k=1}^{r} c_r \neq \sum_{j=1}^{p} a_j + \sum_{i=1}^{n} b_i$, atunci răspunsul este negativ. Deci să presupunem că $r = p + n$ şi $\sum_{k=1}^{r} c_r = \sum_{j=1}^{p} a_j + \sum_{i=1}^{n} b_i$ sunt adevărate, deci ne putem ocupa doar de şirurile $(a_1, \dots, a_p)$, $(b_1, \dots, b_n)$ şi $(c_1, \dots, c_r)$.

Setăm valorile iniţiale $j = i = k = 1$ pentru variabilele întregi folosite pentru indexarea elementelor din şirurile $(a_1, \dots, a_p)$, $(b_1, \dots, b_n)$ respectiv $(c_1, \dots, c_r)$. Într-o implementare practică putem repeta paşii următori pentru valori succesive al lui $k = \overline{1,r}$:

1. Dacă $j \leq p$ şi $a_j \leq c_k$ şi $(a_1 + \dots + a_{j-1}) + (b_1 + \dots + b_{i-1}) + a_j \geq c_1 + \dots + c_k$, atunci incrementăm j cu 1.

2. Altfel, dacă $i \leq n$ şi $b_i \geq c_k$ şi $(a_1 + \dots + a_{j-1}) + (b_1 + \dots + b_{i-1}) + b_i \geq c_1 + \dots + c_k$, atunci incrementăm i cu 1.

3. Dacă niciunul dintre paşii anteriori nu se pot executa, atunci putem returna un răspuns negativ, adică $[I_{c_1} \oplus \cdots \oplus I_{c_r}] \notin \{[I_{a_1} \oplus \cdots \oplus I_{a_p}]\} * \{[I_{b_1} \oplus \cdots \oplus I_{b_n}]\}$.

În cele din urmă, dacă unul dintre primii doi paşi se poate executa şi pentru $k = r$, atunci returnăm un răspuns pozitiv, adică $[I_{c_1} \oplus \cdots \oplus I_{c_r}] \in \{[I_{a_1} \oplus \cdots \oplus I_{a_p}]\} * \{[I_{b_1} \oplus \cdots \oplus I_{b_n}]\}$.

Este trivial de observat că acest algoritm este linear în numărul componentelor indecompozabile, adică în $r = n+p$ deoarece singurul ciclu rulează de cel mult r ori şi sumele parţiale $a_1 + \cdots + a_j$, $b_1 + \cdots + b_i$ şi $c_1 + \cdots + c_k$ pot fi calculate termen cu termen la fiecare iteraţie.

Pentru a dezvolta un algoritm pentru generarea tuturor extensiilor X într-un şir scurt exact $0 \to I' \to X \to I \to 0$ am putea folosi desigur metoda „forţă brută", prin generarea tuturor modulelor posibile şi verificarea fiecărui modul în parte cu algoritmul descris mai înainte. Putem dezvolta însă metode şi mai eficiente, de exemplu folosind metoda backtracking (iterativ). În general, prin folosirea metodei de backtracking, putem găsi toate soluţiile la o problemă computaţională, prin construirea incrementală de soluții-candidat, abandonând fiecare candidat parţial imediat ce devine clar că acesta nu are şanse să devină o soluţie validă (a se vedea [13]). În cazul nostru spaţiul soluţiilor-candidat este o submulţime a tuturor şirurilor de numere întregi nenegative descrescătoare $(c_1, \ldots, c_r)$ cu lungimea şi suma elementelor fixată.

Remarcă 2.7.2. Numărul termenilor din mijloc poate fi foarte mare. În cel mai rău caz, când vrem să generăm toţi termenii din mijloc în $\mathrm{Ext}^1(I_n, mI_0)$, unde $m \geq n$, numărul termenilor din mijloc este egal cu $\mathcal{P}(n)$, unde $\mathcal{P}(n)$ este numărul partiţiilor numărului n. În practică însă am găsit că, folosind metoda de backtracking iterativ, putem genera aproape instantaneu mulţimea termenilor din mijloc, în cazul când numărul lor nu depăşeşte câteva sute de mii.

Exemplu 2.7.3. Folosind o implementare în GAP [31] a metodei, putem afirma următoarele:

1. Sunt 18 extensii posibile în $\mathrm{Ext}^1(I_4 \oplus I_3 \oplus I_1 \oplus I_0, I_5 \oplus I_3 \oplus I_3 \oplus I_2 \oplus I_1)$, şi anume: $[I_5 \oplus I_4 \oplus I_3 \oplus I_3 \oplus I_3 \oplus I_2 \oplus I_1 \oplus I_1 \oplus I_0]$, $[I_5 \oplus I_4 \oplus I_3 \oplus I_3 \oplus I_3 \oplus I_1 \oplus I_1 \oplus I_1 \oplus I_1]$, $[I_5 \oplus I_4 \oplus I_3 \oplus I_3 \oplus I_2 \oplus I_2 \oplus I_2 \oplus I_1 \oplus I_0]$, $[I_5 \oplus I_4 \oplus I_3 \oplus I_3 \oplus I_2 \oplus I_2 \oplus I_1 \oplus I_1 \oplus I_1]$, $[I_5 \oplus I_4 \oplus I_3 \oplus I_2 \oplus I_2 \oplus I_2 \oplus I_2 \oplus I_1 \oplus I_1]$, $[I_4 \oplus I_4 \oplus I_4 \oplus I_3 \oplus I_3 \oplus I_2 \oplus I_1 \oplus I_1 \oplus I_0]$, $[I_4 \oplus I_4 \oplus I_4 \oplus I_3 \oplus I_3 \oplus I_1 \oplus I_1 \oplus I_1 \oplus I_1]$, $[I_4 \oplus I_4 \oplus I_4 \oplus I_3 \oplus I_2 \oplus I_2 \oplus I_2 \oplus I_1 \oplus I_0]$, $[I_4 \oplus I_4 \oplus I_4 \oplus I_3 \oplus I_2 \oplus I_2 \oplus I_1 \oplus I_1 \oplus I_1]$, $[I_4 \oplus I_4 \oplus I_4 \oplus I_2 \oplus I_2 \oplus I_2 \oplus I_2 \oplus I_1 \oplus I_1]$, $[I_4 \oplus I_4 \oplus I_3 \oplus I_3 \oplus I_3 \oplus I_2 \oplus I_2 \oplus I_1 \oplus I_0]$, $[I_4 \oplus I_4 \oplus I_3 \oplus I_3 \oplus I_3 \oplus I_2 \oplus I_1 \oplus I_1 \oplus I_1]$, $[I_4 \oplus I_4 \oplus I_3 \oplus I_3 \oplus I_2 \oplus I_2 \oplus I_2 \oplus I_1 \oplus I_1]$, $[I_4 \oplus I_4 \oplus I_3 \oplus I_2 \oplus I_2 \oplus I_2 \oplus I_2 \oplus I_2 \oplus I_1]$, $[I_4 \oplus I_3 \oplus I_3 \oplus I_3 \oplus I_3 \oplus I_3 \oplus I_2 \oplus I_1 \oplus I_0]$, $[I_4 \oplus I_3 \oplus I_3 \oplus I_3 \oplus I_3 \oplus I_3 \oplus I_1 \oplus I_1 \oplus I_1]$, $[I_4 \oplus I_3 \oplus I_3 \oplus I_3 \oplus I_3 \oplus I_2 \oplus I_2 \oplus I_1 \oplus I_1]$ şi $[I_4 \oplus I_3 \oplus I_3 \oplus I_3 \oplus I_2 \oplus I_2 \oplus I_2 \oplus I_2 \oplus I_1]$.

2. Numărul termenilor din mijloc în $\mathrm{Ext}^1(I_{19} \oplus I_{15} \oplus I_8 \oplus I_4 \oplus I_1 \oplus I_1, I_{26} \oplus I_{12} \oplus I_{10} \oplus I_8 \oplus I_4)$ este 102501, generat în 2 secunde pe un laptop obişnuit.

3. Numărul termenilor din mijloc în $\mathrm{Ext}^1(I_{16} \oplus I_{11} \oplus I_7 \oplus I_6 \oplus I_3 \oplus I_1 \oplus I_1 \oplus I_0, I_{20} \oplus I_{19} \oplus I_{18} \oplus I_{10} \oplus I_8 \oplus I_3 \oplus I_2 \oplus I_2)$ este 3322698, şi toate cele 3322698 de module au fost generate în aproximativ 2 minute pe un laptop obişnuit.

Capitolul 3

Fascicule de matrice

3.1 Matrice polinomiale

O **matrice polinomială**, zisă şi o **λ-matrice**, este o matrice $A(\lambda) \in \mathcal{M}_{m,n}(\kappa[\lambda])$ ale cărei elemente sunt polinoame în variabila λ:

$$A(\lambda) = \left(a_{ij}(\lambda)\right) = \left(a_{ij}^{(0)}\lambda^l + a_{ij}^{(1)}\lambda^{l-1} + \cdots + a_{ij}^{(l)}\right),$$

unde în cazul fiecărui element $a_{ij}(\lambda) \in \kappa[\lambda]$, l este cel mai mare grad al polinoamelor $a_{ij}(\lambda)$, $i = \overline{1,m}$ şi $j = \overline{1,n}$.

În această secţiune reamintim câteva noţiuni de bază în legătură cu matricele polinomiale, cum ar fi: echivalenţa matricelor polinomiale, polinoamele invariante şi divizorii elementari. Terminăm cu următorul rezultat bine cunoscut:

Teoremă 3.1.1 ([10]). *Două matrice polinomiale având dimensiuni egale $A(\lambda)$ şi $B(\lambda)$ sunt echivalente dacă şi numai dacă au aceleaşi polinoame invariante sau, în mod echivalent, dacă şi numai dacă au aceiaşi divizori elementari.*

Pentru detalii în legătură cu aceste noţiuni, a se vedea [10].

3.2 Formele normale ale unei matrice

În această secţiune facem o revizuire rapidă a formelor normale ale matricelor din $\mathcal{M}_n(\kappa)$. Orice matrice se poate scrie în următoarele forme normale: prima şi a doua formă normală (în cazul unui corp arbitrar κ) şi forma normală Jordan (în cazul unui corp $\bar{\kappa}$ algebric închis). Acestea sunt forme bloc-diagonale, unde blocurile de pe diagonala principală sunt matricele de companie ale polinoamelor invariante (în prima formă normală), matricele de companie ale divizorilor elementari (în a doua formă normală) şi bine cunoscutele blocuri Jordan (în forma normală Jordan, în cazul când $\bar{\kappa}$ este algebric închis).

3.3 Fascicule lineare de matrice

În această secţiune introducem noţiunea centrală a acestui capitol, fasciculul (linear) de matrice – un caz special de matrice polinomială.

O matrice polinomială de forma $A + \lambda B \in \mathcal{M}_{m,n}(\kappa[\lambda])$ se numeşte un **fascicul linear de matrice**. În cele ce urmează, vom omite cuvântul „linear" şi vom spune că $A + \lambda B$ este un **fascicul de matrice**.

Două fascicule de matrice $A + \lambda B, A' + \lambda B' \in \mathcal{M}_{m,n}(\kappa[\lambda])$ sunt **echivalente strict** dacă există matricele (constante) nesingulare $P \in \mathcal{M}_m(\kappa)$ şi $Q \in \mathcal{M}_n(\kappa)$ aşa încât $A' + \lambda B' = P(A + \lambda B)Q$. Vom nota cu $A' + \lambda B' \sim A + \lambda B$ echivalenţa strictă a fasciculelor de matrice.

Remarcăm următoarea echivalenţă:

$$A' + \lambda B' = P(A + \lambda B)Q \iff A' = PAQ \text{ şi } B' = PBQ.$$

Fasciculele de matrice sunt determinate până la relaţia de echivalenţă strictă de către o mulţime de parametri întregi, numiţi **invarianţii Kronecker clasici**. Invarianţii Kronecker clasici sunt de patru feluri: indicii minimali pentru coloane, indicii minimali pentru rânduri, divizorii elementari finiţi şi divizorii elementari infiniţi. Următoarea teoremă (sintetizată din [10]) stabileşte relaţia dintre invarianţii Kronecker clasici şi forma bloc-diagonală a unui fascicul de matrice arbitrar:

Teoremă 3.3.1. *Un fascicul arbitrar de matrice $A + \lambda B$ este echivalent strict cu un fascicul bloc-diagonal, având următoarea formă:*

$$A + \lambda B \sim \operatorname{diag}(0_{h\times g}, L_{\varepsilon_{g+1}}, \ldots, L_{\varepsilon_p}, L^{\intercal}_{\eta_{h+1}}, \ldots, L^{\intercal}_{\eta_q}, E_{u_1} + \lambda H_{u_1}, \ldots, E_{u_t} + \lambda H_{u_t}, J + \lambda E),$$

unde

(a) *cele g coloane de zerouri şi blocurile diagonale $L_{\varepsilon_{g+1}}, \ldots, L_{\varepsilon_p}$ corespund indicilor minimali pentru coloane $0 = \varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_g \leq \varepsilon_{g+1} \leq \cdots \leq \varepsilon_p$,*

(b) *cele h rânduri de zerouri şi blocurile diagonale $L^{\intercal}_{\eta_{h+1}}, \ldots, L^{\intercal}_{\eta_q}$ corespund indicilor minimali pentru rânduri $0 = \eta_1 = \cdots = \eta_h \leq \eta_{h+1} \leq \cdots \leq \eta_q$,*

(c) *blocurile diagonale $E_{u_1} + \lambda H_{u_1}, \ldots, E_{u_t} + \lambda H_{u_t}$ corespund divizorilor elementari infiniţi $\mu^{u_1}, \ldots, \mu^{u_t}$,*

(d) *forma normală a ultimului bloc diagonal $J + \lambda E$ este determinată de către mulţimea divizorilor elementari finiţi.*

Acest fascicul de matrice este forma canonică a lui $A + \lambda B$ în cazul cel mai general[1]*.*

[1] Bineînţeles, depinzând de fasciculul $A + \lambda B$, pot lipsi unele dintre „familiile" de blocuri diagonale.

Fără a mai insista pe detalii, specificăm numai forma blocurilor determinate de către indicii minimali pentru coloane. Dacă numărul întreg $\varepsilon > 0$ este un indice minimal pentru coloane al fasciculului de matrice $A + \lambda B$, atunci fasciculul are un bloc de forma

$$L_\varepsilon = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

pe diagonala principală, când este scris în forma lui canonică bloc-diagonală, unde $L_\varepsilon \in \mathcal{M}_{\varepsilon,\varepsilon+1}(\kappa[\lambda])$.

Dat fiind un fasciculul linear $A + \lambda B$, există diferite metode (implementate în câteva sisteme de algebră computaţională) pentru a transforma acest fascicul în forma lui canonică şi în consecinţă pentru a extrage invarianţii Kronecker clasici. Nu ne propunem descrierea acestor metode în cadrul tezei, pentru detalii a se vedea [3, 6, 7, 16, 24].

3.4 Problema subfascicului de matrice

Un fascicul $A' + \lambda B'$ este numit **subfascicul** în $A + \lambda B$ dacă există fasciculele de completare $A_{12} + \lambda B_{12}$, $A_{21} + \lambda B_{21}$, $A_{22} + \lambda B_{22}$, unde

$$A + \lambda B \sim \begin{pmatrix} A' + \lambda B' & A_{12} + \lambda B_{12} \\ A_{21} + \lambda B_{21} & A_{22} + \lambda B_{22} \end{pmatrix}.$$

Vorbim despre completare prin coloane când $A_{12}, B_{12}, A_{22}, B_{22}$ sunt zero şi despre completare prin rânduri când $A_{21}, B_{21}, A_{22}, B_{22}$ sunt zero.

Considerăm următoarea problemă deschisă în teoria fasciculelor de matrice, cu aplicaţii în teoria controlului (se pot formula cu ajutorul fasciculelor de matrice probleme în legătură cu plasarea polului, feedback non-regular, feedback dinamic, etc. – pentru detalii a se vedea [14]):

Problemă deschisă: Dacă $A + \lambda B$, $A' + \lambda B'$ sunt fascicule de matrice peste $\mathbb{C}$, să găsim condiţiile necesare şi suficiente în funcţie de invarianţii Kronecker clasici pentru ca $A' + \lambda B'$ să fie subfascicul în $A + \lambda B$. Să construim matricele de completare $A_{12} + \lambda B_{12}$, $A_{21} + \lambda B_{21}$, $A_{22} + \lambda B_{22}$. Într-un caz particular al problemei ne putem limita la completări prin coloane sau la completări prin rânduri.

3.5 Legătura dintre fasciculele de matrice şi modulele Kronecker

În cele ce urmează vom „traduce" noţiunile din Secţiunea 3.3 (din teoria fasciculelor de matrice) în limbajul modulelor Kronecker (teoria reprezentărilor). Un fascicul de matrice $A + \lambda B \in$

$\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}[\lambda])$ corespunde modulului Kronecker $M_{A,B} = (\kappa^m, \kappa^n; f_A, f_B)$, unde (alegând baza canonică în κ^n şi κ^m) A şi B sunt matricele funcţiilor lineare $f_A : \kappa^n \to \kappa^m$ respectiv $f_B : \kappa^n \to \kappa^m$. Echivalenţa strictă $A + \lambda B \sim A' + \lambda B'$ înseamnă izomorfismul de module $M_{A,B} \cong M_{A',B'}$. Rezultă uşor că fasciculul de matrice $A' + \lambda B'$ este subfascicul în $A + \lambda B$ dacă şi numai dacă $M_{A',B'}$ este **subfactor** al lui $M_{A,B}$, însemnând că există un modul N aşa încât $M_{A',B'} \twoheadleftarrow N \hookrightarrow M_{A,B}$ sau, în mod echivalent, există un modul L aşa încât $M_{A',B'} \hookrightarrow L \twoheadleftarrow M_{A,B}$ (a se vedea [11]). Vom numi N şi L **module de legătură**. Pe baza rezultatelor din [11] demonstrăm următoarea teoremă:

Teoremă 3.5.1. *$A' + \lambda B' \in \mathcal{M}_{m',n'}(\mathbb{C}[\lambda])$ este subfascicul în $A + \lambda B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}[\lambda])$ dacă şi numai dacă $m \geq m'$, $n \geq n'$ şi $[M_{A,B}] \in \{[(n-n')I_0]\} * \{[M_{A',B'}]\} * \{[(m-m')P_0]\}$.*

În caz particular fasciculul $A' + \lambda B'$ este subfascicul în $A + \lambda B$ prin completare cu coloane dacă şi numai dacă $M_{A',B'} \hookrightarrow M_{A,B}$ având factor izomorf cu tI_0 unde $t \in \mathbb{N}$. În mod analog, un fascicul $A' + \lambda B'$ este subfascicul în $A + \lambda B$ prin completare cu rânduri dacă şi numai dacă $M_{A',B'} \twoheadleftarrow M_{A,B}$ având nucleu izomorf cu tP_0 unde $t \in \mathbb{N}$.

Un modul Kronecker preinjectiv $I_{b_1} \oplus ... \oplus I_{b_k}$ corespunde fasciculului de matrice, care are următorii invarianţi Kronecker clasici:

- indici minimali pentru coloane: $b_1, ..., b_k$;
- nu are indici minimali pentru rânduri, nu are divizori elementari finiţi sau infiniţi.

Un modul Kronecker preproiectiv $P_{b_1} \oplus ... \oplus P_{b_k}$ corespunde fasciculului de matrice, care are următorii invarianţi Kronecker clasici:

- indici minimali pentru rânduri:$b_1, ..., b_k$;
- nu are indici minimali pentru coloane, nu are divizori elementari finiţi sau infiniţi.

Un modul Kronecker regular $\bigoplus_{p \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}} R_p(\nu^{(p)}) = \bigoplus_{p \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}} \left(R_p(\nu_1^{(p)}) \oplus \cdots \oplus R_p(\nu_{s_p}^{(p)}) \right)$ (unde $\nu^{(p)}$ este o partiţie pentru fiecare punct $p \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$) corespunde fasciculului de matrice, care are următorii invarianţi Kronecker clasici:

- pentru $p = \infty$, partiţia $\nu^{(\infty)}$ descrie blocurile diagonale asociate divizorilor elementari infiniţi
- pentru fiecare $p \in \mathbb{C}$, partiţia $\nu^{(p)}$ descrie blocurile diagonale Jordan asociate valorilor caracteristice p (determinate de divizorii elementari finiţi).

3.6 Soluţia problemei subfasciculului de matrice într-un caz particular

Ca şi o aplicaţie a rezultatelor noi în legătură cu şiruri scurte exacte de module Kronecker obţinute în Capitolul 2, vom arăta cum se poate rezolva problema subfasciculului de matrice într-un caz special.

Fie fasciculele de matrice $A + \lambda B$, $A' + \lambda B'$ peste $\mathbb{C}$, cu restricţia că fasciculele au doar indici minimali pentru coloane printre invarianţii Kronecker clasici. În acest caz, folosind notaţia din Secţiunea 3.3, $A + \lambda B \sim \operatorname{diag}(L_{\varepsilon_1}, \ldots, L_{\varepsilon_p})$ şi $A' + \lambda B' \sim \operatorname{diag}(L_{\varepsilon'_1}, \ldots, L_{\varepsilon'_q})$, unde $\varepsilon_1 \leq \cdots \leq \varepsilon_p$ şi $\varepsilon'_1 \leq \cdots \leq \varepsilon'_q$ sunt indicii minimali pentru coloane. Conform celor spuse în Secţiunea 3.5, putem identifica fasciculul de matrice $A + \lambda B$ cu modulul Kronecker $M_{A,B} = I = I_{\varepsilon_p} \oplus \cdots \oplus I_{\varepsilon_1} \in$ mod-$\mathbb{C}K$ şi fasciculul $A' + \lambda B'$ cu modulul $M_{A',B'} = I' = I_{\varepsilon'_q} \oplus \cdots \oplus I_{\varepsilon'_1} \in$ mod-$\mathbb{C}K$. Folosind această identificare, rezultă că $A' + \lambda B'$ este subfascicul în $A + \lambda B$ dacă şi numai dacă I' este subfactor al lui I, adică dacă şi numai dacă există un modul $L \in$ mod-$\mathbb{C}K$ aşa încât $I' \hookrightarrow L \twoheadleftarrow I$. Demonstrăm următoarea teoremă:

Teoremă 3.6.1. *Dacă $I' = a_n I_n \oplus \cdots \oplus a_0 I_0$ şi $I = c_n I_n \oplus \cdots \oplus c_0 I_0$ sunt module Kronecker preinjective, atunci I' este subfactor al lui I (adică $\exists L$ aşa încât $I' \hookrightarrow L \twoheadleftarrow I$) dacă şi numai dacă*

$$b_1 \leq \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} (i+1) c_i - \sum_{i=2}^{n} (i+1) b_i \right) \quad \text{şi} \quad b_0 \geq a_0,$$

unde

$$b_k = \begin{cases} \sum_{i=0}^{n} (i+1) c_i - \sum_{i=1}^{n} (i+1) b_i & k = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} i a_i - \sum_{i=2}^{n} i b_i & k = 1 \\ \left\lfloor \min \left(\frac{\sum_{i=k}^{n} i a_i - \sum_{i=k+1}^{n} i b_i}{k}, \frac{\sum_{i=k}^{n} (i+1) c_i - \sum_{i=k+1}^{n} (i+1) b_i}{k+1} \right) \right\rfloor & 2 \leq k < n \\ \min(a_n, c_n) & k = n \end{cases}.$$

În acest caz (valorile $b_0, \ldots, b_n$ fiind nenegative) un modul de legătură este chiar $L = b_n I_n \oplus \cdots \oplus b_0 I_0$.

Exemplu 3.6.2. Să considerăm următoarele fascicule de matrice, date în forma lor canonică bloc-diagonală, şi care au doar indici minimali pentru coloane în mulţimea invarianţilor Kronecker clasici:

$$A + \lambda B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & & & & & & & & & & \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & & & & & & & & & & \\ & & & & \lambda & 1 & 0 & 0 & & & & & & \\ & & & & 0 & \lambda & 1 & 0 & & & & & & \\ & & & & 0 & 0 & \lambda & 1 & & & & & & \\ & & & & & & & & \lambda & 1 & 0 & 0 & & \\ & & & & & & & & 0 & \lambda & 1 & 0 & & \\ & & & & & & & & 0 & 0 & \lambda & 1 & & \\ & & & & & & & & & & & & \lambda & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{10,14}(\mathbb{C}[\lambda])$$

şi

$$A' + \lambda B' = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\ & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\ & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & & & & & \\ & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & & & & & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & & & & & \\ & & & & & & & \lambda & 1 & 0 & & \\ & & & & & & & 0 & \lambda & 1 & & \\ & & & & & & & & & & \lambda & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{8,12}(\mathbb{C}[\lambda]).$$

Indicii minimali pentru coloane ai fasciculului $A + \lambda B$ sunt $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 3$ şi $\varepsilon_4 = 1$. În cazul fasciculului $A' + \lambda B'$ aceşti indici sunt $\varepsilon'_1 = 0$, $\varepsilon'_2 = 5$, $\varepsilon'_3 = 2$ şi $\varepsilon'_4 = 1$. Prin urmare, modulele corespunzătoare sunt $M_{A,B} = I_3 \oplus I_3 \oplus I_3 \oplus I_1$ şi $M_{A',B'} = I_5 \oplus I_2 \oplus I_1 \oplus I_0$. Scrise în forma multiplicativă folosită în Teorema 3.6.1, aceste module sunt $M_{A',B'} = \bigoplus_{i=0}^{5} a_i I_i$ şi $M_{A,B} = \bigoplus_{i=0}^{5} c_i I_i$, unde $(a_0, a_1, \ldots, a_5) = (1, 1, 1, 0, 0, 1)$ şi $(c_0, c_1, \ldots, c_5) = (0, 1, 0, 3, 0, 0)$. Folosim formula recursivă din ultima teoremă pentru a calcula şirul $(b_0, b_1, \ldots, b_5) = (2, 1, 2, 1, 0, 0)$ şi verificăm inegalităţile

$$b_1 \leq \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{5} (i+1)c_i - \sum_{i=2}^{5} (i+1)b_i \right) \quad \text{şi} \quad b_0 \geq a_0$$

care sunt adevărate pentru aceste valori. Deci $A' + \lambda B'$ este subfascicul în $A + \lambda B$ sau, în mod echivalent, $M_{A',B'}$ este subfactor al lui $M_{A,B}$, adică $\exists L$ aşa încât $M_{A',B'} \hookrightarrow L \twoheadleftarrow M_{A,B}$. Chiar mai mult, modulul L se poate lua ca fiind $L = \bigoplus_{i=0}^{5} b_i I_i = I_3 \oplus I_2 \oplus I_2 \oplus I_1 \oplus I_0 \oplus I_0$. Am putea folosi în acest moment Teorema 2.1.4 pentru a verifica existenţa unei scufundări $M_{A',B'} \hookrightarrow L$ şi Corolarul 2.6.4 pentru a verifica existenţa unei proiecţii $L \twoheadleftarrow M_{A,B}$ având nucleul egal cu $2P_0$. Fasciculul de matrice corespunzător modulului L este

$$L_1 + \lambda L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & & & & & & & & \\ & & 0 & \lambda & 1 & 0 & & & & & & & & \\ & & 0 & 0 & \lambda & 1 & & & & & & & & \\ & & & & & & \lambda & 1 & 0 & & & & & \\ & & & & & & 0 & \lambda & 1 & & & & & \\ & & & & & & & & & \lambda & 1 & 0 & & \\ & & & & & & & & & 0 & \lambda & 1 & & \\ & & & & & & & & & & & & \lambda & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{8,14}(\mathbb{C}[\lambda]).$$

În cele ce urmează, vom construi fasciculele de completare $A_{12} + \lambda B_{12}$, $A_{21} + \lambda B_{21}$, $A_{22} + \lambda B_{22}$, adică acele blocuri de matrice pentru care avem următoarea echivalenţă strictă:

$$A + \lambda B \sim \begin{pmatrix} A' + \lambda B' & A_{12} + \lambda B_{12} \\ A_{21} + \lambda B_{21} & A_{22} + \lambda B_{22} \end{pmatrix}.$$

Din moment ce avem o scufundare $M_{A',B'} \overset{f}{\hookrightarrow} L$, putem scrie $f = (F_1, F_2)$, unde $F_1 \in \mathcal{M}_{14,12}(\mathbb{C})$ şi $F_2 \in \mathcal{M}_8(\mathbb{C})$ sunt matrice de rang maxim, care satisfac egalitatea $(L_1 + \lambda L_2)F_1 = F_2(A' + \lambda B')$. Similar, pentru proiecţia $M_{A,B} \overset{g}{\twoheadrightarrow} L$, avem $g = (G_1, G_2)$, unde $G_1 \in \mathcal{M}_{14}(\mathbb{C})$ şi $G_2 \in \mathcal{M}_{10,8}(\mathbb{C})$ sunt matrice de rang maxim, care satisfac egalitatea $(L_1 + \lambda L_2)G_1 = G_2(A + \lambda B)$. În urma calculelor găsim că aceste matrice pot fi:

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \qquad \text{şi} \qquad F_2 = E_8,$$

unde E_8 este matricea identitate de 8×8 şi

$$G_1 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \qquad \text{şi} \qquad G_2 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}.$$

Pentru că F_2 şi G_1 sunt matrice pătratice de rang maxim, sunt şi inversabile. În cazul nostru $F_2^{-1} = F_2$ şi $G_1^{-1} = G_1^{\intercal}$. Matricele $G_1^{-1}F_1$ şi $F_2^{-1}G_2$ sunt şi ele de rang maxim, prin urmare există matricele pătratice nesingulare C_1, C_2, D_1 şi D_2 aşa încât $G_1^{-1}F_1 = C_1 \begin{pmatrix} E_{12} \\ 0 \end{pmatrix} C_2$ şi $F_2^{-1}G_2 = D_1 \begin{pmatrix} E_8 & 0 \end{pmatrix} D_2$. În cazul nostru aceste matrice sunt

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ -1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ -1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ -1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0 \end{pmatrix},$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0 \\ -1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1 \end{pmatrix},$$

$$D_1 = E_8, \qquad \text{şi} \qquad D_2 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

Cu aceste matrice putem scrie:

$$\begin{aligned} A' + \lambda B' &= F_2^{-1}F_2(A' + \lambda B') = F_2^{-1}(L_1 + \lambda L_2)F_1 \\ &= F_2^{-1}(L_1 + \lambda L_2)G_1G_1^{-1}F_1 = F_2^{-1}G_2(A + \lambda B)G_1^{-1}F_1 \\ &= D_1 \begin{pmatrix} E_8 & 0 \end{pmatrix} D_2(A + \lambda B)C_1 \begin{pmatrix} E_{12} \\ 0 \end{pmatrix} C_2. \end{aligned}$$

Deci $D_1^{-1}(A' + \lambda B')C_2^{-1} = \begin{pmatrix} E_8 & 0 \end{pmatrix} D_2(A + \lambda B)C_1 \begin{pmatrix} E_{12} \\ 0 \end{pmatrix}$, şi prin urmare

$$\begin{aligned} A' + \lambda B' &= \begin{pmatrix} E_8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 & \\ & E_2 \end{pmatrix} D_2(A + \lambda B)C_1 \begin{pmatrix} C_2 & \\ & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{12} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E_8 & 0 \end{pmatrix} D_2(A + \lambda B)C' \begin{pmatrix} E_{12} \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

unde

$$C' = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}.$$

Vedem că $A + \lambda B \sim D_2(A + \lambda B)C'$, unde

$$D_2(A + \lambda B)C' = \begin{pmatrix}
0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & 0 & 0 \\
 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & & & & & & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & & & & & & 1 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & & & & & & 0 & \lambda \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & & & & & & 0 & 0 \\
 & & & & & & & \lambda & 1 & 0 & & & 0 & 0 \\
 & & & & & & & 0 & \lambda & 1 & & & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & \lambda & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' + \lambda B' & A_{12} + \lambda B_{12} \\ A_{21} + \lambda B_{21} & A_{22} + \lambda B_{22} \end{pmatrix},$$

cu matricele de completare

$$A_{12} + \lambda B_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & \lambda \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{21} + \lambda B_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{22} + \lambda B_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarcă 3.6.3. Calculele au fost verificate cu sistemul de algebră computaţională Maxima [32].

Bibliografie

[1] I. Assem, D. Simson, A. Skowroński, *Elements of the representation theory of associative algebras, Vol. 1, Techniques of representation theory*, London Mathematical Society Student Texts 65, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[2] M. Auslander, I. Reiten, S. Smalø, *Representation Theory of Artin Algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, No. 36, Cambridge University Press, 1995.

[3] T. Beelen, P. Van Dooren, *An improved algorithm for the computation of Kronecker's canonical form of a singular pencil*, Linear Algebra Appl. 105 (1988) pp. 9-65.

[4] A. Beilinson, *Coherent sheaves on* $\mathbb{P}^n$ *and problems of linear algebras*, Funct. Anal. Appl. 12 (1978), pp. 214–216.

[5] E. T. Bell, *Men of Mathematics*, Simon and Schuster, New York, 1937.

[6] J. Demmel, A. Edelman, *The dimension of matrices (matrix pencils) with given Jordan Kronecker canonical forms*, Linear Algebra Appl. 230 (1995) 61-87.

[7] J. Demmel, B. Kågström, *The generalized Schur decomposition of an arbitrary pencil A-zB: robust software with error bounds and applications. Part I: theory and algorithms*, ACM Trans. Math. Softw., 19(2) (1993) pp. 160-174.

[8] V. Dlab, C.M. Ringel, *Indecomposable representations of graphs and algebras*, Mem. Amer. Math. Soc., 6 (1976).

[9] W. Fulton, *Young Tableaux*, London Mathematical Society Student Texts, Vol. 35, Cambridge University Press, 1997.

[10] F. R. Gantmacher, *Matrix theory*, vol. 1 and 2, Chelsea, New York, 1974.

[11] Y. Han, *Subrepresentations of Kronecker representations*, Linear Algebra Appl. 402 (2005), pp. 150-164.

[12] G. H. Hardy, S. Ramanujan, *Asymptotic formulae in combinatorial analysis,* Proc. London Math. Soc. 17 (1918), pp. 237-252.

[13] D. E. Knuth, *The Art of Computer Programming*, 3rd edition, Vol. 1, Addison-Wesley, 1997.

[14] J.J Loiseau, S. Mondié, I. Zaballa, P. Zagalak, *Assigning the Kronecker invariants of a matrix pencil by row or column completions*, Linear Algebra Appl. 278 (1998), pp. 327-336.

[15] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, 2nd edition, Oxford University Press, 1995.

[16] C. Oară, P. Van Dooren, *An improved algorithm for the computation of structural invariants of a system pencil and related geometric aspects*, System & Control Letters 30 (1997) pp. 39-48.

[17] M. Reineke, *The monoid of families of quiver representations*, Proc. LMS 84 (2002), pp. 663-685.

[18] C. M. Ringel, *Tame Algebras and Integral Quadratic Forms*, Lecture Notes in Mathematics, No. 1099, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[19] D. Simson, A. Skowroński, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras, Vol. 2, Tubes and Concealed Algebras of Euclidean Type*, London Mathematical Society Student Texts 71, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[20] Cs. Szántó, *On extensions of Kronecker modules*, preprint.

[21] Cs. Szántó, *Hall algebras in the Kronecker case*, EFES Cluj-Napoca, 2006.

[22] Cs. Szántó, *Hall numbers and the composition algebra of the Kronecker algebra*, Algebras and Representation Theory 9 (2006), pp. 465-495.

[23] Cs. Szántó, *On the Hall product of preinjective Kronecker modules*, Mathematica, Tome 48 (71), No. 2 (2006), pp. 203–206.

[24] Cs. Szántó, A. Horváth, *Formulas for Kronecker invariants using a representation theoretical approach*, Linear Algebra Appl. 430 (2009), pp. 664-673.

[25] Cs. Szántó, I. Szöllősi, *On preprojective short exact sequences in the Kronecker case*, Journal of Pure and Applied Algebra (2011), doi:10.1016/j.jpaa.2011.10.011.

[26] Cs. Szántó, I. Szöllősi, *The terms in the Ringel-Hall product of preinjective Kronecker modules*, Periodica Mathematica Hungarica Vol. 63 (2) (2011), pp. 75–92.

[27] I. Szöllősi, *Computing the extensions of preinjective and preprojective Kronecker modules*, submitted.

[28] I. Szöllősi, *The extension monoid product of preinjective Kronecker modules*, Mathematica, accepted.

[29] P. Zhang, *Triangular decomposition of the composition algebra of the Kronecker algebra*, J. Algebra, 184 (1996), pp. 159–174.

[30] P. Zhang, Y. B. Zhang, J. Y. Guo, *Minimal generators of Ringel–Hall algebras of affine quivers*, J. Algebra, 239 (2001), pp. 675–704.

[31] The GAP Group, *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.4.12*; 2008, (`http://www.gap-system.org`).

[32] Maxima.sourceforge.net, *Maxima, a Computer Algebra System, Version 5.25.1;* 2011, (`http://maxima.sourceforge.net`).