Universitatea Babeş-Bolyai Cluj-Napoca
Departmentul de Mathematică

Adrian Viorel

Contribuţii la studiul ecuaţiilor neliniare de evoluţie

Rezumatul tezei de doctorat

Conducător ştiinţific:
Prof. dr. Radu Precup

Cluj-Napoca
2011

Cuprins

Introducere 4

1 Preliminarii 7

1.1 Semigrupuri şi ecuaţii de evoluţie . . . 7
1.2 Teoreme de punct fix . . . 7
1.3 Matrici convergente la zero . . . 8

I. SISTEME DE ECUAŢII DE EVOLUŢIE 9

2 Sisteme semiliniare de ecuaţii de evoluţie 9

2.1 Rezultate bzate pe teorema lui Perov . . . 10
2.2 Alte rezultate de existenţă . . . 11

3 Sisteme semiliniare de incluziuni diferenţiale 12

3.1 Observaţii preliminare . . . 12
3.2 Rezultate de existenţă . . . 13

4 Ecuaţii semiliniare de evoluţie cu condiţii nelocale 14

4.1 Versiuni vectoriale ale teoremei lui Krasnoselskii pentru suma a doi operatori . . 14
4.2 Aplicaţii la probleme cu condiţii nelocale . . . 16

II. TRANZIŢII DINAMICE DE FAZĂ IN SOLIDE 17

5 Modele dinamice pentru materiale cu mai multe faze 17

5.1 Modelul lui Ericksen . . . 17
5.2 Efecte regularizante . . . 17
5.3 Modelul lui Ren şi Truskinovsky . . . 18

6 Modelul lui Ren şi Truskinovsky - regimul limită de visco-capilaritate 18

6.1 Un model de visco-capilaritate . . . 18
6.2 Existenţa soluţiilor clasice . . . 19
6.3 Regimul limită . . . 19

7 Modelul lui Ren şi Truskinovsky - regimul limită viscoelastic 20

7.1 Un model elasitc neliniar . . . 20
7.2 Existenţa soluţiilor clasice . . . 21
7.3 Regimul limită . . . 22

III. O VERSIUNE NELOCALĂ A ECUAŢIEI ALLEN-CAHN **22**

8 Ecuaţia Allen-Cahn **22**

9 O versiune nelocală specială a ecuaţiei Allen-Cahn **23**
9.1 Analiza calitativă a modelului nelocal 23
9.2 O comparaţie cantitativă a celor două modele 24

Concluzii şi posibile dezvoltări ulterioare **24**

Bibliografie **25**

Cuvinte cheie: sistem semiliniar de evoluţie, incluziune diferenţială, problemă Cauchy abstractă, condiţie nelocală, semigrup C_0, normă vectorială, matrice convergentă la zero, alsticitate neliniară, regim limită, interacţiuni nelocale, soluţii clasice, ecuaţia Allen-Cahn, difuzie nelocală.

Autorul doreşte să mulţumească pentru sprijinul financiar primit în cadrul Proiectului cofinanţat prin Programul Operaţional Sectorial pentru Dezvoltarea Resurselor Umane 2007 – 2013, Contract nr: POSDRU/6/1.5/S/3: „STUDIILE DOCTORALE: PRIN ŞTIINŢĂ SPRE SOCIETATE”.

Introducere

Prezenta lucrare este structurată pe trei părţi după cum urmează.

Partea I se ocupă cu probleme de evoluţie abstracte în spaţii înzestrate cu norme vectoriale. Avantajul folosirii unor norme vectoriale în studiul sistemelor de ecuaţii este evidenţiat în lucrarea Precup [58], unde se arată că într-un cadru vectorial se pot formula condiţii de mai generale pentru termenii neliniari ai ecuaţiilor decât atunci când se foloseşte o normă scalară definită pe spaţiul produs cartezian. Astfel de studii au fost iniţiate de către Perov [56] în legătură cu principiul contracţiilor, iar în lucrarea citată [58] se arată că utilitatea tehnicilor bazate pe norme vectoriale nu se restrânge la principiul contracţiilor, ele putând fi aplicate cu succes şi în cazul principiului lui Schauder, Leray-Schauder sau a teoremelor de tip Krasnosleskii în conuri.

Prima problemă studiată (**Capitolul 2**) este sistemul semiliniar de ecuaţii de evoluţie

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dt}(t) + A_1 u_1(t) = F_1(t, u_1(t), u_2(t)) \\ \dfrac{du_2}{dt}(t) + A_2 u_2(t) = F_2(t, u_1(t), u_2(t)) \\ u_1(0) = u_1^0, \quad u_2(0) = u_2^0, \end{cases}$$

pentru care se demonstrează mai întâi existenţa, unicitatea şi depdendenţa continuă de date a soluţiilor (**Teoremele 12** şi **13**) în ipoteze unor condiţii de tipul

$$||F_i(t,u) - F_i(t,v)||_{X_i} \leq a_{i1}(t)||u_1 - v_1||_{X_1} + a_{i2}(t)||u_2 - v_2||_{X_2}$$

asupra termenilor neliniari. Demostraţiile se bazează pe teorema lui Perov şi pe o formă particulară a lemei Gronwall abstracte date de I. A. Rus [66]. Condiţiile de creştere impuse termenilor neliniari pot fi relaxate în cazul în care partea liniară a sistemului are un efect regularizant, sau, altfel spus, dacă operatorii $-A_i$ genereză semigrupuri compacte. **Teoremele 15** şi **16** demonstrează acest fapt. Mare parte din contrubuţiile originale ale Capitoului 2 fac obiectul lucrării [60] realizate în colaborare cu Rof. R. Precup.

În **Capitoul 2** se extind ideile Capitoului 1 la un cadru multivoc, studiindu-se sistemul semiliniar de incluziuni diferenţiale

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dt}(t) + A_1 u_1(t) \in F_1(u_1(t), u_2(t)) \\ \dfrac{du_2}{dt}(t) + A_2 u_2(t) \in F_2(u_1(t), u_2(t)) \\ u_1(0) = u_1^0, \quad u_2(0) = u_2^0. \end{cases}$$

Abordarea noastră se bazează pe observaţia că operatorul solutie corespunzător sistemului de incluziuni diferenţiale de mai sus poate fi scris ca şi compunerea dintre un operator univoc (ce corespunde păarţii liniare a sistemului) şi un operator multivoc (ataşat termenului neliniar $F = (F_1, F_2)$). În acest fel se clarifică modul în care proprietăţile lui F se transmit operatorului soluţie

Prinicpalele rezultate originale ale **Capitoului 3** sunt: o versiune vectorială a teoremei de punct fix a lui Nadler (**Teorema 18**) şi **Teoremele de existenţă 19, 20** şi **21** ce fac parte din R. Precup şi A. Viorel [61].

Ultimul capitol al primei părţi (**Capitolul 4**) se ocupă cu problema de evoluţie cu condiţie nelocală

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + Au(t) = F(t, u(t)) \\ u(0) = \int_0^1 u(t) d\alpha(t). \end{cases}$$

Studiul unor astfel de probleme a fost iniţiat de L. Byszewski [18], înlocuirea condiţiei iniţiale cu o condiţie nelocală fiind motivată de faptul că astfel de condiţii nestandard pot fi măsurate mai exact în aplicaţii fizice decât condiţiile iniţiale clasice.

Ideea originală a acestui capitol este legată de tratarea formei integrale a problemei de evoluţie

$$\begin{cases} u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\tau)F(\tau, u(\tau))d\tau, \quad 0 < t < 1 \\ u_0 = \int_0^1 u(t) d\alpha(t). \end{cases}$$

ca un sistem de două ecuaţii cuplate, necunoscutele fiind atât traiectoria sistemului $u \in C([0,1], X)$ cât şi starea iniţială $u_0 \in X$. Având în vedere acest fapt, o abordare bazată pe norme vectoriale se dovedeşte foarte potrivită. În Sectiunea 4.1 se demonstrează o serie de versiuni vectoriale ale teoremei lui Krasnoselskii pentru suma a doi operatori, mai apoi, aceste rezultate fiind aplicate pentru a demonstra **Teoremele de existenţă 26, 27** şi **28**. Toate aceste rezultate fac parte din lucrarea [76] a autorului.

Partea a II-a a lucrării se concentrează asupra următorului model din teoria elasticităţii

$$\begin{aligned} &u_{tt} = \delta_1 (u_{xx} - p_x) - \delta_2 (u_{xx} - q_x) + \varepsilon u_{txx} + \sigma (u_x)_x \\ &-\gamma_1^2 p_{xx} + p = u_x \\ &-\gamma_2^2 q_{xx} + q = u_x \end{aligned}$$

propus de către X. Ren şi L. Truskinovsky (Journal of Elasticity, 2000). Scopul acestei părţi este realizarea unei analize riguroase a acestui model, precum şi clarificarea legăturilor dintre acest model şi alte modele din teoria elasticităţii. Această direcţie de studiu, impreună cu modelul în sine, au fost sugerate autorului de către Prof. Christian Rohde, si au constituit preocuparea principală a unui stagiu de cercetarea la Institutul de Analiză Aplicată si Simulare Numerică a Universităţii din Stuttgart.

Se poate observa că nu toţi parametrii $\delta_1, \delta_2, \gamma_1, \gamma_2$ şi ε ai modelului sunt esenţiali, iar de aceea ne vom limita doar la următoarele cazuri particulare[1]

$$(\mathrm{A}_k)\qquad \begin{aligned} u_{tt} &= k\left(u_x - p\right)_x + u_{xxt} + \sigma\left(u_x\right)_x \\ -\tfrac{1}{k}p_{xx} + p &= u_x \end{aligned}$$

$$(\mathrm{B}_k)\qquad \begin{aligned} u_{tt} &= \left(u_x - p\right)_x + u_{xxt} + \sigma\left(u_x\right)_x \\ -\tfrac{1}{k}p_{xx} + p &= u_x. \end{aligned}$$

Argumente bazate pe expresia energiei totale a celor două sisteme sugerează ca (A_k) aproximează modelul de ordin superior

$$(\mathrm{A})\quad u_{tt} = -u_{xxxx} + u_{xxt} + \sigma\left(u_x\right)_x,$$

respectiv (B_k) aproximează modelul viscoelastic

$$(\mathrm{B})\quad u_{tt} = u_{txx} + \sigma\left(u_x\right)_x.$$

Elementul cheie în înţelegerea regimurilor limită $k \to \infty$ ale (A_k) şi (B_k) îl constituie observaţia că variabila auxiliară p este definită prin intermediul unei ecuaţii de tip resolventă. Acest lucru explică proprietăţile de aproximare ale modelului lui Ren şi Truskinovsky, şi totodată motivează un studiu bazat pe teoria semigrupurilor.

În **Capitolele 6** şi **7** ale lucării se demonstrează pe de-o parte existenţa unor soluţii clasice globale în timp pentru (A_k) şi (B_k) - **Teoremele 30** respectiv **36**. Pentru ca mai apoi în **Teoremele 33** şi **37** să se justifice în mod riguros limitele

$$\begin{aligned} (\mathrm{A}_k) &\;\to\; (\mathrm{A}) \\ (\mathrm{B}_k) &\;\to\; (\mathrm{B}) \end{aligned}$$

pentru $k \to \infty$.

În **Partea a III-a** a lucrării idei similare cu cele din Partea a II-a sunt folosite în contextului unui model complet diferit, şi anume a ecuaţiei Allen-Cahn

$$u_t = \varepsilon u_{xx} - u^3 + u.$$

Aceasta este o ecuaţie de tip Ginzburg-Landau ce descrie evoluţia unui parametru de ordine în timpul tranzitiilor de fază în aliaje binare. De la momentul introducerii sale de către S. Allen şi J. W. Cahn [4], modelul a atras mult interes datorită proprietăţilor sale dinamice remarcabile, cum ar fi persistenţa unor configuraţii (stări) metastabile (a se vedea Chen [23] de exemplu).

În **Capitolul 9** propunem următoarea versiune nelocală a ecuaţiei Allen-Cahn

$$\begin{aligned} u_t &= \varepsilon p_{xx} - u^3 + u \\ -\varepsilon p_{xx} + p &= u \end{aligned}$$

în care termenul de difuzie a fost înlocuit cu aproximanta sa Yosida, prin introducerea unei

[1] Am ales $\delta_1 = k, \delta_2 = 0, \gamma_1^2 = \frac{1}{k}, \varepsilon = 1$ pentru (A_k) respectiv $\delta_1 = 1, \delta_2 = 0, \gamma_1^2 = \frac{1}{k}, \varepsilon = 1$ pentru (B_k)

variabile artificiale, la fel ca şi în modelul lui Ren şi Truskinovsky. Dacă ordinul aproximatei este ales astfel încât să fie egal cu inversul coeficientului de difuzie ecuaţia de mai sus poate fi rescrisă în forma echivalentă

$$\begin{aligned} u_t &= -u^3 + p \\ -\varepsilon p_{xx} + p &= u \end{aligned} \tag{1}$$

fiind o perturbaţie regulară a

$$u_t = -u^3 + u.$$

Datorită faptului că nu conţine explicit derivate spaţiale (1) permite o implementare numerică avantajoasă.

Mai trebuie remarcat şi fatul că p poate fi reprezentată folosind funcţia Green a problemei eliptice

$$p(t,x) = \int G(x,y)\,u(t,y)\,dy,$$

de unde şi denumirea de model nelocal. În legătură cu astfel de modele ce conţin termeni nelocali de difuzie există o vastă literatură din care remarcăm de exmplu lucrările lui Fife [36], Bates et. al. [11] sau Cortazar et. al. [25].

Rezultatele originale ale Părţii a III-a fac parte din lucrarea [77] a autorului şi sunt legate de analiza modelului nelocal descris mai sus. Ele se referă la: existenţa globală a soluţiilor clasice (**Teorema 38**), mărginirea a priori a soluţiilor clasice (**Teorema 39**) şi comportamentul asimptotic al soluţiilor pentru $t \to \infty$ (**Teorema 40**).

Recunştiinţa autorului se îndreaptă în primul rând spre domnul profesor Radu Precup, sub a cărui îndrumare am avut privilegiul de a mă forma.

De asemenea, pe parcursul a două stagii de cercetare, autorul a avut şansa de a-i cunoaşte pe domnii profesori C. Rohde (Stuttgart) şi W. Desch (Graz) cărora le mulţumeşte pentru întreg sprijinul lor.

Capitolul 1
Preliminarii

1.1 Semigrupuri şi ecuaţii de evoluţie

În această secţiune amintim câteva rezultate de bază din teoria semigrupurilor. Sursele bibliografice folosite sunt [22], [33], [37], [44], [54], [78] şi [84].

1.2 Teoreme de punct fix

Vom prezenta o serie de teoreme de punct fix utlizate de-a lungul lucrării. Sursele bibliografice folosite sunt [1], [29],[38], [53] şi [68].

Teorema 1 (Krasnoselskii) *Fie X un spaţiu Banach, C o submulţime închisă mărginită si convexă a sa iar $N : C \to C$ astfel încât:*

(*i*) $N = N_1 + N_2$ *cu* $N_1 : C \to C$ *complet continuu şi* $N_2 : C \to C$ *contracţie,*

(*ii*) $N_1(x) + N_2(y) \in C$ *pentru orice* $x, y \in C$.

Atunci N *are cel puţin un punct fix în* C.

Teorema 2 (Granas [38]) *Fie* U *o submulţime nevidă a unei mulţimi închise şi convexe* K *din spaţiul Banach* X *şi fie* $H : \overline{U} \times [0,1] \to K$ *compactă. Dacă*

(A) $H(x, \lambda) \neq x \quad \forall x \in \partial U \quad \lambda \in [0,1]$,

(B) $H(\cdot, 0)$ *este esenţial în mulţimea* $\mathbf{M}_C$ *a tuturor aplicaţiilor compacte de la* $\overline{U}$ *la* K.

Atunci oricare ar fi $\lambda \in [0,1]$ *există un punct fix al lui* $H(\cdot, \lambda)$ *în* U*, şi mai mult,* $H(\cdot, \lambda)$ *este esenţial în* $\mathbf{M}_C$ *pentru orice* $\lambda \in [0,1]$.

Vom încheia această secţiune amintind două teoreme de punct fix pentru aplicaţii multivoce (a se vedea Deimling [29])

Teorema 3 (Bohnenblust-Karlin) *Fie* X *un spaţiu Banach,* $D \subset X$ *închisă mărginită si convexă şi* $N : D \to 2^X$ *semicontinuu superior, cu* $N(x)$ *închisă mărginită si convexă pentru orice* $x \in D$. *Dacă* $N(D) \subset D$ *şi* $N(D)$ *este relativ compactă, atunci* N *are cel puţin un punct fix.*

Teorema 4 *Fie* X *un spaţiu Banach,* $U \subset X$ *deschisă mărginită şi* $N : \overline{U} \to 2^X$ *upper semicontinuous with* $N(x)$ *semicontinuu superior, cu* $N(x)$ *închisă mărginită si convexă pentru orice* $x \in \overline{U}$. *Dacă* $N\left(\overline{U}\right)$ *este relativ compactă şi* $x_0 + \lambda(x - x_0) \notin N(x)$ *în* ∂U *pentru orice* $\lambda > 1$, *atunci* N *are cel puţin un punct fix.*

1.3 Matrici convergente la zero

Conceptele de normă vectorială şi de matrice convergentă la zero introduse în această secţiune vor juca un rol deosebit de important în Partea I. Aceste idei îşi au originea în lucrările lui Perov [56].

Definiţia 5 *Fie* X *o mulţime nevidă. O aplicaţie* $d : X \times X \to \mathbb{R}^n_+$ *ce satisface axiomele*

(*i*) $d(u, v) \geq 0$ *oricare ar fi* $u, v \in X$ *iar dacă* $d(u, v) = 0$ *atunci* $u = v$;

(*ii*) $d(u, v) = d(v, u)$ *oricare ar fi* $u, v \in X$;

(*iii*) $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$ *oricare ar fi* $u, v, w \in X$

în raport cu relaţia naturală de ordine din $\mathbb{R}^n$*, se numeşte metrică vectorială.*

Noţiunea de completitudine se defineşte în cazul spaţiilor înzestrate cu o metrică vectorială similar cu cazul clasic.

Definiţia 6 *O matrice pătratică cu elemnte nenegative* $M \in M_{n\times n}(\mathbb{R}^n)$ *se numeşte convergentă la zero dacă*

$$M^k \to 0 \quad \textit{când} \quad k \to \infty.$$

Matricile convergente la zero pot fi caracterizate în felul următor (a se vedea [51], [57], [63]).

Lema 7 *Fie* M *o matrice pătratică cu elemnte nenegative. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(a) M *converge la zero;*

(b) $I - M$ *este nesingulară şi* $(I-M)^{-1} = I + M + M^2 + \ldots$*;*

(c) *valorile proprii ale lui* M *se găsesc în interiorul discului unitate din planul complex;*

(d) $I - M$ *este nesingulară iar* $(I-M)^{-1}$ *are elemente nennegative.*

Definiţia 8 *Un operator* $N : X \to X$ *se numeşte contractiv (în raport cu o metrică vectorială* d*) dacă există o matrice convergentă la zero* M *astfel încât*

$$d(N(u), N(v)) \leq Md(u,v) \qquad \textit{pentru orice} \qquad u, v \in X.$$

Teorema 9 (Perov) *Fie* (X, d) *un spaţiu metric generalizat complet şi* $N : X \to X$ *un operator contractiv. Atunci* N *are un unic punct fix* u^* *şi pentru orice* $u \in X$ *avem*

$$d(N^k(u), u^*) \leq M^k(I-M)^{-1}d(u, N(u)) \qquad \textit{oricare ar fi} \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Mai mult, $I - N$ *este bijectivă iar* $(I-N)^{-1}$ *este continuă.*

La fel ca şi în cazul metricilor vectoriale putem introduce noţiunea de normă vectorilă.

Definiţia 10 *Fie* X *un spaţiu linear. Aplicaţia* $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^n$ *se numeşte normă vectorială dacă*

(i) $\|x\| \geq 0$ *oricare ar fi* $x \in X$*, iar dacă* $\|x\| = 0$ *atunci* $x = 0$;

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ *oricare ar fi* $x \in X$ *şi* $\lambda \in \mathbb{R}$;

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *foricare ar fi* $x, y \in X$.

Definiţia 11 *Un spaţiu liniar înzestrat cu o normă vectorilă care este complet în raport cu norma vectorilă se numeşte* spaţiuBanach generalizat*.*

I. SISTEME DE ECUAŢII DE EVOLUŢIE

Capitolul 2
Sisteme semiliniare de ecuaţii de evoluţie

Pornind de la lucrarea Precup [58], în care se studiză sisteme operatoriale (staţionare) prin metode bazate pe norme vectorile şi matrici convergente la zero, vom aplica aceleaţi metode problemei Cauchy abstracte

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dt}(t) + A_1 u_1(t) = F_1(t, u_1(t), u_2(t)) \\ \dfrac{du_2}{dt}(t) + A_2 u_2(t) = F_2(t, u_1(t), u_2(t)) \\ u_1(0) = u_1^0, \quad u_2(0) = u_2^0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Aici, operatorii $A_i : D(A_i) \subseteq X_i \to X_i$ au domeniile de definiţie dense în spaţiile Banach X_i şi generează semigrupurile de contracţii $\{S_i(t), t \geq 0\}$.

Căutăm soluţii integrale ale problemei Cauchy de mai sus, adică perechi $(u_1, u_2) \in C([0,T], X_1) \times C([0,T], X_2)$ ce satisfac

$$u_i(t) = S_i(t)u_i^0 + \int_0^t S_i(t-\tau)F_i(\tau, u_1(\tau), u_2(\tau))d\tau \tag{2.2}$$

oricare ar fi $t \in [0,T]$, $i = 1, 2$. Vom nota operatorul neliniar din membrul drept al (2.2) cu $N_i(u)$.

2.1 Rezultate bzate pe teorema lui Perov

Primul nostru rezultat este obţinut în ipoteza unei condiţii de tip Lipschitz pentru termenii neliniari F_i.

Teorema 12 (existenţă şi unicitate) *Presupunând că $F_i : [0,T] \times X_1 \times X_2 \to X_i$ satisfac*

$$||F_i(t,u) - F_i(t,v)||_{X_i} \leq a_{i1}(t)||u_1 - v_1||_{X_1} + a_{i2}(t)||u_2 - v_2||_{X_2} \tag{2.3}$$

oricare ar fi $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2) \in X_1 \times X_2$, $t \in [0,T]$, unde $a_{ij} \in L^p([0,T], \mathbb{R}_+)$. Atunci pentru orice $(u_1^0, u_2^0) \in X_1 \times X_2$ problema Cauchy (2.1) *are o unică soluţie în sensul lui (2.2).*

Putem arăta şi faptul că această soluţie depinde în mod continuu de datele iniţiale.

Teorema 13 (dependenţa de date) *În ipotezele Teoremei 12, dacă u şi v sunt două soluţii ale (2.1) corespunzătoare datelor iniţiale u^0 respectiv v^0, atunci pentru orice $t \in [0,T]$ are loc*

$$\begin{pmatrix} ||u_1(t) - v_1(t)||_{X_1} \\ ||u_2(t) - v_2(t)||_{X_2} \end{pmatrix} \leq U(t) \begin{pmatrix} ||u_1^0 - v_1^0||_{X_1} \\ ||u_2^0 - v_2^0||_{X_2} \end{pmatrix}.$$

Unde prin $U(t)$ s-a notat o matrice fundamentală de soluţii a sistemului de ecuaţii diferenţiale ordinare

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}(t) = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt}(t) = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t). \end{cases} \tag{2.4}$$

Demonstraţia acestui rezultat se bazează pe lema Gronwall abstractă introdusă de către I. A. Rus în lucrarea [66]

Teorema 14 *Fie $a_{ij} \in L^p([0,T], \mathbb{R}_+)$, $p \geq 1$ şi $b_i > 0$, $i, j = 1, 2$. Dacă $x_i \in C[0,T]$, sunt două funcţii continue astfel încât pentru orice $t \in [0,T]$*

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b_1 + \displaystyle\int_0^t (a_{11}(\tau)x_1(\tau) + a_{12}(\tau)x_2(\tau))\, d\tau \\ b_2 + \displaystyle\int_0^t (a_{21}(\tau)x_1(\tau) + a_{22}(\tau)x_2(\tau))\, d\tau \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

atunci are loc $(x_1(t), x_2(t))^T \leq U(t)(b_1, b_2)^T$, $U(t)$ fiind o matrice fundamentală de soluţii a (2.4).

2.2 Alte rezultate de existenţă

Presupunând că operatorul N este complet continuu putem slăbi condiţia (2.3). O condiţie suficientă pentru ca N să fie complet continuu este ca semigrupurile $S_i(\cdot)$, $i = 1, 2$, să fie ambele compacte. Un exemplu tipic de semigrupuri compacte îl reprezintă semigrupurile analitice al căror domeniu se scufundă compact în spaţiul stărilor, aşa cum se întâmplă în cazul Laplacianului cu condiţii Dirichlet pe frontieră.

Teorema 15 *Dacă operatorul N este complet continuu şi F_i satisface*

$$||F_i(t,u)||_{X_i} \leq a_{i1}(t)||u_1||_{X_1} + a_{i2}(t)||u_2||_{X_2} + b_i(t) \tag{2.6}$$

foricare ar fi $u = (u_1, u_2) \in X_1 \times X_2$, cu $a_{ij} \in L^p([0,T], \mathbb{R}_+)$ şi $b_i \in L^1([0,T], \mathbb{R}_+)$, $i, j = 1, 2$, atunci problema (2.1) *are cel puţin o soluţie.*

În cazul spaţiilor Hilbert avem următorul rezultat ce se bazează pe aplicarea principiului Leray-Schauder.

Teorema 16 *Fie $(X_i, \langle ., . \rangle_{X_i})$, $i = 1, 2$ un spaţiu Hilbert, şi dacă toate soluţiile ecuaţiei $u_i = \lambda N_i(u)$, $\lambda \in (0,1)$ sunt soluţii clasice, operatorul neliniar N este complet continuu şi F_i satisface*

$$\langle F_i(t,u), u_i \rangle_{X_i} \leq a_{i1}(t)||u_1||^2_{X_1} + a_{i2}(t)||u_2||^2_{X_2} + b_i(t) \tag{2.7}$$

oricare ar fi $u \in X_1 \times X_2$, cu $a_{ij} \in L^p([0,T], \mathbb{R}_+)$ şi $b_i \in L^1([0,T], \mathbb{R}_+)$, $i, j = 1, 2$, atunci (2.1) *are cel puţin o soluţie.*

Capitolul 3
Sisteme semiliniare de incluziuni diferenţiale

Scopul acestui capitol este de-a extinde rezultatele din capitolul anterior la cazul multivoc. În continuare ne vom ocupa cu sistemul de incluziuni diferenţiale

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dt}(t) + A_1 u_1(t) \in F_1(u_1(t), u_2(t)) \\ \dfrac{du_2}{dt}(t) + A_2 u_2(t) \in F_2(u_1(t), u_2(t)) \\ u_1(0) = u_1^0, \quad u_2(0) = u_2^0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Folosind aceleaşi notaţii ca şi până acum, noţiunea de soluţie a (3.1) care ne interesează este tot de tip integral

$$u_i(t) = S_i(t)u_i^0 + \int_0^t S_i(t-\tau)w_i(\tau)d\tau \quad t \in [0,T], \tag{3.2}$$

unde $w_i \in L^1([0,T], X_i)$, $i = 1,2$ este o selecţie pentru aplicaţia multivocă $t \mapsto F_i(u(t))$, adică

$$w_i(t) \in F_i(u(t)) \quad \text{a.p.t. } t \in [0,T]. \tag{3.3}$$

3.1 Observaţii preliminare

Fie (X,d) un spaţiu metric şi $A, B \subset X$ două mulţimi nevide. Vom folosi următoarele notaţii

$$\begin{aligned} d(x,A) &= \inf\{d(x,a) : a \in A\}; \\ H(A,B) &= \max\left\{\sup_{a\in A} d(a,B) : \sup_{b\in B} d(b,A)\right\}; \\ \delta(A,B) &= \sup\{d(a,b) : a \in A, b \in B\}. \end{aligned}$$

Funcţionala H este o metrică (metrica Hausdorff-Pompeiu) pe mulţimea părţilor nevide, închise şi mărgininte ale lui (X,d). Vom folosi următoare proprietate a metricii Hausdorff-Pompeiu pentru a demonstra o versiune vectorială a teoremei lui Nadler (pentru rezultatul clasic facem referire la Granas [38, page 28]).

Observaţia 17 *Fie (X,d) un spaţiu metric, $A, B \subset X$ mulţimi inchise mărginite şi nevide iar $q > 1$. Atunci pentru orice $a \in A$ există $b \in B$ astfel încât $d(a,b) \le qH(A,B)$.*

Teorema 18 *Fie $(X_1,d_1), (X_2,d_2)$ spaţii metrice complete şi $N : X_1 \times X_2 \to 2^{X_1\times X_2}$ un operator multivoc cu $N(x)$ nevide, mărginite şi închise pentru orice $x \in X_1 \times X_2$. Presupunem că există o matrice convergentă la zero M astfel încât*

$$\begin{pmatrix} H_1(N_1(u), N_1(v)) \\ H_2(N_2(u), N_2(v)) \end{pmatrix} \le M \begin{pmatrix} d_1(u_1,v_1) \\ d_2(u_2,v_2) \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

pentru orice $u = (u_1,u_2), v = (v_1,v_2) \in X_1 \times X_2$,, $N_1 : X_1 \times X_2 \to 2^{X_1}$ şi $N_2 : X_1 \times X_2 \to 2^{X_2}$ afiind cele două componente ale lui N iar H_1, H_2 metricile Hausdorff-Pompeiu asociate lui d_1

respectiv d_2. Atunci N are un punct fix.

3.2 Rezultate de existenţă

Putem observa că operatorul neliniar multivoc $N : C([0,T], X_1) \times C([0,T], X_2) \to 2^{C([0,T], X_1 \times X_2)}$ definit în (3.2) se obţine prin compunerea unui operator univoc $\mathcal{N}$ cu un operator multivoc W

$$N = \mathcal{N} \circ W,$$

definiţi după cum urmează

$$\begin{aligned}
&\mathcal{N} = (\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)\\
&\mathcal{N}_i(f)(t) = S_i(t)u_i^0 + \textstyle\int_0^t S_i(t-\tau) f_i(\tau) d\tau\\
&W = (W_1, W_2)\\
&W_i(u) = \left\{ w_i \in L^1([0,T], X_i) : w_i(t) \in F_i(u(t)) \text{ a.e. } t \in [0,T] \right\}.
\end{aligned}$$

În acest fel devine clar modul în care proprietăţile lui F se transmit lui N.

Primul nostru rezultat se bazează pe versiunea vectorială a teoremei lui Nadler din secţiunea precedentă.

Teorema 19 *Fie $F_i : X_1 \times X_2 \to 2^{X_i}$ şi $F_i(x)$ nevide, închise şi mărginite pentru orice $x \in X_1 \times X_2$. Dacă există $a_{ij} \geq 0$, $i, j = 1, 2$ constante reale astfel încât*

$$\delta_{X_i}(F_i(u), F_i(v)) \leq a_{i1} \|u_1 - v_1\|_{X_1} + a_{i2} \|u_2 - v_2\|_{X_2} \tag{3.5}$$

pentru orice $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2) \in X_1 \times X_2$, $i = 1, 2$, atunci problema (3.1) are o soluţie..

Următorul rezultat de existenţă se bazează pe Teorema Bohnenblust-Karlin şi permite formularea unor condiţii mai generale pentru termenii neliniari F_i.

Teorema 20 *Fie $F_i : X_1 \times X_2 \to 2^{X_i}$ semicontinuu superior cu $F_i(x)$ nevide, închise şi mărginite pentru orice $x \in X_1 \times X_2$, şi N complet continuu. Dacă există $a_{ij} \geq 0$, $b_i \geq 0$, astfel încât*

$$\|w\|_{X_i} \leq a_{i1} \|u_1\|_{X_1} + a_{i2} \|u_2\|_{X_2} + b_i \tag{3.6}$$

oricare ar fi $u = (u_1, u_2) \in X_1 \times X_2$, $w \in F_i(u)$, $i = 1, 2$, atunci problema (3.1) are cel putin o soluţie.

În cazul spaţiilor Hilbert avem următorul rezultat.

Teorema 21 *Fie $(X_i, \langle ., . \rangle_{X_i})$, $i = 1, 2$ spaţii Hilbert. Presupunem că sistemul*

$$\begin{cases}
\dfrac{du_1}{dt}(t) + A_1 u_1(t) \in \lambda F_1(u(t))\\
\dfrac{du_2}{dt}(t) + A_2 u_2(t) \in \lambda F_2(u(t))\\
u_1(0) = \lambda u_1^0, \quad u_2(0) = \lambda u_2^0
\end{cases} \tag{3.7}$$

are o soluţie clasica pentru orice $\lambda \in (0,1)$ *şi că operatorul* N *este complet continuu. Dacă există* $a_{ij} \geq 0$, $b_i \geq 0$ *astfel încât*

$$\sup_{w_i \in F_i(u)} \langle w_i, u_i \rangle_{X_i} \leq a_{i1} \|u_1\|_{X_1}^2 + a_{i2} \|u_2\|_{X_2}^2 + b_i \tag{3.8}$$

pentru orice $u \in X_1 \times X_2$, $i = 1, 2$, *atunci problema* (3.1) *are cel puţin o soluţie.*

Capitolul 4
Ecuaţii semiliniare de evoluţie cu condiţii nelocale

Acest capitol se ocupă cu problema de evoluţie cu condiţie nelocală

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + Au(t) = F(t, u(t)), & 0 < t < 1 \\ u(0) = \int_0^1 u(t) d\alpha(t). \end{cases} \tag{4.1}$$

Studiul unor astfel de probleme a fost iniţiat de L. Byszewski [18], înlocuirea condiţiei iniţiale cu o condiţie nelocală fiind motivată de faptul că astfel de condiţii nestandard corespund unor măsurători mai exacte în aplicaţii fizice.

Ideea originală a acestui capitol este legată de tratarea formei integrale a problemei de evoluţie

$$\begin{cases} u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\tau) F(\tau, u(\tau)) d\tau \\ u_0 = \int_0^1 u(t) d\alpha(t). \end{cases} \tag{4.2}$$

ca un sistem de două ecuaţii cuplate, necunoscutele fiind atât traiectoria sistemului $u \in C([0,1], X)$ cât şi starea iniţială $u_0 \in X$.

Notaţiile folosite în continuare sunt similare cu cele din capitolele precedente.

4.1 Versiuni vectoriale ale teoremei lui Krasnoselskii pentru suma a doi operatori

Scopul acestei secţiuni este de a prezenta versiuni vectoriale ale teoremei lui Krasnoselskii pentru suma a doi operatori. Pentru varianta clasică a teoremei lui Krasnosleskii facem referire la [1], [7], [17] sau [52].

Teorema 22 *Fie* $(X, \|\cdot\|)$ *un spaţiu Banach generalizat,* C *o submulţime închisă mărginită si convexă a sa iar* $N : C \to C$ *astfel încât:*

(i) $N = N_1 + N_2$ *cu* $N_1 : C \to C$ *complet continuu şi* $N_2 : C \to C$ *contractiv, adică există o matrice convergentă la zero* M *astfel încât* $\|N_2(u) - N_2(v)\| \leq M \|u - v\|$ *pentru orice* $u, v \in C$*;*

(ii) $N_1(x) + N_2(y) \in C$ *pentru orice* $x, y \in C$.

Atunci N are cel puţin un punct fix în C.

Precedntul rezultat are ca şi conseciinţă următoarea teoremă de punct fix pentru un operator vectorial ale cărui componente sunt una complet continuă iar cea de-a doua contractivă.

Teorema 23 *Fie $(X, |\cdot|_X)$ şi $(Y, |\cdot|_Y)$ spaţii Banach, iar C, D două submulţimi nevide, mărginite, închise şi convexe ale X respectiv Y respectively, şi fie $N : C \times D \to C \times D$,*

$$N = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}.$$

Dacă $P : C \times D \to C$ este complet continuu, iar pentru $Q : C \times D \to D$ există $L_1 \geq 0$ şi $L_2 < 1$ astfel încât

$$|Q(x_1, y_1) - Q(x_2, y_2)|_Y \leq L_1|x_1 - x_2|_X + L_2|y_1 - y_2|_Y \tag{4.3}$$

fpentru orice $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in C \times D$, atunci N are cel puţin un punct fix.

Folosind principiul transversalităţii topologice în locul teoremei lui Schauder putem demonstra următoarea teoremă vectorilă de tip Krasnosleskii.

Teorema 24 *Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spaţiu Banach generalizat,*

$$U = \left\{x \in X : \|x\| < u, u \in \mathbb{R}^n_+\right\} \subset X$$

şi $N : \overline{U} \to X$, $N = N_1 + N_2$ unde N_1 este complet continuu iar N_2 icontractiv. Dacă

$$x \neq \lambda N(x) \quad \textit{pentru orice} \quad x \in \partial U, \lambda \in (0, 1), \tag{4.4}$$

atunci N are cel puţin un punct fix în U.

Rezultatul precedent se aplică operatorilor vectoriali, cu două componente, în felul următor.

Teorema 25 *Fie X, Y spaţii Banach, $\overline{B}_1 := \{x \in X : |x|_X \leq R_1\}$, $\overline{B}_2 := \{y \in Y : |y|_Y \leq R_2\}$ două bile închise în X, respectiv Y şi operatorul $N : \overline{B}_1 \times \overline{B}_2 \to X \times Y$*

$$N = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}.$$

Dacă $P : \overline{B}_1 \times \overline{B}_2 \to X$ este complet continuu, $Q : \overline{B}_1 \times \overline{B}_2 \to Y$ satisface

$$|Q(x_1, y_1) - Q(x_2, y_2)|_X \leq L_1|x_1 - x_2|_X + L_2|y_1 - y_2|_Y. \tag{4.5}$$

oricare ar fi $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \overline{B}_1 \times \overline{B}_2$, cu $L_1 \geq 0$, $L_2 \in (0, 1)$ iar pentru toate soluţiile

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda N \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \ \ \lambda \in (0, 1), \quad \textit{avem} \quad \begin{matrix} |x|_X < R_1 \\ |y|_Y < R_2 \end{matrix} \tag{4.6}$$

atunci N are cel puţin un punct fix.

4.2 Aplicaţii la probleme cu condiţii nelocale

În această secţiune vom aplica rezultatele obţinute în secţiunea precedentă problemei de evoluţie cu condiţie nelocală (4.2). Prima noastră teoremă se bazează pe principiul de punct fix al lui Perov.

Fie $(X, |\cdot|_X)$ un spaţiu Banach.

Teorema 26 *Dacă neliniaritatea F satisface condiţia Lipschitz*

$$|F(t,u) - F(t,v)|_X \leq a(t)|u - v|_X \tag{4.7}$$

pentru orice $u, v \in X$, $t \in [0,1]$, cu $a \in L^p([0,1], \mathbb{R}_+)$, şi dacă există $k \geq 0$ astfel încât

$$\frac{\|a\|_{L^p}}{(qk)^{1/q}} < (1 - e^k V_\alpha) \tag{4.8}$$

pentru $1/p + 1/q = 1$ şi $V_\alpha = |\alpha(1) - \alpha(0)|$, atunci problema (4.1) are o unică soluţie.

Aplicând Teorema 23 putem slăbi condiţia de creştere impusă lui F.

Teorema 27 *Fie $\{S(t), t \geq 0\}$ un semigrup compact, şi F astfel încât are loc*

$$|F(t,u)|_X \leq a(t)|u|_X + b(t) \tag{4.9}$$

oricare ar fi $u \in X$, $t \in [0,1]$, cu $a \in L^p([0,1], \mathbb{R}_+)$, $b \in L^1([0,1], \mathbb{R}_+)$. Dacă există $k \geq 0$ astfel încât (4.8) are loc, şi

$$e^k V_\alpha < 1,$$

Atunci problema (4.1) are o unică soluţie.

Următorul rezultat are loc în spaţii Hilbert.

Teorema 28 *Fie $(X, \langle .,. \rangle_X)$, un spaţiu Hilbert şi $\{S(t), t \geq 0\}$ un semigrup compact. Dacă*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + Au(t) = \lambda F(t, u(t)) \\ u(0) = \lambda u_0 \end{cases}, \qquad \lambda \in (0,1),$$

are soluţii clasice şi F satisface

$$\langle F(t,u), u \rangle_X \leq a(t)|u|_X^2 + b(t) \tag{4.10}$$

oricare ar fi $u \in X$, cu $a \in L^p([0,T], \mathbb{R}_+)$ şi $b \in L^1([0,T], \mathbb{R}_+)$.iar

$$e^k V_\alpha < 1 \quad \text{şi} \quad \frac{2\,\|a\|_{L^p}}{(2qk)^{1/q}} \leq (1 - e^{2k} V_\alpha^2), \tag{4.11}$$

atunci (4.1) are cel puţin o soluţie.

II. TRANZIŢII DE FAZĂ DINAMICE ÎN SOLIDE

Capitolul 5
Modele dinamice pentru materiale cu mai multe faze

5.1 Modelul lui Ericksen

O întrebare fundamentală în studiul materialelor active este:

Cum putem descrie un material în care coexistă daouă sau mai multe faze folosind cadrul general oferit de mecanica mediilor continue?

Un prim pas spre găsirea unui răspuns la această întrebare a fost făcut de către J. Ericksen [32] în anul 1975. Ideea sa are la bază presupunerea că energia potenţială a sistemului are două minime, fiecare minim coresupunzând uneia dintre faze.

Modelul propus de Ericksen are este descris prin ecuaţia neliniară

$$u_{tt} = \sigma\left(u_x\right)_x \tag{5.1}$$

unde

$$\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \sigma(w) = W'(w)$$

iar W este o funcţie cu două minime, de exemplu $W(w) = \frac{1}{4}\left(w^2-1\right)^2$ şi $\sigma(w) = w^3 - w$.

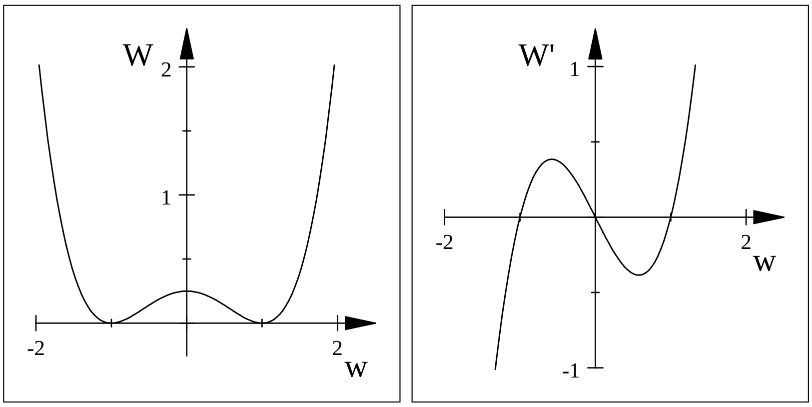

Figura 1. $W(w) = \frac{1}{4}\left(w^2-1\right)^2$ şi $\sigma(w) = w^3 - w = W'(w)$

5.2 Efecte regularizante

Pentru a explica fenomene ce nu sunt descrise de modelul lui Ericksen s-au inclus ulterior în model

A. Efecte disipative prin termenul de tip vâscos u_{txx}, modelul devenie astfel

$$u_{tt} = \varepsilon u_{txx} + \sigma\left(u_x\right)_x . \tag{5.2}$$

B. Efecte legate de tensiunile de suprafaţă la interfeţele ce despart faze vecine (efecte de capilaritate) prin intermediul termenului de ordin superior u_{xxxx} (a se vedea [41]), ecuaţia devenie astfel

$$u_{tt} = -\delta u_{xxxx} + \varepsilon u_{txx} + \sigma\left(u_x\right)_x . \tag{5.3}$$

5.3 Modelul lui Ren şi Truskinovsky

În anul 2000 Ren şi Truskinovsky [62] propun un nou model, ce spre deosebire de modelele mai vechi descrie mai bine interfeţele extrem de înguste (de dimensiuni atomice) observate experimental. Ingredientul principal al modelului îl constituie înlocuirea termenului de ordin superior u_{xxxx} (de capilaritate) cu termeni ce corespund unor aşa numite interacţiuni nelocale. Mai precis, ecuaţia propusă de autorii amintiţi este

$$u_{tt} = \delta_1\left(u_{xx} - p_x\right) - \delta_2\left(u_{xx} - q_x\right) + \varepsilon u_{txx} + \sigma\left(u_x\right)_x \tag{5.4}$$

cuplată cu două ecuaţii eliptice pentru variabilele suplimentare p şi q

$$\begin{aligned} -\gamma_1^2 p_{xx} + p &= u_x \\ -\gamma_2^2 q_{xx} + q &= u_x . \end{aligned}$$

Termeni de acest tip au fost introduşi pentru prima dată de către Rogers şi Truskinovsky [64].

Capitolul 6
Modelul lui Ren şi Truskinovsky - regimul limită de visco-capilaritate

6.1 Un model de visco-capilaritate

În cele ce urmează ne vom ocupa de un caz particular al modelului lui Ren şi Truskinovsky (5.4) ce corespunde parametrilor

$$\delta_1 = k, \quad \delta_2 = 0, \quad \gamma_1^2 = \frac{1}{k}, \quad \varepsilon = 1.$$

Ecuaţiile modelului sunt deci

$$\begin{aligned} &u_{tt} = u_{xxt} + k\left(u_x - p\right)_x + \sigma\left(u_x\right)_x \\ &-\tfrac{1}{k} p_{xx} + p = u_x . \end{aligned} \tag{P$_k$}$$

O analiză a energiei totale a acestui sistem indică faptul că regimul limită $k \to \infty$ corespunde ecuaţiei

$$u_{tt} = -u_{xxxx} + u_{xxt} + \sigma\left(u_x\right)_x \tag{P}$$

studiate printre alţii de Andrews şi Ball [6].

Observaţia esenţială este legată de faptul că variabila auxiliară p este definită prin intermediul unei ecuaţii de tip resolventă, ceea ce explică proprietăţile de aproximare ale modelului în limita $k \to \infty$

6.2 Existenţa soluţiilor clasice

Observaţia 29 *Pentru orice soluţie clasica a problemei (P_k) energia totală*

$$E[u(t), v(t)] = \frac{1}{2}\|v(t)\|^2_{L^2(0,1)} + \frac{1}{2}(p_x(t), u_{xx}(t))_{L^2(0,1)} + \int_0^1 W(u_x(t))\,dx$$

este descrescătoare în timp şi mărginită superior de energia stării iniţiale $E[u(t), v(t)] \leq E[u_0, v_0]$. *Pe de altă parte*

$$E[u(t), v(t)] - E[u_0, v_0] = -\int_0^t \|v_x(s)\|^2_{L^2(0,1)}\,ds.$$

Teorema 30 (soluţii clasice globale) *Problema cu valori pe frontieră asociată (P_k) cu $k \in \mathbb{N}$ fixat, are o unică soluţie clasică definită pe orice interval $[0,T]$ cu $T > 0$,*

$$\begin{aligned} u &\in C\left([0,T], H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)\right) \\ u_t &\in C\left([0,T], L^2\right) \end{aligned}$$

oricare ar fi $u_0 \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$ şi $v_0 \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$.

6.3 Regimul limită

Pentru a studia regimul limită $k \to \infty$ avem nevoie de estimări independente de k pentru soluţiile clasice ale (P_k). Astfel de estimări fac obiectul următoarei leme.

Lema 31 (estimări uniforme în raport cu k) *Fie (u^k, v^k) soluţia clasică a (P_k) pentru $k = 1, 2, \ldots$ Pentru orice $\forall t \geq 0$ au loc următoarele estimări uniforme în raport cu k*

$$\frac{1}{2}\left\|v^k(t)\right\|^2_{L^2(0,1)} + \frac{1}{2}\left(p_x^k(t), u_{xx}^k(t)\right)_{L^2(0,1)} + \int_0^1 W\left(u_x^k(t)\right)dx \leq E_0 \tag{6.1}$$

$$\int_0^T \left\|v_x^k(t)\right\|^2_{L^2(0,1)} dt \leq E_0 \tag{6.2}$$

unde $E_0 := \frac{1}{2}\|v_0\|^2_{L^2(0,1)} + \frac{1}{2}\|u_{0xx}\|^2_{L^2(0,1)} + \int_0^1 W(u_{0x})\,dx.$

Folosind Lema lui Aubin împreună cu alte rezultate clasice de analiză funcţională putem demonstra următoarea teoremă ce priveşte limita $k \to \infty$ a soluţiilor problemei (P_k).

Teorema 32 (convergenţa slabă) *Fie $(u^k, v^k)_{k\in\mathbb{N}}$ soluţiile familiei de probleme (P_k) toate corespunzând aceloraşi condiţii iniţiale $u_0 \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$ and $v_0 \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$. Există un subşir al $(u^k, v^k)_{k\in\mathbb{N}}$ şi o pereche $(\overline{w}, \overline{v})^T \in L^2\left(0,T; L^2(0,1)\right) \times L^2\left(0,T; H_0^1(0,1)\right)$ astfel încât*

(i) *au loc*

$$\begin{array}{rcll} u_x^k & \to & \overline{w} & in\ L^2\left(0,T;L^2\left(0,1\right)\right) \\ v^k & \to & \overline{v} & in\ L^2\left(0,T;H_0^1\left(0,1\right)\right) \\ \sigma\left(u_x^k\right) & \to & \sigma\left(\overline{w}\right) & in\ L^2\left(0,T;L^2\left(0,1\right)\right) \end{array}$$

şi $\overline{w} \in L^\infty\left([0,T]\times[0,1]\right).$

(ii) $\left(\overline{w},\overline{v}\right)^T$ *este o soluţie slabă a problemei (P) în sensul că*

$$\int_0^T\int_0^1 \overline{w}\psi_t - \overline{v}\psi_x dxdt = 0 \tag{6.3}$$

$$\int_0^T\int_0^1 \overline{v}\psi_t - \overline{v}\psi_{xx} - \overline{w}\psi_{xxx} + \sigma\left(\overline{w}\right)\psi_x dxdt = 0 \tag{6.4}$$

oricare ar fi $\psi \in C_c^\infty\left([0,T]\times[0,1]\right)$.

Rezultatul obţinut în Teorema 32 poate fi îmbunătăşit dacă folosim tehnici bazate pe teoria semigrupurilor.

Teorema 33 *Fie* $\left(u^k,v^k\right)$ *şi* (u,v) *soluţiile clasice ale problemlor* (P_k) *respectiv (P) cu date iniţiale identice*

$$u_0 \in H^2\left(0,1\right)\cap H_0^1\left(0,1\right), \qquad v_0 \in H^2\left(0,1\right)\cap H_0^1\left(0,1\right).$$

Atunci pentru orice $t\in[0,T]$ *cu* $T\geq 0$ *are loc*

$$\left(u^k\left(t\right),v^k\left(t\right)\right) \to \left(u\left(t\right),v\left(t\right)\right) \qquad pentru \qquad k\to\infty$$

în topologia normei spaţiului $X = \left(H^2\left(0,1\right)\cap H_0^1\left(0,1\right)\right)\times L^2\left(0,1\right).$

Capitolul 7
Modelul lui Ren şi Truskinovsky - regimul limită viscoelastic

7.1 Un model elasitc neliniar

Un alt regim limită a modelului lui Ren şi Truskinovsky este cel descris de

$$u_{tt} = u_{txx} + \sigma\left(u_x\right)_x. \tag{7.1}$$

Acesta este obţinut pornind de la alegerea parametrilor în felul următor

$$\delta_1 = 1, \quad \delta_2 = 0, \quad \gamma_1^2 = \frac{1}{k}, \quad \varepsilon = 1.$$

Ecuaţiile modelului Ren-Truskinovsky corspunzătoare sunt

$$\begin{array}{l} u_{tt} = u_{xx} - p_x + u_{txx} + \sigma\left(u_x\right)_x \\ -\frac{1}{k} p_{xx} + p = u_x, \end{array} \tag{7.2}$$

sau folosind notaţia $\sigma^k\left(u_x\right)_x = 3u_x^2 u_{xx} - p_x$

$$u_{tt} = u_{txx} + \sigma^k\left(u_x\right)_x . \tag{7.3}$$

Observaţia 34 *Dotorită proprietăţilor ecuaţiei eliptice ce leagă variabilele p şi u, pentru orice $u \in H^2(0,1)$*

$$p_x^k \to u_{xx} \qquad \text{când} \qquad k \to \infty,$$

şi ca urmare

$$\sigma^k\left(u_x\right)_x \to \sigma\left(u_x\right)_x \qquad \text{când} \qquad k \to \infty.$$

7.2 Existenţa soluţiilor clasice

Ecuaţia (7.1) a fost studiată printre alţii de G. Andrews şi J. Ball. În două articole ([5] şi [6]) autorii menţionaţi studiază existenţa, unicitatea şi comportamentul asimptotic al soluţiilor ecuaţiei (7.1). În cele ce urmează vom arăta că pentru date iniţiale suficient de netede (7.1) admite o soluţie clasică. Acest rezultat extinde rezultatul lui Andrews şi reprezintă o versiune neliniară a Corolarului VI.3.4 din [33].

Teorema 35 *Problema cu valori pe frontieră asociată ecuaţiei*

$$u_{tt} = u_{txx} + \sigma\left(u_x\right)_x$$

are o unică soluţie globală

$$\begin{array}{rcl} u & \in & C\left([0,\infty), H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)\right) \\ u_t & \in & C\left([0,\infty), L^2(0,1)\right) \end{array}$$

pentru orice condiţii iniţiale

$$u_0 \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1), \qquad v_0 \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1).$$

În mod similar poate fi tratat şi cazul particular (7.3) al modelului Ren - Truskinovsky.

Teorema 36 *Problema cu valori pe frontieră asociată ecuaţiei*

$$u_{tt} = u_{txx} + \sigma^k\left(u_x\right)_x$$

cu $\sigma^k\left(u_x\right)_x = 3u_x^2 u_{xx} - p_x$, are o unică soluţie globală

$$\begin{array}{rcl} u & \in & C\left([0,\infty), H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)\right) \\ u_t & \in & C\left([0,\infty), L^2(0,1)\right) \end{array}$$

pentru orice condiţii iniţiale

$$u_0 \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1), \qquad v_0 \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1).$$

7.3 Regimul limită

În această secţiune studiem regimul limită $k \to \infty$ al soluţiilor problemei (7.3). După cum am afirmat anterior, ne aşteptăm ca modelul limită să fie (7.1).

Principalul rezultat al acestei secţiuni se bazează pe estimări uniforme în raport cu k.

Teorema 37 *Fie $\left(u^k, v^k\right)$ şi (u,v) soluţiile clasice ale problemlor (7.3) respectiv (7.1) cu date iniţiale identice*

$$u_0 \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1), \qquad v_0 \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1).$$

Atunci pentru orice $t \in [0,T]$ cu $T \geq 0$ are loc

$$\left(u^k(t), v^k(t)\right) \to (u(t), v(t)) \quad \textit{pentru} \quad k \to \infty$$

în topologia normei spaţiului $X = \left(H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)\right) \times L^2(0,1)$.

III. O VERSIUNE NELOCALĂ A ECUAŢIEI ALLEN-CAHN

Capitolul 8
Ecuaţia Allen-Cahn

Acest capitol cu cpnstituie o trecere în revistă a proprietăţilor ecuaţiei Allen-Cahn

$$u_t = \varepsilon u_{xx} - f(u), \tag{8.1}$$

cu $f(u) = u^3 - u$. Acest model a fost introdus de J. W. Cahn şi S. M. Allen [4] pentru a descrie evoluţia unui parametru de ordine în tranziţiile de fază ale aliajelor binare. O discuţie amănunţită a comportamentului dinamic al modelului, în care un rol central îl joacă configuraţiile (stările) metastabile, este realizată de X. Chen în lucrarea sa recentă [23]. Pe de altă parte, folosind metode din teoria semigrupurilor, S. Zheng [84] arată că:

- problema cu valori pe frontieră ataşată (8.1) are o unică soluţie clasică globală în timp;
- această soluţie este mărginită în L^∞ de către datele iniţiale;
- în regimul asimptotic $t \to \infty$ are loc $u_t \to 0$ şi u converge către o soluţie staţionară.

În capitolul următor vom stabili propietăţi similare pentru o versiune nelocală specială a ecuaţiei Allen-Cahn.

Capitolul 9
O versiune nelocală specială a ecuaţiei Allen-Cahn

În acest capitol vom prezenta o alternativă nelocală la ecuaţia Allen-Cahn ce se bazează pe înlocuirea termenului disipativ u_{xx} cu aproximanta sa Yosida de ordin

$$n = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Mdelu obţinut prin această modificare este

$$\begin{aligned} &u_t = \varepsilon p_{xx} - u^3 + u \\ &-\varepsilon p_{xx} + p = u \end{aligned} \tag{9.1}$$

şi poate fi simplificat ajungându-se la forma echivalentă

$$\begin{aligned} &u_t = \varepsilon p_{xx} - u^3 + u \\ &-\varepsilon p_{xx} + p = u \end{aligned} \tag{9.2}$$

ce are următoarele proprietăţi remarcabile ce justifică investigaţia noastră:

(i) este o perturbaţie regulară a

$$u_t = -u^3 + u;$$

spre deosebire de ecuaţia Allen-Cahn care este o perturbaţie singulară;

(ii) ecuaţia de evoluţie nu conţine explicit derivate spaţiale (spre deosebire de (9.1));

(iii) ε nu apare explicit în ecuaţia de evoluţie.

Datorită acestor proprietăţi, în comparaţie cu (8.1), (9.2) are avantajul de a putea fi simulată numeric cu un timp de calcul mult mai redus.

9.1 Analiza calitativă a modelului nelocal

În această secţiune arătăm că versiunea nelocală a ecuaţiei Allen-Cahn propusă anterior are aceleaşi proprietăţi ca si modelul Allen-Cahn de la care s-a pornit.

Teorema 38 (existenţa soluţiilor clasice) *Pentru orice stare iniţială* $u_0 \in D(A) \subset H^2(0,1)$, *unde* $D(A) = \{u \in H^2(0,1) : u_x(0) = u_x(1) = 0\}$, *problema (9.1) admite o unică soluţie clasică* $u \in C^1([0,\infty), L^2(0,1)) \cap C([0,\infty), H^1(0,1))$.

Soluţiile clasice sunt şi mărginite în L^∞.

Teorema 39 (mărginire a priori) *Fie* $u(t,x)$ *soluţia clasică a (9.1) definită pe* $[0,T]\times[0,1]$. *Dacă* $u_0 = u(0,\cdot) \in L^\infty(0,1)$ *atunci*

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(0,1)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(0,1)}$$

oricare ar fi $t \in [0,T]$.

Şi comportamentul asimptotic al (9.1) este similar cu cel al (8.1).

Teorema 40 (comportament asimptotic) *Fie* u *soluţia clasică a (9.1), atunci*

$$\|u_t(t)\|_{L^2(0,1)} \to 0 \qquad \text{când} \qquad t \to \infty.$$

9.2 O comparaţie cantitativă a celor două modele

Dacă pornim cu date iniţiale identice, diferenţa dintre soluţiile celor două modele poate fi estimată prin intermediul parametrului ε, şi avem

Teorema 41 *Fie* u *şi* u_n *soluţiile modelelor locale respectiv nelocale cu date iniţiale identice*

$$u_0 \in H^2(0,1), \qquad \|u_0\|_{L^\infty(0,1)} \leq 1.$$

Pentru un interval de timp de ordinul

$$t \sim \varepsilon \left|\ln \sqrt{\varepsilon}\right|$$

avem

$$\|u(t) - u_n(t)\|_{L^2(0,1)} \leq \left(\frac{1}{\left|\ln\sqrt{\varepsilon}\right|} + 1\right)\sqrt{\varepsilon}.$$

Studiile lui X. Chen [23] şi M. Alfaro, D. Hilhorst and H. Matano [3] au pus în evidenţă faptul că comportamentul dinamic al soluţiilor ecuaţiei Allen-Cahn cunoaşte mai multe regimuri ale căror durate depind în mod esenţial de ε. Acest lucru justifică şi faptul că estimările din teorema precedentă sunt valabile doar pentu un interval de timp ce depinde de ε.

Concluzii şi posibile dezvoltări ulterioare

Concluzii

Partea I. Metode bazate pe norme vectoriale şi matrici convergente la zero au fost aplicate cu succes pentru a obţine rezultate de existenţă pentru sisteme de ecuaţii de evoluţie.
Partea a II-a. Un studiu riguros al modelului propus de X. Ren şi L. Truskinovsky în anul 2000 a demonstrat existenţa soluţiilor clasice, şi a permis evidenţierea a două regimuri limită în care are loc convergenţa soluţiilor către

(A) soluţia unui model de visco-capilaritate; respectiv

(B) soluţia unui model visco-elastic neliniar.

Partea a III-a. Idei similare celor propuse de Ren şi Truskinovsky au fost aplicate şi în cazul unui model diferit, ecuaţiei Allen-Cahn. Prin înlocuirea termenului disipativ al ecuaţiei cu aproximanta sa Yosida s-a obţinut un model nelocal ce are aceleaşi proprietăţi ca şi modelul original, dar poate fi simulat numeric cu un timp de calcul mult mai scurt.

Posibile dezvoltări ulterioare

Posibile aplicaţii ale rezultatelor abstracte din **Partea I** le constituie sisteme de ecuaţii visco-elastice cum ar fi cele studiate recent de M. Mustafa [50, Nonlinear Analysis 2012]

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g_1(t-\tau)\,\Delta u(\tau)\,d\tau + f_1(u,v) &= 0 \\ v_{tt} - \Delta v + \int_0^t g_2(t-\tau)\,\Delta v(\tau)\,d\tau + f_2(u,v) &= 0, \end{aligned}$$

sau sisteme de tipul

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f_1(u,v) \\ v_{tt} - \Delta v &= f_2(u,v) \end{aligned}$$

în care sunt cuplate o ecuaţia parabolică cu una hiperbolică.

O posibilă continuare a analizei din Partea a II-a este legată de regimul limită în care şi coeficientul termenului vâscos, ε tinde la zero. Această limită singulară ridică mari probleme deoarece pentru σ nemonotonă, pe domeniul în care σ este descrescătoare, ecuaţia limită

$$u_{tt} = \sigma(u_x)_x$$

nu este bine pusă.

O altă problemă de interes în legătură cu modelul Ren-Truskinovsky este controlabilitatea sistemului, mai precis, controlabilitatea prin intermediul valorilor de pe frontieră a configuraţiei domeniilor ocupate de cele două faze.

Bibliografie

[1] R. P. Agarval, M. Meehan, D. O'Regan, *Fixed point theory and applications,* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.

[2] G. Alberti, G. Bellettini, M Cassandro, E. Presuti, *Surface tension in Ising systems with Kac potentials*, J. Stat. Phys. **82** (1996).

[3] M. Alfaro, D. Hilhorst, H. Matano, *The singular limit of the Allen-Cahn equation and the FitzHugh-Nagumo system*, J. Diff. Eq. **245** (2008), 505-565.

[4] S. M. Allen, J. W. Cahn, *A microscopic theory for antiphase bondary motion and its application to antiphase domain coarsening*, Acta Metall. **27** (1979), 1085-1095.

[5] G. Andrews, *On the existence of solutions to the equation* $u_{tt} = u_{xxt} + \sigma(u_x)_x$, J.Diff. Eq. **35** (1980), 200-231

[6] G. Andrews, J. M. Ball, *Asymptotic behaviour and changes of phase in one-dimensional nonlinear viscoelasticity,* , J. Diff. Eq. **44** (1982), 306-341

[7] C. Avramescu, C. Vladimirescu, *Some remarks on Krasnoselskii's fixed point theorem*, Fixed Point Theory, **4(1)** (2003), 3-13.

[8] R. W. Balluffi, S. M. Allen, W. C. Carter, *Kinetics of materials*, John Wiley & Sons, 2005.

[9] V. Barbu, *Ecuaţii diferenţiale*, Dacia, Cluj-Napoca, 1979.

[10] V. Barbu, *Nonlinear Differential Equations of Monotone Types in Banach Spaces*, Srpinger, 2010.

[11] P. W. Bates, P. C. Fife, X. Ren, X. Wang, *Traveling waves in a convolution model for phase transitions*, Arch. Rat. Mech. Anal. **138** (1997), 105-136.

[12] P. W. Bates, S. Brown, J. Han, *Numerical analysis for a nonlocal Allen-Cahn equation*, Int. J. Num. Anal. Modeling **6** (2009) 33-49.

[13] S. Bianchini and A. Bressan, *Vanishing viscosity solutions to nonlinear hyperbolic systems*, Annals of Mathematics **161** (2005), 223-342.

[14] A. Boucherif, R. Precup, *Semilinear evolution equations with nonlocal initial conditions*, Dyn. Syst. Appl., **16** (2007), 501-516.

[15] A. Bressan, *Hyperbolic systems of conservation laws: The one-dimensional Cauchy problem,* Oxford University Press, USA, 2000.

[16] H. Brezis, *Analyse fonctionelle,* Mason, Paris 1983.

[17] T. A. Burton, *A fixed point theorem of Krasnoselskii's type*, Math. Nachr., **198** (1998), 23-31.

[18] L. Byszewski, *Theorems about the existence and uniqueness of solutions of a semiliniar evolution nonlocal problem*, J. Math. Anal. Appl. **162** (1991), 494-505.

[19] L. Byszewski, H. Akca, *Existence of solutions of a semilinear functional-differential evolution nonlocal problem*, Nonlin. Anal. **34** (1998), 65-72.

[20] G. Caginalp, *An analysis of a phase field model of a free boundary*, Arch. Rat. Mech. Anal. **92** (1996), 206-245.

[21] J. Carr, R. L. Pego, *Metastable patterns in solutions of* $u_t = \varepsilon u_{xx} - f(u)$, Comm. Pure Appl. Math. **42** (1989), 523-576.

[22] T. Cazenave and A. Haraux, *An introduction to Semilinear Evolution Equations*, Oxford University Press, New York, 1998.

[23] X. Chen, *Generation, propagation, and annihilation of metastable patterns*, J. Diff. Eq., **206** (2004), 399–437.

[24] A. J. J. Chmaj, *Existence of travelling waves for the nonlocal Burgers equation*, Appl. Math. Letters, **20** (2007), 439-444.

[25] C. Cortazar, M. Elguerta, J. D. Rossi, *Nonlocal diffusion problems that approximate the heat equaion with Dirichlet boundary conditions*, Israel J. Math. **170** (2009), 53-60.

[26] C. Cortazar, M. Elguerta, J. D. Rossi, N. Wolanski, *How to approximate theheat equation with Neumann boundary conditions by nonlocal diffusion problems*, Arch. Rat. Mech. Anal. **187** (2007), 137-156.

[27] M. C. Cross, P. C. Hohenberg, *Pattern formation outside of equilibrium*, Rev. Modern Phys. **65** (1993), 851-1112.

[28] C.M. Dafermos, *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*, Grundlehren Math. Wissenschaften Series, Vol. 325, Springer Verlag, 2000.

[29] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer, Berlin, 1985.

[30] K. Deng, *Exponential decay of solutions of semilinear parabolic equations with nonlocal initial conditions*, J. Math. Anal. Appl. **179** (1993), 630-637.

[31] R. DiPerna, *Convergence of approximate solutions to conservation laws,* Arch. Rat. Mech. Anal. **82** (1983), 27-70.

[32] J. L. Ericksen, *Equilibrium of bars,* J. Elasticity **5** (1975) 191-201.

[33] K.-J. Engel, R. Nagel, *One-parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Springer, New-York, 2000.

[34] P. Engel, **A. Viorel**, C. Rohde, *A Low-Order Approximation for Viscous-Capillary Phase Transition Dynamics*, în curs de finalizare.

[35] L. C. Evans, *Partial differential equations*, AMS, Providence, Rhode Island,1998.

[36] P. Fife, *Some nonclassical trends in parabolic and parabolic-like evolutions,* In M. Kirkilionis, S. Krömker, R. Rannacher, and F. Tomi (eds.), Trends in Nonlinear Analysis, Springer, 2003

[37] J.A. Goldstein, *Semigroups of Linear Operators and Applications*, Oxford University Press, New York, 1985.

[38] A. Granas, J. Dugundji, *Fixed Point Theory*, Springer-Verlag, New York, 2003.

[39] M. Grinfeld, I. Stoleriu, *Truncated gradient flow of the van der Waals free energy,* Electronic J. Diff. Eq. **2006** (2006), 1-9.

[40] B.T. Hayes and P.G. LeFloch, *Nonclassical shocks and kinetic relations: strictly hyperbolic systems*, SIAM J. Math. Anal. **31** (2000), 941-991.

[41] R. Kohn and S.Müller, *Surface energy and microstructure in coherent phase transitions*, Comm.Pure. Appl. Math. **47** (1994) 405–435.

[42] S Kruzkov, *First-order quasilinear equations with several space variables*, (in Russian), Mat. USSR Sb. 123, 228–255; English Transl. in Math. USSR Sb. 10, 217–243.

[43] M.A. Jendoubi, *A simple unified approach to some convergence theorem of L. Simon*, J. Func. Anal., **153** (1998), 187–202.

[44] P. Lax, *Functional Analysis*, Wiley-Interscience, New York, 2002.

[45] P. G. LeFloch, *Hyperbolic Systems of Cosnservation Laws,* Birkhäuser, Basel, 2002.

[46] Z. Liu, S. Zheng, *Semigroups associated with dissipative systems,* CRC Press LLC, 1999.

[47] A. Macchelli, B. M. Maschke, *Infinite-dimensional Port-Hamiltonian Systems, in Modeling and Control of Physical Systems - The Port-Hamiltonian Approach*, V. Duindam, A. Macchelli, S. Stramigioli, S. Bruyninckx (eds.), Springer, 2009

[48] B. Maschke and A.J. van der Schaft, *Compositional modelling of distributed-parameter systems*, Advanced Topics in Control Systems Theory. Lecture Notes from FAP 2004, Lecture Notes on Control and Information Sciences. Springer, 2005.

[49] E. Meron, *Pattern formation in excitable media*, Phys. Reports. **218** (1992).

[50] M. I. Mustafa, *Well posedness and asymptotic behavior of a coupled system of nonlinear viscoelastic equations*, Nonlin. Analysis RWA **13** (2012), 452-463.

[51] J.M. Ortega and W.C. Rheinboldt, *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables,* Academic Press, New York, 1970.

[52] D. O'Regan, *Fixed point theory for the sum of two operators*, Appl. Math. Lett. **9(1)** (1996), 1-8.

[53] D. O'Regan, R. Precup, *Theorems of Leray-Schauder Type and Applications*, Gordon and Breach, Amsterdam, 2001.

[54] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*,.Springer, New York, 1983.

[55] R. Pego, *Lectures on Dynamics in Models of Coarsening and Coagulation, in Dynamics in Models of Coarsening, Coagulation, Condensation and Quantization, W. Bao, J-G. Liu (eds.)*, World Scientific, Singapore, 2007.

[56] A. I. Perov, *On Cauchy problem for a system of ordinary differential equations*, Pviblizhen.Met. Reshen. Differ. Uvavn., **2** (1964), 115-134.

[57] R. Precup, *Methods in Nonlinear Integral Equations*, Kluwer, Dordrecht, 2002.

[58] R. Precup, *The role of matrices that are convergent to zero in the study of semilinear operator systems*, Math. Comp. Modelling **49** (2009), 703-708.

[59] R. Precup, *Lecţii de ecuaţii cu derivate parţiale,* Cluj University Press, Cluj-Napoca, 2004.

[60] R. Precup, **A. Viorel**, *Existence results for systems of nonlinear evolution equations*, Innt. J. Pure. Appl. Math. **47(2)** (2008), 199-206, MR2457824, Zbl 1172.35438.

[61] R. Precup, **A. Viorel**, *Existence results for systems of nonlinear evolution inclusions*, Fixed Point Theory **11** (2010), 199-206, MR2743788, Zbl 1207.35202.

[62] X. Ren, L. Truskinovsky, *Finite scale microstructures in nonlocal elasticity,* J. Elasticity **59** (2000), 319-355

[63] F. Robert, *Matrices non-negatives et normes vectorielles,* Université Scientifique et Médicale, Lyon, 1973.

[64] R. Rogers and L. Truskinovsky, *Discretization and hysteresis*, Physica B **233** (1997) 370–375.

[65] C. Rohde, *Phase transitions and shap-interface limits for the1d-elasticity system with nonlocal energy,* J. Hyperbolic Diff.. Eq. **7** (2005), 747-768.

[66] I.A. Rus, *Picard operators and applications*, Sci. Math. Japonicae, **58** (2003), 191-219.

[67] I.A. Rus, *Principles and Applications of the Fixed Point Theory*, (in Romanian), Ed.Dacia, 1979.

[68] I. A. Rus, A. Petruşel and G. Petruşel, *Fixed Point Theory*, Cluj University Press, Cluj-Napoca, 2008.

[69] F. Scheck, *Mechanics: From Newton's Laws to Deterministic Chaos,* 4th edition Springer Berlin Heidelberg New York, 2003.

[70] I. Segal, *Non-linear semigroups*, Ann. of Math., **78** (2) (1963), 339-364.

[71] J. Simon, *Compact sets in the space* $L^p(0,T;B)$*,* Ann. Mat. Pura Appl. **4** (1987), 65-96.

[72] J. Shearer. *Global existence and compactness in Lp for the quasilinear wave equation*, Comm. Part. Diff. Eqs.**19** (1994), 1829-1877.

[73] W. Shen and S. Zheng, *On the coupled Cahn-Hilliard equations*, Comm. PDE, Vol. 18 (3 and 4) (1993), 701–727.

[74] M. Slemrod, *Admissibility criteria for propagating phase boundaries in a van der Waals fluid,* Arch. Rat. Mech. Anal., **81** (1983), 301-315.

[75] L. Truskinovsky and G. Zanzotto, *Finite scale microstructures and metastability in onedimensional elasticity*, Meccanica **30** (1995) 577–589.

[76] **A. Viorel**, *Existence results for semilinear evolution equations with nonlocal initial conditions*, trimisă spre publicare.

[77] **A. Viorel**, *On a special nonlocal version of the Allen-Cahn model*, Ann. Tiberiu Popoviciu Semin. Funct. Equ. Approx. Convexity, în curs de apariţie.

[78] I. Vrabie, *C_0-Semigroups and Applications*, North-Holland, 2003.

[79] J. R. L. Webb, *A unified approach to nonlocal boundary value problems,* Proceedings of the 5th International Conference on Dynamical Systems and Applications **1** (2007) 1-6.

[80] J. R. L. Webb, G. Infante, *Positive solutions of nonlocal boundary value problems: A unified approach, J. London Math. Soc.* **74** (2006), 673-693.

[81] H. Yagisita, *Existence of traveling wave solutions for a nonlocal bistable equation: an abstract approach*, preprint.

[82] P.P. Zabrejko, *K-metric and K-normed linear spaces: survey*, Collect. Math., 48(1997), No.4-6, 825-859.

[83] E. Zeidler, *Applied Functional Analysis*, Springer, New York, 1995.

[84] S. Zheng, *Nonlinear Evolution Equations*, Chapman & Hall/CRC, 2004.