Universitatea "Babeş-Bolyai", Cluj-Napoca

Facultatea de Matematică şi Informatică

Vasile Lucian Lazăr

ECUAŢII CU DERIVATE PARŢIALE ŞI EVALUAREA OPŢIUNILOR CU VOLATILITATE STOHASTICĂ

Coordonator ştiinţific
Prof. Dr. Adrian Petruşel

Cluj-Napoca, 2011

Cuprins

<u>Cuvinte cheie</u>: aproximaţii succesive, punct fix, punct fix strict, punct periodic, punct periodic strict, operator Picard, operator slab Picard, operator multivoc Picard, operator multivoc slab Picard, dependenţă de date, operator fractal, umbrire la limită, operator de mulţime, mulţime înzestrată cu două metrici, operator deschis, contracţie generalizată, funcţie esenţială, teoreme de tip Leray-Schauder, stabilitate Ulam-Hyers, stabilitate Ulam-Hyers generalizată, ecuaţie cu derivate parţiale, selecţie, incluziune integrală, incluziune cu derivate parţiale, preţul opţiunii, volatilitate stohastică, opţiuni de tip European, opţiuni digitale, soluţie "closed-form", modelul lui Heston, metoda diferenţelor finite, metoda elementului finit.

Introducere

Teoria punctului fix este un instrument important atât în studiul ecuaţiilor integrale, a ecuaţiilor diferenţiale, a ecuaţiilor cu derivate parţiale şi a problemelor asociate acestora, cât şi pentru incluziunile integrale şi diferenţiale şi a problemelor asociate. Abordarea în acest caz este următoarea: pe baza unor ipoteze corespunzătoare, se poate transforma o problemă asociată unei ecuaţii diferenţiale sau integrale sau unei ecuaţii cu derivate parţiale (respectiv unei incluziuni diferenţiale sau integrale), într-o ecuaţie de punct fix (respectiv incluziune) de forma $x = t(x)$ (respectiv $x \in T(x)$). Folosind teoreme de punct fix abstracte se pot obţine rezultate de existenţă, unicitate şi alte proprietăţi calitative ale mulţimii de soluţii (cum ar fi dependenţa de date, corect-punerea problemei, stabilitate, proprietatea de umbrire la limită, etc.).

Primul scop al acestei teze este acela de a prezenta o teorie a punctului fix pentru clasa φ-contracţiilor univoce şi multivoce într-un spaţiu metric complet. O φ-contracţie reprezintă o extensie netrivială a conceptului clasic de contracţie. Mai exact, dacă (X, d) este un spaţiu metric iar $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ o funcţie, atunci spunem că operatorul multivoc $T : X \to P_{b,cl}(X)$ este o φ-contracţie multivocă dacă:

(i) φ este o funcţie de comparaţie strictă (adică, φ este crescătoare şi $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n(t) < +\infty$, $\forall t > 0$);

(ii) $H(T(x), T(y)) \leq \varphi(d(x, y))$, $\forall x, y \in X$ (unde prin H am notat metrica Pompeiu-Hausdorff pe $P_{b,cl}(X)$.

De remarcat este faptul că, dacă $\varphi(t) = kt$ ($k \in [0, 1[$), atunci obţinem noţiunea clasică de k-contracţie multivocă în sensul lui Nadler. Reamintim faptul că prima teoremă de punct fix în cazul φ-contracţiilor univoce în spaţii metrice complete au fost date în 1975 de J. Matkowski şi I.A. Rus, în timp ce cazul φ-contracţiilor multivoce în spaţii metrice complete a fost studiat pentru prima dată în 1982 de R. Węgrzyk. De atunci, rezultate referitoare la φ-contracţiilor multivoce au fost date de I.A. Rus, J.S. Bae, A. Sîntămărian, B.E. Rhoades, A. Petruşel, A. Muntean, X.Y.-Z. Yuan, etc. În cel de-al doilea capitol al tezei, vom discuta câteva proprietăţi (cum ar fi existenţa, unicitatea, dependenţa de date, aproximarea, stabilitate Ulam-Hyers, proprietatea de corect-punere, umbrire la limită) ale incluziunii de punct fix $x \in T(x)$ sau ale ecuaţiei de punct fix strict $\{x\} = T(x)$, unde $T : X \to P_{cl}(X)$ este o φ-contracţie multivocă. Este prezentată de asemenea o teorie a punctului fix pentru operatori definiţii pe spaţii înzestrate cu două metrici.

Al doilea scop al tezei este acela de a aplica rezultatele abstracte menţionate mai sus unor probleme generate de ecuaţii şi incluziuni cu derivate parţiale şi de ecuaţii şi incluziuni integrale. Acestea sunt prezentate în ultimele două paragrafe ale capitolului 2. Astfel se obţin rezultate de existenţă, unicitate, aproximare, dependenţă de date şi stabilitate Ulam-Hyers atât pentru problema Dirichlet asociată unei ecuaţii cu derivate parţiale neliniare care implică operatorul Laplace, cât şi pentru incluziuni integrale de tip Fredholm şi Volterra şi pentru problema Darboux asociată unei incluziuni diferenţiale de ordinul doi. Rezultatele obţinute extind şi completează rezultate recente din literatura de specialitate date de I.A. Rus, G. Teodoru, A. Cernea, Castro şi Ramos, S.-M. Jung, N. Lungu, C. Crăciun şi N. Lungu, S. Reich şi A.J. Zaslavski, M. Xu.

Al treilea scop al tezei este acela de a prezenta câteva rezultate privitoare la problema evaluării opţiunilor în cazul modelului cu volatilitate stohastică dat de S.L. Heston în 1993. Modelarea volatilităţii seriilor de timp financiare prin intermediul modelelor de volatilitate stohastică a primit o mare atenţie în literatura de specialitate. Există două tipuri de astfel de modele: modele cu volatilitate stohastică în timp continuu, cum ar fi: modelul Hull şi White (1987), Wiggins(1987), Stein şi Stein(1991), Heston(1993), Bates(1996) şi modele stohastice discrete de tip GARCH ("Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity"): Taylor(1986), Amin şi Ng(1993), Heston şi Nandi(1993), etc.

În celebra lor lucrare [15], în 1973, Black şi Scholes au redus problema evaluării unei opţiuni la rezolvarea unei ecuaţii parabolice cu derivate parţiale supusă unei condiţii finale. De atunci, multe din modele de stabilire a preţului conduc la ecuaţii cu derivate parţiale, care de obicei sunt liniare şi parabolice. În cel de-al treilea capitol al lucrării ne vom ocupa de ecuaţia cu derivate parţiale corespunzătoare modelului lui Heston. Astfel vom da o soluţie analitică în cazul opţiunilor digitale şi vom folosi metode numerice pentru a rezolva această ecuaţie în cazul opţiunilor put europene.

Teza este structurată în felul următor:

Primul capitol, intitulat **Preliminarii**, conţine cele mai importante notaţii, noţiuni şi rezultate folosite pe parcursul acestei teze.

Cel de-al doilea capitol, denumit **Metode de punct fix pentru ecuaţii cu derivate parţiale**, prezintă o teorie a punctului fix pentru operatori multivoci care satisfac la o condiţie de tip contracţie neliniară cu o funcţie de comparaţie $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$.

În prima secţiune a acestui capitol, vom dezbate teoria teoremei metrice de punct fix a lui R. Węgrzyk [144], din următoarele perspective: existenţa punctelor fixe (stricte), unicitatea punctului fix şi a punctului fix strict, dependenţa de date a mulţimii punctului fix, şirul operatorilor multivoci şi puncte fixe, stabilitatea Ulam-Hyers a incluziunii de puncte fixe multivoce, corect-punerea problemei de punct fix, ecuaţii operatoriale de mulţime cu φ-contracţii multivoce, puncte fixe pentru operatorul fractal generat de un operator multivoc. În partea a doua sunt demonstrate câteva rezultate de punct fix pentru operatori multivoci ce nu invariază domeniul de definiţie pe mulţimi înzestrate cu două metrici. În ultima parte a acestui paragraf, vom da rezultate de punct fix pentru operatori ce satisfac condiţii de compactitate de tip Mönch, condiţii introduse, într-un alt context, de D. O'Regan şi R. Precup în [93]. În ultimele două secţiuni ale acestui capitol, vom aplica o parte din rezultatele anterioare în studiul existenţei şi stabilităţii Ulam-Hyers a unor ecuaţii şi incluziuni integrale, diferenţiale şi cu derivate parţiale.

Următoarele rezultate aparţin autorului:

- În paragraful 2.1.1: Teorema 2.1.3 – Teorema 2.1.10. Aceste rezultate generalizează câteva teoreme recente date de A. Petruşel şi I.A. Rus (vezi lucrarea A. Petruşel şi I.A. Rus: The theory of a metric fixed point theorem for multivalued operators, Proc. Ninth International Conference on Fixed Point Theory and its Applications, Changhua, Taiwan, July 16–22, 2009, 161–175, 2010) şi au fost publicate în **V.L. Lazăr**, Fixed point theory for multivalued φ-contractions, Fixed Point Theory and Applications, 2011(2011), 12 pag., doi:10.1186/1687-1812-2011-50;

- în paragraful 2.1.2: Teorema 2.1.13 – Teorema 2.1.16, rezultate ce completează şi extind teoreme cunoscute în literatura de specialitate date de A. Petruşel, I.A. Rus [101], T.A. Lazăr, A. Petruşel, N. Shahzad [67], A. Chiş-Novac, R. Precup, I.A. Rus [25], M. Frigon, A. Granas [34]. Aceste rezultate sunt publicate în T.A. Lazăr, **V.L. Lazăr**, Fixed points for non-self multivalued operators on a set with two metrics, JP Journal of Fixed Point Theory and Applications, 4(2009), Nr. 3, 183-191;

- în paragraful 2.1.3: Teorema 2.1.19 şi Teorema 2.1.20. Aceste rezultate extind, la funcţii ce satisfac anumite condiţii de compactitate introduse de D. O'Regan şi R. Precup [93], câteva rezultate date de R.P. Agarwal şi D. O'Regan [1] cu privire la funcţii esenţiale în sens Mönch. Acestea au fost publicate în **V.L. Lazăr**, On the essentiality of the Mönch type maps, Seminar on Fixed Point Theory, 1(2000), 59-62;

- în secţiunea 2.2: Teorema 2.2.2 şi Teorema 2.2.3. Teoremele tratează rezultate de existenţă şi stabilitate Ulam-Hyers pentru problema Dirichlet asociată unor ecuaţii cu derivate parţiale eliptice neliniare. Abordarea noastră se bazează pe tehnica operatorilor slab Picard. Aceste rezultate au fost prezentate la a 7-a Conferinţă Internaţională de Matematici Aplicate, Baia Mare, Septembrie 01-04, 2010 şi vor fi publicate în **V.L. Lazăr**, Ulam-Hyers stability results for partial differential inclusions, acceptată spre publicare în Creative Math.

Inform., 20(2011), Nr.3. Proprietatea de stabilitate Ulam (Ulam-Hyers, Ulam-Hyers-Rassias, Ulam-Hyers-Bourgin,...) pentru diverse ecuaţii funcţionale a fost investigată de numeroşi autori (vezi [18, 22, 29, 35, 50, 51, 56, 94, 109, 110]). Există de asemenea unele rezultate pentru ecuaţii diferenţiale ([57, 59, 60, 84, 122]), ecuaţii integrale ([58, 121]), ecuaţii cu derivate parţiale ([79], [80], [129], [130]) şi pentru ecuaţii cu diferenţe [19, 106, 107]).

- în secţiunea 2.3: Teorema 2.3.2-Teorema 2.3.4, rezultate ce au fost prezentate la ICNODEA (International Conference on Nonlinear Operators and Differential Equations), Cluj-Napoca, Iulie 5-8, 2011 şi au fost trimise spre publicare la Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, vezi **V.L. Lazăr** [75]. Folosind tehnica operatorilor multivoci slab Picard, teoremele de mai sus prezintă rezultate de existenţă şi stabilitate Ulam-Hyers pentru incluziuni integrale de tip Fredholm şi Volterra şi pentru unele incluziuni cu derivate parţiale.

Capitolul trei, intitulat **Modelul lui Heston**, prezintă câteva rezultate privitoare la problema evaluării opţiunilor cu volatilitate stohastică, volatilitate ce urmează modelul propus de Heston (vezi [44], 1993).

Scopul primei secţiuni a acestui capitol este acela de a analiza problema evaluării unei opţiuni digitale în cazul modelului cu volatilitate stohastică al lui Heston. În acest model ecuaţia de dinamică a volatilităţii este dată de un proces de tip square root, proces stohastic introdus în literatura economică de către Cox, Ingersoll şi Ross în 1985 (vezi [26]). Vom prezenta o soluţie analitică pentru acest tip de opţiuni, bazându-ne pe lucrarea originală a lui S. Heston, [44] .

În ultima secţiune a acestui capitol folosim metodele diferenţelor şi a elementului finit pentru a rezolva numeric ecuaţia de evaluare a opţiunilor put de tip european în cazul modelului lui Heston, rezolvarea ecuaţiilor cu derivate parţiale prin aceste metode numerice clasice fiind posibilă pentru o varietate mare de modele de opţiuni (vezi [31, 55, 63, 64, 147, 148]).

Contribuţiile autorului sunt:

- în secţiunea 3.1: Teorema 3.1.1 şi Teorema 3.1.2, rezultate ce au fost publicate în **L.V. Lazăr**, Pricing Digital Call Option in the Heston stochastic volatility model, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Mathematica, vol. XLVIII, nr.3, 2003, 83-92. Aceste teoreme dau o soluţie de tip "closed-form" pentru opţiunile digitale cu volatilitate stohastică în cazul modelului lui Heston;

- în secţiunea 3.2: Teorema 3.2.1. Se consideră cazul unei opţiuni put europene cu volatilitate stohastică pentru a arăta cum pot fi folosite metoda diferenţelor finite şi metoda elementului finit. Ecuaţia cu derivate parţiale de evaluare a opţiunii pentru modelul lui Heston este o ecuaţie de tip convecţie–difuzie în care termenul de difuzie este liniar în v. Mai multe despre ecuaţiile de tip convecţie–difuzie şi despre metodele numerice, vezi în [3, 63, 64, 86, 108, 115, 139, 147, 148].Rezultatele autorului au fost prezentate la ICNODEA (International Conference on Nonlinear Operators and Differential Equations), August 24-27, 2004, Cluj-Napoca şi au fost publicate în **V.L. Lazăr**, Finite difference and element methods for pricing options with stochastic volatility, Int. Journal of Pure and Applied Mathematics, vol. 28(2006), Nr.3, 339-354.

În final, doresc să aduc calde mulţumiri conducătorului meu ştiinţific, prof. univ. dr. Adrian Petruşel, pentru îndrumarea atentă, sfaturile şi încurajarea permanentă de care m-am bucurat pe parcursul stagiului de doctorat.

Aş dori sămulţumesc membrilor Catedrei de Ecuaţii Diferenţiale, precum şi tuturor colaboratorilor seminarului de cercetare al Catedrei de Ecuaţii Diferenţiale, pentru ajutorul şi colaborarea pe care mi le-au oferit. Mulţumiri speciale îi adresez domnului prof.univ.dr. Radu Precup pentru ajutorul constant pe care mi l-a oferit pe perioada acestor ani. De la toţi în ansamblu şi de la fiecare în parte am învăţat foarte mult. Formarea mea ca profesor şi cercetător s-a făcut la Facultatea de Matematică şi Informatică din Universitatea "Babeş-Bolyai" Cluj-Napoca. Tuturor dascălilor mei le mulţumesc încă o dată.

De asemenea, doresc să mulţumesc prof.dr. Ralf Korn, de la Universitatea din Kaiserslautern pentru sfaturile şi comentariile competente legate de cercetărea cu privire la teoria evaluării opţiunilor. Multe mulţumiri sunt adresate Fraunhofer-Institute for Industrial Mathematics (ITWM) din Kaiserslautern, Germania pentru oferirea bursei de studiu în perioada în care am studiat la Universitatea din Kaiserslautern.

În cele din urmă, aş dori să le mulţumesc părinţilor mei pentru că au făcut din educaţia mea o prioritate, soţiei Tania pentru că a fost tot timpul alături de mine şi celor doi copii Răzvan şi Tudor pentru răbdarea lor. Fără iubirea şi sprijinul lor constant, mi-ar fi fost imposibil să scriu această teză.

Cluj-Napoca, Septembrie 2011 Drd. Vasile Lucian Lazăr

Capitolul 1

Preliminarii

Vom aminti în acest capitol unele noţiuni şi rezultate de bază necesare în prezentarea capitolelor următoare ale acestei teze de doctorat. Astfel, în prima parte vom reaminti concepte şi teoreme din analiza neliniară, în timp ce în ultimele două paragrafe vom da noţiuni şi rezultate din teoria opţiunilor.

1.1 Noţiuni şi rezultate din Analiza Neliniară

Pe parcursul acestei teze vom folosi notaţii şi noţiuni clasice din Analiza Neliniară, vezi [8, 9, 13, 38, 39, 40, 47, 62, 97, 100, 125, 126, 140, 153].

1.2 Noţiuni fundamentale din Teoria Opţiunilor

1.3 Modele cu volatilitate stohastică

În ultimele două paragrafe sunt reamintite câteva noţiuni şi rezultate specifice teoriei preţului opţiunii din [2, 4, 12, 15, 26, 44, 45, 49, 63, 64, 72, 77, 137, 146, 147, 145].

Capitolul 2

Metode de punct fix pentru ecuaţii cu derivate parţiale

Scopul acestui capitol este de a prezenta o teorie a punctului fix pentru operatori multivoci care satisfac la o condiţie de tip contracţie neliniară cu o funcţie de comparaţie $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. În prima secţiune a acestui capitol, vom dezbate teoria teoremei metrice de punct fix a lui R. Węgrzyk [144], din următoarele perspective: existenţa punctelor fixe (stricte), unicitatea punctului fix şi a punctului fix strict, dependenţa de date a mulţimii punctului fix, şirul operatorilor multivoci şi puncte fixe, stabilitatea Ulam-Hyers a incluziunii de puncte fixe multivoce, corect-punerea problemei de punct fix, ecuaţii operatoriale de mulţime cu φ-contracţii multivoce, puncte fixe pentru operatorul fractal generat de un operator multivoc. În partea a doua sunt demonstrate câteva rezultate de punct fix pentru operatori multivoci ce nu invariază domeniul de definiţie pe mulţimi înzestrate cu două metrici. În ultima parte a acestui paragraf, vom da rezultate de punct fix pentru operatori ce satisfac condiţii de compactitate de tip Mönch, condiţii introduse, într-un alt context, de D. O'Regan şi R. Precup în [93]. În ultimele două secţiuni ale acestui capitol, vom aplica o parte din rezultatele anterioare în studiul existenţei şi stabilităţii Ulam-Hyers a unor ecuaţii şi incluziuni integrale, diferenţiale şi cu derivate parţiale.

2.1 Teoreme de punct fix

2.1.1 Teoria punctului fix pentru φ-contracţii multivoce

Rezultatele obţinute generalizează câteva teoreme recente date de A. Petruşel şi I.A. Rus (The theory of a metric fixed point theorem for multivalued operators, Proc. Ninth International Conference on Fixed Point Theory and its Applications, Changhua, Taiwan, July 16–22, 2009, 161–175, 2010). Pentru cazul univoc vezi I.A. Rus [120] şi [116].

Fie $T : X \to P(X)$ un operator multivoc. Atunci, operatorul $\hat{T} : P(X) \to P(X)$ definit prin

$$\hat{T}(Y) := \bigcup_{x \in Y} T(x), \quad \text{for } Y \in P(X)$$

se numeşte operator fractal generat de T.

Este cunoscut faptul că dacă (X, d) este un spaţiu metric şi $T : X \to P_{cp}(X)$, atunci au loc următoarele:

(a) dacă T este semicontinuu superior, atunci $T(Y) \in P_{cp}(X)$, pentru orice $Y \in P_{cp}(X)$;

(b) continuitatea lui T implică continuitatea lui $\hat{T} : P_{cp}(X) \to P_{cp}(X)$.

Dacă $T : X \to P(X)$, atunci $T^0 := 1_X,\ T^1 := T, \ldots, T^{n+1} = T \circ T^n,\ n \in \mathbb{N}$ reprezintă iteratele operatorului T.

Prin definiţie, un punct periodic pentru operatorul multivoc $T : X \to P_{cp}(X)$ este un element $p \in X$ astfel încât $p \in F_{T^m}$, pentru un număr întreg $m \geq 1$, i.e., $p \in \hat{T}^m(\{p\})$ pentru un număr întreg $m \geq 1$.

Reamintim mai departe noţiunea de operator multivoc $\psi-$slab Picard (vezi [131]).

Definiţia 2.1.1 *Fie (X, d) un spaţiu metric şi $T : X \to P(X)$ un operator MWP. Atunci, definim operatorul multivoc $T^\infty : Graph(T) \to P(F_T)$ prin formula $T^\infty(x, y) = \{\ z \in F_T \mid$ există un şir de aproximaţii succesive pentru operatorul T care porneşte din (x, y) şi converge către $z\ \}$.*

Definiţia 2.1.2 *Fie* (X, d) *un spaţiu metric şi fie* $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *o funcţie crescătoare, continuă în* 0 *şi cu* $\psi(0) = 0$*. Atunci* $T : X \to P(X)$ *se numeşte operator multivoc* ψ*-slab Picard dacă este operator multivoc slab Picard şi dacă există o selecţie* $t^\infty : Graph(T) \to Fix(T)$ *a lui* T^∞ *astfel încât*

$$d(x, t^\infty(x, y)) \le \psi(d(x, y)),\ \forall (x, y) \in Graph(T).$$

Dacă există $c > 0$ *astfel încât* $\psi(t) = ct$*, pentru orice* $t \in \mathbb{R}_+$*, atunci* T *se numeşte operator multivoc c-slab Picard.*

Exemplul 2.1.1 *Fie* (X, d) *un spaţiu metric complet şi* $T : X \to P_{cl}(X)$ *o a-contracţie multivocă. Atunci* T *este un operator c-MWP, unde* $c = (1 - a)^{-1}$.

Următorul rezultat este cunoscut în literatură ca teorema Matkowski-Rus.

Teorema 2.1.1 *(J. Matkowski [82], I. A. Rus [125]) Fie* (X, d) *un spaţiu metric complet şi* $f : X \to X$ *o* φ*-contracţie, i.e.,* $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *este o funcţie de comparaţie şi*

$$d(f(x), f(y)) \le \varphi(d(x, y)) \quad \forall x, y \in X.$$

Atunci f *este un operator Picard, adică* f *are un punct fix unic* $x^* \in X$ *şi* $\lim_{n \to +\infty} f^n(x) = x^*$, $\forall x \in X$.

Varianta multivocă a rezultatului anterior este dată de R. Węgrzyk, (vezi [144]):

Teorema 2.1.2 *Fie* (X, d) *un spaţiu metric complet şi* $T : X \to P_{cl}(X)$ *o* φ*-contracţie multivocă, unde* $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *este o funcţie de comparaţie strictă. Atunci* F_T *este nevidă şi pentru orice* $x_0 \in X$ *există un şir al aproximaţiilor succesive pentru operatorul* T *ce porneşte din* x_0 *şi converge la un punct fix a lui* T*.*

Primul nostru rezultat se referă la cazul φ-contracţiilor multivoce.

Teorema 2.1.3 *(V.L. Lazăr, [73]) Fie* (X, d) *un spaţiu metric complet şi* $T : X \to P_{cl}(X)$ *o* φ*-contracţie multivocă. Atunci avem:*

(i) (existenţa şi aproximarea punctului fix) T este un operator MWP (vezi R. Węgrzyk [144]);

(ii) Dacă în plus $\varphi(qt) \leq q\varphi(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$ (unde $q > 1$) şi $t = 0$ este un punct de convergenţă uniformă al seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi^n(t)$, atunci T este un operator ψ-MWP, cu $\psi(t) := t + s(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$ (unde $s(t) := \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^n(t)$);

(iii) (Dependenţa de date a mulţimii punctului fix) Fie $S : X \to P_{cl}(X)$ o φ-contracţie multivocă şi fie $\eta > 0$ astfel încât $H(S(x), T(x)) \leq \eta$, pentru orice $x \in X$. Presupunem că $\varphi(qt) \leq q\varphi(t)$ pentru orice $t \in \mathbb{R}_+$ (unde $q > 1$) şi $t = 0$ este un punct de convergenţă uniformă al seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi^n(t)$. Atunci, $H(F_S, F_T) \leq \psi(\eta)$;

(iv) (şirul operatorilor) Fie $T, T_n : X \to P_{cl}(X), n \in \mathbb{N}$ o φ-contracţie multivocă astfel încât $T_n(x) \xrightarrow{H} T(x)$ dacă $n \to +\infty$, pentru fiecare $x \in X$. Atunci, $F_{T_n} \xrightarrow{H} F_T$ când $n \to +\infty$.

Dacă în plus $T(x) \in P_{cp}(X)$, $\forall x \in X$, atunci au loc şi următoarele:

(v) (stabilitatea Ulam–Hyers generalizată a incluziunii $x \in T(x)$) Fie $\epsilon > 0$ şi fie $x \in X$ astfel încât $D(x, T(x)) \leq \epsilon$. Atunci există $x^* \in F_T$ astfel încât $d(x, x^*) \leq \psi(\epsilon)$;

(vi) T este semicontinuu superior, $\hat{T} : (P_{cp}(X), H) \to (P_{cp}(X), H), \hat{T}(Y) := \bigcup_{x\in Y} T(x)$ este o φ-contracţie de mulţime şi atunci $F_{\hat{T}} = \{A_T^*\}$;

(vii) $T^n(x) \xrightarrow{H} A_T^*$ când $n \to +\infty$, pentru orice $x \in X$;

(viii) $F_T \subset A_T^*$ şi F_T este compactă;

(ix) $A_T^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} T^n(x)$, pentru orice $x \in F_T$.

Observaţia 2.1.1 *Pentru alte rezultate legate de (vi) şi (vii)-(ix) vezi şi Andres-Górniewicz [7] şi Chifu şi Petruşel [24].*

Al doilea rezultat pentru φ-contracţii multivoce este următoarea teoremă:

Teorema 2.1.4 *(V.L.Lazăr, [73]) Fie (X, d) un spaţiu metric complet şi fie $T : X \to P_{cl}(X)$ o φ-contracţie multivocă cu $SF_T \neq \emptyset$. Atunci, avem următoarele* *relaţii:*

(x) $F_T = SF_T = \{x^*\}$ *(vezi A. Sîntămărian [135]);*

(xi) Dacă în plus $T(x)$ *este compact pentru fiecare* $x \in X$*, atunci* $F_{T^n} = SF_{T^n} = \{x^*\}$ *pentru* $n \in \mathbb{N}^*$*;*

(xii) Dacă în plus $T(x)$ *este compact pentru fiecare* $x \in X$*, atunci* $T^n(x) \xrightarrow{H} \{x^*\}$ *când* $n \to +\infty$*, pentru fiecare* $x \in X$*;*

(xiii) Fie $S : X \to P_{cl}(X)$ *un operator multivoc şi fie* $\eta > 0$ *astfel încât* $F_S \neq \emptyset$ *şi* $H(S(x), T(x)) \leq \eta$*, pentru fiecare* $x \in X$*. Atunci,* $H(F_S, F_T) \leq \beta(\eta)$*, unde* $\beta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *este dată de* $\beta(\eta) := \sup\{t \in \mathbb{R}_+ |\ t - \varphi(t) \leq \eta\}$*;*

(xiv) Fie $T_n : X \to P_{cl}(X), n \in \mathbb{N}$ *un şir de operatori multivoci astfel încât* $F_{T_n} \neq \emptyset$ *pentru fiecare* $n \in \mathbb{N}$ *şi* $T_n(x) \xrightarrow{H} T(x)$ *când* $n \to +\infty$*, pentru fiecare* $x \in X$*. Atunci,* $F_{T_n} \xrightarrow{H} F_T$ *când* $n \to +\infty$*.*

(xv) (Problema de punct fix este corect pusă în raport cu D*) Dacă* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un şir din* X *astfel încât* $D(x_n, T(x_n)) \to 0$ *când* $n \to \infty$*, atunci* $x_n \xrightarrow{d} x^*$ *când* $n \to \infty$*;*

(xvi) (Problema de punct fix este corect pusă în raport cu H*) Dacă* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un şir din* X *astfel încât* $H(x_n, T(x_n)) \to 0$ *când* $n \to \infty$*, atunci* $x_n \xrightarrow{d} x^*$ *când* $n \to \infty$*;*

(xvii) (Proprietatea de umbrire la limită a operatorului multivoc) Presupunem în plus că φ *este o funcţie subaditivă. Dacă* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un şir din* X *astfel încât* $D(y_{n+1}, T(y_n)) \to 0$ *când* $n \to \infty$*, atunci există un şir de aproximaţii succesive pentru operatorul* T $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$*, astfel încât* $d(x_n, y_n) \to 0$ *când* $n \to \infty$*.*

Tot un rezultat pentru φ-contracţii multivoce este şi următoarea teoremă:

Teorema 2.1.5 *(V.L. Lazăr, [73]) Fie* (X, d) *un spaţiu metric complet şi* $T : X \to P_{cp}(X)$ *o* φ*-contracţie multivocă astfel încât* $T(F_T) = F_T$*. Atunci au loc:*

(xviii) $T^n(x) \xrightarrow{H} F_T$ *când* $n \to +\infty$*, pentru fiecare* $x \in X$*;*

(xix) $T(x) = F_T$*, pentru fiecare* $x \in F_T$*;*

(xx) Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ *este un şir astfel încât* $x_n \xrightarrow{d} x^* \in F_T$ *când* $n \to \infty$, *atunci* $T(x_n) \xrightarrow{H} F_T$ *când* $n \to +\infty$.

În cazul spaţiilor metrice compacte, avem următorul rezultat:

Teorema 2.1.6 *(V.L. Lazăr, [73]) Fie* (X, d) *un spaţiu metric compact şi* $T : X \to P_{cl}(X)$ *o* φ*-contracţie multivocă. Atunci avem:*

(xxi) (Problema de punct fix este corect pusă în raport cu D în sens generalizat) Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un şir din* X *astfel încât* $D(x_n, T(x_n)) \to 0$ *când* $n \to \infty$, *atunci există un subşir* $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ *al şirului* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *a.î.* $x_{n_i} \xrightarrow{d} x^* \in F_T$ *când* $i \to \infty$.

Observaţia 2.1.2 *Pentru cazul particular* $\varphi(t) = at$ *(cu* $a \in [0, 1[$*), pentru fiecare* $t \in \mathbb{R}_+$ *vezi Petruşel şi Rus [102].*

Vom reaminti un alt concept important al teoriei punctelor fixe stricte pentru operatorii multivoci.

Definiţia 2.1.3 *(Petruşel-Rus [103], [102]) Fie* (X, d) *un spaţiu metric. Atunci* $T : X \to P(X)$ *se numeşte operator Picard multivoc dacă:*

(i) $(SF)_T = F_T = \{x^*\}$;

(ii) $T^n(x) \xrightarrow{H_d} \{x^*\}$ *când* $n \to \infty$, *oricare ar fi* $x \in X$.

Problema este să dăm condiţii suficiente pentru ca un operator T să fie un operator Picard multivoc.

Teorema 2.1.7 *(V.L. Lazăr) Fie* (X, d) *un spaţiu metric complet şi fie* $T : X \to P_{cp}(X)$ *o* φ*-contracţie multivocă pentru care* $(SF)_T \neq \emptyset$. *Atunci au loc relaţiile:*

(i) $F_T = (SF)_T = \{x^*\}$;

ii) $T^n(x) \xrightarrow{H_d} \{x^*\}$ *când* $n \to +\infty$, *pentru fiecare* $x \in X$,

adică, T *este un operator Picard multivoc.*

Un alt rezultat de acest tip este următoarea teoremă, teoremă ce foloseşte aşa numitele (δ, φ)-contractţi multivoce.

Definiţia 2.1.4 *Fie (X, d) un spaţiu metric. Atunci, prin definiţie, $T : X \to P_b(X)$ se numeşte (δ, φ)-contracţie tare multivocă dacă $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ este o funcţie de comparaţie şi*

$$\delta(T(Y)) \leq \varphi(\delta(Y)), \text{ pentru fiecare } Y \in P_b(X),$$

Y fiind o mulţime formată din cel puţin două elemente.

Teorema 2.1.8 *(V.L. Lazăr) Fie (X, d) un spaţiu metric complet şi $T : X \to P(X)$ o (δ, φ)-contracţie tare multivocă astfel încât $T(X) \in P_b(X)$. Atunci T este un operator Picard multivoc.*

Reamintim că un operator multivoc ce invariază domeniul de definiţie $T : X \to P_{cl}(X)$ pe un spaţiu metric (X, d) se numeşte (ϵ, φ)-contracţie dacă $\epsilon > 0$, $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ este o funcţie de comparaţie strictă şi

$$x, y \in X \text{ cu } x \neq y \text{ şi } d(x, y) < \epsilon \text{ implică } H(T(x), T(y)) \leq \varphi(d(x, y)).$$

În cazul puctelor periodice avem următoarele rezultate:

Teorema 2.1.9 *(V.L. Lazăr, [73]) Fie (X, d) un spaţiu metric şi $T : X \to P_{cp}(X)$ o (ϵ, φ)-contracţie continuă. Atunci, avem următoarele relaţii:*

(i) $\hat{T}^m : P_{cp}(X) \to P_{cp}(X)$ este o (ϵ, φ)-contracţie continuă, pentru fiecare $m \in \mathbb{N}^*$;

(ii) dacă în plus, există $A \in P_{cp}(X)$ astfel încât un subşir $(\hat{T}^{m_i}(A))_{i\in\mathbb{N}^*}$ al şirului $(\hat{T}^m(A))_{m\in\mathbb{N}^*}$ converge în $(P_{cp}(X), H)$ la un $X^* \in P_{cp}(X)$, atunci există un punct periodic $x^* \in X^*$ pentru T.

Ca o consecinţă, obţinem următoarea teoremă de existenţă pentru punctele periodice ale unui operator multivoc:

Teorema 2.1.10 *(V.L. Lazăr, [73]) Fie (X, d) un spaţiu metric compact şi $T : X \to P_{cp}(X)$ o (ϵ, φ)-contracţie continuă. Atunci, există un punct periodic $x^* \in X$ al operatorului T.*

Observaţia 2.1.3 *În lucrările [111, 112] găsim rezultate de acest tip pentru operatori multivoci de tip Reich.*

2.1.2 Teoreme de punct fix pentru operatori multivoci ce nu invariază domeniul de definiţie pe mulţimi înzestrate cu două metrici

Fie (X, d) un spaţiu metric, $x_0 \in X$ şi $r > 0$. Notăm cu $B(x_0; r) := \{x \in X | d(x_0, x) < r\}$ bila deschisă cu centru x_0 şi rază r şi prin $\widetilde{B}(x_0; r) := \{x \in X | d(x_0, x) \leq r\}$ bila închisă cu centru x_0 şi rază r. Vom nota cu $\bar{B}^d(x_0, r)$ închiderea bilei $B(x_0, r)$ în spaţiul (X, d).

De asemenea, vom nota cu $I(f) := \{Y \subseteq X | f(Y) \subset Y\}$ mulţimea submulţimilor invariante pentru operatorul f, prin $I_b(f) := \{Y \in I(f) | Y \text{ este mărginită}\}$ mulţimea submulţimilor invariante mărginite pentru f şi prin $I_{b,cl}(f) := \{Y \in I_b(f) | \text{ Y este închisă}\}$.

Spunem că operatorul $f : Y \subseteq X \to X$ este o a-contracţie dacă $a \in [0, 1[$ şi $d(f(x), f(y)) \leq ad(x, y)$, $\forall x, y \in Y$.

Următorul rezultat local de punct fix se obţine ca şi consecinţă a principiului de punct fix a lui Banach-Caccioppoli.

Teorema 2.1.11 *(Granas-Dugundji, [40]) Fie (X, d) un spaţiu metric complet, $x_0 \in X$ şi $r > 0$. Dacă $f : B(x_0; r) \to X$ este o a-contracţie şi $d(x_0, f(x_0)) < (1 - a)r$, atunci f are un punct fix unic.*

În condiţiile în care $f : \widetilde{B}(x_0; r) \to X$ este o a-contracţie astfel încât $d(x_0, f(x_0)) \leq (1 - a)r$, atunci $\widetilde{B}(x_0; r) \in I_{b,cl}(f)$ şi rezultă din nou concluzia: f are un punct fix unic în bila închisă $\widetilde{B}(x_0; r)$.

Fie E un spaţiu Banach şi $Y \subset E$. Fiind dat un operator $f : Y \to E$, operatorul $g : Y \to E$ definit prin relaţia $g(x) := x - f(x)$ se numeşte câmp asociat cu funcţia f. Un operator $f : Y \to E$ se numeşte deschis dacă pentru orice submulţime U în Y mulţimea $f(U)$ este de asemenea deschisă în E.

Ca o consecinţă a teoremei anterioare, avem principiul de invarianţă a domeniului de definiţie pentru câmpuri de tip contracţii.

Teorema 2.1.12 *(Granas-Dugundji, [40]) Fie E un spaţiu Banach şi Y o submulţime deschisă a lui E. Considerăm $f : U \to E$ o a-contracţie. Fie $g : U \to E$, $g(x) := x - f(x)$, câmpul asociat. Atunci:*

(a) $g : U \to E$ este un operator deschis;

(b) $g : U \to g(U)$ este omeomorfism. În particular, dacă $f : E \to E$, atunci câmpul asociat g este un omeomorfism de la mulţimea E la ea însăşi.

În continuare reamintim două rezultate importante:

Lema 2.1.1 *Fie (X, d) un spaţiu metric. Atunci operatorul $D_d(\cdot, Y) : (X, d) \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto D_d(x, Y)$, (unde $Y \in P(X)$) este neexpansiv şi deci continuu.*

Lema 2.1.2 *Fie X un spaţiu normat. Atunci, pentru orice $x, y \in X$ şi $A \in P_{cl}(X)$ avem: $D(x, A + y) = D(y, x - A)$.*

Reamintim de asemenea faptul că, dacă Y este o submulţime în spaţiului metric X şi $\varepsilon > 0$, atunci vom nota cu $V^0(Y; \varepsilon)$ ε–vecinătatea deschisă a lui Y, adică, $V^0(Y; \varepsilon) = \{x \in X |\ D(x, Y) < \varepsilon\}$.

Următorul rezultat este o teoremă locală de tip Węgrzyk pe o mulţime înzestrată cu două metrici.

Teorema 2.1.13 *(T.A. Lazăr, V.L. Lazăr, [68]) Fie $X \neq \emptyset$ şi d, d' două metrici definite pe X. Fie $x_0 \in X$, şi $r > 0$. Presupunem că au loc următoarele condiţii:*

(i) (X, d) este un spaţiu metric complet;

(ii) $\exists\ c > 0$ *a.î.* $d(x,y) \leq cd'(x,y)$, $\forall\ x,y \in X$*;*

(iii) $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *este o funcţie de comparaţie strictă a.î. funcţia* $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\psi(t) := t - \varphi(t)$ *este strict crescătoare şi continuă cu*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n(\psi(r)) \leq \varphi(r).$$

Fie $T : \bar{B}^d_{d'}(x_0;r) \to P_{cl}(X)$ *o* φ*-contracţie multivocă în raport cu* d' *a.î.*

$$D_{d'}(x_0, T(x_0)) < r - \varphi(r).$$

Presupunem că operatorul $T : \bar{B}^d_{d'}(x_0;r) \to P((X,d))$ *este închis.*
Atunci $F_T \neq \emptyset$*.*

Ca şi consecinţă avem următorul rezultat pe o bilă deschisă.

Teorema 2.1.14 *(T.A. Lazăr, V.L. Lazăr, [68]) Fie* $X \neq \emptyset$ *şi* d, d' *două metrici pe* X, $x_0 \in X$, $r > 0$. *Presupunem că*

(i) (X,d) *spaţiu metric complet;*

(ii) $\exists\ c > 0$ *a.î.* $d(x,y) \leq cd'(x,y)$, $\forall x,y \in X$*;*

(iii) $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *o funcţie de comparaţie strictă a.î. funcţia* $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\psi(t) := t - \varphi(t)$ *este strict crescătoare şi continuă în* r*, cu*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n(\psi(s)) \leq \varphi(s)\ \forall s \in]0,r[.$$

Fie $T : B_{d'}(x_0;r) \to P_{cl}(X)$ *o* φ*-contracţie multivocă în raport cu metrica* d' *a.î.* $D_{d'}(x_0, T(x_0)) < r - \varphi(r)$.

Atunci $F_T \neq \emptyset$*.*

Folosind acestă teoremă, putem obţine un principiu pentru operatori deschişi definiţi pe spaţii Banach.

Teorema 2.1.15 *(T.A. Lazăr, V.L. Lazăr, [68]) Fie X un spaţiu liniar şi $\|\cdot\|, \|\cdot\|'$ două norme definite pe X. Notăm cu d, d' metricile induse de normele $\|\cdot\|, \|\cdot\|'$. Presupunem că spaţiul (X, d) este complet. Fie U o mulţime deschisă în raport cu norma $\|\cdot\|'$ şi fie $T : U \to P_{cl}(X)$ un operator multivoc.*

Presupunem că:

(i) există $c > 0$ astfel încât $d(x, y) \leq cd'(x, y)$, oricare ar fi $x, y \in X$;

(ii) $T : U \to P_{cl}(X)$ este o φ-contracţie în raport cu norma $\|\cdot\|'$, adică

$$H_{d'}(T(x_1), T(x_2)) \leq \varphi(d'(x_1, x_2)) \ \forall\ x_1, x_2 \in U;$$

(iii) $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ este o funcţie de comparaţie strictă, astfel încât funcţia $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\psi(t) := t - \varphi(t)$ este strict crescătoare şi continuă pe $\mathbb{R}_+$ şi există $r_0 > 0$ a.î. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi^n(\psi(s)) \leq \varphi(s)$, $\forall s \in]0, r_0[$.

Atunci, câmpul multivoc $G : U \to P(X), G(x) = x - T(x)$ este un operator deschis în topologia indusă de norma $\|\cdot\|'$.

Vom stabili în cele ce urmează, un rezultat de punct fix pentru operatori multivoci de tip Caristi, definiţi pe o bilă înzestrată cu două metrici..

Teorema 2.1.16 *(T.A. Lazăr, V.L. Lazăr, [68]) Fie X o mulţime nevidă, şi d, d' două metrici definite pe X, $x_0 \in X$ şi $r > 0$. Presupunem că:*

(i) (X, d) este un spaţiu metric complet;

(ii) $\exists\ c > 0$ a.î. $d(x, y) \leq cd'(x, y)$, $\forall\ x, y \in X$;

Fie $\varphi : X \to \mathbb{R}_+$ o funcţie ce satisface relaţia $\varphi(x_0) < r$.

Considerăm $T : \bar{B}^d_{d'}(x_0; r) \to P_{cl}(X)$ un operator multivoc ce satisface condiţia: $\forall\ x \in \bar{B}^d_{d'}(x_0; r)$, $\exists y \in T(x)$ a.î. $d'(x, y) \leq \varphi(x) - \varphi(y)$.

Dacă T este un operator închis în raport cu metrica d (adică, $Graph(T)$ este o mulţime închisă în raport cu topologia produs pe $X \times X$ generat de d), atunci $F_T \neq \emptyset$.

2.1.3 Asupra esenţialităţii operatorilor de tip Mönch

În acest paragraf, sunt extinse câteva rezultate date de R.P. Agarwal şi D. O'Regan [1], cu privire la operatori esenţiali în sens Mönch, la operatori ce satisfac anumite condiţii de compactitate introduse de D. O'Regan şi R. Precup [93].

Pentru început prezentăm teorema de punct fix a lui Mönch [87], teoremă ce este deosebit de utilă în demonstrarea existenţei unor soluţii pentru problemele la limită neliniare în spaţii Banach [42].

Teorema 2.1.17 *Fie X un spaţiu Banach , D o submulţime închisă şi convexă a lui X şi $x_0 \in D$. Fie $f : D \to D$ un operator continuu ce satisface proprietatea:*

$$\left(\left. \begin{array}{l} C \subset D, C - \textit{numărabilă} \\ \overline{C} = \overline{co}(\{x_0\} \cup f(C)) \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{C} \textit{ este compactă} \right) \tag{2.1.1}$$

atunci f are un punct fix.

Următorul rezultat este o teoremă de tip Leray-Schauder:

Teorema 2.1.18 *Fie X un spaţiu Banach, U o submulţime deschisă a lui X şi $x_0 \in U$. Fie $f : \overline{U} \to X$ un operator continuu ce satisface proprietatea:*

$$\left(\left. \begin{array}{l} C \subset \overline{U}, C - \textit{numărabilă} \\ \overline{C} = \overline{co}(\{x_0\} \cup f(C)) \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{C} \textit{ este compactă} \right) \tag{2.1.2}$$

Dacă $x \neq (1 - \lambda)x_0 + \lambda f(x)$, pentru fiecare $x \in \partial U$ şi $\lambda \in (0, 1)$, atunci f are un punct fix în $\overline{U}$.

Observaţia 2.1.4 *Condiţiile 2.1.1 şi 2.1.2 pot fi înlocuite cu următoarele condiţii mai generale:*

$$\left(\left. \begin{array}{l} M \subset D \\ M = co(\{x_0\} \cup f(M)) \\ \overline{M} = \overline{C}, C \subset M, C - \textit{numărabilă} \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{M} \textit{ este compactă} \right) \tag{2.1.3}$$

şi respectiv

$$\left(\left. \begin{array}{l} M \subset \overline{U} \\ M = co(\{x_0\} \cup f(M)) \\ \overline{M} = \overline{C}, C \subset M, C - \textit{numărabilă} \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{M} \textit{ este compactă} \right). \tag{2.1.4}$$

Condiţiile (2.1.3) şi (2.1.4) sunt utile pentru a generaliza teorema de punct fix a lui Mönch în cazul operatorilor multivoci (see[93]).

Definiţia 2.1.5 *Notăm cu* $M(\overline{U}, X)$ *mulţimea tuturor operatorilor continui* $f : \overline{U} \to X$*, care satisfac condiţia 2.1.4 cu* $x_0 = 0$*.*

Definiţia 2.1.6 *Spunem că* $f \in M_{\partial U}(\overline{U}, X)$ *dacă* $f \in M(\overline{U}, X)$ *şi* $x \neq f(x)$ *pentru* $x \in \partial U$*.*

Definiţia 2.1.7 *Un operator* $f \in M_{\partial U}(\overline{U}, X)$ *este esenţial dacă pentru orice* $g \in M_{\partial U}(\overline{U}, X)$ *cu* $g/_{\partial U} = f/_{\partial U}$ *există* $x \in U$ *cu* $x = g(x)$*.*

Aceste definiţii, corespunzătoare condiţiilor 2.1.2, au fost date de R.P. Agarwal şi D.O'Regan [1].

Primul rezultat arată că operatorul nul este esenţială în $M_{\partial U}(\overline{U}, X)$:

Teorema 2.1.19 *(V.L. Lazăr, [69]) Fie* X *un spaţiu Banach şi fie* U *o submulţime deschisă a lui* X *cu* $0 \in U$*. Atunci operatorul nul este esenţial în* $M_{\partial U}(\overline{U}, X)$*.*

Următorul rezultat este o alternativă neliniară a teoremei de tip Leray-Schauder pentru operatorii de tip Mönch.

Teorema 2.1.20 *(V.L. Lazăr, [69]) Fie* X *un spaţiu Banach şi fie* U *o submulţime deschisă a lui* X *cu* $0 \in U$*. Presupunem că operatorul* $f \in M(\overline{U}, X)$ *satisface* $x \neq \lambda f(x)$ *pentru fiecare* $x \in \partial U$ *şi* $\lambda \in (0, 1]$*. Atunci* f *este esenţial în* $M_{\partial U}(\overline{U}, X)$*. În particular* f *are un punct fix în* U*.*

2.2 Rezultate de stabilitate Ulam-Hyers pentru ecuaţii cu derivate parţiale

Vom prezenta la început câteva noţiuni şi rezultate din teoria operatorilor slab Picard (vezi [118]; [126], pp. 119-126).

Fie (X, d) un spaţiu metric şi $f : X \to X$ un operator. Notăm prin $F_f := \{x \in X \mid f(x) = x\}$, mulţimea punctelor fixe a lui f. Prin definiţie, f este un operator slab Picard dacă şirul aproximaţiilor succesive, $f^n(x)$, converge pentru fiecare $x \in X$ şi limita lui este un punct fix a lui f.

Dacă f este un operator slab Picard atunci definim operatorul $f^\infty : X \to X$ prin formula $f^\infty(x) := \lim_{n\to\infty} f^n(x)$. Este evident faptul că $f^\infty(X) = F_f$.

Dacă f este un operator slab Picard şi $F_f = \{x^*\}$, atunci, prin definiţie, f este un operator Picard. În acest caz f^∞ este constant, $f^\infty(x) = x^*$, $\forall\, x \in X$.

Definiţia 2.2.1 *Fie (X, d) un spaţiu metric şi fie $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ o funcţie crescătoare, continuă în 0 şi $\psi(0) = 0$. Atunci spunem că $f : X \to X$ este un operator ψ-slab Picard dacă este slab Picard şi*

$$d(x, f^\infty(x)) \le \psi(d(x, f(x))), \quad \text{oricare ar fi } x \in X.$$

În cazul în care $\psi(t) = ct$ cu $c > 0$, spunem că f este c-slab Picard.

Prin analogie cu noţiunea de stabilitate Ulam-Hyers din teoria ecuaţiilor funcţionale (vezi [51, 56, 22, 18, 29, 35, 41, 46, 50, 94, 109, 110]), următorul concept a fost introdus de I.A. Rus în [124].

Definiţia 2.2.2 *Fie (X, d) un spaţiu metric şi $f : X \to X$ un operator. Spunem că, ecuaţia de punct fix*

$$x = f(x) \tag{2.2.1}$$

este stabilă Ulam-Hyers în sens generalizat dacă există $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ crescătoare, continuă în 0 şi $\psi(0) = 0$ astfel încât pentru orice $\varepsilon > 0$ şi pentru fiecare soluţie y^* a inecuaţiei

$$d(y, f(y)) \le \varepsilon \tag{2.2.2}$$

există o soluţie x^* a ecuaţiei (2.2.1) astfel încât

$$d(y^*, x^*) \le \psi(\varepsilon).$$

Dacă, în particular, există $c > 0$ astfel încât $\psi(t) := ct$, pentru fiecare $t \in \mathbb{R}_+$, ecuaţia (2.2.1) se numeşte Ulam-Hyers stabilă.

Amintim în continuare două leme pe care le vom utiliza în demonstraţia rezultatelor următoare:

Lema 2.2.1 *(I.A. Rus [124]) Dacă f este un operator ψ-slab Picard, atunci ecuaţia de punct fix (2.2.1) este stabilă Ulam-Hyers în sens generalizat.*

Lema 2.2.2 *(I.A. Rus [124]) Fie (X, d) un spaţiu metric, $f : X \to X$ un operator şi $X = \bigcup_{i\in I} X_i$ o partiţie a lui X astfel încât $f(X_i) \subset X_i$, $\forall\ i \in I$. Dacă ecuaţia (2.2.1) este Ulam-Hyers stabilă în fiecare (X_i, d), $i \in I$, atunci este Ulam-Hyers stabilă în (X, d).*

Vom considera pentru început cazul problemei Dirichlet asociată unei ecuaţii eliptice neliniare. Fie Ω un domeniu mărginit din $\mathbb{R}^n$ cu frontiera $\partial\Omega$ suficient de netedă. Considerăm următoarea problemă:

$$\begin{cases} \Delta u = f(x, u(x)) \\ u_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{2.2.3}$$

unde f este o funcţie continuă pe $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$.

Lema 2.2.3 *În condiţiile de mai sus, problema Dirichlet 2.2.3 este echivalentă cu următoarea ecuaţie integrală:*

$$u(x) = -\int_{\Omega} G(x, s) f(s, u(s)) ds, \tag{2.2.4}$$

unde am notat cu G funcţia Green corespunzătoare operatorului lui Laplace.

Reamintim în cele ce urmează teorema de punct fix Matkowski-Rus:

Teorema 2.2.1 *(J. Matkowski [82], I. A. Rus [125]) Fie (X, d) un spaţiu metric complet şi $f : X \to X$ o φ-contracţie. Atunci $F_f = \{x^*\}$ şi $f^n(x_0) \to x^*$ când $n \to \infty$, oricare ar fi $x_0 \in X$, adică, f este un operator Picard.*

Observaţia 2.2.1 *Dacă în teorema de mai sus, în plus, considerăm că funcţia $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\psi(t) := t - \varphi(t)$ este strict crescătoare şi surjectivă, atunci operatorul f este ψ-slab Picard.*

Primul nostru rezultat este următoarea teoremă de existenţă, unicitate şi stabilitate pentru problema Dirichlet 2.2.3.

Teorema 2.2.2 *(V.L.Lazăr, [74]) Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mărginit astfel încât frontiera sa $\partial\Omega$ este suficient de netedă. Presupunem că:*

(i) $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$;

(ii) există $p \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}_+)$ pentru care $\sup\limits_{x\in\overline{\Omega}} \int\limits_{\Omega} G(x,s)p(s)ds \leq 1$ şi o funcţie de comparaţie $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, astfel încât pentru fiecare $s \in \overline{\Omega}$ şi fiecare $u, v \in \mathbb{R}$ avem

$$|f(s,u) - f(s,v)| \leq p(s)\varphi(|u-v|);$$

Atunci, problema Dirichlet 2.2.3 are o soluţie unică $u^* \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$. Mai mult, dacă funcţia $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\psi(t) := t - \varphi(t)$ este strict crecătoare şi surjectivă, atunci problema Dirichlet 2.2.3 este Ulam-Hyers stabilă în sens generalizat cu funcţia ψ^{-1}, adică, pentru fiecare $\varepsilon > 0$ şi pentru fiecare ε-soluţie y^* a problemei Dirichlet 2.2.3 avem că

$$|u^*(x) - y^*(x)| \leq \psi^{-1}(\varepsilon), \text{ pentru fiecare } x \in \overline{\Omega}.$$

Observaţia 2.2.2 *Teorema 2.2.2 generalizează unele rezultate cunoscute în literatura de specialitate, cum ar fi Teorema 16.2.1 din I.A. Rus [117].*

În continuare vom lua cazul unei probleme Dirichlet pentru ecuaţii cu derivate parţiale cu argument modificat.

Considerăm problema:

$$\begin{cases} \Delta u = f(x, u(g(x))) \\ u_{|\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{2.2.5}$$

unde f este o funcţie continuă pe $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ iar $g \in C(\overline{\Omega}, \overline{\Omega})$.

Teorema 2.2.3 *(V.L.Lazăr, [74]) Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mărginit astfel încât frontiera sa $\partial\Omega$ este suficient de netedă. Presupunem că:*

(i) $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ şi $g \in C(\overline{\Omega}, \overline{\Omega})$;

(ii) există $p \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}_+)$ *pentru care* $\sup\limits_{x\in\overline{\Omega}} \int\limits_{\Omega} G(x,s)p(s)ds \leq 1$ *şi o funcţie de comparaţie* $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$*, astfel încât pentru fiecare* $s \in \overline{\Omega}$ *şi fiecare* $u, v \in \mathbb{R}$ *avem că*

$$|f(s,u) - f(s,v)| \leq p(s)\varphi(|u-v|);$$

Atunci, problema Dirichlet 2.2.5 are o soluţie unică $u^* \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$*. Mai mult, dacă funcţia* $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$*,* $\psi(t) := t - \varphi(t)$ *este strict crescătoare şi surjectivă, atunci problema Dirichlet 2.2.5 este Ulam-Hyers stabilă în sens generalizat cu funcţia* ψ^{-1}*, adică, pentru fiecare* $\varepsilon > 0$ *şi pentru orice* ε*-soluţie* y^* *a problemei Dirichlet 2.2.5 avem*

$$|u^*(x) - y^*(x)| \leq \psi^{-1}(\varepsilon), \text{ oricare ar fi } x \in \overline{\Omega}.$$

2.3 Rezultate de stabilitate Ulam-Hyers pentru incluziuni cu derivate parţiale

Folosind tehnica operatorilor slab Picard, vom prezenta rezultate de existenţă şi stabilitate Ulam-Hyers pentru incluziuni integrale, incluziuni de tip Fredholm şi Volterra şi pentru unele probleme asociate incluziunilor cu derivate parţiale.

Pentru început prezentăm câteva concepte de stabilitate Ulam-Hyers pentru problemele de punct fix asociate operatorilor multivoci.

Definiţia 2.3.1 *(I.A. Rus, [124]) Fie* (X, d) *un spaţiu metric şi* $T : X \to P(X)$ *un operator multivoc. Spunem că incluziunea de punct fix*

$$x \in T(x), \ x \in X \tag{2.3.1}$$

este stabilă Ulam-Hyers în sens generalizat dacă şi numai dacă există funcţia $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *crescătoare, continuă în* 0 *şi* $\psi(0) = 0$ *astfel încât pentru fiecare* $\varepsilon > 0$ *şi pentru orice soluţie* $y^* \in X$ *a inecuaţiei*

$$D_d(y, T(y)) \leq \varepsilon \tag{2.3.2}$$

există o soluţie x^* *a incluziunii de punct fix (2.3.1) astfel încât*

$$d(y^*, x^*) \leq \psi(\varepsilon).$$

Dacă există $c > 0$ *astfel încât* $\psi(t) := ct$, *oricare ar fi* $t \in \mathbb{R}_+$, *atunci spunem că incluziunea de punct fix (2.3.1) este stabilă Ulam-Hyers.*

Următoarea teoremă este un rezultat abstract referitor la stabilitatea Ulam-Hyers a incluziunii de punct fix (2.3.1) pentru operatori multivoci cu valori compacte.

Teorema 2.3.1 *(I.A. Rus, [124]) Fie* (X, d) *un spaţiu metric şi* $T : X \to P_{cp}(X)$ *un operator multivoc* ψ*-slab Picard. Atunci, incluziunea de punct fix (2.3.1) este stabilă Ulam-Hyers în sens generalizat.*

Considerăm pentru început următoarea incluziune integrală de tip Fredholm:

$$x(t) \in \int_a^b K(t, s, x(s))ds + g(t),\ t \in [a, b]. \tag{2.3.3}$$

Rezultatul principal privind stabilitatea incluziunii integrale Fredholm (2.3.3) este următoarea teoremă.

Teorema 2.3.2 *(V.L. Lazăr, [75]) Fie* $K : [a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R}^n \to P_{cl,cv}(\mathbb{R}^n)$ *şi* $g : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *astfel încât:*

(i) există o funcţie integrabilă $M : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ *astfel încât pentru fiecare* $t \in [a, b]$ *şi* $u \in \mathbb{R}^n$ *are loc* $K(t, s, u) \subset M(s)B(0; 1)$, *a.p.t.* $s \in [a, b]$*;*

(ii) pentru fiecare $u \in \mathbb{R}^n$*:* $K(\cdot, \cdot, u) : [a, b] \times [a, b] \to P_{cl,cv}(\mathbb{R}^n)$ *este măsurabilă global;*

(iii) pentru fiecare $(s, u) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n$*:* $K(\cdot, s, u) : [a, b] \to P_{cl,cv}(\mathbb{R}^n)$ *este semicontinuu inferior;*

(iv) există o funcţie continuă $p : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}_+$ *pentru care* $\sup_{t\in[a,b]} \int_a^b p(t, s)ds \leq 1$ *şi o funcţie de comparaţie strictă* $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *astfel încât*

pentru fiecare $(t,s) \in [a,b] \times [a,b]$ *şi fiecare* $u, v \in \mathbb{R}^n$ *avem:*

$$H(K(t,s,u), K(t,s,v)) \leq p(t,s) \cdot \varphi(|u-v|); \tag{2.3.4}$$

(v) g *este continuu.*

Atunci avem următoarele relaţii:

(a) incluziunea integrală (2.3.3) are cel puţin o soluţie, adică există $x^* \in C([a,b], \mathbb{R}^n)$ *care satisface (2.3.3), pentru fiecare* $t \in [a,b]$.

(b) Dacă în plus $\varphi(qt) \leq q\varphi(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}_+$ *(unde* $q > 1$*) şi* $t = 0$ *este un punct de convergenţă uniformă al seriei* $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi^n(t)$, *atunci incluziunea integrală (2.3.3) este stabilă Ulam-Hyers în sens generalizat cu funcţia* ψ *(unde* $\psi(t) := t + s(t)$, *pentru fiecare* $t \in \mathbb{R}_+$ *şi* $s(t) := \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^n(t)$*), i.e., pentru fiecare* $\varepsilon > 0$ *şi pentru orice* ε*-soluţie* y *a incluziunii (2.3.3), adică orice* $y \in C([a,b], \mathbb{R}^n)$ *pentru care există* $u \in C([a,b], \mathbb{R}^n)$ *astfel încât*

$$u(t) \in \int_a^b K(t,s,y(s))ds + g(t),\ t \in [a,b]$$

şi

$$|u(t) - y(t)| \leq \varepsilon,\ \textit{pentru fiecare}\ t \in [a,b]),$$

există o soluţie x^* *a incluziunii integrale (2.3.3) astfel încât*

$$|y(t) - x^*(t)| \leq \psi(\varepsilon),\ \textit{pentru fiecare}\ t \in [a,b].$$

Mai mult, în acest caz are loc dependenţa continuă de date a mulţimii soluţiilor incluziunii integrale (2.3.4).

Al doilea rezultat se referă la incluziunea integrală de tip Volterra:

$$x(t) \in \int_a^t K(t,s,x(s))ds + g(t),\ t \in [a,b]. \tag{2.3.5}$$

Teorema 2.3.3 *(V.L.Lazăr, [75]) Fie* $K : [a,b] \times [a,b] \times \mathbb{R}^n \to P_{cl,cv}(\mathbb{R}^n)$ *şi* $g : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *astfel încât:*

(i) există o funcţie integrabilă $M : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ *astfel încât oricare ar fi* $t \in [a, b]$ *şi* $u \in \mathbb{R}^n$ *avem* $K(t, s, u) \subset M(s)B(0; 1)$, *a.p.t.* $s \in [a, b]$;

(ii) pentru fiecare $u \in \mathbb{R}^n$: $K(\cdot, \cdot, u) : [a, b] \times [a, b] \to P_{cl,cv}(\mathbb{R}^n)$ *este măsurabilă global;*

(iii) pentru fiecare $(s, u) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n$: $K(\cdot, s, u) : [a, b] \to P_{cl,cv}(\mathbb{R}^n)$ *este semicontinuu inferior;*

(iv) există o funcţie continuă $p : [a, b] \to \mathbb{R}^*_+$ *şi o funcţie de comparaţie strictă* $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *cu* $\varphi(\lambda t) \leq \lambda\varphi(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$ *şi* $\lambda \geq 1$, *astfel încât pentru fiecare* $(t, s) \in [a, b] \times [a, b]$ *şi fiecare* $u, v \in \mathbb{R}^n$ *avem:*

$$H(K(t, s, u), K(t, s, v)) \leq p(s) \cdot \varphi(|u - v|); \tag{2.3.6}$$

(v) g *este continuu.*

Atunci au loc relaţiile:

(a) incluziunea integrală (2.3.5) are cel puţin o soluţie, adică, există $x^* \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$ *care satisface (2.3.5) oricare ar fi* $t \in [a, b]$;

(b) Dacă în plus $\varphi(qt) \leq q\varphi(t)$ *oricare ar fi* $t \in \mathbb{R}_+$ *(unde* $q > 1$*) şi* $t = 0$ *este un punct de convergenţă uniformă a seriei* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi^n(t)$, *atunci incluziunea integrală (2.3.3) este stabilă Ulam-Hyers în sens generalizat cu funcţia* ψ *(unde* $\psi(t) := t + s(t)$, *pentru fiecare* $t \in \mathbb{R}_+$ *şi* $s(t) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi^n(t)$*), i.e., oricare ar fi* $\varepsilon > 0$ *şi pentru orice* ε*-soluţie* y *a incluziunii (2.3.5), adică, orice* $y \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$ *pentru care există* $u \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$ *astfel încât*

$$u(t) \in \int_a^t K(t, s, y(s))ds + g(t),\ t \in [a, b]$$

şi

$$|u(t) - y(t)| \leq \varepsilon,\ \text{oricare ar fi } t \in [a, b]),$$

există o soluţie x^* *a incluziunii integrale (2.3.5) astfel încât*

$$|y(t) - x^*(t)| \leq \psi(c\varepsilon),\ \text{oricare ar fi } t \in [a, b] \text{ şi pentru } c > 0.$$

Mai mult, în acest caz are loc dependenţa continuă de date a mulţimii soluţiilor incluziunii integrale (2.3.6).

Considerăm în continuare următoarea problemă Darboux pentru o incluziune diferenţială de ordinul doi:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \in F(x, y, u(x, y)) \\ u(x, 0) = \lambda(x, 0), \; u(0, y) = \lambda(0, y), \end{cases} \tag{2.3.7}$$

unde $F : I_1 \times I_2 \times \mathbb{R}^m \to P_{cl}(\mathbb{R}^m)$ (unde $I_i = [0, T_i]$, $i \in \{1, 2\}$) şi $\lambda(x, y) = \alpha(x) + \beta(y) - \alpha(0)$ (cu α, β funcţii continue pe I_1 respectiv pe I_2 şi $\alpha(0) = \beta(0)$).

Notăm cu $\Pi = I_1 \times I_2$ şi fie $a > 0$. Prin L^1 vom nota spaţiul Banach al funcţiilor măsurabile Lebesgue $\eta : \Pi \to \mathbb{R}^m$, înzestrat cu norma

$$\|\eta\|_1 = \int\int_{\Pi} e^{-a(x+y)} |\eta(x, y)| dx dy.$$

Fie C spaţiul Banach al funcţiilor continue $u : \Pi \to \mathbb{R}^m$, înzestrat cu norma $\|u\|_C = \sup_{(x,y) \in \Pi} |u(x, y)|$ şi fie $\tilde{C}$ subspaţiul liniar a lui C format din toate $\lambda \in C$ astfel încât să existe funcţiile continue $\alpha \in C(I_1, \mathbb{R}^m)$ şi $\beta \in C(I_2, \mathbb{R}^m)$ cu $\alpha(0) = \beta(0)$ care satisfac $\lambda(x, y) = \alpha(x) + \beta(y) - \alpha(0)$, oricare ar fi $x, y \in I_1 \times I_2$. Evident, $\tilde{C}$ cu norma definită pe C este un spaţiu Banach separabil.

Prin definiţie, problema Darboux (2.3.7) este Ulam-Hyers stabilă dacă pentru fiecare $\varepsilon > 0$ şi pentru orice ε-soluţe w a problemei (2.3.7), există o soluţie u^* a (2.3.7) astfel încât

$$|w(x, y) - u^*(x, y)| \leq c\varepsilon, \text{ oricare ar fi } (x, y) \in \Pi \text{ şi pentru } c > 0.$$

Următoarea teoremă este un rezultat de existenţă şi stabilitate Ulam-Hyers.

Teorema 2.3.4 *(V.L. Lazăr, [75]) Considerăm problema Darboux (2.3.7) şi presupunem că sunt îndeplinite condiţiile de mai sus. În plus, presupunem că au loc şi următoarele relaţii:*

(i) pentru fiecare $u \in \mathbb{R}^m$, $F(\cdot, \cdot, u)$ *este măsurabilă;*

(ii) există $k > 0$ *astfel încât a.p.t.* $(x, y) \in I_1 \times I_2$ *multifuncţia* $F(x, y, \cdot)$ *este k-Lipschitz;*

(iii) $a > \sqrt{k}$.

Atunci, problema Darboux (2.3.7) are cel puţin o soluţie şi este Ulam-Hyers stabilă.

Capitolul 3

Modelul lui Heston

Scopul acestui capitol este acela de a prezenta câteva rezultate privitoare la problema evaluării opţiunilor în cazul modelului cu volatilitate stohastică dat de S.L. Heston în 1993 (vezi [44]).

3.1 O soluţie "closed-form" pentru opţiunile call digitale în modelul lui Heston

Scopul primei secţiuni a acestui capitol este acela de a analiza problema evaluării unei opţiuni digitale în cazul modelului cu volatilitate stohastică al lui Heston. În acest model ecuaţia de dinamică a volatilităţii este dată de un proces de tip mean reverting square root, proces stohastic introdus în literatura economică de către Cox, Ingersoll şi Ross în 1985 (vezi [26]). Vom prezenta o soluţie analitică pentru acest tip de opţiuni, bazându-ne pe lucrarea originală a lui S. Heston, [44] .

În cazul modelului cu volatilitate stohastică propus de Heston se presupune că ecuaţiile de dinamică a cursului activului suport şi a volatilităţii acestuia sunt date de:

$$dS(t) = S(t)[rdt + \sqrt{v(t)}dW_1(t)] \tag{3.1.1}$$

unde cu S notăm preţul activului suport, t momentul curent (la emiterea opţiunii t=0), r driftul (rata de rentabilitate a activului), $W_1(t)$ este un proces Wiener iar v

reprezintă volatilitatea activului suport, volatilitate ce urmează procesul:

$$dv(t) = k(\theta - v(t))dt + \xi\sqrt{v(t)}dW_2(t), \tag{3.1.2}$$

unde ξ reprezintă volatilitatea volatilităţii iar $W_2(t)$ este un al doilea proces Wiener, proces ce este corelat cu $W_1(t)$:

$$\mathbf{Cov}[dW_1(t), dW_2(t)] = \rho dt. \tag{3.1.3}$$

Pe de altă parte, preţul de piaţă al riscului este dat de relaţia:

$$\lambda(S, v, t) = \lambda v \tag{3.1.4}$$

Problema evaluării unei opţiuni, în cazul modelului lui Heston(3.1.1)-(3.1.3), se reduce la rezolvarea următoarei ecuaţii cu derivate parţiale:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} &+ \frac{1}{2}\, v\, S^2\, \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\, \xi\, v\, S\, \frac{\partial^2 V}{\partial S\, \partial v} + \frac{1}{2}\, \xi^2\, v\, \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \\ &+ r\, S\, \frac{\partial V}{\partial S} + [\, k\, (\theta - v\,) - \lambda\, v\,]\, \frac{\partial V}{\partial v} - r\, V = 0\,. \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

În cele ce urmează vom rezolva ecuţia de evaluare a opţiunii (3.1.5) la care ataşăm condiţia finală corespunzătoare unei opţiuni call digitale, adică funcţia de payoff care este de fapt funcţia Heaviside:

$$DC(S, v, T) = \mathcal{H}(S - K) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } S \geq K \\ 0 & \text{dacă } S < K \end{cases} \tag{3.1.6}$$

Reamintim faptul că, pentru opţiunile call digitale, soluţia ecuaţiei Black-Scholes de evaluare a opţiunilor, în cazul volatilităţii constante este:

$$DC(S, t) = e^{-r(T-t)}N(d_2) \tag{3.1.7}$$

unde

$$d_2 = \frac{log(S/K) + \left(r - \frac{1}{2}v^2\right)(T - t)}{v\sqrt{T - t}} \tag{3.1.8}$$

iar $N(x)$ este probabilitatea cumulată pentru distribuţia normală standard.

Făcând schimbarea de variabilă $x = \ln[S]$ $(U(x, v, t) = V(S, v, t))$, ecuaţia (3.1.5) se transformă în:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2}\, \xi^2\, v\, \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} + \rho\, \xi\, v\, \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial v} + \frac{1}{2}\, v\, \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \left(r - \frac{1}{2}\, v\right) \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$+ \ [k \ (\theta \ - \ v) \ - \ v \ \lambda] \ \frac{\partial U}{\partial v} \ - \ r \ U \ = \ 0 \ . \tag{3.1.9}$$

Presupunem că soluţia acestei ecuaţii este asemănătoare cu cea a ecuaţiei Black-Scholes, adică de forma (3.1.7):

$$DC(S, \ v, \ t) \ = \ e^{-r \ \tau} \ P \tag{3.1.10}$$

unde probabilitatea P, corespunzătoare lui $N(d_2)$ din cazul volatilităţii constante, este ceea ce trebuie să determinăm. Defapt, P este probabilitatea condiţionată ca opţiunea să fie "in-the-money" la maturitate (see [44]):

$$P(x, v, T; ln[K]) = Pr[x(T) \geq ln[K] \ / \ x(t) = x, v(t) = v]. \tag{3.1.11}$$

Dacă înlocuim valoarea presupusă pentrur $DC(S, \ v, \ t)$ În ecuaţia de evaluare (3.1.9) obţinem:

$$\frac{\partial P}{\partial t} \ + \ \frac{1}{2} \ \xi^2 \ v \ \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} \ + \ \rho \ \xi \ v \ \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial v} \ + \ \frac{1}{2} \ v \ \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \ + \ \left(r \ - \ \frac{1}{2} \ v \right) \ \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$+ \ [k \ (\theta \ - \ v) \ - \ v \ \lambda] \ \frac{\partial P}{\partial v} \ = \ 0 \tag{3.1.12}$$

la care ataşăm condiţia finală:

$$P(x, \ v, \ T; \ ln[K]) \ = \ 1_{\{x \ \geq \ ln[K]\}} \ . \tag{3.1.13}$$

Rezultatul următor ne arată că funcţia caracteristică asociată probabilităţii P verifică acelaşi ecuaţie cu derivate parţiale difereniale (3.1.12).

Propoziţia 3.1.1 *(S. Heston, [44]) Presupunem că avem date următoarele două procese:*

$$dx(t) \ = \ \left(r \ - \ \frac{1}{2} \ v(t) \right) \ dt \ + \ \sqrt{v(t)} \ dW_1(t) \tag{3.1.14}$$

$$dv(t) \ = \ [k \ (\theta \ - \ v(t)) \ - \ \lambda \ v(t)] \ dt \ + \ \xi \ \sqrt{v(t)} \ dW_2(t) \tag{3.1.15}$$

cu

$$cov[dW_1(t), \ dW_2(t)] \ = \ \rho \ dt \tag{3.1.16}$$

şi o funcţie de două ori diferenţiabilă

$$f(x(t), \ v(t), \ t) \ = \ E[g(x(T), \ v(T)) \ / \ x(t) \ = \ x, \ v(t) \ = \ v]. \tag{3.1.17}$$

Atunci funcţia f satisface ecuaţia cu derivate parţiale:

$$\frac{1}{2}\,\xi^2\,v\,\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\;+\;\rho\,\xi\,v\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial v}\;+\;\frac{1}{2}\,v\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\;+ \tag{3.1.18}$$
$$\left(r\;-\;\frac{1}{2}\,v\right)\frac{\partial f}{\partial x}\;+\;[k\;(\theta\;-\;v)\;-\;v\;\lambda]\,\frac{\partial f}{\partial v}\;+\;\frac{\partial f}{\partial t}\;=\;0\;.$$

Observaţia 3.1.1 *(S. Heston, [44]) Ataşăm ecuaţiei (3.1.17) condiţia finală*

$$f(x,\;v,\;T)\;=\;g(x,\;v) \tag{3.1.19}$$

şi alegând $g(x\;,\;v)\;=\;e^{i\varphi x}$ *soluţia este funcţia caracteristică.*

Pentru a rezolva ecuaţia cu derivate parţiale (3.1.18) cu condiţia de mai sus, inversăm variabila timp: $\tau\;=\;T\;-\;t$, ceea ce ne conduce la ecuaţia:

$$\frac{1}{2}\,\xi^2\,v\,\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\;+\;\rho\,\xi\,v\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial v}\;+\;\frac{1}{2}\,v\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\;+$$
$$\left(r\;-\;\frac{1}{2}\,v\right)\frac{\partial f}{\partial x}\;+\;[k\;(\theta\;-\;v)\;-\;v\;\lambda]\,\frac{\partial f}{\partial v}\;-\;\frac{\partial f}{\partial t}\;=\;0 \tag{3.1.20}$$

cu următoarea condiţie iniţială:

$$f(x,\;v,\;0)\;=\;e^{i\varphi x} \tag{3.1.21}$$

Teorema 3.1.1 *(L.V.Lazăr, [70]) Problema formată din ecuaţia (3.1.20) şi condiţia iniţială (3.1.21) are următoarea soluţie:*

$$f(x\;,\;v\;,\;\tau)\;=\;e^{C(\tau)\;+\;D(\tau)\;v\;+\;i\varphi x}, \tag{3.1.22}$$

unde

$$C(\tau) = ri\varphi\tau + \frac{k\theta}{\xi^2}\left[(k+\lambda+d-\rho\xi\varphi i)\tau - 2\ln\left(\frac{1-ge^{d\tau}}{1-e^{d\tau}}\right)\right] \tag{3.1.23}$$

şi

$$D(\tau)\;=\;\frac{k\;+\;\lambda\;+\;d\;-\;\rho\;\xi\;\varphi\;i}{\xi^2}\;\left[\frac{1\;-\;e^{d\tau}}{1\;-\;g\;e^{d\tau}}\right] \tag{3.1.24}$$

cu

$$d\;=\;\sqrt{(\rho\;\xi\;\varphi\;i\;-\;k\;-\;\lambda)^2\;-\;\xi^2\;(-\;\varphi^2\;-\;i\;\varphi)} \tag{3.1.25}$$

$$g\;=\;\frac{\rho\;\xi\;\varphi\;i\;-\;k\;-\;\lambda\;-\;d}{\rho\;\xi\;\varphi\;i\;-\;k\;-\;\lambda\;+\;d} \tag{3.1.26}$$

Teorema următoare ne dă soluţia "closed-form", pentru opţiunile call digitale în cazul modelului lui Heston:

Teorema 3.1.2 *(V.L. Lazăr, [70]) Considerăm o opţiune call digitală în modelul lui Heston, cu preţul de exerciţiu K şi perioada până la scadenţă egală cu τ. Atunci valoarea curentă a opţiunii este dată de formula:*

$$DC(S\ ,\ v\ ,\ t)\ =\ e^{-r\ \tau}\ P$$

unde funcţia de probabilitate, P este:

$$P(x,\ v,\ t;\ \ln K)\ =\ \frac{1}{2}\ +\ \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mathcal{R}e\left[\frac{e^{-i\varphi \ln K}\ f(x,\ v,\ \tau,\ \varphi)}{i\ \varphi}\right]\ d\varphi$$

iar funcţia caracteristică:

$$f(x,\ v,\ \tau)\ =\ e^{C(\tau)\ +\ D(\tau)\ v\ +\ i\varphi x}$$

unde $C(\tau)$ şi $D(\tau)$ sunt date de (3.1.23) respectiv (3.1.24).

3.2 Metode numerice pentru opţiuni put europene

În această secţiune folosim metodele diferenţelor finite şi a elementului finit pentru a rezolva numeric ecuaţia de evaluare a opţiunilor put de tip european pe valută în cazul modelului lui Heston.

În cazul opţiunilor pe valută driftul r este egal cu diferenţa dintre rata dobânzii interne şi rata dobânzii externe $r_d - r_f$. J. Hakala şi U. Wystup [43] au arătat că în cazul opţiunilor pe valută, valoarea opţiunii V, pentru modelul lui Heston, satisface următoarea ecuaţie cu derivate parţiale:

$$\frac{\partial V}{\partial t}\ +\ \frac{1}{2}\ v\ S^2\ \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\ +\ \rho\ \xi\ v\ S\ \frac{\partial^2 V}{\partial S\ \partial v}\ +\ \frac{1}{2}\ \xi^2\ v\ \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \tag{3.2.1}$$
$$+\ (r_d - r_f)\ S\ \frac{\partial V}{\partial S}\ +\ [\ k\ (\theta\ -\ v\ )\ -\lambda\ v\ ]\ \frac{\partial V}{\partial v}\ -\ r_d\ V\ =\ 0\ .$$

O opţiune put de tip european cu preţul de exerciţiu K şi scadenţa T satisface ecuaţia (3.2.1) şi următoarele condiţii pe frontieră:

$$\begin{aligned}
&V(S,v,T) = max(0, K-S) \\
&V(0,v,t) = Ke^{-r_d\tau} \\
&\tfrac{\partial V}{\partial S}(\infty,v,t) = 0 \\
&(r_d-r_f)S\tfrac{\partial V}{\partial S}(S,0,t) + k\theta\tfrac{\partial V}{\partial S}(S,0,t) + \tfrac{\partial V}{\partial t}(S,0,t) - r_dV(S,0,t) = 0 \\
&V(S,\infty,t) = Ke^{-r_d\tau}
\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

unde $\tau = T - t$ reprezintă perioada până la scadenţă.

La fel ca în secţiunea anterioară, facem substiutţia $x = ln\frac{S}{K}$ şi deci $V(S,v,t) = w(ln\frac{S}{K}, v, t)$.

Cu această nouă variabilă ecuaţia (3.2.1) devine:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial t} &+ \frac{1}{2}\xi^2 v\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + \rho\xi v\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial v} + \frac{1}{2}v\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
&+ [k(\theta - v) - \lambda v]\frac{\partial w}{\partial v} + (r_d - r_f - \frac{1}{2}v)\frac{\partial w}{\partial x} - r_d w = 0,
\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

oricare ar fi $(x,v,t) \in \Omega_\infty \times [0,T)$ cu $\Omega_\infty = (-\infty,\infty)\times[0,\infty)$,

iar condiţia finală este

$$w(x,v,T) = g(Ke^x), \tag{3.2.4}$$

unde $g(Ke^x)$ reprezintă funcţia payoff a opţiunii.

Putem rearanja coeficienţii ecuaţiei cu derivate parţiale (3.2.3) într-un mod convenabil pentru a obţine următoarea reprezentare matriceală:

$$0 \;=\; \frac{\partial w}{\partial t} \;+\; \nabla\cdot A\,\nabla w \;-\; b\cdot\nabla w \;-\; r_d\, w\;, \tag{3.2.5}$$

unde

$$A \;:=\; \frac{1}{2}\,v\,\begin{bmatrix} \xi^2 & \rho\,\xi \\ \rho\,\xi & 1 \end{bmatrix}$$

şi

$$b \;:=\begin{bmatrix} -\,k\,(\theta\;-\;v)\;+\;\lambda\,v\;+\;\frac{1}{2}\,\xi^2 \\ -\,(r_d\;-\;r_f)\;+\;\frac{1}{2}\,v\;+\;\frac{1}{2}\,\xi\,\rho \end{bmatrix}$$

Aceasta este o ecuaţie de convecţie–difuzie, unde matricea A se numeşte matricea de difuzie iar b este vectorul convecţie. Mai multe despre ecuaţiile de tip convecţie–difuzie şi despre metodele numerice, vezi în [3, 63, 64, 86, 108, 115, 139, 147, 148].

3.2.1 Metoda diferenţelor finite

Considerăm ecuaţia cu derivate parţiale a lui Heston (3.2.1) şi vom descrie modul în care poate fi utilizată metoda diferenţelor finite.

În primul rând vom discretiza variabilele, ceea ce conduce la rezolvarea problemei pe o reţea tridimensională cu:

$$S = i\delta S,\ v = j\delta v \text{ şi } \quad t = T - k\delta t \quad i = 0, ..., I,\ j = 0, ..., J,$$

valoarea opţiunii putând fi scrisă în felul următor:

$$V(S\ ,\ v\ ,\ t)\ =\ V_{ij}^{k}\ .$$

Condiţia finală pentru opţiunile put de tip european este:

$$V_{ij}^{0} = max(K - i\delta S, 0), \tag{3.2.6}$$

condiţie de la care porneşte defapt schema diferenţelor finite.

Pe lângă această condiţie finală mai avem condiţiile pe frontieră date de (3.2.2).

Metoda explicită

Definiţia derivatei parţiale de ordinul întâi în raport cu t este:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{V(S, v, t + \delta t) - V(S, v, t)}{\delta t},$$

deci putem aproxima această derivată prin relaţia:

$$\frac{\partial V}{\partial t}(S, v, t) \approx \frac{V_{ij}^{k} - V_{ij}^{k+1}}{\delta t} + \mathcal{O}(\delta t) \tag{3.2.7}$$

Aceeaşi idee poate fi folosită pentru aproximarea derivatelor parţiale de ordinul întâi în raport cu S şi v. Dar în aceste cazuri putem alege între: diferenţe progresive, diferenţe regresive sau diferenţe centrale. Diferenţele centrale dau eroarea $O(\delta S^2)$ în timp ce erorile pentru diferenţele progresive şi cele regresive sunt mult mai mari, $O(\delta S)$, deci pentru aceste derivate avem:

$$\frac{\partial V}{\partial S}(S, v, t) \approx \frac{V_{i+1,j}^{k} - V_{i-1,j}^{k}}{2\delta S} + \mathcal{O}(\delta S^2) \tag{3.2.8}$$

şi

$$\frac{\partial V}{\partial v}(S,v,t) \approx \frac{V_{i,j+1}^k - V_{i,j-1}^k}{2\delta v} + \mathcal{O}(\delta v^2). \tag{3.2.9}$$

Din descompunerea în serie Taylor obţinem următoarele aproximări pentru derivatele parţiale de ordinul doi în raport cu activul suport şi volatiliatea:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S,v,t) \approx \frac{V_{i+1,j}^k - 2V_{ij}^k + V_{i-1,j}^k}{\delta S^2} + \mathcal{O}(\delta S^2). \tag{3.2.10}$$

respectiv:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}(S,v,t) \approx \frac{V_{i,j+1}^k - 2V_{ij}^k + V_{i,j-1}^k}{\delta v^2} + \mathcal{O}(\delta v^2). \tag{3.2.11}$$

Derivata parţială de ordinul doi în raport cu S şi v poate fi aproximată prin:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)}{\partial S} \approx \frac{\frac{\partial V}{\partial v}(S+\delta S,v,t) - \frac{\partial V}{\partial v}(S-\delta S,v,t)}{2\delta S}.$$

Pe de altă parte avem

$$\frac{\partial V}{\partial v}(S+\delta S,v,t) \approx \frac{V_{i+1,j+1}^k - V_{i+1,j-1}^k}{2\delta v},$$

deci o discretizare convenabilă ar putea fi

$$\frac{\frac{V_{i+1,j+1}^k - V_{i+1,j-1}^k}{2\delta v} - \frac{V_{i-1,j+1}^k - V_{i-1,j-1}^k}{2\delta v}}{2\delta S} = \frac{V_{i+1,j+1}^k - V_{i+1,j-1}^k - V_{i-1,j+1}^k + V_{i-1,j-1}^k}{4\delta S\delta v}. \tag{3.2.12}$$

Folosind aproximările de mai sus (3.2.7-3.2.12) în ecuaţia evaluării opţiunii (3.2.3) obţinem schema diferenţelor finite explicită:

$$\begin{aligned}
&\frac{V_{ij}^k - V_{ij}^{k+1}}{\delta t} + \frac{1}{2}\ \sigma^2 j\delta v^k \left(\frac{V_{i,j+1}^k - 2\ V_{ij}^k + V_{i,j-1}^k}{\delta v^2}\right) + \\
&\quad + \rho\ \sigma ij\delta v^k \delta S^k \left(\frac{V_{i+1,j+1}^k - V_{i+1,j-1}^k - V_{i-1,j+1}^k + V_{i-1,j-1}^k}{4\delta S\delta v}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2} i^2 j\delta v^k\ (\delta S^k)^2 \left(\frac{V_{i+1,j}^k - 2V_{ij}^k + V_{i-1,j}^k}{\delta S^2}\right) \\
&\quad + (r_d - r_f) i\delta S^k \left(\frac{V_{i+1,j}^k - V_{i-1,j}^k}{2\delta S}\right) \\
&\quad + [k(\theta - j\delta v^k) - \lambda j\delta v^k] \left(\frac{V_{i,j+1}^k - V_{i,j-1}^k}{2\delta v}\right) \\
&\quad + r_d V_{ij}^k = \mathcal{O}(\delta t, \delta S^2, \delta v^2).
\end{aligned} \tag{3.2.13}$$

Metoda explicită, pe lângă avantajul de a fi uşor de programat, are dezavantaje legate de stabilitate şi viteză. Mai multe despre convergenţa şi stabilitatea metodei diferenţelor finite pentru ecuaţia cu derivate parţiale în cazul modelului lui Heston pot fi găsite în T. Kluge [63].

3.2.2 Metoda elementului finit

G. Winkler, T. Apel şi U. Wystup au demonstrat în [148] existenţa unei soluţii pentru opţiunile call europene în cazul modelului cu volatilitate stohastică a lui Heston, soluţie care a fost determinată numeric folosind metoda elementului finit. În acest paragraf vom rezolva ecuaţia (3.2.1) satisfăcând condiţiile pe frontieră (3.2.2), folosind metoda elementului finit.

Pentru a aplica această metodă vom limita domeniul Ω_∞ la un domeniu mărginit Ω:

$$\begin{aligned} \Omega &= (x_{min}\ ,\ x_{max}) \times (v_{min}\ ,\ v_{max}) \\ \partial\Omega &= \Gamma_1 \cup \Gamma_2\ ,\ \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing\ . \end{aligned}$$

Din formula lui Black-Scholes, în cazul unei opţiuni put, determinăm condiţia de mărginire pentru v_{min} şi v_{max}:

$$\begin{aligned} \Gamma_a &: v = v_{min} : & w(t, v_{min}, x) &= K\ e^{-r_d(T-t)}\ \Phi(-d_2) - K\ e^{x-r_f(T-t)}\Phi(-d_1) \\ \Gamma_b &: v = v_{max} : & w(t, v_{max}, x) &= K\ e^{-r_d(T-t)} \end{aligned}$$

Pentru x_{min} şi x_{max} avem următoarele condiţii:

$$\begin{aligned} \Gamma_c &: x = x_{min} : & \frac{\partial}{\partial v}\ w(t, v, x_{min}) &:= A\ \nabla w \cdot \vec{n} = -\ \tfrac{1}{2}\ v\ K\ e^{x-r_f(T-t)} \\ \Gamma_d &: x = x_{max} : & w(t, v, x_{max}) &= \lambda\ w(t, v_{max}, x_{max}) + (1-\lambda)\ w(t, v_{min}, x_{max}), \\ & & \lambda &= \tfrac{v\ -\ v_{min}}{v_{max}\ -\ v_{min}} \end{aligned}$$

Cele trei muchii $\Gamma_a \cup \Gamma_b \cup \Gamma_d = \Gamma_1$ formează condiţii pe frontieră de tip Dirichlet ce trebuie să dea aceeaşi limită în colţurile domeniului, atunci când se deplasează într-un colţ din două puncte distincte. Pentru a garanta existenţa unei soluţii continue pe întreg domeniul Ω vom face următoarea presupunere: pe Γ_d vom interpola liniar între valorile din dreapta şi din stânga frontierei.

În continuare, alegem o semidiscretizare în timp, ceea ce ne duce la o serie de probleme la limită bidimensionale:

$$D_t^+ w(t^k, v, x) = \frac{w(t^{k+1}, v, x) - w(t^k, v, x)}{\tau} \tag{3.2.14}$$

unde $\tau = t^{k+1} - t^k$ este constant oricare ar fi k.

Algoritmul fiind regresiv în timp, putem presupune că, la fiecare moment t^k cunoaştem valoarea $w(t^{k+1})$, problema reducându-se la rezolvarea ecuaţiei cu derivate parţiale de forma:

$$Lw(t^k, v, x) = f(t^{k+1}, v, x) \tag{3.2.15}$$

unde

$$Lw(t, v, x) = -\sigma\nabla \cdot A\nabla w + \sigma b \cdot \nabla w + (\sigma r_d + \frac{1}{\tau})w \tag{3.2.16}$$

şi

$$f(t, v, x) = (1 - \sigma)\nabla \cdot A\nabla w - (1 - \sigma)b \cdot \nabla w - \left((1 - \sigma)r_d - \frac{1}{\tau}\right) w \tag{3.2.17}$$

Următorul pas este alegerea unor spaţii adecvate. Folosind faptul că matricea A este pozitiv definită, G. Winkler, T. Apel şi U. Wystup [148], au definit următoarele spaţii:

Definiţia 3.2.1 *Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domeniu deschis şi mărginit şi u, w două funcţii. Fie matricea pătratică de ordinul d, $A(x)$ simetrică şi pozitiv definită pentru fiecare $x \in \Omega$ şi fie $\hat{c}$ o constantă pozitivă. Atunci definim:*

$$(u, w)_A = \int\limits_\Omega A\nabla u \cdot \nabla w + \int\limits_\Omega \hat{c}uw, \tag{3.2.18}$$

$$\|u\|_A^2 = (u, u)_A = \int\limits_\Omega A\nabla u \cdot \nabla u + \int\limits_\Omega \hat{c}u^2. \tag{3.2.19}$$

Observaţia 3.2.1 *1. Constanta $\hat{c}$ va lua valoarea $c - \frac{1}{2}\nabla \cdot b$*
2. Dacă $\hat{c} = \tilde{c} - \frac{1}{2}\nabla \cdot b$ folosim simbolul $(\cdot, \cdot)_{\tilde{A}}$.

Lema 3.2.1 *(G. Winkler, T. Apel şi U. Wystup [148]) Forma biliniară $(u, w)_A$ defineşte un produs scalar şi satisface inegalitatea Cauchy-Schwarz, deci $\|\cdot\|_A$ defineşte o normă.*

Definiţia 3.2.2 *Definim spaţiile*

$$\begin{aligned} &V := \{\psi / \ \|\psi\|_A < \infty\}, \\ &V_0 := \{\psi \in V / \ \psi = 0 \text{ on } \Gamma_1\}, \\ &V_* := \{\psi \in V / \ \psi \textit{ satisface condiţiile pe frontiera } \Gamma_1\}. \end{aligned} \tag{3.2.20}$$

Pentru a rezolva ecuaţia (3.2.15) o multiplicăm cu o funcţie test ψ din spaţiul V_0 şi o integrăm pe domeniul Ω :

$$\int_\Omega Lw\psi = \int_\Omega f\psi. \tag{3.2.21}$$

Din (3.2.21), obţinem următoarea formulare slabă: Trebuie să căutăm, pentru fiecare k, o funcţie $w^k = w(t^k, v, x) \in V_*$ astfel încât oricare ar fi $\psi \ \in \ V_0$ să avem:

$$a(w^k \ , \ \psi) \ = \ \langle \ F \ , \ \psi \ \rangle \ . \tag{3.2.22}$$

unde

$$\begin{aligned} a(w^k, \psi) = &\int_\Omega A\nabla w^k \cdot \nabla\psi + \frac{1}{2}\int_\Omega (b \cdot \nabla w^k \psi - w^k b \cdot \nabla\psi) \\ &+ \int_\Omega (c - \frac{1}{2}\nabla \cdot b) w^k \psi \\ &+ \ \frac{1}{2}\int_{\Gamma_c} \left[\frac{1}{2}v - (r_d - r_f) + \frac{1}{2}\xi\rho\right] w^k\psi, \end{aligned} \tag{3.2.23}$$

$$\langle \ F^k \ , \ \psi \ \rangle = f(t^{k+1}; \psi) + \int_{\Gamma_c} \underbrace{A\nabla w^k \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{g_2} \psi \tag{3.2.24}$$

$$f(t^{k+1}; \psi) = \int_\Omega A\nabla w^{k+1} \cdot \nabla\psi - \int_\Omega (b \cdot \nabla w^{k+1})\psi - \int_\Omega (\tilde{c} - \frac{1}{2}\nabla \cdot b) w^{k+1}\psi.$$

Teorema 3.2.1 *(V.L. Lazăr, [71]) Ecuaţia*

$$a(w, \psi) = \langle \ F \ , \ \psi \ \rangle, \ \ \forall \ \psi \ \in \ V_0, \tag{3.2.25}$$

unde funcţionala biliniară a şi funcţionala liniară F sunt date de (3.2.23) respectiv (3.2.24) are o soluţie unică $w \in V_*$, dacă

$$min\left\{\frac{1}{2}v - (r_d - r_f) + \frac{1}{2}\xi\rho \quad , \quad v \in [v_{min}, v_{max}]\right\} > -2 \tag{3.2.26}$$

şi

$$\hat{c} = (c - \frac{1}{2}\nabla \cdot b) = r_d + \frac{1}{\sigma\tau} - \frac{1}{2}(k + \lambda) > 0. \qquad (3.2.27)$$

Bibliografie

[1] R.P. Agarwal, D. O'Regan, Essentiality for Mönch type maps, Proc. Amer. Math. Soc., 129 (2001), 1015-1020.

[2] M. Altar, Inginerie financiară, A.S.E. Bucuresti, 2002.

[3] W.F. Ames, Numerical Methods for Partial Differential Equations, Boston (1992).

[4] K.L. Amin, V. Ng, Option Valuation with Systematic Stochastic Volatility, Journal of Finance, 48(3)(1993), 881-910.

[5] J. Andres, Some standard fixed-point theorems revisited, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena., 49 (2001), 455-471.

[6] J. Andres, J. Fišer, Metric and topological multivalued fractals, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 14(2004), 1277-1289.

[7] J. Andres, L. Górniewicz, On the Banach contraction principle for multivalued mappings, Approximation, Optimization and Mathematical Economics (Pointe-à-Pitre, 1999), 1-23, Physica, Heidelberg (2001).

[8] J.-P. Aubin, H. Frankowska, Set-Valued Analysis, Birkhäuser Verlag, Basel, (1990).

[9] Y.M. Ayerbe Toledano, T. Dominguez Benavides, G. López Acedo, Measures of Noncompactness in Metric Fixed Point Theory, Birkhäuser Verlag, Basel, (1997).

[10] J.S. Bae, Fixed point theorems for weakly contractive multivalued maps, J. Math. Anal. Appl. 284(2003), No.2, 690-697.

[11] M.F. Barnsley, Fractals Everywhere, Academic Press, Boston (1988).

[12] D. Bates, Jumps and stochastic volatility: exchange rate processes implicit in Deutsche mark options, Review of Financial Studies, 9(1996), 69-107.

[13] G. Beer, Topologies on Closed and Closed Convex Sets, Kluwer, Dordrecht (1993).

[14] M. Berinde, V. Berinde, On a general class of multi-valued weakly Picard mappings, J. Math. Anal. Appl., 326(2007), 772-782;

[15] F. Black, M. Scholes, The Pricing of Options and Corporate Liabilities, Journal of Political Economy, 81(1973), 637-654.

[16] F.S. De Blasi, Semifixed sets of maps in hyperspaces with applications to set differential equations, Set-Valued Anal. 14(2006), 263-272.

[17] M.F. Bota-Boriceanu, A. Petruşel, Ulam-Hyers stability for operatorial equations, Analele Univ. Al. I. Cuza Iaşi, Math., (2011), to appear.

[18] W.W. Breckner, T. Trif, Convex Functions and Related Functional Equations, Cluj Univ. Press, Cluj-Napoca, (2008).

[19] J. Brzdek, D. Popa, B. Xu, The Hyers-Ulam stability of nonlinear recurrences, J. Math. Anal. Appl., 335(2007), 443-449.

[20] J. Caristi, Fixed points theorems for mappings satisfying inwardness conditions, Trans. Amer. Math. Soc. 215 (1976) 241-251.

[21] L.P. Castro, A. Ramos, Hyers-Ulam-Rassias stability for a class of Volterra integral equations, Banach J. Math. Anal., 3(2009), no.1, 36-43.

[22] L. Cădariu, Stabilitate Ulam-Hyers-Bourgin pentru ecuaţii funcţionale, Ed. Univ. de Vest, Timişoara, (2007).

[23] A. Cernea, Differential Inclusions and Applications, Editura Univ. Bucureşti, 2000 (in Romanian).

[24] C. Chifu, A. Petruşel, Multivalued fractals and multivalued generalized contractions, Chaos Solit. Fract. 36(2008), 203-210.

[25] A. Chiş-Novac, R. Precup, I.A. Rus, Data dependence of fixed point for non-self generalized contractions, Fixed Point Theory, 10(2009), No.1, 73-87.

[26] J.C. Cox, J.E. Ingersoll and S.A. Ross, A Theory of the Term Structure of Interest Rates, Econometrica 53(1985), 385-407.

[27] H. Covitz, S.B. Nadler jr., Multivalued contraction mappings in generalized metric spaces, Israel J. Math., 8(1970), 5-11.

[28] C. Crăciun, N. Lungu: Abstract and concrete Gronwall lemmas, Fixed Point Theory, 10(2009), no.2, 221-228.

[29] S. Czerwik, Functional Equations and Inequalities in Several Variables, World Scientific, (2002).

[30] P. Daffer, A. Kaneko, Characterization of fixed points of multi-valued by metric projections, Boll. U.M.I., 10-A, 339-408.

[31] P.A. Forsyth, K.R. Vetzal, R. Zvan, A finite element approach to the pricing of discrete lookbacks with stochastic volatility, Applied Mathematical Finance, 6(1999), 87-106.

[32] R.B. Fraser, S.B. Nadler jr., Sequences of contractive maps and fixed points, Pacific J. Math., 31(1969), 659-667.

[33] M. Frigon, Fixed point and continuation results for contractions in metric and gauge spaces, Banach Center Publ., 77(2007), 89-114.

[34] M. Frigon, A. Granas, Résultats du type de Leray-Schauder pour les contractions multivoques, Topol. Meth. Nonlinear Anal., 4(1994), 197-208.

[35] P. Găvruţă, On a problem of G. Isac and Th. Rassias concerning the stability of mapping, J. Math. Anal. Appl., 261(2001), 543-553.

[36] L. Gil-Pelaez, Note on the inversion theorem, Biometrica, 38(1951), 481-482.

[37] V. Glăvan, V. Guţu, On the dynamics of contracting relations, In: Barbu V., Lasiecka I., Tiba D., Varsan C. (eds.), Analysis and Optimization of Differential Systems, pp. 179-188. Kluwer Acad. Publ., 2003.

[38] K. Goebel, W.A. Kirk, Topics in Metric Fixed Point Theory, Cambridge University Press, Cambridge (1990).

[39] L. Górniewicz, Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings, Kluwer, Dordrecht (1999).

[40] A. Granas, J. Dugundji, Fixed Point Theory, Springer, Berlin (2003).

[41] P.M. Gruber, Stability of isometries, Trans. Amer. Math. Soc., 245(1978), 263-277.

[42] D. Guo, V. Lakshmikantham, X. Liu, Nonlinear integral equations in abstract spaces, Kluwer Acad. Publishers, Dordrecht, 1996.

[43] J. Hakala, U. Wystup, Heston's Stochastic Volatility Model Applied to Foreign Exchange Options, Foreign Exchange Risk. Risk Publications, London(2002).

[44] S. Heston, A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options, The Review of Financial Studies, 6(1993), 327-343.

[45] S. Heston, S. Nandi, A closed-form GARCH option valuation model, Review of Financial Studies, 13(2000), 585-625.

[46] G. Hirisawa, T. Miura, Hyers-Ulam stability of a closed operator in a Hilbert space, Bull. Korean Math. Soc., 43(2006), No. 1, 107-117.

[47] S. Hu, N.S. Papageorgiou, Handbook of Multivalued Analysis, Vol. I and II. Kluwer, Dordrecht, 1997-1999.

[48] J.E. Hutchinson, Fractals and self-similarity, Indiana Univ. Math. J., 30(1981), 713-747.

[49] J. Hull, A. White, The pricing of options on asset with stochastic volatility, The Journal of Finance, vol. XLII, 2(1987), 281-300.

[50] D.H. Hyers, The stability of homomorphism and related topics, in: Global Analysis-Analysis on Manifolds (Th.M. Rassias, ed.), Teubner, Leipzig, (1983), 140-153.

[51] D.H. Hyers, G. Isac, Th.M. Rassias, Stability of Functional Equations in Several Variables, Birkhäuser, Basel, (1998).

[52] K. Itô, On stochastic differential equations, Memoirs American Mathematical Society, 4(1951), 151.

[53] J. Jachymski, Continuous dependence of attractors of iterated function systems, J. Math. Anal. Appl., 198(1996), 221-226.

[54] J. Jachymski, I. Józwik, Nonlinear contractive conditions: a comparison and related problems, In: Fixed Point Theory and its Applications, J. Jachymski and S. Reich (eds.), Banach Center Publications, Warsaw, vol. 77(2007), pp. 123-146.

[55] H. Johnson, D. Shanno, Option pricing when the variance is changing, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 22(1987), 143-151.

[56] S.-M. Jung, Hyers-Ulam-Rassias Stability of Functional Equations in Nonlinear Analysis, Springer, New York, (2011).

[57] S.-M. Jung, Hyers-Ulam stability of first order linear differential equations with constant coefficients, J. Math. Anal. Appl., 320(2006), 549-561.

[58] S.-M. Jung, A fixed point approach to the stability of a Volterra integral equation, Fixed Point Theory and Applications, Vol. 2007, ID 57064 9 pages.

[59] S.-M. Jung, K.-S. Lee, Hyers-Ulam stability of first order linear partial differential equations with constant coefficients, Math. Ineq. Appl., 10(2007), no. 2, 261-266.

[60] S.-M. Jung, Th.M. Rassias, Generalized Hyers-Ulam stability of Riccati differential equation, Math. Ineq. Appl., 11(2008), No.4, 777-782.

[61] I. Karatzas, S. Shreve, Brownian Motion and Stochastic Calculus (2nd ed.), Springer, (1991).

[62] W.A. Kirk, B. Sims (Eds.), Handbook of Metric Fixed Point Theory, Kluwer, Dordrecht (2001).

[63] T. Kluge, Pricing Derivatives in Stochastic Volatility Models Using the Finite Difference Method, Diploma Thesis, Technische Universität Chemnitz (2002).

[64] R. Korn, E. Korn, Option Pricing and Portfolio Optimization, Modern Methods of Financial Mathematics, American Math. Soc., (1999).

[65] A. Lasota, J. Myjak, Attractors of multifunctions, Bull. Polish Acad. Sci. Math., 48(2000), 319-334.

[66] T.A. Lazăr, D. O'Regan, A. Petruşel, Fixed points and homotopy results for Ćirić-type multivalued operators on a set with two metrics, Bull. Korean Math. Soc., 45(2008), 67-73.

[67] T.A. Lazăr, A. Petruşel, N. Shahzad, Fixed points for non-self operators and domain invariance theorems, Nonlinear Anal., 70(2009), 117-125.

[68] T.A. Lazăr, **V.L. Lazăr**, Fixed points for non-self multivalued operators on a set with two metrics, JP Journal of Fixed Point Theory and Applications, 4(2009), No. 3, 183-191.

[69] **V.L. Lazăr**, On the essentiality of the Mönch type maps, Seminar on Fixed Point Theory, 1(2000), 59-62.

[70] **V.L. Lazăr**, Pricing Digital Call Option in the Heston stochastic volatility model, Studia Univ. Babeş-Bolyai Mathematica, 43(2003), No. 3, 83-92.

[71] **V.L. Lazăr**, Finite difference and element methods for pricing options with stochastic volatility, Int. Journal of Pure and Applied Mathematics, 28(2006), No. 3, 339-354.

[72] **V.L. Lazăr**, Metode de evaluare a opţiunilor, Studia Universitatis Vasile Goldiş Arad, Seria Ştiinţe Economice, 16(2007), 216-231.

[73] **V.L. Lazăr**, Fixed point theory for multivalued φ-contractions, Fixed Point Theory and Applications, vol. 2011:50, (2011), 12 pages, doi:10.1186/1687-1812-2011-50.

[74] **V.L. Lazăr**, Ulam-Hyers stability results for partial differential equations, accepted for publication in Creative Math.and Inform., 20(2011), No.3.

[75] **V.L. Lazăr**, Ulam-Hyers stability results for partial differential inclusions, Electron. J. Qualitative Th. Differ. Eq. (submitted).

[76] **V.L. Lazăr**, T.A. Lazăr, Opţiuni cu payoff-ul modificat, Proc. of International Conference "Sustainable development in conditions of economic instability" June 26-27, 2009, Ed. Cibernetica MC, 10(2009), no. 101, 125-128.

[77] **V.L. Lazăr**, T.A. Lazăr, Option Strategies, Metalurgia International, 11(2011), 114-120.

[78] T.C. Lim, On fixed point stability for set-valued contractive mappings with applications to generalized differential equations, J. Math. Anal. Appl., 110(1985), 436-441.

[79] N. Lungu, Hyperbolic differential inequalities, Libertas Math., 21(2001), 35-40.

[80] N. Lungu, I.A. Rus, Gronwall inequality via Picard operators, Scientific Annals of A.I. Cuza University, Iaşi, (to appear).

[81] J.T. Markin, Continuous dependence of fixed points sets, Proc. Amer. Math. Soc., 38(1973), 545-547.

[82] J. Matkowski, Integrable solutions of functional equations, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.), 127(1975), 68 pp.

[83] A. Meir, E. Keeler, A theorem on contraction mappings, J. Math. Anal. Appl., 28(1969), 326-329.

[84] T. Miura, S.-M. Jung, S.-E. Takahasi, Hyers-Ulam-Rassias stability of the Banach space valued linear differential equation $y' = \lambda y$, J. Korean Math. Soc., 41(2004), 995-1005.

[85] N. Mizoguchi, W. Takahashi, Fixed point theorems for multivalued mappings on complete metric spaces, J. Math. Anal. Appl., 141(1989), 177-188.

[86] K.W. Morton, Numerical Solution of Convection-Diffusion Problems, Chapman & Hall,(1996).

[87] H. Mönch, Boundary value problems for nonlinear ordinary differential equations of second order in Banach spaces, Nonlinear Anal. 4(1980), 985-999.

[88] A. Muntean, Fixed Point Principles and Applications to Mathematical Economics, Cluj University Press, (2002).

[89] S.B. Nadler jr., Multivalued contraction mappings, Pacific J. Math., 30(1969), 475-488.

[90] S.B. Nadler jr, Periodic points of multi-valued ε-contractive maps, Topol. Methods Nonlinear Anal., 22(2)(2003), 399-409.

[91] I. Nelken, Pricing, hedging, and trading exotic options: understand the intricacies of exotic options and how to use them to maximum advantage, McGraw-Hill, (2000).

[92] J. Norstad, The put-call parity theorem, http://www.norstad.org/finance, 1999.

[93] D. O'Regan, R. Precup, Fixed point theorems for set-valued maps and existence principles for integral inclusions, J. Math. Anal. Appl. 245(2000), 594-612.

[94] Zs. Páles, Generalized stability of the Cauchy functional equation, Aequationes Math., 56(1998), no. 3, 222-232.

[95] N.S. Papageorgiou, Convergence theorems for fixed points of multifunctions and solutions of differential inclusions in Banach spaces, Glas. Mat. Ser. III., 23(1988), 247-257.

[96] T.P. Petru, A. Petruşel, J.-C. Yao, Ulam-Hyers stability for operatorial equations and inclusions via nonself operators, Taiwanese J. Math., (2011), 15(2011), No. 5, 2195-2212.

[97] A. Petruşel, Multivalued weakly Picard operators and applications, Scientiae Math. Japonicae, 59(2004), 167-202.

[98] A. Petruşel, Generalized multivalued contractions, Nonlinear Anal., 47(2001), 649-659.

[99] A. Petruşel, Singlevalued and multivalued Meir-Keeler type operators, Revue D'Analse Num. et de Th. de l'Approx., 30(2001), 75-80.

[100] A. Petruşel, Operatorial Inclusions, House of the Book of Science Cluj-Napoca, (2002).

[101] A. Petruşel, I.A. Rus, Fixed point theory for multivalued operators on a set with two metrics, Fixed Point Theory, 9(2008), 97-104.

[102] A. Petruşel, I.A. Rus, The theory of a metric fixed point theorem for multivalued operators. In: L.J. Lin, A. Petruşel, H.K. Xu, (eds.) Yokohama Publ (2010), 161-175.

[103] A. Petruşel, I.A. Rus, Multivalued Picard and weakly Picard operators, In: E. Llorens Fuster, J. Garcia Falset, B. Sims (Eds.), Fixed Point Theory and Applications, Yokohama Publ., 2004, 207-226.

[104] A. Petruşel, I.A. Rus, Well-posedness of the fixed point problem for multivalued operators, In: O. Cârjă, I.I. Vrabie, (eds.) Applied Analysis and Differential Equations, World Scientific (2007), 295-306.

[105] A. Petruşel, I.A. Rus, J.C. Yao, Well-posedness in the generalized sense of the fixed point problems, Taiwan. J. Math., 11(3)(2007), 903-914.

[106] D. Popa, Hyers-Ulam-Rassias stability of linear recurrence, J. Math. Anal. Appl., 309(2005), 591-597.

[107] D. Popa, Hyers-Ulam stability of the linear recurrence with constant coefficients, Advances in Difference Equations, 2(2005), 101-107.

[108] R. Precup, Ecuaţii cu derivate parţiale, Transilvania Press, Cluj Napoca, (1997).

[109] V. Radu, The fixed point alternative and the stability of functional equations, Fixed Point Theory, 4(2003), No. 1, 91-96.

[110] Th.M. Rassias, On the stability of the linear mappings in Banach spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 72(1978), 297-300.

[111] S. Reich, Fixed point of contractive functions, Boll. Un. Mat. Ital., 5(1972), 26-42.

[112] S. Reich, A fixed point theorem for locally contractive multivalued functions, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 17(1972), 569-572.

[113] S. Reich, A.J. Zaslavski, A stability result in fixed point theory, Fixed Point Theory, 6(2005), No. 1, 113-118.

[114] B.E. Rhoades, Some theorems on weakly contractive maps, Nonlinear Anal., 47(2001), 2683-2693.

[115] H. Roos, M. Stynes, L. Tobiska, Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations, Springer,(1996).

[116] I.A. Rus, Weakly Picard mappings, Comment. Math. University Carolinae., 34(1993), 769-773.

[117] I.A. Rus, Principii şi aplicaţii ale teoriei punctului fix, Ed. Dacia, Cluj-Napoca (1979).

[118] I.A. Rus, Picard operators and applications, Scientiae Math. Japonicae, 58(2003), No. 1, 191-219.

[119] I.A. Rus, Fixed Point Structure Theory, Cluj University Press, Cluj-Napoca, (2006).

[120] I.A. Rus, The theory of a metrical fixed point theorem: theoretical and applicative relevances, Fixed Point Theory, 9(2008), No. 2, 541-559.

[121] I.A. Rus, Gronwall lemma approach to the Hyers-Ulam-Rassias stability of an integral equation, in: Nonlinear Analysis and Variational Problems, (P. Pardalos, Th. M. Rassias and A.A. Khan, Eds.), Springer, (2009), 147-152.

[122] I.A. Rus, Ulam stability of ordinary differential equations, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Math., 54(2009), No. 4, 125-133.

[123] I.A. Rus, Fixed point theorems for multivalued mappings in complete metric spaces, Math. Japon., 20 (1975), 21-24.

[124] I.A. Rus, Remarks on Ulam stability of the operatorial equations, Fixed Point Theory, 10(2009), No. 2, 305-320.

[125] I.A. Rus, Generalized Contractions and Applications, Cluj University Press, Cluj-Napoca, (2001).

[126] I.A. Rus, A. Petruşel, G. Petruşel, Fixed Point Theory, Cluj University Press, Cluj-Napoca, (2008).

[127] I.A. Rus, A. Petruşel, G. Petruşel, Fixed Point Theory 1950-2000: Romanian Contributions, House of the Book of Science, Cluj-Napoca (2002).

[128] I.A. Rus, Ecuaţii diferenţiale, ecuaţii integrale şi sisteme dinamice, Transilvania Press, Cluj-Napoca, (1996).

[129] I.A. Rus, N. Lungu, Ulam stability of a nonlinear hyperbolic partial differential equation, Carpathian J. Math., 24(2008), no.3, 403-308.

[130] I.A. Rus, N. Lungu, Gronwall lemma approach to Hyers-Ulam-Rassias stability of an integral equation, in: Nonlinear Analalysis and Variational Problems, Springer, (2009), 147-152.

[131] I.A. Rus, A. Petruşel, A. Sîntămărian, Data dependence of the fixed points set of some multivalued weakly Picard operators, Nonlinear Anal., 52(2003), 1947-1959.

[132] I.A. Rus, M.A. Şerban, Some generalizations of a Cauchy lemma and applications, In: (S. Cobzaş-ed.) Topics in Mathematics, Computer Science and Philosophy-A Festschrift for Wolfgang Breckner, Cluj University Press (2008), 173-181.

[133] L. Rybinski, On Carathédory type selections, Fund. Math., 125(1985), 187-193.

[134] J. Saint-Raymond, Multivalued contractions, Set-Valued Anal., 2(1994), 559-571.

[135] A. Sîntămărian, Common fixed point theorems for multivalued mappings, Seminar on Fixed Point Theory Cluj-Napoca, 3(1997), 27-31.

[136] R.E. Smithson, Fixed points for contractive multifunctions, Proc. Amer. Math. Soc., 27(1971), 192-194.

[137] E.M. Stein, J.C. Stein, Stock price distributions with stochastic volatility: An analytic Approach, The Review of Financial Studies, 4(1991), 727-752.

[138] H.R. Stoll, The relationship between put and call option prices, The Journal of Finance, 24(1969), 802-824.

[139] J.C. Strikwerda, Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations, Wadsworth & Brooks, (1989).

[140] W. Takahashi, Nonlinear Functional Analysis. Fixed Point Theory and its Applications. Yokohama Publishers, Yokohama (2000).

[141] E. Tarafdar, G.X.Z. Yuan, Set-valued contraction mapping principle, Appl. Math. Letter., 8(1995), 79-81.

[142] S.J. Taylor, Modeling Financial Time Series, John Wiley, Chichester, (1986).

[143] J. Topper, Option pricing with finite elements, Wilmott Magazine, 1(2005), 84-90.

[144] R. Węgrzyk, Fixed point theorems for multifunctions and their applications to functional equations, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.), 201(1982), pp. 28.

[145] J.B. Wiggins, Option values under stochastic volatilities, Journal of Financial Economics, 19(1987), 351-372.

[146] P. Wilmott, Derivatives, the Theory and Practice of Financial Engineering, John Wiley & Sons Ltd, New York (1999).

[147] P. Wilmott, J. Dewynne, S. Howison, Option Pricing: Mathematical Models and Computation, Oxford Financial Press, (1993).

[148] G. Winkler, T. Apel, U. Wystup, Valuation of Options in Heston's Stochastic Volatility Model Using Finite Element Methods, Foreign Exchange Risk, Risk Publications, London (2002).

[149] M. Xu, Hyers-Ulam-Rassias stability of a system of first order linear recurrences, Bull. Korean Math. Soc., 44(2007), No. 4, 841-849.

[150] H.K. Xu, ε-chainability and fixed points of set-valued mappings in metric spaces, Math. Japon. 39(1994), 353-356.

[151] H.K. Xu, Metric fixed point theory for multivalued mappings, Diss. Math., 389(2000), pp. 39.

[152] M. Yamaguti, M. Hata, J. Kigani, Mathematics of Fractals, Transl. Math. Monograph, Vol. 167, Amer. Math. Soc. Providence, (1997).

[153] G.X.Z. Yuan, KKM Theory and Applications in Nonlinear Analysis, Marcel Dekker, New York, (1999).