UNIVERSITATEA BABEȘ-BOLYAI, CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ

Delia–Maria Nechita

Reguli de calcul pentru subdiferențiala Dini-Hadamard în spații Banach

Rezumatul tezei de doctorat

Conducător de doctorat:

Prof. Univ. Dr. Dorel Duca

Cluj–Napoca,

2012

Cuprins

Chapter 1

Introducere

Este bine ştiut faptul că funcţiile nenetede, mulţimile cu frontiere nenetede şi multifuncţiile apar natural şi destul de frecvent în diferite arii ale matematicii şi în aplicaţii, în special în cele legate de optimizare, stabilitate, sisteme variaţionale şi sisteme de control. De fapt, studiul comportamentului local al obiectelor nediferenţiabile se realizează în cadrul *analizei nenetede*, a cărei origini le găsim la începutul anilor 1960, atunci când teoreticienii programării neliniare au încercat să stabilească condiţii necesare de optim pentru probleme cu date nediferenţiabile (iată de exemplu problema minimizării maximului mai multor funcţii diferenţiabile). De atunci, analiza nenetedă a început să joace un rol important în analiza funcţională, în optimizare, mecanică şi plasticitate, ecuaţii diferenţiale (în teoria soluţiilor vâscozitate), teoria controlului etc, devenind o arie activă şi roditoare a matematicii. Aşa cum Penot spunea foarte frumos, în timp ce sunt câteva motive pentru care ar putea să ne fi teamă de analiza nenetedă, precum abundenţa conceptelor, incertitudinea în terminologie, lipsa de coerenţă în notaţii şi sentimentul de nesiguranţă, sunt de asemenea alte motive pentru care putem fi seduşi de această faimoasă arie a matematicii, de vreme ce orice tip de funcţie poate fi tratată, operaţiile noi precum considerarea infimumului sau a supremumului ne sunt acum la îndemână şi nu în ultimul rând faptul că trecerea de la funcţii la mulţimi şi mai departe la multifuncţii aduc o unificare matematicii.

Un mare interes l-au căpătat astfel încercările de generalizare ale derivatei, în scopul optimizării. Acestea au condus la definirea multor *gradienţi generalizaţi*, *subgradienţi* dar şi a altor obiecte sub diverse nume. Ei au fost introduşi mai întâi în teoria funcţiilor reale şi în teoria distribuţiilor (a se vedea de exemplu Bruckner [29], Saks [134], Schwartz [135] and Sobolev [137]). Şi toată această muncă cu scopul de a rezolva probleme de optimizare în care ipotezele clasice de diferenţiabilitate nu mai sunt adecvate. Una dintre cele mai folosite *subdiferenţiale* (mulţime de subgradienţi), potrivite pentru aplicaţiile din cadrul optimizării este cea care a apărut pentru prima dată pentru funcţii convexe, în contextul analizei convexe (pentru mai multe detalii a se vedea [100, 127, 130] şi referinţele de acolo). Ea şi-a găsit semnificative utilizări teoretice şi practice în optimizare, economie (a se vedea [10]), mecanică, dovedindu-se a fi o construcţie matematică foarte interesantă. Dar încercarea de a extinde acest succes la funcţii ce nu mai sunt convexe s-a dovedit a fi foarte dificilă.

Menţionăm aici două importante abordări. Prima foloseşte un oarecare tip de *derivată direcţională generalizată* f^∂ a funcţiei $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ şi apoi defineşte *tangenţial* o subdiferenţială convexă prin intermediul următoarei formule $\partial f(x) := \{x^* \in X^* : x^* \le f^\partial(x, \cdot)\}$. Ca şi exemplu, *subdiferenţiala Clarke*, care în fapt foloseşte o derivată direcţională pozitiv omogenă, a fost primul concept de subdiferenţială definit pentru o funcţie neconvexă în anul 1973 de către Clarke (a se vedea [34, 35]), cel care a inventat în 1970 acest termen de *analiză netedă* (nonsmooth analysis) şi a făcut o adevărată lucrare de pionierat în câmpul analizei nenetede, răspândite mult dincolo de aria de aplicabilitate a convexităţii. Din păcate însă, aşa cum se poate vedea în [16], în anumite *puncte anormale* a unor funcţii nenetede fie ele şi Lipschitz, subdiferenţiala Clarke poate cuprinde *subgradienţi străini.* Mai mult decât atât, conul normal Clarke se întâmplă adesea să fie un subspaţiu liniar sau chiar spaţiul întreg (de exemplu, $N^C(\operatorname{graph} f; (0,0)) = \mathbb{R}^2$ în cazul în care $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$). Şi aceasta din cauză că, în general, o mulţime convexă furnizează adesea o subdiferenţială care este prea mare pentru multe probleme de optimizare.

A doua abordare este aceea de a defini subdiferenţiale care să verifice reguli bune de calcul prin considerarea unor limite diferite de construcţii subdiferenţiale mai primitive care nu posedă astfel de reguli. Este important de ştiut că aceste construcţii limită depind nu doar de obiectele primitive alese cât şi de caracterul limitei: *topologic* sau *secvenţial.*

Abordarea topologică permite dezvoltarea unor subdiferenţiale utile în spaţii infinit dimensionale generale, având însă marele neajuns de a furniza construcţii destul de mari şi în general cu o structură intrinsecă destul de complicată ce urmează de obicei o procedură în trei paşi. Şi anume, definirea subdiferenţialei ∂f mai întâi pentru o funcţie Lipschitz ce impune considerarea de restricţii la subspaţii finit dimensionale (sau separabile) cu intersecţii după colecţia unor astfel de subspaţii, apoi definirea conului normal la mulţimea C într-un punct dat x ca fiind conul generat de subdiferenţiala funcţiei distanţă la mulţimea C şi în final definirea subdiferenţialei ∂f pentru o funcţie arbitrară inferior semicontinuă, prin intermediul conului normal la epigraficul lui f. În această linie de dezvoltare o serie de extensii infinit dimensionale pentru construcţiile neconvexe din [89, 90] au fost introduse şi puternic dezvoltate de către Ioffe într-o serie de publicaţii începând cu anul 1981 (pentru bibliografie şi comentariile dinăuntru a se vedea [65, 66, 67]) având la bază limite topologice de ε-subdiferenţiale Dini-Hadamard. Astfel de construcţii, numite şi *subdiferenţiale aproximative* (approximate subdifferentials), sunt bine definite în spaţii generale, însă toate (inclusiv nucleul lor) pot fi mai mari chiar şi decât extensia Kruger-Mordukhovich pentru funcţii Lipschitz în spaţii Banach ce admit renormări Fréchet diferenţiabile.

Abordarea secvenţială conduce de obicei la găsirea unor obiecte mai convenabile, dar acest demers cere spaţiilor de lucru proprietăţi geometrice speciale (a se vedea [18]). Astfel, întrucât convexitatea nu mai este inerentă în cadrul procedurii, putem defini subdiferenţiale mai mici şi astfel să excludem unele elemente din mulţimea punctelor staţionare. Primele construcţii subdiferenţiale secvenţiale neconvexe în spaţii Banach au fost introduse pentru prima dată de Kruger şi Mordukhovich [77, 78] prin intermediul limitelor secvenţiale de conuri normale şi subdiferenţiale ε-Fréchet. Un astfel de con normal şi o astfel de subdiferenţială au apărut ca extensii infinit dimensionale la cele corespunzătoare din spaţiul finit dimensional introduse în Mordukhovich [89, 90] şi au fost motivate de aplicaţiile din optimizare şi control. Proprietăţi folositoare pentru astfel de construcţii au loc cu precădere în spaţii Banach ce admit renormări Fréchet diferenţiabile.

Dar, bineînţeles, mulţi autori lucrează cu un concept abstract de subdiferenţială (a se vedea [67, 70, 114] şi referinţele de acolo), ce verifică o listă cuprinzătoare de axiome.

În final subliniem faptul că în vreme ce teoria subdiferenţialelor a fost bine dezvoltată în spaţiile finit dimensionale, există încă multe probleme deschise în cele infinit dimensionale.

În cele ce urmează prezentăm o descriere a cuprinsului tezei, subliniind cele mai importante rezulate.

În **Capitolul 2** ne începem expunerea cu câteva noţiuni şi rezultate preliminare, referindu-ne la cele mai importante subdiferenţiale ce au fost folosite pe o scară largă în ultimele decade, şi anume subdiferenţiala Fréchet, subdiferenţiala Dini-Hadamard, subdiferenţiala proximală, câteva subdiferenţiale asociate unor bornologii, subdiferenţialele limită, subdiferenţiala Mordukhovich şi subdiferenţialele aproximative ale lui Ioffe, gradientul generalizat al lui Clarke, subdiferenţiala Michel-Penot, iar în final detaliem o metodă de introducere a unei subdiferenţiale abstracte.

Capitolul 3 se ocupă cu un studiu detaliat al subdiferenţialei Dini-Hadamard şi al construcţiilor aferente. De fapt arătăm că aceste construcţii se bucură de o varietate de proprietăţi frumoase în cadrul general al spaţiilor Banach. Majoritatea acestor proprietăţi (incluzând câteva reprezentări eficiente, descrieri variaţionale, câteva proprietăţi de disipativitate şi de diferenţiabilitate etc.) sunt strânse în acest capitol. După prezentarea câtorva concepte de mulţimi mici, reamintim mai apoi aşa-zisa noţiune de mulţime spongioasă (sponge) introduă de Treiman [140] în 1986, ilustrând legătura acesteia cu clasicele vecinătăţi şi răspunzând la întrebarea cât de departe putem merge în înlocuirea unei vecinătăţi cu o mulţime spongioasă în definiţia lui Treiman. O legătură utilă dintre şirurile convergente direcţional şi mulţimile spongioase este furnizată în continuare, în fapt, unul din ingredientele cheie ce joacă un rol proeminent în diverse descrieri ale subdiferenţialei Dini-Hadamard şi construcţiile aferente. Introducem mai apoi chiar o noţiune de limită inferioară direcţională ce induce în mod natural un concept de semicontinuitate direcţională inferioară. Câteva noţiuni de continuitate spongioasă sunt studiate mai apoi în Subsecţiunea 3.1.4, în vreme ce intenţia este aceea de a generaliza continuitatea Lipschitz clasică prin introducerea unor noţiuni de continuitate spongioasă, ce îşi găsesc utilitatea cu precădere în capitolul al patrulea. În partea finală a acestei subsecţiuni completăm tabloul acestor noţiuni prin ilustrarea cu ajutorul a câtorva exemple relaţiile dintre construcţiile noi şi cele vechi. Câteva clase favorabile de funcţii nenetede sunt mai departe descrise. Printre ele amintim clasa funcţiilor aproape convexe, cea a funcţiilor aproape stelare şi clasa funcţiilor direcţional aproape stelare introduse de Penot [108]. Marea noutate vine aici din caracterizarea funcţiilor direcţional aproape stelare cu ajutorul mulţinilor spongioase. În Subsecţiunea 3.1.6 propunem diverse tipuri de noţiuni topologice pentru operatori în scopul derivării unor formule exacte de diferenţă pentru subdiferenţiala Dini-Hadamard. O secţiune întreagă este dedicată studiului derivatelor de tip Dini-Hadamard. După reamintirea definiţiei şi a celor mai importante proprietăţi ale derivatei direcţionale Dini-Hadamard, descriem o modalitate naturală de a introduce o nouă derivată direcţională cu ajutorul şirurilor convergente direcţional. În fapt, cea din urmă construcţie ne permite să îmbunătăţim subdiferenţiala Dini-Hadamard prin introducerea subdiferenţialei Dini-Hadamard-like, în vreme ce motivaţia secretă a fost simplul fapt că ea prezintă proprietăţi similare cu cele ale subdiferenţialei Fréchet dar în termeni de mulţimi spongioase. În Subsecţiunea 3.3.2 subliniem rolul cheie al proprietăţii de calmare (liniştire) în descrierea subgradienţilor Dini-Hadamard şi corectăm o afirmaţie simplă fără demonstraţie, făcută de Treiman [140]. În partea finală a acestei subsecţiuni furnizăm câteva exemple menite să ilustreze eroarea şi arătăm cum poate să arate o vecinătate care nu este mulţime spongioasă, având în minte importanţa crucială a unui astfel de exemplu în furnizarea diferitelor legături dintre noţiunile cheie. Rezultatul esenţial al teoriei dezvoltate în teză se doveşte a fi o descriere variaţională a subdiferenţialei Dini-Hadamard, prezentată în Subsecţiunea 3.3.3. De asemenea valabilă şi pentru subdiferenţiala Dini-Hadamard-like, o asemenea proprietate facilitează aproape toate demonstraţiile ce implică astfel de construcţii. Cu toate că este destul de generală, noţiunea de mulţime spongioasă prezintă de asemenea un mare minus. Şi anume, produsul cartezian a două mulţimi spongioase nu mai este spongioasă, aşa cum eram obişnuiţi în cazul vecinătăţilor. Acesta este şi motivul pentru care se impune introducerea în spaţii produs a unei construcţii decuplate Dini-Hadamard. În Subsecţiunea 3.3.5 obţinem o descriere variaţională netedă ce va fi folosită pe deplin în Subsecţiunea 4.2.5. Apoi facem câteva legături între subgradienţii studiaţi în acest capitol şi conurile normale corespondente. Furnizăm chiar o descriere alternativă pentru conul normal contingent, distingând între feluritele construcţii analitice şi geometrice. Principalul scop în Subsecţiunea 3.3.7 este acela de a sublinia câteva legături dintre subdiferenţiala Dini-Hadamard şi alte subdiferenţiale binecunoscute din literatură, în vreme ce în Subsecţiunea 3.3.8 dăm o descriere cheie pentru funcţiile direcţional aproape stelare cu ajutorul subgradienţilor Dini-Hadamard. La sfârşitul acestui capitol introducem un nou obiect de tip derivată pentru multifuncţii cu ajutorul subdiferenţialei decuplate Dini-Hadamard a funcţiei indicator la graficul multifuncţiei. Mai definim de asemenea câteva noţiuni de diferenţiabilitate, ilustrând legătura dintre coderivata Dini-Hadamard-like decuplată a multifuncţiilor Lipschitz spongios continue şi subdiferenţiala Dini-Hadamard a funcţiei de scalarizare.

Capitolul 4 este devotat unui studiu aprofundat al regulilor de calcul valabile pentru subdiferenţiala Dini-Hadamard în spaţii Banach. După discutarea unor modalităţi de dezvoltare a unui set de instrumente de bază în analiza subdiferenţială, prezentăm cele mai importante tipuri de reguli de calcul de care o subdiferenţială poate asculta. O regulă fuzzy slabă de sumă pentru subdiferenţiala Dini-Hadamard (a se vedea Ioffe [59]) dar de asemenea şi reguli de calcul fuzzy slabe pentru coderivata Dini-Hadamard (a se vedea [74]) sunt mai apoi furnizate, amintind de calculul sărac valabil pentru astfel de construcţii. În a doua parte a capitolului ne îndreptăm atenţia în găsirea unor reguli de calcul exacte pentru subdiferenţiala Dini-Hadamard şi construcţiile aferente, în spaţii Banach. Astfel, după prezentarea unor reguli de sumă şi de diferenţă pentru funcţii netede, furnizăm în Subsecţiunea 4.2.3 o regulă exactă pentru diferenţa a două funcţii direcţional aproape stelare. Merită să subliniem aici faptul că acest ultim tip de rezultat valabil pentru ε-subdiferenţiala Dini-Hadamard a fost primul de acest gen care a apărut în literatură. Puţin mai târziu, Penot [119] a dat şi el o formulă similară însă folosind oarecare ipoteze de disipativitate. De fapt, principala idee a fost aceea de a extinde câteva afirmaţii făcute de Penot [1] pentru funcţii aproape stelare şi cu ajutorul subdiferenţialei Fréchet, motivaţi fiind de faptul că există funcţii direcţional aproape stelare pentru care rezultatele de acolo nu se pot aplica. Cu toate că subdiferenţiala Dini-Hadamard şi ε-extinderea ei sunt bine cunoscute în analiza variaţională şi diferenţierea generalizată, ele nu sunt folosite pe o scară largă din pricina lipsei formulelor de calcul. Totuşi, esenţiala formulă de diferenţă are loc pentru această subdiferenţială, în condiţii naturale. Pe de altă parte, se întâmplă că formula exactă de diferenţă pentru coderivata Dini-Hadamard obţinută în Subsecţiunea 4.2.4 alături de relaţia dintre coderivata unei funcţii date şi subdiferenţiala funcţiei sale de scalarizare să fie esenţială în dezvoltarea formulelor exacte de calcul pentru diverse tipuri de compuneri. Astfel, rezultatele din Subsecţiunea 4.2.5 urmează oarecum celor obţinute de Mordukhovich [96] în termeni de subgradienţi Fréchet. Practic, metoda cheie constă în furnizarea mai întâi a unor astfel de reguli de calcul pentru subdiferenţiala Dini-Hadamard-like şi abia apoi pentru subdiferenţiala Dini-Hadamard şi Fréchet. Observăm de asemenea că estimările noastre obţinute pentru subdiferenţiala Fréchet, cu ajutorul însă şi a subdiferenţialei Dini-Hadamard-like a funcţiei de scalarizare rămân adevărate şi pentru acele funcţii care sunt doar spongios Lipschitz continue şi tare spongios continue (spongios continue în sens tare). În final prezentăm câteva cazuri particulare ale acestor reguli, printre care menţionăm câteva reguli de produs şi împărţire, subliniind rolul esenţial al subgradienţilor superiori Dini-Hadamard-like. Astfel, extindem câteva rezultate obţinute de Mordukhovich pentru funcţii Lipschitz continue şi prin intermediul subdiferenţialei Fréchet la clasa funcţiilor spongios Lipschitz continue şi aproape stelare.

În **Capitolul 5** ne întoarcem atenţia la formularea, prin intermediul subdiferenţialei Dini-Hadamard, a condiţiilor de optim pentru următoarea problemă generală de optimizare

$$(\mathcal{P}) \qquad \inf_{x\in\mathcal{A}} f(x)$$
$$\mathcal{A} = \{x \in C : k(x) \ \in -K\}$$

cu restricţiile exprimate cu ajutorul unei mulţimi convexe închise şi având drept funcţie obiectiv diferenţa a două funcţii. Cadrul general în care lucrăm este următorul: X şi Z sunt două spaţii Banach, C este o submuţime convexă şi închisă a lui X, $K \subseteq Z$ este un con convex închis şi nevid, $k : X \to Z$ este o funcţie K-convexă şi K-epi închisă, iar $g, h : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ sunt în aşa fel încât $\operatorname{dom} g \subseteq \operatorname{dom} h$, iar $f := g - h$. Practic, extindem un rezultat obţinut de Amahroq, Penot şi Syam [1] în cazul particular $K = \{0\}$ şi $k(x) = 0$ pentru orice $x \in X$, prin intermediul subdiferenţialei Fréchet, subliniind faptul că deşi autorii fac apel la o formulă exactă pentru subdiferenţiala limită, totuşi ei furnizează o argumentaţie incorectă, de vreme ce aceasta are loc doar în spaţii Asplund. Cu toate acestea, rezultatul obţinut în [1, Propoziţia 6] este de asemenea adevărat în spaţii Banach, iar demonstraţia poate fi făcută în liniile demonstraţiei teoremei noastre.

Contribuţiile originale ale autoarei sunt următoarele:

În Capitolul 3: Observaţia 3.1.7, Lema 3.1.8, Observaţia 3.1.9, Exemplul 3.1.10, Exemplul 3.1.11, Exemplul 3.1.12, Exemplul 3.1.13, Observaţia 3.1.14, Observaţia 3.1.16, Observaţia 3.1.17, Observaţia 3.1.18, Propoziţia 3.1.19, Propoziţia 3.1.20, Exemplul 3.1.21, Propoziţia 3.1.28, Lema 3.2.1, Lema 3.3.1, Observaţia 3.3.2, Observaţia 3.3.3, Lema 3.3.8, Lema 3.3.9, Observaţia 3.3.10, Exemplul 3.3.11, Exemplul 3.3.12, Exemplul 3.3.14, Teorema 3.3.15, Observaţia 3.3.16, Teorema 3.3.17, Observaţia 3.3.18, Propoziţia 3.3.19, Corolarul 3.3.20, Propoziţia 3.3.21, Observaţia 3.3.24, Teorema 3.3.25, Teorema 3.3.26, Propoziţia 3.3.27, Propoziţia 3.3.28, Corolarul 3.3.29, Corolarul 3.3.30, Corolarul 3.3.31, Observaţia 3.3.32, Propoziţia 3.3.33, Propoziţia 3.3.34, Propoziţia 3.3.35, Propoziţia 3.3.36, Propoziţia 3.4.1, Propoziţia 3.4.2, Observaţia 3.4.3, Propoziţia 3.4.4.

Menţionăm de asemenea faptul că tot aici au fost introduse următoarele noţiuni: *limită direcţională inferioară*, *limită direcţională superioară*, *funcţie Lipschitz spongioasă*, *funcţie spongios continuă în sens tare*, *operator spongios pseudo-disipativ* (Definiţia 3.1.23), *operator spongios gap-continuu*, *derivată direcţională Dini-Hadamard-like*, *ε-subdiferenţiala Dini-Hadamard-like*, *subdiferenţiala decuplată Dini-Hadamard-like*, *diferenţiabilitate Dini-Hadamard-like* (Definiţia 3.3.22), *diferenţiabilitate decuplată Dini-Hadamard-like* (Definiţia 3.3.23), *punct de minim local spongios*, *punct de minim local spongios decuplat*, *coderivativa decuplată Dini-Hadamard-like* şi *conul normal decuplat Dini-Hadamard*.

În Capitolul 4: Propoziţia 4.2.1, Propoziţia 4.2.2, Propoziţia 4.2.3, Observaţia 4.2.4, Teorema 4.2.5, Observaţia 4.2.6, Teorema 4.2.7, Observaţia 4.2.8, Teorema 4.2.9, Corolarul 4.2.10, Corolarul 4.2.11, Corolarul 4.2.12, Corolarul 4.2.13, Teorema 4.2.14, Corolarul 4.2.15, Observaţia 4.2.16, Corolarul 4.2.17, Corolarul 4.2.18, Corolarul 4.2.19, Teorema 4.2.20, Corolarul 4.2.21, Corolarul 4.2.22, Teorema 4.2.23, Corolarul 4.2.24, Corolarul 4.2.25, Teorema 4.2.26, Corolarul 4.2.27.

În Capitolul 5: Observaţia 5.1.2, Propoziţia 5.1.3, Teorema 5.1.4, Observaţia 5.1.5, Observaţia 5.1.6. Am introdus de asemenea în acest capitol noţiunea de *punct de minim local ε-blunt spongios* (Definiţia 5.1.1).

Sunt de asemenea şi alte discuţii şi detalii originale prezentate în această teză, însă nenumerotate.

At the end of this short Introduction we specify that the results in this paper are partially included in the following papers: A. Baias and D.-M. Nechita [10], A. Baias and D.-M. Nechita [9], R.I. Boţ and D.-M. Nechita [28], D.-M. Nechita [101], D.-M. Nechita [102], D.-M. Nechita [103] and D.-M. Nechita [104].

Cuvinte cheie: ε-subdiferenţiala Dini-Hadamard, construcţii Dini-Hadamard-like, ε-subdiferenţiala Fréchet, mulţime poroas, mulţime spongioas, funcţii aproape convexe, funcţii aproape stelare, funcţii direcţional aproape stelare, şiruri direcţional convergente, descriere variaţională, operator disipativ, gap-continuitate spongioasă, funcţie Lipschitz spongioas, funcţie spongios continuă n sens tare, coderivate, calcul subdiferenţial, condiţii de optim, probleme de optimizare cu restricţii, punct de minim local ε-blunt spongios

Mulţmiri

Mai întâi vreau să-i mulţumesc domnului Prof. Dr. Dorel Duca, îndrumătorul meu de doctorat, faţă de care sunt profund îndatorată pentru suportul şi sprijinul său constant, acordat de-a lungul întregii mele perioade doctorale.

De asemenea îi sunt deosebit de recunoscătoare domnului Dr. Radu Ioan Boţ pentru nepreţuitul său ajutor acordat de-a lungul stagiului de pregătire de la Universitatea Tehnică din Chemnitz, Germania, pentru conversaţiile roditoare, sfaturile şi prietenia sa, pentru introducerea mea în domeniul analizei nenetede.

Mulţumiri speciale se îndreaptă de asemenea către domnul Dr. Ernö Robert Csetnek şi către domnul Dr. Sorin-Mihai Grad, pentru nesfârşita lor răbdare în răspunderea la numeroasele mele întrebări.

Aş dori de asemenea să-i mulţumesc domnului Prof. Dr. Gert Wanka pentru asigurarea unui mediu excelent de cercetare în timpul şederii mele la Universitatea Tehnică din Chemnitz, Germania.

De asemenea, apreciez extrem de mult sugestiile valoroase şi discuţiile stimulente ale domnului Prof. Dr. Ştefan Cobzaş.

Totodată îi sunt recunoscătoare Facultăţii de Matematică şi Informatică din Cluj-Napoca pentru oferirea unui mediu frumos de cercetare.

Multe mulţumiri sunt apoi adresate familiei mele pentru dragostea, înţelegerea şi încurajările sale.

Mai presus de toate, nu am suficiente cuvinte să-i mulţumesc soţului meu Nicolae pentru că mi-a fost alături în toate.

Chapter 2

Subdiferenţiale: o scurtă trecere în revistă

În general, regulile de calcul pentru cele trei mari clase de obiecte ale analizei nenetede, şi anume subdiferenţiale, conuri normale şi coderivate, sunt strâns legate şi fiecare rezultat pentru fiecare dintre ele poate, în principiu, să fie obţinut din regulile de calcul al oricărui alt obiect. Astfel, alegerea unei secvenţe în care rezultatele sunt demonstrate sau prezentate este adesea o chestiune de gust sau alegere personală. Scopul nostru în această secţiune este acela de a prezenta o abordare axiomatică, dar şi cele mai importante construcţii subdiferenţiale din spaţiile Banach, alături de proprietăţile cheie, în vreme ce importanţa lor se va putea vedea de-a lungul întregii lucrări.

2.1 Exemple de subdiferenţiale

Mai întâi de toate prezentăm în Subsecţiunea 2.1.1 cele mai importante subdiferenţiale ce se pot obţine prin intermediul diverselor derivate direcţionale. Şi anume, subdiferenţiala clasică din analiza convexă, subdiferenţiala Dini-Hadamard, subdiferenţialele Clarke şi Clarke-Rockafellar, subdiferenţiala Michel-Penot. Apoi ne reamintim în Subsecţiunea 2.1.2 de subdiferenţiala Fréchet (varianta analitică şi cea geometrică) şi de subdiferenţiala Mordukhovich, evidenţiind legătura strânsă dintre ele. Subdiferenţiala proximală este mai apoi prezentată în Subsecţiunea 2.1.3, în vreme ce construcţiile topologice ale lui Ioffe sunt definite în Subsecţiunea 2.1.4. Câteva subdiferenţiale bornologice sunt mai departe detaliate în Subsecţiunea 2.1.5. În Subsecţiunea 2.1.6 prezentăm o modalitate simplă de derivare a subdiferenţialelor limită, iar în Subsecţiunea 2.1.7 ne referim la câteva construcţii de ordinul doi.

2.2 O abordare axiomatică

În încheierea acestui capitol prezentăm o modalitate abstractă de introducere a unei subdiferenţiale, alături de conul normal şi de construcţia coderivată ce se pot asocia într-un mod natural.

Chapter 3

Subdiferenţiala Dini-Hadamard şi construcţiile aferente

Fenomenele nenetede sunt bine cunoscute de mult timp în matematică şi ştiinţele aplicate. Pentru a face faţă funcţiilor nenetede, mulţimilor cu frontiere nenetede şi multifuncţiilor, diverse tipuri de derivate generalizate au fost introduse în teoria clasică a funcţiilor reale şi în teoria distribuţiei. Intenţia noastră din acest capitol este aceea de a ilustra principalele instrumente de lucru cu subdiferenţiala Dini-Hadamard, generată cu ajutorul unei derivate direcţionale interesante ce i-a fascinat pe matematicieni încă din anii 1970. Ingredientul cheie din aproape toate demonstrţiile ce implică astfel de subgradienţi se va dovedi a fi o descriere variaţională cu ajutorul mulţimilor spongioase, similară celei existente pentru subdiferenţiala Fréchet. O versiune decuplată este de asemenea introduă pe spaţiul produs, în vreme ce importanţa ei va fi văzută în Capitolul 4. Câteva clase speciale de funcţii nenetede sunt mai apoi amintite cu scopul de a furniza mai târziu câteva reguli exacte de calcul. În final, merită să subliniem faptul că prin furnizarea de exemple de mulţimi spongioase care nu sunt vecinătăţi putem mai departe construi frumoasa teorie ce se învârte în jurul acestei drăguţe construcţii subdiferenţiale.

Rezulatele prezentate în acest capitol se bazează în principal pe următoarele articole [9, 28, 101, 102, 103].

3.1 Noţiuni şi rezultate prelimiare

3.1.1 Mulţimi mici

Mai întâi de toate menţionăm că sunt multe concepte de *micime* (smallness) (a se vedea [14, 150]) ce apar frecvent în analiză, şi anume măsură teoretică (mulţimi nule de diferite tipuri), topologică (mulţimi Baire de categoria întâi), metrică (mulţimi σ-poroase sau direcţional σ-poroase), analitică (uniuni numărabile de mulţimi ce se pot scrie ca submulţimi a graficelor unor anumite clase de funcţii Lipschitz).

În această subsecţiune prezentăm câteva din conceptele de mai sus ce joacă un rol semnificativ în descrierea comportamentului tipic al derivatei direcţionale Dini-Hadamard şi al subdiferenţialei corespunzătoare în spaţii Banach.

3.1.2 Mulţimi spongioase versus vecinătăţi

Noţiunea de mulţime spongioasă a fost introdusă de către Treiman [140] şi, după cum vom vedea mai jos, se dovedeşte a fi foarte utilă în caracterizarea subdiferenţialei Dini-Hadamard. Practic, ideea acestui concept a reprezentat-o faptul că o vecinătate nu este suficient de vastă pentru a caracteriza astfel de construcţii subdiferenţiale.

Definiţia 3.1.5 *(cf. [140, Definition 2.2]) O mulţime $S \subseteq X$ se spune că este o* mulţime spongioasă *(*sponge*) în jurul lui $\overline{x} \in X$ dacă pentru orice $h \in X \setminus \{0\}$ există $\lambda > 0$ şi $\delta > 0$ astfel încât $\overline{x} + [0, \lambda] \cdot B(h, \delta) \subseteq S$.*

Se poate observa aici faptul că, dacă pentru $h \in S_X$ aceeaşi afirmaţie de mai sus rămâne adevărată, atunci obţinem o noţiune echivalentă.

Exemplul 3.1.6 (cf. [140, Exemplul 2.3]) Fie $f : X \to \mathbb{R}$ o funcţie local Lipschitz şi Gâteaux diferenţiabilă în punctul $\overline{x} \in X$, iar $x^* \in X^*$ derivata Gâteaux în acest punct. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ mulţimile

$$S_1 := \{x \in X : \ f(x) - f(\overline{x}) \geq \langle x^*, x - \overline{x} \rangle - \varepsilon \|x - \overline{x}\|\}$$

şi

$$S_2 := \{x \in X : \ f(x) - f(\overline{x}) \leq \langle x^*, x - \overline{x} \rangle + \varepsilon \|x - \overline{x}\|\}$$

sunt spongioase în jurul lui $\overline{x}$.

De fapt, după cum putem vedea uşor în definiţia de mai sus, singurul punct 0 este ignorat. Subliniem de asemenea faptul că mulţimile spongioase se bucură de o frumoasă legătură cu mulţimile con-poroase reamintite în subsecţiunea anterioară. Într-adevăr, aşa cum remarca Cobzaş în [38, Proposition 1], dacă S este o mulţime spongioasă în jurul lui $\overline{x}$ atunci mulţimea complementară $\mathcal{C}(S) \cup \{\overline{x}\}$ este con-poroasă în orice direcţie $v \in S_X$ şi astfel este o mulţime poroasă. Reamintim de asemenea faptul că orice vecinătate a unui punct $\overline{x} \in X$ este o mulţime spongioasă în jurul lui $\overline{x}$, însă invers nu (a se vedea Exemplul 3.3.11 de mai jos). Totuşi, dacă S este convexă sau X este un spaţiu finit dimensional (aici putem folosi faptul că sfera unitate este compactă), atunci S este de asemenea vecinătate a lui $\overline{x}$.

Observaţia 3.1.7 Încercând să răspundem la întrebarea cât de departe putem merge în înlocuirea vecinătăţii cu o mulţime spongioasă, prezentăm câteva proprietăţi de care o mulţime spongioasă se poate bucura cu succes:

(A) : pentru orice $h \in X \setminus \{0\}$ există $\lambda > 0$ şi o mulţime spongioasă $S^{'}$ în jurul lui h astfel încât pentru fiecare $u \in S^{'}$, $\overline{x} + [0, \lambda] \cdot u \subseteq S$.

(B) : pentru orice $h \in X \setminus \{0\}$ şi orice $d \in X \setminus \{0\}$ există $\delta > 0$ astfel încât pentru fiecare $u \in B(h, \delta) \cap (h + [0, \delta] \cdot B(d, \delta))$, $\overline{x} + [0, \delta] \cdot u \subseteq S$.

Mai mult decât atât, fiecare mulţime S ce verifică una din proprietăţile de mai sus este spongioasă în jurul lui $\overline{x}$.

Practic, frumoasa echivalenţă dintre proprietăţile de mai sus ne arată că prin înlocuirea în definiţia unei mulţimi spongioase vecinătatea cu o mulţime spongioasă nu obţinem o noţiune diferită.

3.1.3 Relaţii între şiruri direcţional convergente şi mulţimi spongioase

Inspiraţi de definiţia introdusă în [115] spunem că un şir (x_n) al lui X *converge la* $\overline{x}$ *în direcţia* $d \in X \setminus \{0\}$ (şi scriem $(x_n) \underset{d}{\longrightarrow} \overline{x}$) dacă există şirurile $(t_n) \to 0$, $t_n \geq 0$ şi $(d_n) \to d$ astfel încât $x_n = \overline{x} + t_n d_n$ pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$. Mai departe, spunem că un şir (x_n) *converge direcţional* către $\overline{x}$ dacă există $d \in X \setminus \{0\}$ astfel încât $(x_n) \underset{d}{\longrightarrow} \overline{x}$. Noţiunea noastră, uşor diferită de cea propusă de Penot [115], ne permite de asemenea să considerăm şi şirurile constante printre cele convergente direcţional. Motivaţi de această observaţie, numim *limită inferioară drecţională* a lui f în punctul $\overline{x}$ după direcţia $d \in X \setminus \{0\}$ următoarea limită

$$\liminf_{x \underset{d}{\longrightarrow} \overline{x}} f(x) := \sup_{\delta>0} \inf_{x \in B(\overline{x},\delta) \cap (\overline{x}+[0,\delta]\cdot B(d,\delta))} f(x).$$

Similar putem defini *limita superioară direcţională* a lui f în punctul $\overline{x}$ după direcţia $d \in X \setminus \{0\}$, de vreme ce proprietăţile limitei inferioare le induc simetric pe cele superioare

$$\limsup_{x \underset{d}{\longrightarrow} \overline{x}} f(x) := -\liminf_{x \underset{d}{\longrightarrow} \overline{x}} (-f)(x) = \inf_{\delta>0} \sup_{x \in B(\overline{x},\delta) \cap (\overline{x}+[0,\delta]\cdot B(d,\delta))} f(x).$$

Mai mult, putem observa că

$$\liminf_{x \to \overline{x}} f(x) \leq \liminf_{x \underset{d}{\longrightarrow} \overline{x}} f(x) \leq \limsup_{x \underset{d}{\longrightarrow} \overline{x}} f(x) \leq \limsup_{x \to \overline{x}} f(x) \text{ for all } d \in X \setminus \{0\}. \tag{3.1}$$

De fapt, aşa cum Penot a observat mai întâi (a se vedea [115, Lema 2.1]), conceptul de şir convergent direcţional este în mod evident legat de mulţimile spongioase introduse mai sus. Aşadar, să ilustrăm în final această fructuoasă relaţie.

Lema 3.1.8 *O submulţime S a lui X este spongioasă în jurul lui $\overline{x}$ dacă şi numai dacă pentru orice şir (x_n) convergent direcţional către $\overline{x}$ există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru fiecare $n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0,\ x_n \in S$.*

O consecinţă directă a acestui rezultat este aceea că cele două noţiuni de limită inferioară prezentate mai sus coincid în spaţii finit dimensionale.

3.1.4 Noţiuni de continuitate spongioasă

În scopul Secţiunii 4.2, generalizăm în aceasă subsecţiune bine-cunoscuta continuitate Lipschitz pentru funcţii, în fapt foarte importantă în analiza variaţională şi aplicaţiile ei.

Şi anume, spunem că $f : X \to Y$ este *Lipschitz spongioasă* în punctul $\overline{x} \in X$ dacă există $K > 0$ şi o mulţime spongioasă S în jurul lui $\overline{x}$ astfel încât pentru orice $x \in S$ următoarea inegalitate

$$\|f(x) - f(\overline{x})\| \leq K\|x - \overline{x}\|$$

este adevărată. Este limpede că dacă f este Lipschitz în punctul $\overline{x}$ atunci este şi Lipschitz spongioasă în $\overline{x}$, dar nu şi viceversa (a se vedea Exemplul 3.1.11 de mai jos). Totuşi, cele două noţiuni coincid în cazul în care $\dim X < +\infty$. Bineînţeles, f se numeşte local Lipschitz spongioasă în jurul lui $\overline{x}$ dacă următoarea inegalitate $\|f(x) - f(y)\| \leq K\|x - y\|$ este verificată pentru fiecare $x, y \in S$.

Mai departe, spunem că f este *tare spongios continuă* în punctul $\overline{x} \in X$ dacă pentru orice mulţime spongioasă S_2 în jurul lui $f(\overline{x})$ există o mulţime spongioasă S_1 în jurul lui $\overline{x}$ astfel încât $f(S_1) \subseteq S_2$. De fapt, această specială continuitate este o versiune mai puternică decât următoarea, menţionată de Penot în [115]. Şi anume, f este *spongios continuă* în punctul $\overline{x}$ dacă pentru fiecare vecinătate V a lui $f(\overline{x})$ există o mulţime spongioasă S a lui $\overline{x}$ astfel încât $f(S) \subset V$, adică dacă f este *direcţional continuă* în $\overline{x}$ în sensul următor: pentru orice $d \in X \setminus \{0\}$ şi orice şir convergent direcţional $(x_n) \underset{d}{\longrightarrow} \overline{x}$ avem $(f(x_n)) \to f(\overline{x})$. Totuşi, atunci când Y este finit dimensional, cele două noţiuni coincid. Menţionăm de asemenea şi faptul că nu putem stabili nici o legătură precisă între continuitatea clasică şi continuitatea tare spongioasă. Cu toate acestea, orice funcţie care este fie continuă, fie tare spongios continuă în punctul $\overline{x}$ este în mod evident continuă în $\overline{x}$.

Observaţia 3.1.9 Putem observa de asemenea că, în contrast cu continuitatea Lipschitz, care practic ascunde în spate continuitatea clasică a funcţiei în cauză, simplul fapt că f este Lipschitz spongioasă în punctul $\overline{x}$ nu implică în mod necesar ca f să fie şi tare spongios continuă în $\overline{x}$, exceptând cazul în care Y este finit dimensional.

Următoarele exemple intenţionează să completeze tabloul celor patru continuităţi studiate mai sus.

Exemplul 3.1.10 Fie X un spaţiu Banach infinit dimensional şi S o mulţime spongioasă în jurul punctului 0_X care nu este vecinătate a lui 0_X (a se vedea Exemplul 3.3.11 de mai jos). Mai departe definim funcţia $f : X \to X$ după cum urmează

$$f(x) = \begin{cases} 0_X, & \text{if } x \in S, \\ \frac{x}{\|x\|}, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Atunci f este Lipschitz spongioasă şi tare spongios continuă în punctul 0_X, dar nu este Lipschitz şi nici măcar continuă în 0_X.

Următorul exemplu descrie o situaţie similară pentru cazul în care al doilea spaţiu în cauză este finit dimensional.

Exemplul 3.1.11 Fie S o mulţime spongioasă în jurul punctului $\overline{x} \in X$ care nu este vecinătate a lui $\overline{x}$ şi definim funcţia $f : X \to \mathbb{R}$ în felul următor

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \in S, \\ -1, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Atunci f este Lipschitz spongioasă şi tare spongios continuă în punctul $\overline{x}$, dar nu este Lipschitz şi nici măcar continuă în $\overline{x}$.

Am văzut mai sus că în cazul spaţiilor infinit dimensionale reuşim să găsim funcţii care sunt tare spongios continue, dar nu sunt continue. Acum este timpul să construim o funcţie continuă care nu este spongios continuă.

Exemplul 3.1.12 Fie X un spaţiu Banach şi S o mulţime spongioasă în jurul lui $\overline{x} \in X$ care nu este vecinătate a lui $\overline{x}$. Aceasta înseamnă că pentru orice număr natural $n \in \mathbb{N}^*$ putem găsi cel puţin un element x_n (fixăm unul) astfel încât $x_n \in \overline{B}(\overline{x}, \frac{1}{n}) \backslash S$. Mai departe, definim o funcţie $f : X \to X$ după cum urmează

$$f(x) = \begin{cases} x_{n+1}, & \text{if } x \in \overline{B}(\overline{x}, \frac{1}{n}) \setminus B(\overline{x}, \frac{1}{n+1}), n \in \mathbb{N}^* \\ x, & \text{altfel,} \end{cases}$$

Atunci f este Lipschitz continuă şi Lipschitz spongioasă în punctul $\overline{x}$, dar nu este tare spongios continuă în $\overline{x}$.

Urmând ideea de mai sus putem furniza un exemplu similar pentru cazul în care doar cel de-al doilea spaţiu este infinit dimensional.

Exemplul 3.1.13 Fie X un spaţiu Banach şi S o mulţime spongioasă în jurul punctului $0_X \in X$ care nu este vecinătate a lui 0_X. Atunci pentru orice număr natural $n \in \mathbb{N}^*$ putem găsi cel puţin un element x_n (fixăm unul) astfel încât $x_n \in \overline{B}(0_X, \frac{1}{n}) \setminus S$. Mai departe, definim funcţia $f : \mathbb{R} \to X$ în felul următor

$$f(x) = \begin{cases} x_{n+1}, & \text{if } x \in \left[-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}\right) \bigcup \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right], n \in \mathbb{N}^* \\ 0_X, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Atunci f este Lipschitz continuă şi Lipschitz spongioasă în punctul 0, dar nu este tare spongios continuă în 0.

Astfel, noţiunea de continuitate spongioasă pare a fi mai generală decât cea de continuitate în cazul în care X este infinit dimensional, iar Y este finit dimensional, în vreme ce situaţia se inversează atunci când X este finit dimensional, iar Y este infinit dimensional. Dar, bineînţeles, cele două noţiuni coincid în spaţii finit dimensionale. În final, următoarea observaţie intenţionează să surprindă toate aspectele prezentate mai sus.

Observaţia 3.1.14 Pentru fiecare funcţie $f : X \to Y$ finită în punctul $\overline{x}$ au loc următoarele:

(a) *Dacă X şi Y sunt ambele infinit dimensionale atunci*

$$
\begin{array}{ccc}
f \text{ continuă în } \overline{x} & \begin{array}{c}\textit{(Ex. 3.1.10)}\\ \not\Longleftarrow \\ \not\Longrightarrow \\ \textit{(Ex. 3.1.12)}\end{array} & f \text{ tare spongios continuă în } \overline{x} \\
\not\Downarrow \ \Uparrow & & \not\Uparrow \ \not\Downarrow \ \textit{(Ex. 3.1.12)} \\
f \text{ Lipschitz în } \overline{x} & \begin{array}{c}\textit{(Ex. 3.1.10)}\\ \not\Longleftarrow \\ \Longrightarrow \\ (\textit{def.})\end{array} & f \text{ Lipschitz spongioasă în } \overline{x}
\end{array}
$$

(b) *Dacă X şi Y sunt ambele finit dimensionale atunci*

$$
\begin{array}{ccc}
f \text{ continuă în } \overline{x} & \Longleftrightarrow & f \text{ tare spongios continuă în } \overline{x} \\
\not\Downarrow \ \Uparrow & & \Uparrow \ \not\Downarrow \\
f \text{ Lipschitz în } \overline{x} & \Longleftrightarrow & f \text{ Lipschitz spongioasă în } \overline{x}
\end{array}
$$

(c) *Dacă X este finit dimensional, iar Y este infinit dimensional atunci*

$$
\begin{array}{ccc}
f \text{ continuă în } \overline{x} & \begin{array}{c}\textit{(def.)}\\ \Longleftarrow \\ \not\Longrightarrow \\ \textit{(Ex. 3.1.13)}\end{array} & f \text{ tare spongios continuă în } \overline{x} \\
\not\Downarrow \ \Uparrow & & \textit{(Ex. 3.1.13)} \not\Uparrow \ \not\Downarrow \\
f \text{ Lipschitz în } \overline{x} & \begin{array}{c}\Longleftrightarrow \\ \textit{(def.)}\end{array} & f \text{ Lipschitz spongioasă în } \overline{x}
\end{array}
$$

(d) *Dacă X este infinit dimensional, iar Y este finit dimensional atunci*

$$
\begin{array}{ccc}
f \text{ continuă în } \overline{x} & \begin{array}{c}\textit{(Ex. 3.1.11)}\\ \not\Longleftarrow \\ \Longrightarrow \\ \textit{(def.)}\end{array} & f \text{ tare spongios continuă în } \overline{x} \\
\not\Downarrow \ \Uparrow & & \textit{(Rem. 3.1.9)} \ \Uparrow \ \not\Downarrow \\
f \text{ Lipschitz în } \overline{x} & \begin{array}{c}\textit{(Ex. 3.1.11)}\\ \not\Longleftarrow \\ \Longrightarrow \\ (\textit{def.})\end{array} & f \text{ Lipschitz spongioasă în } \overline{x}
\end{array}
$$

3.1.5 Clase favorabile de funcţii nenetede

Începem această subsecţiune cu amintirea câtorva noţiuni de convexitate generalizată pentru funcţii, în vreme ce importanţa şi influenţa lor esenţială o vom descoperi în cele ce urmează.

Definiţia 3.1.15 *Fie $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ o funcţie dată şi $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$. Atunci f este* *(i)* aproape convexă *în punctul* $\overline{x}$ *dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $\delta > 0$ *astfel încât pentru fiecare* $x, y \in B(\overline{x}, \delta)$ *şi fiecare* $t \in [0,1]$ *avem*

$$f((1-t)y + tx) \leq (1-t)f(y) + tf(x) + \varepsilon t(1-t)\|x - y\|. \tag{3.2}$$

(ii) aproape stelară *în punctul* $\overline{x}$ *dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $\delta > 0$ *astfel încât pentru fiecare* $x \in B(\overline{x}, \delta)$ *şi fiecare* $t \in [0,1]$ *avem*

$$f((1-t)\overline{x} + tx) \leq (1-t)f(\overline{x}) + tf(x) + \varepsilon t(1-t)\|x - \overline{x}\|. \tag{3.3}$$

(iii) direcţional aproape stelară *în punctul* $\overline{x}$ *dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *şi orice* $u \in S_X$ *există* $\delta > 0$ *astfel încât pentru fiecare* $s \in (0, \delta)$, *fiecare* $v \in B(u, \delta)$ *şi fiecare* $t \in [0,1]$, *cu* $x := \overline{x} + sv$, *avem*

$$f((1-t)\overline{x} + tx) \leq (1-t)f(\overline{x}) + tf(x) + \varepsilon t(1-t)\|x - \overline{x}\|. \tag{3.4}$$

Funcţiile aproape convexe au fost introduse în [106] (a se vedea şi [8, 107]), în vreme ce funcţiile aproape stelare şi direcţional aproape stelare au fost obiect de studiu în [108].

Observaţia 3.1.16 Mulţimea funcţiilor aproape convexe într-un punct dat $\overline{x} \in X$ este un con convex ce conţine funcţiile strict diferenţiabile în $\overline{x}$, fiind stabile în raport cu considerarea supremumului unui număr finit de funcţii şi în plus, majoritatea subdiferenţialelor cunoscute coincid pe astfel de funcţii, împărţind câteva proprietăţi ale subdiferenţialei convexe (a se vedea [106]). Un exemplu de funcţie aproape convexă în orice punct $x \in \mathbb{R}$, care nu este convexă este $x \mapsto |x| - x^2$.

Observaţia 3.1.17 Putem observa uşor că dacă f este aproape convexă în punctul $\overline{x}$, atunci este şi aproape stelară în $\overline{x}$. Cu toate acestea, implicaţia inversă nu are loc. Următorul exemplu în acest sens a fost inspirat de [108, Exemplul 6.10]. Definim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ după cum urmează: $f(0) = 0$, $f(x) = 1/(2n+1)(x - 1/(2n)) + 1/(4n^2)$, pentru $x \in [1/(2n+1), 1/(2n)]$, $n \geq 1$, $f(x) = 1/(2n)x$, pentru $x \in [1/(2n), 1/(2n-1))$, $n \geq 1$, $f(x) = +\infty$, pentru $x \geq 1$, în vreme ce pentru $x < 0$ considerăm $f(x) = f(-x)$. Atunci f este aproape stelară în punctul 0, dar nu este aproape convexă în 0.

Observaţia 3.1.18 În urma unui calcul direct putem arăta că dacă f este aproape stelară în punctul $\overline{x}$, atunci este de asemenea şi direcţional aproape stelară în $\overline{x}$. Pentru a furniza însă un exemplu în care implicaţia inversă eşuează trebuie să caracterizăm mai întâi clasa funcţiilor direcţional aproape stelare prin intermediul mulţimilor spongioase. O consecinţă directă a Propoziţiei 3.1.19 va fi aceea că, în spaţii finit dimensionale, cele două clase de funcţii coincid

Propoziţia 3.1.19 *Fie* $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *o funcţie dată şi* $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$. *Atunci* f *este direcţional aproape stelară în punctul* $\overline{x}$ *dacă şi numai dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există o mulţime spongioasă* S *în jurul lui* $\overline{x}$ *astfel încât pentru fiecare* $x \in S$ *şi fiecare* $t \in [0,1]$ *avem*

$$f((1-t)\overline{x} + tx) \leq (1-t)f(\overline{x}) + tf(x) + \varepsilon t(1-t)\|x - \overline{x}\|. \tag{3.5}$$

Merită subliniat aici faptul că având în vedere Observaţia 3.1.7, caracterizarea de mai sus cu ajutorul mulţimilor spongioase este de asemenea echivalentă cu următoarea.

Propoziţia 3.1.20 *Fie $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ o funcţie dată şi $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$. Atunci f este direcţional aproape stelară în punctul $\overline{x}$ dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, $h \in X \setminus \{0\}$ şi orice $d \in X \setminus \{0\}$ există $\delta > 0$ astfel încât pentru fiecare $s \in (0, \delta)$, $v \in B(h, \delta) \cap (h + [0, \delta] \cdot B(d, \delta))$ şi fiecare $t \in [0, 1]$, cu $x := \overline{x} + sv$, relaţia (3.5) de mai sus rămâne adevărată.*

Am ajuns acum la exemplul anunţat al unei funcţii direcţional aproape stelare într-un punct care eşuează să fie aproape stelară în acel punct.

Exemplul 3.1.21 Fie $\overline{x} \in X$, $S \subseteq X$ o mulţime spongioasă în jurul punctului $\overline{x}$, care nu este o vecinătate a lui $\overline{x}$ (a se vedea Exemplul 3.3.11) şi funcţia cu valori reale $f : X \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in S, \\ -\|x - \overline{x}\|, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Atunci f este direcţional aproape stelară în punctul $\overline{x}$ dar nu este aproape stelară în $\overline{x}$.

3.1.6 Asupra unor diverse tipuri de proprietăţi disipative pentru operatori

Noţiunile prezentate în această subsecţiune joacă un rol special în derivarea formulelor e-xacte de diferenţă pentru dubdiferenţialele Dini-Hadamard şi Dini-Hadamard-like. Practic propunem diverse tipuri de noţiuni topologice pentru operatori, arătând relţiile dintre ele şi cele introduse de Penot în [119].

Rezultatele din această subsecţiune se bazează mai cu seamă pe articolele [9] and [28].

Definiţia 3.1.22 (cf. [119, Definition 1]) *O multifuncţie $F : X \rightrightarrows X^*$ se spune că este* aproape pseudo-disipativă *în punctul $\overline{x} \in X$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ găsim un $\delta > 0$ astfel încât*

$$\forall x \in B(\overline{x}, \delta),\ \exists x^* \in F(x),\ \exists \overline{x}^* \in F(\overline{x}) \quad \langle x^* - \overline{x}^*, x - \overline{x} \rangle \leq \varepsilon \|x - \overline{x}\|.$$

Descriem în cele ce urmează două modalităţi de extindere a proprietăţii de aproape pseudo-disipativitate. Observăm de asemenea că prima proprietate de mai jos se obţine prin înclouirea în Definiţia 3.1.22 a vecinătăţilor cu mulţimi spongioase.

Definiţia 3.1.23 *O multifuncţie $F : X \rightrightarrows X^*$ se spune că este* spongios pseudo-disipativă *în punctul $\overline{x} \in X$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există a mulţime spongioasă S în jurul lui $\overline{x}$ astfel încât pentru fiecare $x \in S$ găsim $x^* \in F(x)$ şi $\overline{x}^* \in F(\overline{x})$ astfel încât*

$$\langle x^* - \overline{x}^*, x - \overline{x} \rangle \leq \varepsilon \|x - \overline{x}\|$$

sau, echivalent, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ şi orice $u \in S_X$ există $\delta > 0$ astfel încât pentru fiecare $t \in (0, \delta)$ şi $v \in B(u, \delta)$ găsim $x^* \in F(x)$ şi $\overline{x}^* \in F(\overline{x})$ astfel încât

$$\langle x^* - \overline{x}^*, v \rangle \leq \varepsilon \|v\|.$$

Definiţia 3.1.24 (cf. [119, Definition 1]) *O multifuncţie* $F : X \rightrightarrows X^*$ *se spune că este* direcţional aproape pseudo-disipativă *în punctul* $\overline{x} \in X$ *dacă pentru orice* $u \in S_X$ *şi orice* $\varepsilon > 0$ *găsim un* $\delta > 0$ *astfel încât*

$$\forall v \in B(u, \delta),\ \forall t \in (0, \delta)\ \exists x^* \in F(\overline{x} + tv),\ \exists \overline{x}^* \in F(\overline{x}) \quad \langle x^* - \overline{x}^*, v\rangle \leq \varepsilon.$$

De vreme ce ultima inegalitate se poate scrie $\langle x^* - \overline{x}^*, x - \overline{x}\rangle \leq \varepsilon \|x - \overline{x}\|$ cu $x := \overline{x} + tv$, ε fiind arbitrar, vedem că F este direcţional aproape pseudo-disipativă în punctul $\overline{x}$ ori de câte ori este aproape pseudo-disipativă în $\overline{x}$. Mai mult, în virtutea unui simplu argument de acoperire ele coincid atunci când X este finit dimensional.

În fapt aceste ultime condiţii nu sunt foarte restrictive, de vreme ce următoarea continuitate inferioară (introdusă în [1]) asigură proprietatea de aproape pseudo-disipativitate şi de asemenea pe cea de *gap-continuitate spongioasă* studiată în [28]. Să formulăm acum acest concept.

Definiţia 3.1.25 (cf. [1, Definition 2]) *O multifuncţie* $F : X \rightrightarrows Y$ *între un spaţiu topologic* X *şi un spaţiu metric* Y *se spune că este* gap-continuă *în punctul* $\overline{x} \in X$ *dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *găsim un* $\delta > 0$ *astfel încât pentru fiecare* $x \in B(\overline{x}, \delta)$

$$\operatorname{gap}(F(\overline{x}), F(x)) < \varepsilon,$$

unde pentru două submulţimi A *şi* B *ale lui* Y

$$\operatorname{gap}(A, B) := \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\},$$

cu convenţia că dacă una dintre ele este vidă, atunci $\operatorname{gap}(A, B) := +\infty$.

Pentru a defini o multifuncţie spongios gap-continuă trebuie doar să înlocuim în definiţia de mai sus vecinătatea $B(\overline{x}, \delta)$ a punctului $\overline{x}$ cu o mulţime spongioasă S în jurul lui $\overline{x}$. De aceea, orice multifuncţie gap-continuă într-un punct este spongios gap-continuă şi pe deasupra spongios pseudo-disipativă şi de asemenea direcţional aproape pseudo-disipativă în acel punct. Mai mult decât atât, orice multifuncţie care este fie Hausdorff superior semicontinuă fie inferior semicontinuă într-un punct este de asemenea gap-continuă în acel punct (see [118]). Astfel, gap-continuitatea este un fel de semicontinuitate ce se verifică în multe situaţii în care nici o altă noţiune de semicontinuitate nu este adevărată. În mod evident, atunci când X este finit dimensional noţiunea de gap-continuitate coincide cu cea de gap-continuitate spongioasă.

Merită să subliniem de asemenea aici faptul că o multifuncţie $F : X \rightrightarrows Y$ este spongios gap-continuă în punctul $\overline{x}$ dacă şi numai dacă pentru orice $u \in X \setminus \{0\}$, $\operatorname{gap}(F(\overline{x} + tv), F(\overline{x})) \to 0$, atunci când $(t, v) \to (0_+, u)$, adică noţiunea de gap-continuitate spongioasă definită în [28] este echivalentă cu cea de *gap-continuitate direcţională* introdusă mai târziu de Penot [119]. De fapt, cu toate că noţiunea de mulţime spongioasă nu este menţionată în mod explicit în [119], se folosesc cu succes o serie de şiruri convergente direcţional. Facem referire la următoarele articole scrise de Penot [118, 119], pentru mai multe discuţii şi câteva criterii ce asigură deopotrivă gap-continuitatea şi aproape pseudo-disipativitatea.

Pe de altă parte, se poate arăta că $F : X \rightrightarrows Y$ este spongios gap-continuă în punctul $\overline{x}$ dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există o mulţime spongioasă S în jurul lui $\overline{x}$ astfel încât pentru fiecare $x \in S$ să avem

$$F(x) \cap (F(\overline{x}) + \varepsilon B_Y) \neq \emptyset. \tag{3.6}$$

Atunci când $\overline{x} \in X$ şi $S \subseteq X$ este o mulţime spongioasă în jurul lui $\overline{x}$, care nu este vecinătate a lui $\overline{x}$, atunci $F : X \rightrightarrows \mathbb{R}$ definită prin $F(x) = \{0\}$ pentru $x \in S$ şi $F(x) = \emptyset$, altfel, este spongios gap-continuă însă nu şi gap-continuă în $\overline{x}$.

Propoziţia 3.1.28 *Fie $F, G : X \rightrightarrows Y$ două multifuncţii. Dacă F este spongios gap-continuă în punctul $\overline{x} \in X$ şi există o mulţime spongioasă S în jurul lui $\overline{x}$ astfel încât $F(x) \subseteq G(x)$ pentru orice $x \in S$, atunci G este spongios gap-continuă în $\overline{x}$.*

Notăm de asemenea faptul că proprietatea de mai sus are loc de asemenea şi pentru multifuncţii spongios pseudo-disipative.

3.2 Derivate de tipul Dini-Hadamard

Scopul nostru acum este acela de a arăta că pornind de la derivata direcţională Dini-Hadamard prezentată mai jos putem uşor defini un obiect de tip derivată prin intermediul şirurilor convergente direcţional.

Mai întâi să reamintim că

$$d^{DH} f(\overline{x}; h) := \liminf_{\substack{u \to h \\ t \downarrow 0}} \frac{f(\overline{x} + tu) - f(\overline{x})}{t} = \sup_{\delta > 0} \inf_{\substack{u \in B(h,\delta) \\ t \in (0,\delta)}} \frac{f(\overline{x} + tu) - f(\overline{x})}{t} \tag{3.7}$$

defineşte derivata direcţională Dini-Hadamard a funcţiei f în punctul $\overline{x}$, în vreme ce

$$d^{DH,+} f(\overline{x}; h) := \limsup_{\substack{u \to h \\ t \downarrow 0}} \frac{f(\overline{x} + tu) - f(\overline{x})}{t} = \inf_{\delta > 0} \sup_{\substack{u \in B(h,\delta) \\ t \in (0,\delta)}} \frac{f(\overline{x} + tu) - f(\overline{x})}{t},$$

este replica ei superioară, denumită şi *derivata direcţională superioară Dini-Hadamard.*

Bineînţeles că

$$d^{DH,+} f(\overline{x}; h) = -d^{DH}(-f)(\overline{x}; h),$$

astfel încât este suficient să considerăm doar derivate inferioare.

După prezentarea a câtorva proprietăţi elementare (a se vedea, de exemplu, [3, 15, 63, 73, 111, 122]), introducem următoarea construcţie (vezi [101]),

$$\widetilde{D}_d f(\overline{x}; h) := \sup_{\delta > 0} \inf_{\substack{u \in B(h,\delta) \cap (h + [0,\delta] \cdot B(d,\delta)) \\ t \in (0,\delta)}} \frac{f(\overline{x} + tu) - f(\overline{x})}{t}, \tag{3.8}$$

denumită simplu *derivată direcţională Dini-Hadamard-like* a funcţiei f în punctul $\overline{x}$ în direcţia $h \in X$ prin intermediul lui $d \in X \setminus \{0\}$. Ea extinde oarecum derivata direcţională Dini-Hadamard, în vreme ce ideea esenţială s-a inspirat din legătura existentă între mulţimile spongioase şi şirurile convergente direcţional. De fapt, după cum putem vedea uşor, şirurile convergente direcţional sunt folosite în locul celor uzuale.

Întotdeauna avem următoarea inegalitate $d^{DH}f(\overline{x};h) \leq \widetilde{D}_d f(\overline{x};h)$, ce are loc ca egalitate în spaţii finit dimensionale dacă luăm în considerare Lema 3.1.8 şi faptul că sfera unitate este compactă.

În plus, ca şi în cazul derivatei direcţionale Dini-Hadamard, pentru $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$ şi $d \in X \setminus \{0\}$, $\widetilde{D}_d f(\overline{x};\cdot)$ este în general neconvexă, însă pozitiv omogenă şi astfel $\widetilde{D}_d f(\overline{x};0)$ este sau 0 sau $-\infty$. Mai mult, putem (formal) să scriem

$$\widetilde{D}_d f(\overline{x};h) = \liminf_{\substack{u \xrightarrow[d]{} h \\ t \xrightarrow[1]{} 0}} \frac{f(\overline{x}+tu)-f(\overline{x})}{t} = \liminf_{\substack{u \xrightarrow[d]{} h \\ t \downarrow 0}} \frac{f(\overline{x}+tu)-f(\overline{x})}{t}.$$

În final, următoarea lemă este de o importanţă specială în obţinerea unor rezultate diverse ce implică construcţii Dini-Hadamard-like.

Lema 3.2.1 *Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie dată şi $\overline{x}, h \in X$. Atunci următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

(i) $\widetilde{D}_d f(\overline{x};h) \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(\overline{x}+t_n u_n)-f(\overline{x})}{t_n}$,
ori de câte ori $(u_n) \xrightarrow[d]{} h$ *şi* $(t_n \downarrow 0)$, *cu* $d \in X \setminus \{0\}$.

(ii) Dacă pentru un oarecare $d \in X \setminus \{0\}$, $\widetilde{D}_d f(\overline{x};h) = l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, *atunci există şirurile* $(u_n) \xrightarrow[d]{} h$ *şi* $(t_n \downarrow 0)$ *astfel încât* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(\overline{x}+t_n u_n)-f(\overline{x})}{t_n} = l$.

3.3 Subgradienţi de tipul Dini-Hadamard

3.3.1 Definiţii de bază şi câteva proprietăţi

În această secţiune introducem o nouă construcţie subdiferenţială şi studiem relaţiile dintre ea şi subdiferenţiala Dini-Hadamard. Ca de obicei, cadrul în care lucrăm este acela al spaţiilor Banach.

Începem cu definiţia subdiferenţialei Dini-Hadamard. Şi anume, următoarea mulţime

$$\partial_\varepsilon^{DH} f(\overline{x}) := \{x^* \in X^* : \langle x^*, h\rangle \leq d^{DH} f(\overline{x};h) + \varepsilon\|h\| \text{ pentru orice } h \in X\}, \tag{3.9}$$

unde $\varepsilon \geq 0$, se numeşte *ε-subdifferenţiala Dini-Hadamard* a funcţiei f în punctul $\overline{x}$, în vreme ce $\partial^{DH} f(\overline{x}) := \partial_0^{DH} f(\overline{x})$ se cheamă simplu *subdiferenţiala Dini-Hadamard* a lui f în $\overline{x}$. Atunci când $\overline{x} \notin \operatorname{dom} f$, convenim ca $\partial_\varepsilon^{DH} f(\overline{x}) := \emptyset$ pentru orice $\varepsilon \geq 0$.

Similar, urmând cei doi paşi ai procedurii de construire a ε-subdifferenţialei Dini-Hadamard, însă folosind convergenţa direcţională în locul celei uzuale, putem defini (vezi [101]) *ε-subdifferenţiala Dini-Hadamard-like* a lui f în $\overline{x}$, adică mulţimea

$$\widetilde{\partial}_\varepsilon f(\overline{x}) := \{x^* \in X^* : \langle x^*, h\rangle \leq \widetilde{D}_d f(\overline{x};h) + \varepsilon\|h\| \ \ \forall h \in X \ \forall d \in X \setminus \{0\}\}.$$

În cazul în care $\overline{x} \notin \operatorname{dom} f$, considerăm $\widetilde{\partial}_{\varepsilon} f(\overline{x}) := \emptyset$. Dacă $\varepsilon = 0$, $\widetilde{\partial} f(\overline{x}) := \widetilde{\partial}_0 f(\overline{x})$ indică *subdiferenţiala Dini-Hadamard-like* a lui f în $\overline{x}$.

Observăm de asemenea că deşi cele două derivate direcţionale $d^{DH} f(\overline{x}; \cdot)$ şi $\widetilde{D}_d f(\overline{x}; \cdot)$ sunt în general neconvexe, ε-subdiferenţialele Dini-Hadamard şi Dini-Hadamard-like a lui f în $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$ sunt întotdeauna mulţimi convexe.

Pentru $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$ şi $\varepsilon \geq 0$, definim $f_{\varepsilon} : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ca fiind

$$f_{\varepsilon}(x) := f(x) + \varepsilon \|x - \overline{x}\|. \tag{3.10}$$

Lema 3.3.1 *Fie $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ o funcţie dată şi $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$. Atunci pentru orice $\varepsilon \geq 0$ are loc*

$$\partial_{\varepsilon}^{DH} f(\overline{x}) = \partial^{DH} f_{\varepsilon}(\overline{x}). \tag{3.11}$$

Observaţia 3.3.2 Menţionăm de asemenea că putem înlocui în (3.11) subdiferenţiala Dini-Hadamard cu subdiferenţiala Fréchet (a se vedea, spre exemplu, [1]) şi de asemenea şi cu subdiferenţiala Dini-Hadamard-like. Pe de altă parte, dacă f este convexă, conform unei formule subdiferenţiale clasice de sumă furnizată de analiza convexă, avem $\partial^{DH} f_{\varepsilon}(x) = \widetilde{\partial} f_{\varepsilon}(x) = \partial f(x) + \varepsilon \overline{B}_{X^*}$ pentru orice $x \in X$ şi orice $\varepsilon \geq 0$. Subliniem de asemenea faptul că pentru ε-subdifferenţiala Dini-Hadamard şi extensia ei naturală, are loc următoarea proprietate de monotonie:

$$\partial_{\varepsilon_1}^{DH} f(x) \subseteq \partial_{\varepsilon_2}^{DH} f(x), \tag{3.12}$$

$$\widetilde{\partial}_{\varepsilon_1} f(x) \subseteq \widetilde{\partial}_{\varepsilon_2} f(x), \tag{3.13}$$

dacă $\varepsilon_2 \geq \varepsilon_1 \geq 0$ şi $x \in X$.

Observaţia 3.3.3 În final, folosind relaţiile (3.12) şi (3.13) putem arăta că pentru o funcţie dată $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ şi pentru un punct dat $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$, $\partial_{\eta}^{DH} f$ este spongios gap-continuă în $\overline{x}$ pentru orice $\eta > 0$, ori de câte ori $\partial^{DH} f$ este spongios gap-continuă în $\overline{x}$, în vreme ce $\widetilde{\partial}_{\eta} f$ este spongios pseudo-disipativă în $\overline{x}$ pentru orice $\eta > 0$, dacă $\widetilde{\partial} f$ este spongios pseudo-disipativă în $\overline{x}$.

3.3.2 Rolul cheie al proprietăţii de calmare în descrierea subgradienţilor Dini-Hadamard

În această secţiune, cu noţiunea de calmare (liniştire) (dezvoltată mai întâi de Clarke [33] cu scopul de a exprima un anumit tip de condiţie de calificare; a se vedea şi [34]), aducem în lumină câteva proprietăţi ale subdiferenţialei Dini-Hadamard ale unei funcţii arbitrare pe un spaţiun Banach. Cu toate că pentru studiul acestor subgradienţi această noţiune este fundamentală, nu acelaşi lucru este însă valabil şi pentru subgradienţii Dini-Hadamard-like.

Definiţia 3.3.4 *O funcţie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ se numeşte* calmă în punctul $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$ *dacă există $c \geq 0$ şi $\delta > 0$ astfel încât $f(x) - f(\overline{x}) \geq -c\|x - \overline{x}\|$ pentru orice $x \in B(\overline{x}, \delta)$.*

Dacă $-f$ este calmă în $\overline{x}$, atunci f se numeşte *tăcută* în $\overline{x}$, iar dacă f este şi calmă şi tăcută în $\overline{x}$, atunci f se numeşte *stabilă* în $\overline{x}$.

Următoarea propoziţie este primul îngredient ce subliniază relaţia strânsă dintre condiţia de calmare (liniştire) şi subdiferenţiabilitatea contingent sau Dini-Hadamard.

Propoziţia 3.3.5 (cf. [54, Propoziţia 2.2]) *Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie dată şi $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *f este calmă în punctul $\overline{x}$.*

(ii) *Pentru orice $x \in X$ şi orice şir $((x_n, r_n))_n \in X \times (0, 1]$ ce converge către $(x, 0_+)$ pentru m suficient de mare, şirul $(r^{-1}(f(\overline{x} + r_n x_n) - f(\overline{x})))_{n \geq m}$ este mărginit inferior.*

(iii) *Există o constantă $c \in \mathbb{R}_+$ astfel încât pentru fiecare $h \in X$:*

$$d^{DH} f(\overline{x}; h) \geq -c\|h\|.$$

(iv) *Derivata inferioară $d^{DH} f(\overline{x}; \cdot)$ nu ia valoarea $-\infty$ pe X.*

(v) $d^{DH} f(\overline{x}; 0) = 0$.

Mai mult, dacă f este tangenţial convexă în $\overline{x}$ (i.e. $d^{DH} f(\overline{x}; \cdot)$ este o funcţie convexă), atunci are loc şi echivalenţa adiţională:

(vi) *$\partial^{DH} f(\overline{x})$ este nevidă.*

Următoarea lemă interesantă, graţie lui Penot [119, Lema 19], furnizează o condiţie suficientă pentru ca o funcţie să fie tangenţial convexă.

Lema 3.3.6 *Dacă funcţia $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ este aproape convexă în punctul $\overline{x} \in$* core(dom f)*, atunci f admite o derivată direcţională în $\overline{x}$ care este subliniară şi finită, astfel că f este tangenţial convexă în $\overline{x}$.*

Un rezultat similar este de asemenea adevărat pentru funcţii tăcute, referindu-ne pentru mai multe detalii şi câteva discuţii în această direcţie la articolul lui Giner [54].

Noţiunea pe care o amintim mai jos a fost introdusă de Treiman în [140] şi, după cum vom arăta în Teorema 3.3.15, se va dovedi a fi foarte utilă în caracterizarea subdiferenţialelor Dini-Hadamard şi Dini-Hadamard-like.

Definiţia 3.3.7 *Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie finită în punctul $\overline{x}$ şi $\varepsilon \geq 0$. Spunem că $x^* \in X^*$ este un H_ε*-subgradient *al lui f în $\overline{x}$ dacă există o mulţime spongioasă S în jurul lui $\overline{x}$ astfel încât pentru orice $x \in S$*

$$f(x) - f(\overline{x}) \geq \langle x^*, x - \overline{x}\rangle - \varepsilon\|x - \overline{x}\|.$$

Următoarea lemă a fost inspirată de câteva afirmaţii pe care le putem găsi în articolul lui Treiman [140].

Lema 3.3.8 *Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie finită în punctul $\overline{x}$ şi $\varepsilon \geq 0$. Atunci următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

(i) Dacă $x^* \in \partial_\varepsilon^{DH} f(\overline{x})$, atunci x^* este un H_γ-subgradient al lui f în $\overline{x}$ pentru orice $\gamma > \varepsilon$.

(ii) Dacă f este calmă în $\overline{x}$ şi x^* este un H_ε-subgradient al lui f în $\overline{x}$, atunci $x^* \in \partial_\varepsilon^{DH} f(\overline{x})$.

Subliniem aici faptul că putem obţine un rezultat similar fără a folosi nici o condiţie de liniştire pentru funcţia dată, folosindu-ne însă de subdiferenţiala Dini-Hadamard-like.

Lema 3.3.9 *Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie finită în punctul $\overline{x}$ şi $\varepsilon \geq 0$. Atunci următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

(i) Dacă $x^* \in \widetilde{\partial}_\varepsilon f(\overline{x})$, atunci x^* este un H_γ-subgradient al lui f în $\overline{x}$ pentru orice $\gamma > \varepsilon$.

(ii) Dacă x^* este un H_ε-subgradient al lui f în $\overline{x}$, atunci $x^* \in \widetilde{\partial}_\varepsilon f(\overline{x})$.

Observaţia 3.3.10 Mai mult, putem concluziona că ori de câte ori $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$, $\varepsilon \geq 0$ şi $\gamma > \varepsilon$ următoarea mulţime

$$S := \{x \in X : \; f(x) - f(\overline{x}) \geq \langle x^*, x - \overline{x} \rangle - \gamma \|x - \overline{x}\|\} \tag{3.14}$$

este spongioasă în jurul lui $\overline{x}$ nu doar pentru acele elemente $x^* \in \partial_\varepsilon^{DH} f(\overline{x})$, cât şi pentru $x^* \in \widetilde{\partial}_\varepsilon f(\overline{x})$.

În cele ce urmează furnizăm un exemplu de mulţime spongioasă în jurul unui punct care nu este vecinătate a acelui punct.

Exemplul 3.3.11 Considerăm din nou spaţiul $C[0,1]$ înzestrat cu norma supremum. Apoi $\overline{x} \in S_{C[0,1]}$ un element al acestui spaţiu cu proprietatea că $|\overline{x}|$ îşi atinge maximul în exact un punct al intervalului $[0,1]$. Fie de asemenea $x^* \in X^*$ un element al subdiferenţialei $\partial^{DH}(-\|\cdot\|_\infty)(\overline{x})$, care este o mulţime nevidă. Cum subdiferenţiala Fréchet a funcţiei $-\|\cdot\|_\infty$ în punctul $\overline{x}$ este vidă, există $\alpha > 0$ astfel încât pentru orice $\delta > 0$ să găsim un $x \in B(\overline{x}, \delta)$ ce verifică

$$\|\overline{x}\|_\infty - \|x\|_\infty + \alpha \|x - \overline{x}\|_\infty < \langle x^*, x - \overline{x} \rangle. \tag{3.15}$$

După cum s-a văzut mai sus, mulţimea

$$S := \{x \in C[0,1] : \; \|\overline{x}\|_\infty - \|x\|_\infty + \alpha \|x - \overline{x}\|_\infty \geq \langle x^*, x - \overline{x} \rangle\} \tag{3.16}$$

este spongioasă în jurul lui $\overline{x}$ (a se lua $\varepsilon := 0$ şi $\gamma := \alpha$ în Observaţia 3.3.10). Rămâne să arătăm că S nu este vecinătate a lui $\overline{x}$. Presupunând contrariul, există $\bar{\delta} > 0$ astfel încât $B(\overline{x}, \bar{\delta}) \subseteq S$. Dar aceasta este o contradicţie cu (3.15) şi, în consecinţă, S nu este vecinătate a lui $\overline{x}$.

Exemplul 3.3.12 Următorul exemplu arată că, în cazul subdiferenţialei Dini-Hadamard, mai precis în a doua afirmaţie a Lemei 3.3.8 nu putem renunţa la ipoteza că f este calmă în $\overline{x}$. Într-adevăr, fie S o mulţime spongioasă în jurul lui $\overline{x} \in X$, care nu este vecinătate a lui $\bar{x}$ şi să definim $f : X \to \mathbb{R}$ ca fiind

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \in S, \\ -1, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Atunci, pentru orice $\varepsilon \geq 0$, 0 este un H_ε-subgradient al lui f în $\bar{x}$, dar f nu este calmă în $\bar{x}$ şi, în consecinţă, $0 \notin \partial_\varepsilon^{DH} f(\overline{x})$.

Exemplul 3.3.13 Ambele afirmaţii ale Lemei 3.3.8 au fost date de Treiman în [140], fără demonstraţie, pentru o funcţie f inferior semicontinuă pe X şi fără a presupune în (ii) că f este calmă în $\bar{x}$. Următorul exemplu, cu amabilitate sugerat nouă de Penot, arată că, chiar şi pentru funcţii inferior semicontinue nu putem renunţa la ipoteza de calmare pentru a obţine concluzia dorită. Fie X un spaţiu Banach infinit dimensional şi $(e_n)_{n\geq 1}$ un şir de elemente de pe sfera unitate a lui X astfel încât $\|e_n - e_m\| > 1/2$ pentru orice $n, m \geq 1$, $n \neq m$. Definim apoi $f : X \to \mathbb{R}$ ca fiind $f(x) = -1/2^n$ atunci când $n \geq 1$ este astfel încât $x = 1/4^n e_n$ şi $f(x) = 0$, altfel. Funcţia f este inferior semicontinuă şi verifică $f(x) \geq f(0)$ pentru orice $x \in X \setminus \bigcup_{n\geq 1}\{1/4^n e_n\}$. De vreme ce $X \setminus \bigcup_{n\geq 1}\{1/4^n e_n\}$ este o mulţime spongioasă în jurul lui 0, pentru orice $\varepsilon \geq 0$, 0 este un H_ε-subgradient al lui f în 0. Pe de altă parte, întrucât f nu este calmă în 0, 0 nu poate fi un ε-subgradient Dini-Hadamard al lui f în 0.

Exemplul 3.3.14 Cu toate că în spaţii finit dimensionale ε-subdifferenţiala Dini-Hadamard coincide cu subdiferenţiala Dini-Hadamard-like (a se vedea Observaţia 3.3.32) acest lucru nu este însă valabil în general. Într-adevăr, să considerăm funcţia $f : X \to \mathbb{R}$ ca fiind

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in S, \\ a, & \text{altfel,} \end{cases}$$

unde $a < 0$ şi S este o mulţime spongioasă în jurul lui $\overline{x} \in X$ care nu este vecintătate a lui $\overline{x}$. Apoi luând în considerare a doua afirmaţie din Lema 3.3.9, putem uşor concluziona că pentru orice $\varepsilon \geq 0$, $0 \in \widetilde{\partial}_\varepsilon f(\overline{x}) \setminus \partial_\varepsilon^{DH} f(\overline{x})$, de vreme ce 0 este un H_ε-subgradient al lui f în $\overline{x}$, dar f nu este calmă în $\overline{x}$.

3.3.3 Câteva caracterizări folositoare ale subgradienţilor

În cele ce urmează furnizăm o descriere a ε-subdifferenţialei Dini-Hadamard similară cu cea care există pentru ε-subdiferenţiala Fréchet, dar obţinută prin înlocuirea vecinătăţilor cu mulţimi spongioase.

Teorema 3.3.15 *Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie finită în punctul $\overline{x}$. Atunci pentru orice $\varepsilon \geq 0$ avem*

$$\begin{aligned} &x^* \in \partial_\varepsilon^{DH} f(\overline{x}) \Leftrightarrow f \text{ este calmă în } \overline{x} \text{ şi } \forall \alpha > 0 \text{ există o mulţime spongioasă } S \\ &\text{în jurul lui } \overline{x} \text{ astfel încât } \forall x \in S,\ f(x) - f(\overline{x}) \geq \langle x^*, x - \overline{x}\rangle - (\alpha + \varepsilon)\|x - \overline{x}\|. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Observaţia 3.3.16 Făcând apel la Teorema 3.3.15 putem uşor arăta că pentru orice $\varepsilon \geq 0$ ε-subdifferenţiala Dini-Hadamard a funcţiei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ în punctul $\overline{x}$ cu $|f(\overline{x})| < +\infty$ poate fi de asemenea caracterizată după cum urmează

$$\begin{aligned} x^* \in \partial_\varepsilon^{DH} f(\overline{x}) \Leftrightarrow \quad & f \text{ este calmă în } \overline{x} \text{ şi } \forall \alpha > 0\ \forall u \in S_X\ \exists \delta > 0 \text{ astfel încât} \\ & \forall s \in (0, \delta)\ \forall v \in B(u, \delta) \text{ pentru } x := \overline{x} + sv \text{ avem} \\ & f(x) - f(\overline{x}) \geq \langle x^*, x - \overline{x} \rangle - (\alpha + \varepsilon)\|x - \overline{x}\|. \end{aligned}$$

Merită să subliniem aici faptul că subdiferenţiala Dini-Hadamard-like se bucură şi ea de asemenea de o descriere variaţională similară în absenţa oricărei condiţii de calmare.

Teorema 3.3.17 *Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie finită în punctul $\overline{x}$. Atunci pentru orice $\varepsilon \geq 0$ avem*

$$\begin{aligned} x^* \in \widetilde{\partial}_\varepsilon f(\overline{x}) \Leftrightarrow \quad & \forall \alpha > 0 \textit{ există o mulţime spongioasă } S \textit{ în jurul lui } \overline{x} \textit{ astfel încât} \\ & \forall x \in S,\ f(x) - f(\overline{x}) \geq \langle x^*, x - \overline{x} \rangle - (\alpha + \varepsilon)\|x - \overline{x}\|. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Observaţia 3.3.18 Un rezultat similar ca în Observaţia 3.3.16, fără ipoteze suplimentare de calmare, are loc de asemenea şi pentru ε-extinderea subdiferenţialei Dini-Hadamard-like. Şi anume, dându-se o funcţie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ finită în $\overline{x}$ avem

$$\begin{aligned} x^* \in \widetilde{\partial}_\varepsilon f(\overline{x}) \Leftrightarrow \quad & \forall \alpha > 0\ \forall u \in S_X\ \exists \delta > 0 \text{ astfel încât} \\ & \forall s \in (0, \delta)\ \forall v \in B(u, \delta) \text{ pentru } x := \overline{x} + sv \text{ avem} \\ & f(x) - f(\overline{x}) \geq \langle x^*, x - \overline{x} \rangle - (\alpha + \varepsilon)\|x - \overline{x}\|. \end{aligned}$$

La o privire mai atentă putem vedea că şi în cazul subdiferenţialei Dini-Hadamard-like există un oarecare tip de condiţie de calmare care se ascunde în spate. Aşadar, spunem că o funcţie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ este *slab calmă* în punctul $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$ dacă $\widetilde{D}_d f(\overline{x}; 0) \geq 0$ pentru orice $d \in X \setminus \{0\}$. De fapt, spre deosebire de cazul subdiferenţialei Dini-Hadmamard, această condiţie este verificată în mod automat. Merită să menţionăm de asemenea faptul că deşi presupunerea de calmare slabă este mai generală, coincide cu cea clasică în spaţii finit dimensionale.

Propoziţia 3.3.19 *Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie finită în punctul $\overline{x}$. Dacă X este finit dimensional atunci f este calmă în $\overline{x}$ dacă şi numai dacă f este slab calmă în $\overline{x}$.*

Prezentăm de asemenea o consecinţă directă a Teoremei 3.3.17 şi a [28, Teorema 2.3], interesantă în sine însăşi.

Corolarul 3.3.20 *Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie finită în punctul $\overline{x}$ şi $\varepsilon \geq 0$. Atunci următoarea egalitate $\partial_\varepsilon^{DH} f(\overline{x}) = \widetilde{\partial}_\varepsilon f(\overline{x})$ are loc dacă f este calmă în $\overline{x}$. Invers, dacă în plus $\widetilde{\partial}_\varepsilon f(\overline{x}) \neq \emptyset$ atunci f este calmă în $\overline{x}$.*

Următoarea estimare pentru subgradienţii Dini-Hadamard-like a *funcţiei de minim*

$$(\wedge f_i)(x) := \min\{f_i(x) : i = 1, ..., n\},$$

unde $f_i : X \to \overline{\mathbb{R}}$ şi $n \geq 2$, foloseşte descrierea variaţională de mai sus.

Propoziţia 3.3.21 *Dându-se f_i ca mai sus, următoarea incluziune*

$$\widetilde{\partial}_\varepsilon(\wedge f_i)(\overline{x}) \subseteq \bigcap_{j\in I(\overline{x})} \widetilde{\partial}_\varepsilon(f_j)(\overline{x})$$

unde $I(\overline{x}) := \{j \in \{1,...,n\} : f_j(\overline{x}) = (\wedge f_i)(\overline{x})\}$, este adevărată.

În final, notăm că un rezultat similar are loc de asemenea şi pentru subgradienţi Dini-Hadamard dacă se impune funcţiilor $f_1,...,f_n$ şi condiţia suplimentară de calmare.

3.3.4 O modificare convenabilă a subgradienţilor Dini-Hadamard-like pe spaţii produs

Propunem în această subsecţiune o altă construcţie subdiferenţială Dini-Hadamard-like definită pe produsul a două spaţii Banach X şi Y, care în mod evident se poate extinde la produsul unui număr finit de astfel de spaţii.

Mai întâi de toate, după cum am menţonat mai sus, subdiferenţiala Dini-Hadamard-like a unei funcţii date $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ într-un punct $\overline{x}$ cu $|f(\overline{x})| < +\infty$ poate fi descrisă prin intermediul următoarei descrieri variaţionale

$$\widetilde{\partial} f(\overline{x}) := \{x^* \in X^* : \forall\varepsilon > 0\ \exists \text{ o mulţime spongioasă } S \text{ în jurul lui } \overline{x} \text{ astfel încât } \forall x \in S\ f(x) - f(\overline{x}) \geq \langle x^*, x-\overline{x}\rangle - \varepsilon\|x-\overline{x}\|\}, \quad (3.19)$$

care de altfel asigură faptul că subdiferenţiala Dini-Hadamard coincide cu subdiferenţiala Dini-Hadamard-like pe funcţii calme.

Mai departe, datorită structurii speciale a mulţimilor spongioase (de exemplu produsul cartezian a două mulţimi spongioase nu este, în general, o mulţime spongioasă), se pare că următoarele construcţii decuplate sunt cele mai potrivite instrumente pentru derivarea formulelor subdiferenţiale pentru subgradienţii Dini-Hadamard şi Dini-Hadamard-like, în fapt scopul principal al capitolului următor.

Astfel, dându-se o funcţie $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ definită pe produsul a două spaţii Banach X şi Y, următoarea construcţie subdiferenţială

$$\widetilde{\partial}_{\imath} f(\overline{x},\overline{y}) := \{(x^*,y^*) \in X^*\times Y^* : \forall\varepsilon > 0\ \exists \text{ o mulţime spongioasă } S_1 \text{ în jurul lui } \overline{x}, \exists \text{ o mulţime spongioasă } S_2 \text{ în jurul lui } \overline{y} \text{ astfel încât } \forall (x,y) \in S_1\times S_2\ f(x,y) - f(\overline{x},\overline{y}) \geq \langle (x^*,y^*), (x-\overline{x}, y-\overline{y})\rangle - \varepsilon\|(x-\overline{x}, y-\overline{y})\|\} \quad (3.20)$$

defineşte subdiferenţiala *(inferioară) decuplată Dini-Hadamard-like* a lui f în $(\overline{x},\overline{y})$, unde $X\times Y$ este un spaţiu Banach în raport cu *norma sumă*

$$\|(x,y)\| := \|x\| + \|y\|$$

impusă pe $X\times Y$, cu excepţia cazului în care se prevede altceva. Este interesant de observat că ultima noţiune este de fapt destul de diferită în raport cu cea a subdiferenţialei Dini-Hadamard-like, de vreme ce, la o primă vedere, nici $\widetilde{\partial} f(\overline{x},\overline{y}) \nsubseteq \widetilde{\partial}_{\imath} f(\overline{x},\overline{y})$ nici incluziunea inversă $\widetilde{\partial}_{\imath} f(\overline{x},\overline{y}) \nsubseteq \widetilde{\partial} f(\overline{x},\overline{y})$ nu au loc.

3.3.5 Asupra unei descrieri variaţionale netede a subgradienţilor Dini-Hadamard-like

Pentru a furniza o descriere variaţională netedă pentru subgradienţii Dini-Hadamard-like trebuie să mai introducem de asemenea câteva proprietăţi speciale de diferenţiabilitate pentru funcţii, mai slabe decât cea clasică Fréchet în spaţii infinit dimensionale. De fapt, după cum putem uşor observa, pentru acelşi motiv ca mai sus, sunt cel puţin două modalităţi diferite de a introduce o astfel de construcţie pe spaţiul produs. Descriem în continuare procedura.

Definiţia 3.3.22 *Funcţia $f : X \to Z$ se numeşte* Dini-Hadamard-like diferenţiabilă *în punctul $\overline{x} \in X$ dacă există un operator liniar continuu $\widetilde{\nabla} f(\overline{x}) : X \to Z$ astfel încât pentru orice $\varepsilon > 0$ există o mulţime spongioasă S în jurul lui $\overline{x}$ cu proprietatea că pentru fiecare $x \in S$*

$$\|f(x) - f(\overline{x}) - \widetilde{\nabla} f(\overline{x})(x - \overline{x})\| \leq \varepsilon \|x - \overline{x}\|.$$

Definiţia 3.3.23 *Funcţia $f : X \times Y \to Z$ se numeşte* Dini-Hadamard-like decuplat diferenţiabilă *în punctul $(\overline{x}, \overline{y}) \in X \times Y$ dacă există un operator liniar continuu $\widetilde{\nabla}_{\imath} f(\overline{x}, \overline{y}) : X \times Y \to Z$ astfel încât pentru orice $\varepsilon > 0$ există o mulţime spongioasă S_1 în jurul lui $\overline{x}$ şi S_2 o mulţime spongioasă în jurul lui $\overline{y}$ cu proprietatea că pentru fiecare $(x, y) \in S_1 \times S_2$*

$$\|f(x, y) - f(\overline{x}, \overline{y}) - \widetilde{\nabla}_{\imath} f(\overline{x}, \overline{y})(x - \overline{x}, y - \overline{y})\| \leq \varepsilon \|(x - \overline{x}, y - \overline{y})\|. \tag{3.21}$$

Observaţia 3.3.24 Este important de subliniat că, în cazul particular în care $Z = \overline{\mathbb{R}}$, funcţia f este diferenţiabilă Dini-Hadamard-like în $\overline{x}$ cu

$$\widetilde{\partial} f(\overline{x}) = \widetilde{\partial}^{+} f(\overline{x}) = \{\widetilde{\nabla} f(\overline{x})\},$$

dacă mulţimile $\widetilde{\partial} f(\overline{x})$ şi $\widetilde{\partial}^{+} f(\overline{x}) := -\widetilde{\partial}(-f)(\overline{x})$ sunt nevide simultan. Pe de altă parte, dacă f este diferenţiabilă Dini-Hadamard-like în $\overline{x}$ atunci $\operatorname{card}(\widetilde{\nabla} f(\overline{x})) = 1$.

Bineînţeles, un rezultat similar este valabil de asemenea şi în cazul funcţiilor decuplat diferenţiabile Dini-Hadamard-like cu valori reale extinse, iar demonstraţia poate fi făcută în liniile demonstraţiei rezultatului de mai sus. Mai precis, dacă mulţimile $\widetilde{\partial}_{\imath} f(\overline{x}, \overline{y})$ şi $\widetilde{\partial}_{\imath}^{+} f(\overline{x}, \overline{y})$ sunt nevide simultan, unde cea din urmă construcţie defineşte subdiferenţiala superioară decuplată Dini-Hadamard-like a lui f în $\overline{x}$, atunci f este decuplat diferenţiabilă Dini-Hadamard-like în $(\overline{x}, \overline{y})$ cu

$$\widetilde{\partial}_{\imath} f(\overline{x}, \overline{y}) = \widetilde{\partial}_{\imath}^{+} f(\overline{x}, \overline{y}) = \{\widetilde{\nabla}_{\imath} f(\overline{x}, \overline{y})\}.$$

Următoarea teoremă ne furnizează o descriere variaţională importantă a subgradienţilor Dini-Hadamard-like pentru funcţii nenetede în termeni de funcţii de suport netede , similară cu cea care există pentru subgradienţii Fréchet (ne referim la Mordukhovich [94] unde sunt dezvoltate rezultate de acest tip într-un studiu minuţios). Aici putem de asemenea folosi următoarea proprietate care este mai slabă decât simpla minimizare locală întrucât implică mulţimi spongioase în locul vecinătăţilor. Şi anume, spunem că $\overline{x} \in X$ este punct de *minim local spongios* al funcţiei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ dacă f este finită în $\overline{x}$ şi dacă există o mulţime spongioasă S în jurul lui $\overline{x}$ astfel încât $f(x) \geq f(\overline{x})$ pentru fiecare $x \in S$. În final subliniem faptul că pe spaţiul produs $X \times Y$ putem folosi de asemenea următoarea proprietate. Dinadins, $(\overline{x}, \overline{y}) \in X \times Y$ se numeşte punct de *minim local spongios decuplat* al funcţiei $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ dacă f este finită în $(\overline{x}, \overline{y})$ şi dacă există o mulţime spongioasă S_1 în jurul lui $\overline{x}$ şi o mulţime spongioasă S_2 în jurul lui $f(\overline{x})$ astfel încât $f(x, y) \geq f(\overline{x}, \overline{y})$, ori de câte ori $(x, y) \in S_1 \times S_2$.

Teorema 3.3.25 *Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie finită în $\overline{x}$. Atunci*

(i) Dându-se $x^* \in X^*$, presupunem că există o funcţie $s : S \to \mathbb{R}$ definită pe o mulţime spongioasă S în jurul lui $\overline{x}$ şi Dini-Hadamard-like diferenţiabilă în $\overline{x}$ astfel încât $\widetilde{\nabla} s(\overline{x}) = x^*$ şi $f(x) - s(x)$ atinge un minim local spongios în $\overline{x}$. Atunci $x^* \in \widetilde{\partial} f(\overline{x})$.

(ii) Invers, pentru fiecare $x^* \in \widetilde{\partial} f(\overline{x})$ există o funcţie $s : X \to \mathbb{R}$ Dini-Hadamard-like diferenţiabilă în $\overline{x}$ cu $\widetilde{\nabla} s(\overline{x}) = x^*$ astfel încât $s(\overline{x}) = f(\overline{x})$ şi $s(x) \leq f(x)$ pentru orice $x \in X$.

Următorul rezultat similar, exprimat în termeni de subgradienţi decuplaţi Dini-Hadamard-like, urmează linia demonstraţiei rezultatului de mai sus.

Teorema 3.3.26 *Fie $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ finită în punctul $(\overline{x}, \overline{y})$. Atunci*

(i) Dându-se $(x^*, y^*) \in X^* \times Y^*$, presupunem că există o funcctie $s : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$ definită pe produsul a două mulţimi spongioase S_1 în jurul lui $\overline{x}$ şi respectiv S_2 în jurul lui $f(\overline{x})$, şi decuplat diferenţiabilă Dini-Hadamard-like în $(\overline{x}, \overline{y})$ astfel încât $\widetilde{\nabla}_{\!r} s(\overline{x}, \overline{y}) = (x^*, y^*)$ şi $f(x, y) - s(x, y)$ atinge un punct de minim local decuplat spongios în $(\overline{x}, \overline{y})$. Atunci $(x^*, y^*) \in \widetilde{\partial}_{\!r} f(\overline{x}, \overline{y})$.

(ii) Invers, pentru fiecare $(x^*, y^*) \in \widetilde{\partial}_{\!r} f(\overline{x}, \overline{y})$ există o funcţie $s : X \times Y \to \mathbb{R}$ Dini-Hadamard-like decuplat diferenţiabilă în $(\overline{x}, \overline{y})$ cu $\widetilde{\partial}_{\!r} f(\overline{x}, \overline{y}) = (x^*, y^*)$, astfel încât $s(\overline{x}, \overline{y}) = f(\overline{x}, \overline{y})$ şi $s(x, y) \leq f(x, y)$ pentru orice $(x, y) \in X \times Y$.

3.3.6 Legături dintre subgradienţi şi conuri normale

Ne începem expunerea cu câteva remarci (vezi [3, 111]). Mai întâi de toate, să ne amintim faptul că, conul normal Dini-Hadamard la o mulţime $C \subseteq X$ în punctul $\overline{x} \in C$, natural introdus prin intermediul subdiferenţialei Dini-Hadamard a funcţiei indicator, se poate exprima de asemenea şi cu ajutorul conului polar la conul contingent, de altfel conul normal contingent, i.e.

$$N^{DH}(\overline{x}; C) := \partial^{DH} \delta_C(\overline{x}) = T^{\circ}(\overline{x}; C) := N(\overline{x}; C), \tag{3.22}$$

unde conul contingent poate fi văzut în felul următor (a se vedea [3])

$$T(\overline{x}; C) = \bigcap_{\substack{\varepsilon > 0 \\ \delta > 0}} \bigcup_{t \in (0, \delta)} (t^{-1}(C - \overline{x}) + \varepsilon B),$$

i.e. mulţimea tuturor vectorilor v astfel încât putem găsi şirurile $t_n \downarrow 0, u_n \to v$ cu proprietatea că $\overline{x} + t_n u_n \in C$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi unde pentru un subcon dat $K \subseteq X$, conul său polar K° este definit prin

$$K^\circ := \{x^* \in X^* : \sup_{x \in K} \langle x^*, x\rangle \leq 0\}.$$

Pe de altă parte, subdiferenţiala Dini-Hadamard a unei funcţii date f se bucură de următoarea descriere geometrică

$$\partial^{DH} f(\overline{x}) = \{x^* \in X^* : (x^*, -1) \in N((\overline{x}, f(\overline{x})); \operatorname{epi} f))\}, \tag{3.23}$$

care în mod evident o implică pe următoarea

$$\partial^{DH} f(\overline{x}) = \{x^* \in X^* : (x^*, -1) \in N^{DH}((\overline{x}, f(\overline{x})); \operatorname{epi} f))\}, \tag{3.24}$$

dacă ţinem cont de (3.22).

De fapt, ultima ne spune că subdiferenţiala analitică Dini-Hadamard ∂_a^{DH}, aşa cum a fost introdusă în (3.9), întotdeauna coincide cu versiunea geometrică, ∂_g^{DH}, definită în (3.24). Totuşi, nu acelaşi lucru este valabil şi pentru subdiferenţiala Dini-Hadamard-like. Motivul este acela că, pentru această construcţie particulară, putem formula un rezultat similar ca în (3.24) doar făcând uz de versiunea corespunzătoare decuplată.

Propoziţia 3.3.27 *Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie finită în punctul $\overline{x}$. Atunci*

$$\widetilde{\partial} f(\overline{x}) = \{x^* \in X^* : (x^*, -1) \in \widetilde{N}_\imath((\overline{x}, f(\overline{x})); \operatorname{epi} f)\}, \tag{3.25}$$

unde $\widetilde{N}_\imath((\overline{x}, \overline{y}); C) := \widetilde{\partial}_\imath \delta((\overline{x}, \overline{y}); C)$ semnifică conul normal decuplat Dini-Hadamard-like *a lui $C \subset X \times Y$ în $(\overline{x}, \overline{y})$.*

O caracterizare preţioasă a conului normal Dini-Hadamard-like, similară cu cea care există pentru conul normal Fréchet (a se vedea spre exemplu [94, Definition 1.1]), însă înlocuind convergenţa uzuală cu cea direcţională, va fi furnizată în cele ce urmează.

Propoziţia 3.3.28 *Fie C o submulţime nevidă a lui X şi $\overline{x} \in C$. Atunci*

$$\widetilde{N}(\overline{x}; C) = \{x^* \in X^* : \inf_{\delta \in (0,1)} \sup_{x \in (\overline{x} + (0,\delta)\cdot B(u,\delta)) \cap C} \frac{\langle x^*, x - \overline{x}\rangle}{\|x - \overline{x}\|} \leq 0 \ \forall u \in S_X\}, \tag{3.26}$$

unde $\widetilde{N}(\overline{x}; C) := \widetilde{\partial} \delta_C(\overline{x})$.

Următorul rezultat este o consecinţă directă a Corolarului 3.3.20, de vreme ce funcţia indicator $\delta_C(\overline{x})$, cu $\overline{x} \in C \subseteq X$, este în mod evident calmă în $\overline{x}$. A se vedea de asemenea şi relaţia (3.22) de mai sus.

Corolarul 3.3.29 *Fie C o submulţime nevidă a lui X şi $\overline{x} \in C$. Atunci următoarele egalităţi*

$$N^{DH}(\overline{x}; C) = \widetilde{N}(\overline{x}; C) = N(\overline{x}; C) \tag{3.27}$$

sunt adevărate.

În final ilustrăm legătura dintre subdiferenţiala analitică Dini-Hadamard-like şi cea geometrică, concluzionând că acest tip de construcţie nu urmează deloc comportamentul subdiferenţialei Fréchet (vezi rezultatele din [94, Section 1.3]).

Corolarul 3.3.30 *Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie arbitrară şi $\overline{x} \in X$. Atunci*

$$\widetilde{\partial}_g f(\overline{x}) \subsetneq \widetilde{\partial}_a f(\overline{x}), \tag{3.28}$$

unde $\widetilde{\partial}_g f(\overline{x}) := \{x^* \in X^* : (x^*, -1) \in \widetilde{N}((\overline{x}, f(\overline{x})); \operatorname{epi} f)\}$ defineşte subdiferenţiala geometrică Dini-Hadamard-like a lui f în $\overline{x}$, în vreme ce $\widetilde{\partial}_a f(\overline{x}) := \widetilde{\partial} f(\overline{x})$ o indică pe cea analitică.

Mai ilustrăm de asemenea şi relaţiile dintre diverşi subgradienţi studiaţi mai sus, în fapt consecinţe directe ale discuţiilor făcute în această subsecţiune.

Corolarul 3.3.31 *Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie arbitrară şi $\overline{x} \in X$. Atunci*

$$\partial_a^{DH} f(\overline{x}) = \partial_g^{DH} f(\overline{x}) = \widetilde{\partial}_g f(\overline{x}) \subsetneq \widetilde{\partial}_a f(\overline{x}), \tag{3.29}$$

în vreme ce egalităţile au loc în cazul în care f este calmă în $\overline{x}$.

3.3.7 Relaţii cu alţi subgradienţi

În cele ce urmează prezentăm mai întâi legătura dintre subdiferenţialele Fréchet, Dini-Hadamard şi Dini-Hadamard-like. Şi anume, următoarele incluziuni au loc,

$$\widehat{\partial}_\varepsilon f(\overline{x}) \subseteq \partial_\varepsilon^{DH} f(\overline{x}) \subseteq \widetilde{\partial}_\varepsilon f(\overline{x}), \tag{3.30}$$

pentru orice $\varepsilon \geq 0$. Totuşi, într-un cadru infinit dimensional putem obţine adesea incluziuni stricte. Pentru a vedea acest lucru în cazul primei incluziuni, pentru $\varepsilon = 0$, considerăm, de exemplu, funcţia $f : C[0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\|x\|_\infty$. Atunci $\widehat{\partial} f(x) = \emptyset$ pentru orice $x \in C[0,1]$, în vreme ce $\partial^{DH} f(\overline{x}) \neq \emptyset$ atunci când $\overline{x} \in S_{C[0,1]}$ este ales în aşa fel încât $|\overline{x}| : [0,1] \to \mathbb{R}, |\overline{x}|(t) = |\overline{x}(t)|$ îşi atinge maximul în exact un punct din intervalul $[0,1]$ (vezi [49, Exercise 8.28]). Pentru un exemplu similar în spaţiul ℓ_1 ne referim la [49, Exercise 8.26]. Cât priveşte a doua incluziune, a se vedea Exemplul 3.3.14 de mai jos.

Observaţia 3.3.32 Atunci când X este finit dimensional, avem egalitate în (3.30).

Pentru a ne face o idee cam cât de departe putem merge în alegerea funcţiei f astfel încât incluziunile în (3.30) să aibă loc ca şi egalităţi în spaţii Banach arbitrare, dăm următoarea propoziţie alături de câteva observaţii.

Propoziţia 3.3.33 *Fie funcţia $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ aproape stelară în punctul $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$. Atunci pentru orice $\varepsilon \geq 0$ are loc*

$$\widehat{\partial}_\varepsilon f(\overline{x}) = \partial_\varepsilon^{DH} f(\overline{x}) = \widetilde{\partial}_\varepsilon f(\overline{x}).$$

Pe de altă parte, Exemplul 3.3.14 de mai jos ne asigură că următoarea egalitate $\partial^{DH} f(\overline{x}) = \widetilde{\partial} f(\overline{x})$ nu are loc în cazul în care f este doar direcţional aproape stelară în $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$, de vreme ce f este direcţional aproape stelară în $\overline{x}$, însă $0 \in \widetilde{\partial} f(\overline{x}) \setminus \partial^{DH} f(\overline{x})$. Acelaşi lucru este de asemenea valabil cu egalitatea $\widehat{\partial} f(\overline{x}) = \partial^{DH} f(\overline{x})$. Mai mult, funcţia din Exemplul 3.3.14 ne arată că în general clasa funcţiilor aproape stelare nu coincide cu cea a funcţiilor direcţional aproape stelare.

Graţie următorului rezultat (bazat de altfel pe [106, Teorema 3.6], dar a se lua în considerare şi Propoziţia 3.3.34 de mai jos şi proprietatea 2.1. din Birge [16], valabilă pentru o funcţie arbitrară f), subdiferenţiala Dini-Hadamard-like cât şi cea Dini-Hadamard coincid cu un număr mare de subdiferenţiale binecunoscute precum subdiferenţiala Clarke-Rockafellar, gradientul generalizat al lui Clarke, subdiferenţiala Michel-Penot, subdiferenţiala Mordukhovich, subdiferenţiala Fréchet, subdiferenţiala geometrică a lui Ioffe, ori de câte ori funcţia dată este inferior semicontinuă şi aproape convexă într-un punct dat al domeniului.

Propoziţia 3.3.34 *Fie $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ o funcţie inferior semicontinuă pe X şi aproape convexă în $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$. Atunci avem*

$$\begin{aligned} \partial^{C-R} f(\overline{x}) &= \partial^{C} f(\overline{x}) = \partial^{\diamond} f(\overline{x}) = \partial^{M} f(\overline{x}) = \widehat{\partial} f(\overline{x}) \\ &= \partial^{DH} f(\overline{x}) = \widetilde{\partial} f(\overline{x}) = \partial' f(\overline{x}) = \partial^{G} f(\overline{x}), \end{aligned} \tag{3.31}$$

unde $\partial' f(\overline{x}) := \left\{ x^* \in X^* : \langle x^*, v \rangle \le \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(\overline{x}+tv)-f(\overline{x})}{t} \right\}$.

Dacă adiţional f este Lipschitz în $\overline{x}$ atunci putem completa lista egalităţilor de mai sus cu subdiferenţiala aproximativă $\partial^A f(\overline{x})$.

De fapt, următoarele incluziuni sunt adevărate pentru orice funcţie arbitrară $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ şi orice $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$. Şi anume,

$$\partial^{DH} f(\overline{x}) \subseteq \widetilde{\partial} f(\overline{x}) \subseteq \partial^{\diamond} f(\overline{x}) \subseteq \partial^{C} f(\overline{x}) \tag{3.32}$$

şi

$$\widetilde{\partial} f(\overline{x}) \subseteq \partial^{G} f(\overline{x}) \subseteq \partial^{C-R} f(\overline{x}) \tag{3.33}$$

unde ultimele două relaţii urmează din [67, Propoziţia 4.2]. Observăm de semenea că în cazul în care f este inferior semicontinuă în $\overline{x}$ atunci $\partial^{C} f(\overline{x}) \subseteq \partial^{C-R} f(\overline{x})$, în vreme ce egalităţile $\partial^{DH} f(\overline{x}) = \widetilde{\partial} f(\overline{x})$ şi $\partial^{C} f(\overline{x}) = \partial^{C-R} f(\overline{x})$ sunt adevărate pentru funcţii local Lipschitz.

În final observăm că noţiunea de convexitate generalizată folosită în Propoziţia 3.3.34 este esenţială, de vreme ce chiar şi în cazul funcţiilor local Lipschitz pe spaţii Banach separabile nu putem obţine (în general) toate egalităţile de mai sus.

Propoziţia 3.3.35 *Fie $U \subseteq X$ o submulţime deschisă a unui spaţiu Banach separabil şi fie f o funcţie local Lipschitz pe U. Atunci*

$$\partial^{C-R} f(\overline{x}) = \partial^{C} f(\overline{x}) = \partial^{\diamond} f(\overline{x}) = \partial^{DH} f(\overline{x}) = \widetilde{\partial} f(\overline{x}) = \partial^{G} f(\overline{x}) \tag{3.34}$$

pentru orice punct $x \in U$ al unei submulţimi reziduale a lui U. Pe de altă parte,

$$\partial^{DH} f(\overline{x}) = \widetilde{\partial} f(\overline{x}) = \partial^{\diamond} f(\overline{x}) \tag{3.35}$$

în afara unei submulţimi direcţional σ-poroase a lui U.

Pentru a încheia această subsecţiune menţionăm că în prima afirmaţie de mai sus trecerea de la mulţimi reziduale la complementara unei mulţimi direcţional σ-poroase este imposibilă, în principiu (a se vedea discuţiile de după [73, Teorema 3.6]).

3.3.8 O descriere cheie a funcţiilor direcţional aproape stelare prin intermediul subdiferenţialei Dini-Hadamard-like

Alături de proprietăţile de stabilitate ale funcţiilor direcţional aproape stelare, menţionate mai sus, furnizăm de asemenea încă una, folosindu-ne de subdiferenţiala Dini-Hadamard-like.

Propoziţia 3.3.36 *Fie funcţia $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ direcţional aproape stelară în punctul $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$. Atunci pentru orice $\alpha > 0$ şi orice $\varepsilon \geq 0$ există o mulţime spongioasă S în jurul lui $\overline{x}$ astfel încât pentru fiecare $x \in S$ avem*

$$f(x) - f(\overline{x}) \geq \langle \overline{x}^*, x - \overline{x} \rangle - (\alpha + \varepsilon)\|x - \overline{x}\| \ \forall \overline{x}^* \in \widetilde{\partial}_{\varepsilon} f(\overline{x}), \tag{3.36}$$

$$f(\overline{x}) - f(x) \geq \langle x^*, \overline{x} - x \rangle - (\alpha + \varepsilon)\|x - \overline{x}\| \ \forall x^* \in \widetilde{\partial}_{\varepsilon} f(x). \tag{3.37}$$

Merită să mai menţionăm că un rezultat similar are loc de asemenea dacă înlocuim subdiferenţiala Dini-Hadamard-like cu subdiferenţiala Dini-Hadamard (a se vedea [28, Lema 3.2]). Mai mult, afirmaţiile făcute în Propoziţia 3.3.36 sunt mai generale chiar şi decât cele prezentate în [1, Lema 1], unde funcţiile aproape stelare sunt caracterizate prin intermediul subdiferenţialei Fréchet.

3.4 Asupra unei coderivate Dini-Hadamard-like pentru funcţii; proprietăţi de diferenţiabilitate

Descriem acum cel mai important obiect de tip derivată pentru funcţii cu o singură valoare pe care urmează să îl folosim cu precădere în Secţiunea 4.2.

Merită să subliniem aici că aceste tipuri de obiecte se numesc *coderivate* întrucât ele furnizează o aproximare punctuală pentru multifuncţii (în particular, pentru funcţii cu o singură valoare) definite între spaţii date şi folosind elemente ale spaţiilor duale. Vom vedea mai jos că în cazul funcţiilor netede cu o singură valoare coderivata se reduce la clasicul operator adjunct în punctul dat. Dar pentru funcţii generale nenetede coderivata se construieşte prin intermediul vectorilor normali la grafic şi nu este duală nici unui obiect de tip derivată ce se leagă de aproximări tangenţiale în spaţiile iniţiale.

Dându-se o funcţie $f : X \to Y$ între două spaţii Banach, următoarea construcţie

$$\widetilde{D}_{\mathfrak{r}}^* f(\overline{x})(y^*) := \{x^* \in X^* : (x^*, -y^*) \in \widetilde{N}_{\mathfrak{r}}((\overline{x}, f(\overline{x})); \operatorname{graph} f)\} \tag{3.38}$$

defineşte *coderivata decuplată Dini-Hadamard-like* a lui f în $\overline{x}$, unde

$$\widetilde{N}_{\imath}((\overline{x},\overline{y});C) := \widetilde{\partial}_{\imath}\delta((\overline{x},\overline{y});C) \tag{3.39}$$

desemnează *conul normal decuplat Dini-Hadamard-like* la $C \subset X \times Y$ în punctul $(\overline{x},\overline{y})$ şi unde

$$\operatorname{graph} f := \{(x,y) \in X \times Y : f(x) = y\}$$

defineşte graficul lui f.

În continuare furnizăm un detaliu cu privire la coderivata decuplată Dini-Hadamard-like a unei funcţii diferenţiabile, care este de un special interes pentru discuţiile următoare. Dar mai întâi, să ne reamintim că dându-se o funcţie liniară continuă $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ de la X la Y operatorul ei adjunct $A^* \in \mathcal{L}(Y^*,X^*)$ este definit prin $\langle A^*y^*, x\rangle := \langle y^*, Ax\rangle$ pentru orice $x \in X$ şi $y^* \in Y^*$. Atunci când $X = \mathbb{R}^n$ şi $Y = \mathbb{R}^m$, A se poate identifica cu o matrice de tipul $m \times n$, iar A^* coincide cu A^T.

Propoziţia 3.4.1 *Fie $f : X \to Y$ Dini-Hadamard-like diferenţiabilă în punctul $\overline{x}$. Atunci*

$$\widetilde{\nabla} f(\overline{x})^* y^* \in \widetilde{D}^*_{\imath} f(\overline{x})(y^*), \quad \text{for all } y^* \in Y^*.$$

Dacă, adiţional, Y este finit dimensional atunci

$$\widetilde{D}^*_{\imath} f(\overline{x})(y^*) = \{\widetilde{\nabla} f(\overline{x})^* y^*\},$$

pentru orice $y^* \in Y^*$.

Dându-se o funcţie $f : X \to Y$ între două spaţii Banach, considerăm de asemenea următoarea *scalarizare* definită prin

$$\langle y^*, f\rangle(x) := \langle y^*, f(x)\rangle,\ x \in X, \tag{3.40}$$

pentru orice $y^* \in Y^*$. Studiem în continuare, în următorul cadru particular, proprietăţile de diferenţiabilitate Dini-Hadamard-like ale funcţiei de scalarizare prin intermediul operatorilor adjuncţi.

Propoziţia 3.4.2 *Dacă funcţia $f : X \to Y$ este Dini-Hadamard-like diferenţiabilă în punctul $\overline{x}$, atunci la fel este şi funcţia ei de scalarizare $\langle y^*, f\rangle$ şi*

$$\widetilde{\nabla}\langle y^*, f\rangle(\overline{x}) = \{\widetilde{\nabla} f(\overline{x})^* y^*\}.$$

Observaţia 3.4.3 Observăm că ultimele două rezultate listate mai sus conduc de fapt la următoarea relaţie dintre coderivata decuplată Dini-Hadamard-like a unei funcţii diferenţiabile şi derivata corespunzătoare a funcţiei ei de scalarizare. Şi anume, dacă $f : X \to Y$ este Dini-Hadamard-like diferenţiabilă în punctul $\overline{x}$, unde Y este finit dimensional, atunci următoarele egalităţi

$$\widetilde{D}^*_{\imath} f(\overline{x})(y^*) = \widetilde{\nabla}\langle y^*, f\rangle(\overline{x}) = \{\widetilde{\nabla} f(\overline{x})^* y^*\}$$

sunt adevărate pentru orice $y^* \in Y^*$.

În final, ilustrăm legătura dintre coderivata decuplată Dini-Hadamard-like (3.38) a unei funcţii Lipschitz spongioase şi subdiferenţiala Dini-Hadamard-like a funcţiei de scalarizare. De fapt, acest rezultat final se dovedeşte a fi unul dintre cele mai importante instrumente în derivarea regulilor exacte de calcul pentru subgradienţii Dini-Hadamard-like (a se vedea Secţiunea 4.2 de mai jos).

Propoziţia 3.4.4 *Fie $f : X \to Y$ o funcţie Lipschitz spongioasă şi tare spongios continuă în punctul $\overline{x}$. Atunci*

$$\widetilde{D}^*_{\dagger} f(\overline{x})(y^*) = \widetilde{\partial}\langle y^*, f\rangle(\overline{x}) \quad \textit{pentru orice } y^* \in Y^*. \tag{3.41}$$

Observăm de asemenea că a doua incluziune din Propoziţia 3.4.4 nu are nevoie de nici o altă condiţie suplimentară pentru f.

Chapter 4

Asupra regulilor de calcul ale subdiferenţialei Dini-Hadamard în spaţii Banach

Cu toate că subdiferenţiala Dini-Hadamard împreună cu replica ei superioară sunt binecunoscute (ne referim la [12], [63] şi [111] pentru mai multe detalii ce nu vor fi menţionate aici), utilizarea lor a fost limitată până acum, aparent din următoarele motive. Mai întâi de toate, afară de evidentul caz neted şi convex, este tipic ca $\partial^{DH} f(x)$ să fie vidă în anumite puncte. Cu toate că pentru o funcţie inferior semicontinuă definită pe un spaţiu ce admite o renormare Gâteaux diferenţiabilă (mai general pe un spaţiu în care există o funcţie cucui (bump) Gâteaux diferenţiabilă şi local Lipschitz), în particular pe orice spaţiu Banach separabil, subdiferenţiala Dini-Hadamard este nevidă într-o submulţime densă de elemente ale domeniului, în general este foarte simplu de găsit un exemplu de funcţie Lipschitz, chiar şi concavă continuă pe un spaţiu Banach astfel încât $\partial^{DH} f(x)$ să fie identic vidă. Acelaşi lucru este de asemenea adevărat pentru superdiferenţiala Dini-Hadamard. Un alt motiv este acela că regulile de calcul existente pentru subdifereţiala sau superdiferenţiala Dini-Hadamard sunt foarte puţine, în comparaţie cu cele cunoscute pentru subdiferenţiala convexă, gradientul generalizat al lui Clarke, sau chiar decât subdiferenţiala Mordukhovich sau subdiferenţialele aproximative ale lui Ioffe. De vreme ce derivata direcţională Dini-Hadamard nu este nici convexă nici concavă, este de asemenea firesc să credem că nu admite dezvoltări ulterioare folosind frumoasa teorie a dualităţii.

După o scurtă prezentare a celor mai importante reguli de calcul obţinute până acum în literatură (majoritatea fuzzy slabe), pentru construcţiile Dini-Hadamard, scopul nostru este de a furniza o formulă exactă pentru ε-subdiferenţiala Dini-Hadamard a diferenţei a două funcţii prin intermediul diferenţei-stea a ε-subdiferenţialelor Dini-Hadamard a funcţiilor implicate. În această investigaţie un rol important îl va juca o descriere variaţională a ε-subgradieţilor Dini-Hadamard obţinută în Subsecţiunea 3.3.3, care în fapt reprezintă o replică a binecunoscutei descrieri variaţionale valabile pentru ε-subgradienţii Fréchet. În vreme ce în formula subdiferenţială anunţată pentru diferenţa a două funcţii o incluziune urmează automat, pentru a o garanta pe cealaltă avem nevoie de câteva condiţii suplimentare. Mai precis, arătăm că în cazul în care funcţiile sunt direcţional aproape stelare într-un punct dat şi o condiţie topologică slabă este îndeplinită, atunci are loc şi incluziunea inversă. Marea noutate a acestei formule subdiferenţiale ce implică ε-subgradienţi Dini-Hadamard este faptul că un astfel de rezultat este primul de acest gen apărut până acum pentru astfel de construcţii. Cu toate acestea, caracterizări similare au fost date ulterior de Penot [119] în termeni de operatori disipativi.

Câteva formule exacte de calcul pentru subdiferenţialele Dini-Hadamard-like şi Dini-Hadamard sunt dezvoltate mai apoi. Printre ele menţionăm câteva formule pentru compuneri generalizate şi uzuale, pentru produse şi împărţiri etc. Se întâmplă ca regulile de calcul obţinute să implice funcţii Lipschitz spongioase şi tare spongios continue ce în spaţii finit dimensionale coincid cu clasica continuitate Lipschitz şi respectiv cu clasica continuitate. Obţinem de asemenea câteva afirmaţii date de Mordukhovich [96] în termeni de subgradienţi Fréchet, însă folosind condiţii diferite.

În final menţionăm că rezultatele prezentate în acest capitol se bazează în principal pe [9, 28, 104].

4.1 Reguli fuzzy de calcul

4.1.1 Preliminarii

Există câteva modalităţi de dezvoltare a unui set de instrumente de bază pentru analiza subdiferenţială, care se pot aplica unui număr mare de probleme. Diferenţa constă în punctul de pornire. Borwein, Treiman şi Zhu [22] folosesc o *regulă fuzzy nelocală de sumă* [151] drept procedeu de bază; *inegalitatea multidirecţională de medie* [36] este punctul de cotitură pentru Clarke, Ledyaev, Stern şi Wolenski [37]; Ioffe [68] începe cu o *regulă fuzzy locală de sumă*, iar Mordukhovich şi Shao [93] au ales *principiul extremal Kruger-Mordukhovich* [11, 89, 92] drept intrument principal. Cu toate acestea, toate aceste rezultate de bază sunt echivalente (echivalenţa dintre principiul extremal şi regula fuzzy locală de sumă a fost stabilită în [98], iar echivalenţa cu inegalitatea multidirecţională de medie şi cu regula fuzzy nelocală de sumă a fost arătată în [152]). În fapt, autorii operează în feluri diferite două principii de bază, şi anume, un *principiu variaţional neted* [21] şi *lema de decuplare* folosită de Crandall şi Lions în studiul unicităţii soluţiilor vâscozitate [39]. Astfel, motivat de teorema lui Zhu [152], Ioffe [69] a arătat de fapt că principiile de bază ale calculului subdiferenţial (diverse principii fuzzy locale şi globale, teorema multidirecţională de medie, principiul extremal) sunt echivalente pentru orice subdiferenţială, nu doar pentru cele vâscositate [23], sau variaţionale [132]. Teorema spune de altfel că există un singur principiu fundamental în spatele calculului subdiferenţial (înţelegem aici una abstractă, ce include subdiferenţialele elementare asociate unor bornologii (şi nu doar β-subdiferenţialele vâscozităţi), toate tipurile de subdiferenţiale limită şi toate modificările subdiferenţialelor aproximative, la fel ca şi ε-versiunile subdiferenţialelor amintite). Mai târziu, Lassonde [80] a mai adaugă alte patru proprietăţi listei celor şapte proprietăţi echivalente ale lui Ioffe, arătând că toate acestea sunt verificate dacă spaţiul admite o nomă ∂-diferenţiabilă în sensul lui Aussel, Corvellec şi Lassonde [7].

4.1.2 Trustworthiness şi reguli fuzzy de calcul pentru subdiferenţiala Dini-Hadamard

Prin reguli de calcul pentru derivate şi subdiferenţiale, înţelegem de obicei reguli care ne permit să estimăm sau să calculăm derivate şi subdiferenţiale a unor combinaţii de funcţii precum sume şi compoziţii, teoreme de medie etc. Cât priveşte sumele, următoarea incluziune

$$\partial(f_1 + ... + f_n)(x) \supset \partial f_1(x) + ... + \partial f_n(x)$$

este adevărată pentru orice β-subdiferenţială, în vreme ce incluziunea inversă, evident, nu este validă (excepţie de la această regulă fac subdiferenţialele limită în spaţii potrivite, subdiferenţialele aproximative ale lui Ioffe şi gradientul generalizat al lui Clarke în spaţii Banach arbitrare). Mai mult, experienţa analizei convexe ne sugerează că incluziunea inversă este cea de care avem nevoie în aplicaţii. Cât priveşte subdiferenţialele asociate derivatelor, aşa cum este cazul subdiferenţialei Dini-Hadamard şi a altora, avem un nou tip de reguli de calcul în care incluziunea dorită este *aproape* satisfăcută, într-un sens ce va fi precizat mai jos.

Aşadar, reamintim următorul rezultat important ce încorporează cele trei tipuri de reguli de sumă (1. *regula fuzzy slabă de sumă*, 2. *regula fuzzy tare de sumă* şi 3. the *regula exactă de sumă*) de care o subdiferenţială poate asculta.

Teorema 4.1.3 (cf. [71, Teorema 2]) *Fie X un spaţiu Banach şi fie $f_1, ...f_k$ ce verifică o condiţie Lipschitz într-o vecinătate a unui punct $x \in X$. Presupunem mai departe că $x^* \in \partial(f_1 + ... + f_k)(\overline{x})$ pentru ∂.*

1. Dacă ∂ este o β-subdiferenţială şi există o funcţie cucui Lipschitz β-diferenţiabilă pe X, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ şi orice vecinătate slabă V a originii spaţiului X^* există $x_1, ..., x_k \in X$ şi $x_1^*, ...x_k^* \in X^*$ astfel încât

$$\|x_i - \overline{x}\| < \varepsilon, \quad x_i^* \in \partial f_i(x_i), \ i = 1, ..., k \quad \text{and} \quad x^* \in x_1^* + ... + x_k^* + V. \tag{4.1}$$

2. Dacă X este un spaţiu Asplund şi $\partial = \widehat{\partial}$, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $x_1, ..., x_k \in X$ şi $x_1^*, ...x_k^* \in X^*$ astfel încât

$$\|x_i - \overline{x}\| < \varepsilon, \quad x_i^* \in \partial f_i(x_i), \ i = 1, ..., k \quad \text{şi} \ \|x_1^* + ... + x_k^* - x^*\| < \varepsilon. \tag{4.2}$$

3. Următoarea incluziune

$$\partial(f_1 + ... + f_k)(\overline{x}) \subseteq \partial f_1(\overline{x}) + ... + \partial f_k(\overline{x}) \tag{4.3}$$

este adevărată în următoarele cazuri: există o funcţie cucui Lipschitz β-diferenţiabilă pe X, bila unitate a spaţiului X^* este secvenţial slab compactă şi ∂ este o β-subdiferenţiabilă limită, X este un spaţiu Asplund şi ∂ este subdiferenţiala limită Fréchet sau X este un spaţiu Banach arbitrar şi ∂ este subdiferenţiala aproximativă sau gradientul generalizat al lui Clarke.

Din păcate, după cum putem uşor observa, subdiferenţiala Dini-Hadamard se bucură doar de o regulă fuzzy slabă de sumă în spaţii corespunzătoare.

4.1.3 Reguli de calcul fuzzy slabe pentru coderivata Dini-Hadamard

Mai întâi de toate menţionăm că este adesea suficient să cunoaştem doar reguli pentru sume de funcţii şi/sau funcţii marginale, pentru a obţine reguli corespunzătoare pentru alte operaţii (a se vedea abordarea din [74] şi referinţele de acolo).

Prezentăm în continuare câteva estimări diverse ale coderivatei Dini-Hadamard, obţinute de Ioffe şi Penot [74] în 1996. Cadrul general în care lucrăm este următorul. Fie X, Y, Z ca de altfel şi produsele lor spaţii slabe trustworthy. De fapt, lucrul de care avem nevoie este acela ca subdiferenţiala Dini-Hadamard să verifice reguli de calcul fuzzy slabe pe aceste spaţii.

Propoziţia 4.1.6 (cf. [74, Propoziţia 5.1]) *Fie $F : X \to Y$ şi $G : Y \to Z$ două funcţii cu graficele închise. Fie $\overline{z} \in (G \circ F)(\overline{x})$ şi $\overline{x}^* \in D^*(G \circ F)(\overline{x}, \overline{z})(\overline{z}^*)$. Atunci pentru orice $\overline{y} \in F(\overline{x}) \bigcap G^{-1}(\overline{z})$, orice $\varepsilon > 0$ şi orice vecinătăţi slabe U^*, V^* şi W^* ale originilor spaţiilor X^*, Y^* şi respectiv Z^* există $x \in X, y_1, y_2 \in Y, z \in Z$, and $x^* \in X^*, y_1^*, y_2^* \in Y^*, z^* \in Z$ astfel încât*

$$\begin{cases} \|x - \overline{x}\| < \varepsilon, \|y_i - \overline{y}\| < \varepsilon, \|z - \overline{z}\| < \varepsilon; \\ x^* \in D^*F(x, y_1)(y_1^*), y_2^* \in D^*G(y_2, z)(z^*); \\ x^* \in \overline{x}^* + U^*, y_1^* - y_2^* \in V^*, z^* \in \overline{z}^* + W^*. \end{cases} \tag{4.4}$$

Propoziţia 4.1.7 (cf. [74, Propoziţia 5.2]) *Fie $F_i : X \to Y, (i = 1, ..., k)$ funţii cu graficele închise. Considerăm de asemenea $F(x) = F_1(x) + ... + F_k(x)$ şi presupunem că $\overline{y} \in F(\overline{x})$ şi $\overline{x}^* \in D^*F(\overline{x}, \overline{y})(\overline{y}^*)$. Presupunem de asemenea că $\overline{y}_i \in F_i(\overline{x}), \overline{y}_1 + ... + \overline{y}_k = \overline{y}$. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ şi orice vecinătăţi slabe U^*, V^* ale originilor spaţiilor X^* şi respectiv Y^* există x_i, y_i, x_i^*, y_i^* $(i = 1, ..., k)$ astfel încât*

$$\begin{cases} \|x_i - \overline{x}\| < \varepsilon, \|y_i - \overline{y}_i\| < \varepsilon, \\ x^* \in D^*F_i(x_i, y_i)(y_i^*), \\ x_1^* + ... + x_k^* \in \overline{x}^* + U^*, y_i^* \in \overline{y}^* + W^*(i = 1, ..., k). \end{cases} \tag{4.5}$$

Propoziţia 4.1.8 (cf. [74, Propoziţia 5.3]) *Fie F_i ca în Propoziţia 4.1.7 şi $F(x) = \bigcap F_i(x)$. Presupunem că $\overline{y} \in F(\overline{x})$ şi $\overline{x}^* \in D^*F(\overline{x}, \overline{y})(\overline{y}^*)$. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ şi orice vecinătăţi slabe U^*, V^* ale originilor spaţiilor X^* şi respectiv Y^* există $x_i, y_i, x_i^*, y_i^*(i = 1, ..., k)$ astfel încât*

$$\begin{cases} \|x_i - \overline{x}\| < \varepsilon, \|y_i - \overline{y}_i\| < \varepsilon, \\ x^* \in D^*F_i(x_i, y_i)(y_i^*), \\ x_1^* + ... + x_k^* \in \overline{x}^* + U^*, y_1^* + ... + y_k^* \in \overline{y}^* + W^*. \end{cases} \tag{4.6}$$

Bineînţeles, dacă lucrăm într-un spaţiu finit dimensional, de vreme ce acolo subdiferenţiala Dini-Hadamard coincide cu subdiferenţiala Fréchet, putem obţine formule de o mai mare acurateţe (a se vedea [74], mai degrabă Secţiunea 6, dar de asemenea şi [94, 95, 96]).

4.2 În căutarea unor formule exacte de calcul

Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}} := [-\infty, +\infty]$ o funcţie definită pe un spaţiu Banach real X. Urmează direct din definiţia subdiferenţialei Dini-Hadamard că are loc următoarea regulă Fermat generalizată, şi anume

$$0 \in \partial^{DH} f(\overline{x}) \tag{4.7}$$

atunci când $\overline{x}$ este un punct de minim local pentru $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Dacă considerăm mai departe următoarea problemă de minimizare cu restricţii

$$\min_{x \in C \subseteq X} f(x), \tag{4.8}$$

putem observa uşor că se poate reduce (într-un mod echivalent) la următoarea problemă fără restricţii

$$\min_{x \in X} f(x) + \delta(x; C), \tag{4.9}$$

ce implică funcţia indicator $\delta(\cdot; C)$ a mulţimii C. Aplicând acum regula lui Fermat (4.7), obţinem

$$0 \in \partial^{DH}[f + \delta(\cdot; C)](\overline{x}),$$

dacă $\overline{x}$ este o soluţie locală a problemei de optimizare cu restricţii (4.8). Pentru a merge mai departe în optimizarea cu restricţii şi a obţine condiţii de optim valoroase în termenii datelor iniţiale, avem nevoie de reguli de calcul satisfăcătoare pentru subgradienţii Dini-Hadamard, ceea ce în general nu este cazul. În particular, regula dezirabilă de sumă

$$\partial^{DH}(f_1 + f_2)(\overline{x}) \subset \partial^{DH} f_1(\overline{x}) + \partial^{DH} f_2(\overline{x}) \tag{4.10}$$

nu are loc nici măcar în cel mai simplu cadru neneted, spre exemplu putem considera funcţiile $f_1(x) = |x|$ şi $f_2(x) = -|x|$ pe axa reală. Pe de altă parte, subgradienţii Dini-Hadamard verifică, după cum am văzut mai sus, aa̧-zisa regula fuzzy slabă de sumă în condiţii naturale ce implică o clasă largă de spaţii Banach (şi anume, acele spaţii care admit norme echivalente Gâteaux diferenţiabile). Totuşi, o astfel de regulă fuzzy de calcul nu este foarte utilă în aplicaţiile ce includ condiţii necesare de optim în optimizarea cu restricţii, de vreme ce astfel de reguli poartă cu sine o oarecare incertitudine şi ne permit să reprezentăm aproximativ subgradienţii Dini-Hadamard ai sumei unor funcţii în punctele de interes prin intermediul subgradienţilor Dini-Hadamard al funcţiilor separate în punctele învecinate. Merită să menţionăm că o regulă de calcul în care să apară doar punctele de interes este cu certitudine mult mai de dorit pentru majoritatea aplicaţiilor. De fapt, absenţa unor astfel de reguli de calcul pentru subdiferenţiala Dini-Hadamard şi ε-extinderea ei au restricţionat semnificativ scopul aplicaţiilor lor.

Motivul acestei secţiuni este acela de a completa imaginea făcută de Ioffe [63] şi mai târziu de Penot [74]. Mai precis, dorim să arătăm că ε-subdiferenţiala Dini-Hadamard se bucură de asemenea şi de câteva reguli de calcul netriviale. În contrast cu rezultatele obţinute de Ioffe în cazul particular al spaţiilor finit dimensional şi de asemenea al spaţiilor Banach ce admit o normă Gâteaux diferenţiabilă, regulile exacte de calcul obţinute în finalul acestui capitol fac din subdiferenţiala Dini-Hadamard un oponent competitiv subdiferenţialei Fréchet.

4.2.1 Reguli de sumă şi de diferenţă ce implică funcţii netede

Cu toate că regula dezirabilă de sumă de tipul incluziunii (4.10) nu are loc pentru subgradienţii Dini-Hadamard-like ce implică ambele funcţii nenetede, nu acelşi lucru se poate spune şi în cazul în care cel puţin una dintre ele este Dini-Hadamard-like diferenţiabilă.

Propoziţia 4.2.1 *Fie $f_1 : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie finită în punctul $\overline{x}$ şi fie $f_2 : X \to \overline{\mathbb{R}}$ Dini-Hadamard-like diferenţiabilă în $\overline{x}$. Atunci are loc egalitatea*

$$\widetilde{\partial}(f_1 + f_2)(\overline{x}) = \widetilde{\partial} f_1(\overline{x}) + \widetilde{\nabla} f_2(\overline{x}). \tag{4.11}$$

O consecinţă directă a acestei ultime propoziţii este următoarea regulă utilă (ca de altfel elementară) de diferenţă.

Propoziţia 4.2.2 *Fie $f_1 : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie finită în punctul $\overline{x}$ şi fie $f_2 : X \to \overline{\mathbb{R}}$ Dini-Hadamard-like diferenţiabilă în $\overline{x}$. Atunci are loc egalitatea*

$$\widetilde{\partial}(f_1 - f_2)(\overline{x}) = \widetilde{\partial} f_1(\overline{x}) - \widetilde{\nabla} f_2(\overline{x}). \tag{4.12}$$

Mai remarcăm de asemenea aici faptul că un rezultat similar are loc şi pentru subgradienţii Dini-Hadamard dacă se impun câteva condiţii suplimentare de calmare.

4.2.2 Asupra unei formule de diferenţă a două funcţii direcţional aproape stelare pentru subdiferenţiala Dini-Hadamard

Fie acum $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ două funcţii arbitrare. Folosind Teorema 3.3.15 şi faptul că intersecţia a două mulţimi spongioase în jurul unui punct este spongioasă în acel punct, putem arăta că pentru orice $\varepsilon, \eta \geq 0$ şi orice $x \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$

$$\partial_\varepsilon^{DH} f(x) + \partial_\eta^{DH} g(x) \subseteq \partial_{\varepsilon+\eta}^{DH}(f + g)(x). \tag{4.13}$$

Din convenţiile făcute pentru ε-subdifferential Dini-Hadamard urmează că (4.13) este de fapt adevărată pentru orice $x \in X$.

În cele ce urmează furnizăm prin intermediul (4.13) o formulă pentru *diferenţa* a două funcţii. În acest scop avem nevoie să introducem următoarea noţiune de *diferenţă-stea* (denumită de asemenea *diferenţă Pontryagin*) a două mulţimi. Şi anume, dându-se $A, B \subseteq X$ *diferenţa-stea* a mulţimilor A şi B este definită ca fiind

$$A \overset{*}{-} B := \{x \in X : \ x + B \subseteq A\} = \bigcap_{b \in B} \{A - b\}.$$

Adoptăm aici convenţia $A \overset{*}{-} B := \emptyset$ dacă $A = \emptyset$, $B \neq \emptyset$ şi $A \overset{*}{-} B := X$ în cazul în care $B = \emptyset$. În mod evident, pentru B nevidă, avem $A \overset{*}{-} B + B \subseteq A$ şi $A \overset{*}{-} B \subseteq A - B$. În general, aceste incluziuni sunt stricte şi $A \overset{*}{-} B$ este mult mai mică decât $A - B$. Introdusă de Pontrjagin în [121] în contextul jocurilor diferenţiale liniare, această noţiune şi-a găsit rezonanţa în diferite investigaţii teoretice şi practice din câmpul analizei nenetese (a se vedea, spre exemplu, [1, 4, 30, 52, 56, 84, 96, 123]).

Atunci când lucrăm cu diferenţa a două funţii $g, h : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ presupunem că $\operatorname{dom} g \subseteq \operatorname{dom} h$. Acest lucru garantează că funcţia $f = g - h : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ este bine definită şi pe deasupra putem uşor verifica că $g = f + h$ şi $\operatorname{dom} f = \operatorname{dom} g$. Notăm de asemenea că o astfel de condiţie pare a fi necesară de asemenea şi în [1], pentru a garanta că funcţia diferenţă ia valori în $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, cadru considerat şi în articolul menţionat.

Folosind (4.13), obţinem următorul rezultat.

Propoziţia 4.2.3 *Fie $g, h : X \to \overline{\mathbb{R}}$ doup funcţii date şi $f := g - h$. Atunci pentru orice $\varepsilon, \eta \geq 0$ şi orice $x \in X$ avem*

$$\partial_{\varepsilon}^{DH} f(x) \subseteq \partial_{\varepsilon+\eta}^{DH} g(x) \overset{*}{-} \partial_{\eta}^{DH} h(x). \tag{4.14}$$

Observaţia 4.2.4 (a) Dacă pentru $\eta \geq 0$ şi $x \in X$ mulţimea $\partial_{\eta}^{DH} h(x)$ este nevidă, atunci avem pe deasupra

$$\partial_{\varepsilon}^{DH}(g-h)(x) \subseteq \partial_{\varepsilon+\eta}^{DH} g(x) \overset{*}{-} \partial_{\eta}^{DH} h(x) \subseteq \partial_{\varepsilon+\eta}^{DH} g(x) - \partial_{\eta}^{DH} h(x) \text{ for all } \varepsilon \geq 0.$$

(a)' Un rezultat similar este de asemenea adevărat dacă folosim sume în locul diferenţelor. Şi anume, dacă pentru oarecare $\eta \geq 0$ şi $x \in X$ mulţimea $\partial_{\eta}^{DH,+} h(x)$ este nevidă, atunci

$$\partial_{\varepsilon}^{DH}(g+h)(x) \subseteq \partial_{\varepsilon+\eta}^{DH} g(x) \overset{*}{+} \partial_{\eta}^{DH} h(x) \subseteq \partial_{\varepsilon+\eta}^{DH} g(x) + \partial_{\eta}^{DH} h(x) \text{ for all } \varepsilon \geq 0,$$

unde pentru două submulţimi date A, B ale lui X,

$$A \overset{*}{+} B := \{x \in X : x - B \subseteq A\} = \bigcap_{b \in B} \{A + b\} \tag{4.15}$$

denotă *suma-stea* a lui A şi B.

(b) Dacă $\overline{x}$ este un punct de minim local al funcţiei $f := g - h$ şi f este finită în $\overline{x}$, atunci

$$0 \in \partial^{DH} g(\overline{x}) \overset{*}{-} \partial^{DH} h(\overline{x})$$

sau, echivalent,

$$\partial^{DH} h(\overline{x}) \subseteq \partial^{DH} g(\overline{x}).$$

(c) Aparent foarte simplă, regula de diferenţă de mai sus ne asigură că ori de câte ori $\partial^{DH} f(x) \neq \emptyset$, următoarea incluziune

$$\partial^{DH,+} f(x) \subseteq \bigcap_{x^* \in \partial^{DH} f(x)} x^*$$

este adevărată, unde $\partial^{DH,+} f(x) := -\partial^{DH}(-f)(x)$ definşte superdiferenţiala Dini-Hadamard a lui f în $\overline{x}$.

(d) Putem de asemenea verifica că dacă $\partial^{DH} f(\overline{x})$ şi $\partial^{DH,+} f(\overline{x})$ sunt nevide simultan, unde $\overline{x}$ este în aşa fel încât $|f(\overline{x})| < +\infty$, atunci $\partial^{DH} f(\overline{x}) = \partial^{DH,+} f(\overline{x})$.

(e) Caracterizări similare pentru diferenţa a două funcţii au fost date în [1] prin intermediul subdiferenţialei Fréchet, în [96] cu ajutorul subdiferenţialei Mordukhovich (vezi [94, 95]), iar în [9] prin mijlocirea subdiferenţialei Dini-Hadamard-like.

Practic o întreagă teorie implicând sume-stea de două funcţii se poate dezvolta într-un mod similar, însă nu menţionăm aici aceste detalii.

În cele ce urmează arătăm că pentru câteva clase particulare de funcţii obţinem egalitate în (4.14).

Următorul rezultat este un prim rafinament al afirmaţiei din Propoziţia 4.2.3, în cazul în care $\varepsilon = \eta = 0$.

Teorema 4.2.5 *Fie $g, h : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ două funcţii direţional aproape stelare în punctul $\overline{x} \in \operatorname{dom} g \subseteq \operatorname{dom} h$ astfel încât $\partial^{DH} h$ este spongios gap-continuă în $\overline{x}$ şi $f := g - h$ este calmă în $\overline{x}$. Atunci are loc*

$$\partial^{DH} f(\overline{x}) = \partial^{DH} g(\overline{x}) \overset{*}{-} \partial^{DH} h(\overline{x}). \tag{4.16}$$

Observaţia 4.2.6 (a) În ipotezele Teoremei 4.2.5 avem

$$0 \in \partial^{DH} f(\overline{x}) \Leftrightarrow \partial^{DH} h(\overline{x}) \subseteq \partial^{DH} g(\overline{x}).$$

(b) Dacă $g, h : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ sunt funcţii convexe cu $\operatorname{dom} g \subseteq \operatorname{dom} h$, $\partial^{DH} h$ este spongios gap-continuă în $\overline{x} \in \operatorname{dom} g$ şi $f := g - h$ este calmă în $\overline{x}$, atunci

$$\partial^{DH} f(\overline{x}) = \partial g(\overline{x}) \overset{*}{-} \partial h(\overline{x}).$$

Teorema 4.2.5 este cel mai important ingredient în demonstrarea următorului rezultat.

Teorema 4.2.7 *Fie $g, h : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ două funcţii direcţional aproape stelare în punctul $\overline{x} \in \operatorname{dom} g \subseteq \operatorname{dom} h$ şi $f := g - h$ este calmă în $\overline{x}$. Dacă pentru un oarecare $\eta \geq 0$ multifuncţia $\partial^{DH}_{\eta} h$ este spongios gap-continuă în $\overline{x}$, atunci pentru orice $\varepsilon \geq 0$ are loc*

$$\partial^{DH}_{\varepsilon} f(\overline{x}) = \partial^{DH}_{\varepsilon+\eta} g(\overline{x}) \overset{*}{-} \partial^{DH}_{\eta} h(\overline{x}). \tag{4.17}$$

Observaţia 4.2.8 (a) Ar trebui să mai menţionăm faptul că, în ipotezele Teoremei 4.2.7, pentru orice $\varepsilon \geq 0$ are loc

$$\partial^{DH}_{\varepsilon} f(\overline{x}) = \bigcap_{\mu \geq 0} \left(\partial^{DH}_{\varepsilon+\mu} g(\overline{x}) \overset{*}{-} \partial^{DH}_{\mu} h(\overline{x}) \right). \tag{4.18}$$

(b) Aşa cum am remarcat în Observaţia 3.3.3, pentru a garanta că $\partial^{DH}_{\eta} h$ este spongios gap-continuă în $\overline{x}$ pentru un $\eta \geq 0$ dat, este suficient să presupunem că $\partial^{DH} h$ este spongios gap-continuă în $\overline{x}$.

Observăm de asemenea aici că rezultatele din Teoremele 4.2.5 şi 4.2.7 rămân de asemenea adevărate şi în cazul în care gap-continuitatea spongioasă este înlocuită cu pseudo-disipativitatea spongioasă. Mai mult, urmând liniile demonstraţiilor teoremelor de mai sus, putem chiar furniza o formulă pentru diferenţa a două funcţii în termenii subdiferenţialei Dini-Hadamard-like.

Teorema 4.2.9 *Fie $g, h : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ două funcţii direcţional aproape stelare în punctul $\overline{x} \in \operatorname{dom} g$ şi $f := g - h$. Dacă pentru un oarecare $\eta \geq 0$ multifuncţia $\widetilde{\partial}_\eta h$ este spongios pseudo-disipativă în $\overline{x}$, atunci pentru orice $\varepsilon \geq 0$ are loc*

$$\widetilde{\partial}_\varepsilon f(\overline{x}) = \widetilde{\partial}_{\varepsilon+\eta} g(\overline{x}) \overset{*}{-} \widetilde{\partial}_\eta h(\overline{x}). \tag{4.19}$$

Dacă funcţia f este calmă în $\overline{x}$ obţinem rezultatul din Teorema 4.2.7. Pentru un rezultat similar în cazul particular în care $\varepsilon = \eta = 0$, ne referim la [119, Teorema 28]. Acolo funcţia h este presupusă a fi direcţional aproape stelară, direcţional continuă, direcţional stabilă şi tangenţial convexă în $\overline{x}$, un punct din $\operatorname{core}(\operatorname{dom} h)$. Rezultate analoage exprimate în termenii subdiferenţialei Fréchet se pot găsi în [1, Teorema 3] şi în [119, Teorema 26], unde funcţiile sunt presupuse a fi aproape stelare şi o condiţie foarte uşoară este impusă asupra lui $\widehat{\partial} h$. Dar, de vreme ce f poate să nu fie calmă în $\overline{x}$ sau funcţiile g şi h pot să nu fie aproape stelare sau chiar $\operatorname{core}(\operatorname{dom} h)$ poate fi vid (spre exemplu, $\operatorname{core}(\ell^p_+) = \emptyset$ pentru orice $p \in [1, +\infty)$, vezi [27]), ne motivează să formulăm rezultate precum Teorema 4.2.9.

Două corolarii ale Teoremei 4.2.7 urmează uşor.

Corolarul 4.2.10 *Fie $g, h : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ două funcţii direcţional aproape stelare în punctul $\overline{x} \in \operatorname{dom} g$ astfel încât $\partial^{DH} h$ este spongios gap-continuă în $\overline{x}$ şi $f := g - h$ este calmă în $\overline{x}$. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) există $\eta \geq 0$ astfel încât $\partial^{DH}_\eta h(\overline{x}) \subseteq \partial^{DH}_\eta g(\overline{x})$;

(ii) $0 \in \partial^{DH} f(\overline{x})$;

(iii) pentru orice $\eta \geq 0$ $\partial^{DH}_\eta h(\overline{x}) \subseteq \partial^{DH}_\eta g(\overline{x})$.

Corolarul 4.2.11 *Fie $g, h : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ două funcţii, $\overline{x} \in \operatorname{dom} g$ şi $f := g - h$ calmă în $\overline{x}$. Atunci următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

(a) Dacă g este convexă, h este direcţional aproape stelară în $\overline{x}$ şi $\partial^{DH} h$ este spongios gap-continuă în $\overline{x}$, atunci pentru orice $\varepsilon \geq 0$ are loc

$$\partial^{DH}_\varepsilon f(\overline{x}) = (\partial g(\overline{x}) + \varepsilon \overline{B}_{X^*}) \overset{*}{-} \partial^{DH} h(\overline{x}).$$

(b) Dacă g este inferior semicontinuă, aproape convexă în $\overline{x}$, h este direcţional aproape stelară în $\overline{x}$ şi $\partial^{DH} h$ este spongios gap-continuă în $\overline{x}$, atunci pentru orice $\varepsilon \geq 0$ are loc

$$\partial^{DH}_\varepsilon f(\overline{x}) = (\partial^{DH} g(\overline{x}) + \varepsilon \overline{B}_{X^*}) \overset{*}{-} \partial^{DH} h(\overline{x}).$$

Notăm de asemenea că rezultatele de mai sus rămân de asemenea adevărate în cazul în care înlocuim subdiferenţiala Dini-Hadamard cu subdiferenţiala Dini-Hadamard-like şi renunţăm la condiţia de calmare (a se vedea [9, Corolarul 11, Corolarul 12]).

Următorul rezultat, ce îmbunătăţeşte semnificativ rezultatul din [28, Corolarul 3.6], graţie Teoremei 4.2.9 şi [119, Teorema 26] (a se vedea de asemenea Propoziţia 3.3.34), este menit să dezvăluie că subdiferenţiala Dini-Hadamard-like coincide cu subdiferenţiala Dini-Hadamard şi cu subdiferenţiala Fréchet nu doar pe funcţii aproape stelare ci şi pe câteva diferenţe particulare de funcţii aproape stelare.

Corolarul 4.2.12 *Fie $g, h : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ două funcţii aproape stelare în punctul $\overline{x} \in \operatorname{dom} g$ cu proprietatea că există un $\eta \geq 0$ astfel încât $\partial^S_\eta h$ este aproape pseudo-disipativă în $\overline{x}$ şi $f := g - h$. Atunci pentru orice $\varepsilon \geq 0$ $\widehat{\partial}_\varepsilon f(\overline{x}) = \partial^{DH}_\varepsilon f(\overline{x}) = \partial^S_\varepsilon f(\overline{x})$.*

Mai mult, în cazul în care $\overline{x} \in \operatorname{core}(\operatorname{dom} h)$ şi $\partial^{DH} h$ este doar direcţional aproape pseudo-disipativă în $\overline{x}$, atunci putem garanta că pentru orice $\varepsilon \geq 0$, $\partial^{DH}_\varepsilon f(\overline{x}) = \partial^S_\varepsilon f(\overline{x})$ (a se vedea în acest scop [119, Lema 22, Lema 24, Lema 27] şi Observaţia 4.2.4 (c)).

4.2.3 O regulă de diferenţă pentru coderivatele Dini-Hadamard-like

Furnizăm în continuare o formulă de diferenţă ce implică construcţia coderivată studiată în Secţiunea 3.4.

Corolarul 4.2.13 *Fie $f_i : X \to Y$, $i = 1, 2$, două funcţii astfel încât f_2 şi funcţia diferenţă $f_1 - f_2$ sunt spongios Lipschitz şi tare spongios continue în $\overline{x}$. Atunci*

$$\widetilde{D}^*_{\dagger}(f_1 - f_2)(\overline{x})(y^*) \subseteq \widetilde{D}^*_{\dagger} f_1(\overline{x})(y^*) \overset{*}{-} \widetilde{D}^*_{\dagger} f_2(\overline{x})(y^*) \quad \textit{for all } y^* \in Y^*. \tag{4.20}$$

Adiţional, dacă f_1 este tare spongios continuă în $\overline{x}$ şi f_2 este Dini-Hadamard-like diferenţiabilă în $\overline{x}$ atunci

$$\begin{aligned} \widetilde{D}^*_{\dagger}(f_1 - f_2)(\overline{x})(y^*) &= \widetilde{D}^*_{\dagger} f_1(\overline{x})(y^*) \overset{*}{-} \widetilde{D}^*_{\dagger} f_2(\overline{x})(y^*) \\ &= \widetilde{D}^*_{\dagger} f_1(\overline{x})(y^*) - \widetilde{D}^*_{\dagger} f_2(\overline{x})(y^*) \end{aligned} \tag{4.21}$$

pentru orice $y^* \in Y^*$.

4.2.4 Subdiferenţiale ale compunerii

Primul scop al subsecţiunii este acela de a dezvolta reguli de calcul pentru compunere, mai întâi pentru subdiferenţiala Dini-Hadamard-like şi mai apoi pentru subdifereţiala Dini-Hadamard, în spaţii Banach reale arbitrare. Ingredientul cheie în derivarea unor astfel de formule este jucat, după cum vom vedea mai jos, de descrierea variaţională netedă a subgradienţilor decuplaţi Dini-Hadamard-like (a se vedea rezultatele din Subsecţiunea 3.3.5).

Surprinător, ca şi consecinţe directe, putem obţine o varietate de reguli de calcul precum reguli de produs şi împărţire într-o generalitate destul de mare.

Considerăm acum următoarea *compunere generalizată* dată de

$$(\varphi \circ f)(x) := \varphi(x, f(x)), \tag{4.22}$$

unde $\varphi : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ este o funcţie cu valori pe axa reală extinsă, iar $f : X \to Y$ este o funcţie între două spaţii Banach.

Intenţia noastră este aceea de a furniza o regulă exactă de compunere utilizând subgradienţii Dini-Hadamard-like şi Dini-Hadamard-like decuplaţi deopotrivă. Subliniem de asemenea aici faptul că deşi am acordat cea mai mare atenţie studiului construcţiilor subdiferenţiale inferioare a căror proprietăţi le induc simetric pe cele ale construcţiilor superioare, există probleme importante în analiza variaţională şi în optimizare care cer deopotrivă gradienţii inferiori şi superiori. Următorul rezultat se întâmplă să fie un astfel de exemplu.

Teorema 4.2.14 *Fie $f : X \to Y$ o funcţie Lipschitz spongioasă şi tare spongios continuă în punctul $\overline{x}$ şi $\varphi : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie finită în $(\overline{x}, f(\overline{x}))$. Atunci*

$$\widetilde{\partial}(\varphi \circ f)(\overline{x}) \subseteq \bigcap_{(x^*,y^*)\in\widetilde{\partial}^+_{\scriptscriptstyle\prime}\varphi(\overline{x},f(\overline{x}))} \left[x^* + \widetilde{\partial}\langle y^*, f\rangle(\overline{x})\right]. \tag{4.23}$$

Suplimentar, dacă φ este decuplat diferenţiabilă Dini-Hadamard-like în $(\overline{x}, f(\overline{x}))$ cu $\widetilde{\nabla}_{\scriptscriptstyle\prime}\varphi(\overline{x}, f(\overline{x})) = (x^*, y^*)$, atunci

$$\widetilde{\partial}(\varphi \circ f)(\overline{x}) = x^* + \widetilde{\partial}\langle y^*, f\rangle(\overline{x}). \tag{4.24}$$

Când funcţia f este în plus calmă în $\overline{x}$ (în particular este cazul acelor funcţii continue Lipshitz în $\overline{x}$) atunci obţinem următorul corolar ce furnizează câteva estimări pentru subgradienţii Dini-Hadamard ai compunerii prin intermediul subgradienţilor Dini-Hadamard ai funcţiei de scalarizare şi a subgradienţilor Dini-Hadamard-like.

Corolarul 4.2.15 *Fie $f : X \to Y$ o funcţie calmă, Lipschitz spongioasă şi tare spongios continuă în punctul $\overline{x}$ şi $\varphi : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie finită în $(\overline{x}, f(\overline{x}))$. Atunci*

$$\partial^{DH}(\varphi \circ f)(\overline{x}) \subseteq \bigcap_{(x^*,y^*)\in\widetilde{\partial}^+_{\scriptscriptstyle\prime}\varphi(\overline{x},f(\overline{x}))} \left[x^* + \partial^{DH}\langle y^*, f\rangle(\overline{x})\right]. \tag{4.25}$$

Adiţional, dacă φ este decuplat diferenţiabilă Dini-Hadamard-like în $(\overline{x}, f(\overline{x}))$ cu $\widetilde{\nabla}_{\scriptscriptstyle\prime}\varphi(\overline{x}, f(\overline{x})) = (x^*, y^*)$ şi $\varphi \circ f$ este calmă în $\overline{x}$, atunci

$$\partial^{DH}(\varphi \circ f)(\overline{x}) \subseteq x^* + \partial^{DH}\langle y^*, f\rangle(\overline{x}). \tag{4.26}$$

Observaţia 4.2.16 Caracterizări similare celei din Teorema 4.2.14 au fost date de Mordukhovich [96] în termeni de subgradienţi Fréchet, prin implicarea funcţiei continue Lipschitz f. Dar, dacă funcţia f este doar Lipschitz spongioasă şi tare spongios continuă în $\overline{x}$ (a se vedea Exemplul 3.1.11), atunci nu mai putem aplica rezultatele de acolo. Însă, folosind rezultatul nostru de mai sus, obţinem următoarea estimare alternativă pentru subgradienţii Fréchet

$$\widehat{\partial}(\varphi \circ f)(\overline{x}) \subseteq \bigcap_{(x^*,y^*)\in\widehat{\partial}^+\varphi(\overline{x},f(\overline{x}))} \left[x^* + \widetilde{\partial}\langle y^*, f\rangle(\overline{x})\right], \tag{4.27}$$

de vreme ce $\widehat{\partial}(\varphi \circ f)(\overline{x}) \subseteq \widetilde{\partial}(\varphi \circ f)(\overline{x})$ şi $\widehat{\partial}^{+}\varphi(\overline{x}, f(\overline{x})) \subseteq \widetilde{\partial}_{\wr}^{+}\varphi(\overline{x}, f(\overline{x}))$. Mai mult, dacă φ este decuplat diferenţiabilă Dini-Hadamard-like în $(\overline{x}, f(\overline{x}))$ cu $\widetilde{\nabla}_{\wr}\varphi(\overline{x}, f(\overline{x})) = (x^*, y^*)$, atunci

$$\widehat{\partial}(\varphi \circ f)(\overline{x}) \subseteq x^* + \widetilde{\partial}\langle y^*, f\rangle(\overline{x}). \tag{4.28}$$

După cum am menţionat mai înainte, ipoteza de calmare poate fi înlocuită cu succes de clasica continuitate Lipschitz.

Mai departe, formula din Teorema 4.2.14 dă naştere următoarei reguli de compunere pentru compunerea uzuală $(\varphi \circ f)(x) := \varphi(f(x))$, dacă ţinem cont şi de (4.22), cu $\varphi = \varphi(y)$.

Corolarul 4.2.17 *Fie $f : X \to Y$ o funcţie Lipschitz spongioasă şi tare spongios continuă în punctul $\overline{x}$ şi $\varphi : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie finită în $f(\overline{x})$. Atunci*

$$\widetilde{\partial}(\varphi \circ f)(\overline{x}) \subseteq \bigcap_{y^* \in \widetilde{\partial}^{+}\varphi(f(\overline{x}))} \widetilde{\partial}\langle y^*, f\rangle(\overline{x}). \tag{4.29}$$

În plus, dacă φ este diferenţiabilă Dini-Hadamard-like în $f(\overline{x})$, atunci

$$\widetilde{\partial}(\varphi \circ f)(\overline{x}) = \widetilde{\partial}\langle \widetilde{\nabla}\varphi(f(\overline{x})), f\rangle(\overline{x}). \tag{4.30}$$

Drept consecinţă imediată a Corolarului 4.2.17 derivăm următoarea formulă de compunere cu ajutorul (doar!) a subgradienţilor Dini-Hadamard.

Corolarul 4.2.18 *Fie $f : X \to Y$ calmă, Lipschitz spongioasă şi tare spongios continuă în punctul $\overline{x}$ şi $\varphi : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie finită în $f(\overline{x})$. Atunci*

$$\partial^{DH}(\varphi \circ f)(\overline{x}) \subseteq \bigcap_{y^* \in \partial^{DH,+}\varphi(f(\overline{x}))} \partial^{DH}\langle y^*, f\rangle(\overline{x}) \tag{4.31}$$

$$\subseteq \bigcap_{y^* \in \partial^{DH}\varphi(f(\overline{x}))} \partial^{DH}\langle y^*, f\rangle(\overline{x}), \tag{4.32}$$

unde cea din urmă incluziune are loc dacă $\partial^{DH,+}\varphi(f(\overline{x})) \neq \emptyset$.

În plus, dacă φ este calmă şi diferenţiabilă Dini-Hadamard-like în $f(\overline{x})$, atunci

$$\partial^{DH}(\varphi \circ f)(\overline{x}) = \partial^{DH}\langle \widetilde{\nabla}\varphi(f(\overline{x})), f\rangle(\overline{x}). \tag{4.33}$$

În final, o estimare alternativă a subdiferenţialei Fréchet a compunerii uzuale $\varphi \circ f$, simiară cu cea furnizată de Mordukhovich [96, Corolarul 3.8], urmează uşor. Merită să subliniem de asemenea aici faptul că rezultatul nostru nu poate fi obţinut din acela, de vreme ce există funcţii Lipschitz spongioase şi tare spongios continue pentru care afirmaţiile de acolo nu se pot aplica.

Corolarul 4.2.19 *Fie $f : X \to Y$ o funcţie Lipschitz spongioasă şi tare spongios continuă în punctul $\overline{x}$ şi $\varphi : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie finită în $f(\overline{x})$. Atunci*

$$\widehat{\partial}(\varphi \circ f)(\overline{x}) \subseteq \bigcap_{y^* \in \widehat{\partial}^{+}\varphi(f(\overline{x}))} \widetilde{\partial}\langle y^*, f\rangle(\overline{x}). \tag{4.34}$$

4.2.5 Reguli de produs şi de împărţire folosind subgradienţi Dini-Hadamard-like

Uimitoarea regulă de diferenţă obţinută în Propoziţia 4.2.3 împreună cu rezulatele din Teorema 4.2.14 se numără printre cele mai importante ingrediente în derivarea altor reguli de calcul pentru subgradienţii Dini-Hadamard-like pe spaţii Banach. Următoarea teoremă furnizează o regulă generală de produs folosind funcţii Lipschitz spongioase.

Teorema 4.2.20 *Fie funcţiile $\varphi_i : X \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, Lipschitz spongioase în punctul $\overline{x}$. Atunci avem*

$$\widetilde{\partial}(\varphi_1 \cdot \varphi_2)(\overline{x}) \subseteq \bigcap_{x^* \in \widetilde{\partial}(-\varphi_1(\overline{x})\varphi_2)(\overline{x})} \left[\widetilde{\partial}(\varphi_2(\overline{x})\varphi_1)(\overline{x}) - x^*\right]. \tag{4.35}$$

Mai mult, incluziunea de mai sus devine egalitate dacă φ_2 este Dini-Hadamard-like diferenţiabilă în $\overline{x}$.

În particular, obţinem o formulă de produs şi pentru subdiferenţiala Dini-Hadamard.

Corolarul 4.2.21 *Fie funcţiile $\varphi_i : X \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, stabile şi Lipschitz spongioase în punctul $\overline{x}$ (în particular Lipschitz în $\overline{x}$). Atunci avem*

$$\partial^{DH}(\varphi_1 \cdot \varphi_2)(\overline{x}) \subseteq \bigcap_{x^* \in \partial^{DH}(-\varphi_1(\overline{x})\varphi_2)(\overline{x})} \left[\partial^{DH}(\varphi_2(\overline{x})\varphi_1)(\overline{x}) - x^*\right]. \tag{4.36}$$

Mai mult, incluziunea de mai sus devine egalitate dacă $\varphi_1 \cdot \varphi_2$ este calmă în $\overline{x}$ şi φ_2 este diferenţiabilă Dini-Hadamard-like în $\overline{x}$.

Cât priveşte subdiferenţiala Féchet, Mordukovich a fost cel care a obţinut o regulă de produs foarte frumoasă pentru funcţii continue Lipschitz. În cele ce urmează, arătăm că prima afirmaţie de acolo rămâne de asemenea adevărată în cazul funcţiilor reale Lipschitz spongioase şi aproape stelare.

Corolarul 4.2.22 *Fie funcţiile $\varphi_i : X \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, Lipschitz spongioase în punctul $\overline{x}$ şi $\varphi_2(\overline{x})\varphi_1$ aproape stelară în $\overline{x}$. Atunci avem*

$$\widehat{\partial}(\varphi_1 \cdot \varphi_2)(\overline{x}) \subseteq \bigcap_{x^* \in \widehat{\partial}(-\varphi_1(\overline{x})\varphi_2)(\overline{x})} \left[\widehat{\partial}(\varphi_2(\overline{x})\varphi_1)(\overline{x}) - x^*\right]. \tag{4.37}$$

Următoarea teoremă furnizează o regulă de împărţire pentru subgradienţii Dini-Hadamard-like al funcţiilor Lipschitz spongioase în spaţii Banach.

Teorema 4.2.23 *Fie funţiile $\varphi_i : X \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, Lipschitz spongioase în punctul $\overline{x}$ cu $\varphi_2(\overline{x}) \neq 0$. Atunci avem*

$$\widetilde{\partial}\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)(\overline{x}) \subseteq \bigcap_{x^* \in \widetilde{\partial}(\varphi_1(\overline{x})\varphi_2)(\overline{x})} \frac{\left[\widetilde{\partial}(\varphi_2(\overline{x})\varphi_1)(\overline{x}) - x^*\right]}{(\varphi_2(\overline{x}))^2}. \tag{4.38}$$

Mai mult, incluziunea de mai sus devine egalitate dacă φ_2 este Dini-Hadamard-like diferenţiabilă în $\overline{x}$.

O regulă similară de împărţire este de asemenea valabilă pentru subdiferenţiala Dini-Hadamard, în vreme ce pentru cea Fréchet obţinem din nou o afirmaţie alternativă celei găsite de Mordukhovich în [96, Teorema 3.11].

Corolarul 4.2.24 *Fie funcţiile $\varphi_i : X \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, stabile şi Lipschitz spongioase în punctul $\overline{x}$ cu $\varphi_2(\overline{x}) \neq 0$. Atunci are loc*

$$\partial^{DH}\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)(\overline{x}) \subseteq \bigcap_{x^* \in \partial^{DH}(\varphi_1(\overline{x})\varphi_2)(\overline{x})} \frac{\left[\partial^{DH}(\varphi_2(\overline{x})\varphi_1)(\overline{x}) - x^*\right]}{(\varphi_2(\overline{x}))^2}. \tag{4.39}$$

Mai mult, incluziunea de mai sus devine egalitate dacă $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ este calmă în $\overline{x}$ şi φ_2 este Dini-Hadamard-like diferenţiabilă în $\overline{x}$.

Corolarul 4.2.25 *Fie funcţiile $\varphi_i : X \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, Lipschitz spongioase în punctul $\overline{x}$ cu $\varphi_2(\overline{x}) \neq 0$ şi $\varphi_2(\overline{x})\varphi_1$ aproape stelară în $\overline{x}$. Atunci are loc*

$$\widehat{\partial}\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)(\overline{x}) \subseteq \bigcap_{x^* \in \widehat{\partial}(\varphi_1(\overline{x})\varphi_2)(\overline{x})} \frac{\left[\widehat{\partial}(\varphi_2(\overline{x})\varphi_1)(\overline{x}) - x^*\right]}{(\varphi_2(\overline{x}))^2}. \tag{4.40}$$

Descriem acum o regulă simplă de împărţire ce are loc întotdeauna cu egalitate, fiind astfel independentă de cea obţinută mai sus.

Teorema 4.2.26 *Fie funcţia $f : X \to \mathbb{R}$ Lipschitz spongioasă în punctul $\overline{x}$ cu $f(\overline{x}) \neq 0$. Atunci*

$$\widetilde{\partial}\left(\frac{1}{f}\right)(\overline{x}) = \frac{\widetilde{\partial}(-f)(\overline{x})}{(f(\overline{x}))^2}. \tag{4.41}$$

Când vorbim despre subgradienţii Dini-Hadamard putem uşor observa că acest ultim rezultat are loc.

Corolarul 4.2.27 *Fie funcţia $f : X \to \mathbb{R}$ tăcută şi Lipschitz spongioasă în punctul $\overline{x}$ astfel încât $\frac{1}{f}$ este calmă în $\overline{x}$ cu $f(x) \neq 0$. Atunci*

$$\partial^{DH}\left(\frac{1}{f}\right)(\overline{x}) = \frac{\partial^{DH}(-f)(\overline{x})}{(f(\overline{x}))^2}. \tag{4.42}$$

În particular, dacă $f : X \to (0, 1]$, este suficient să-i cerem funcţiei f să fie doar tăcută şi Lipshitz spongioasă în $\overline{x}$ (sau chiar Lipschitz în $\overline{x}$), pentru a obţine acelaşi rezultat ca mai sus.

Chapter 5

Condiţii de optim pentru probleme neconvexe de optimizare

Furnizarea unor formule de subdiferenţială uşor de mânuit este un aspect decisiv în formularea condiţiilor de optim necesare şi suficiente pentru problemele nenetede de optimizare. În partea finală a lucrării ne ocupăm cu o problemă de optimizare exprimată cu ajutorul conurilor, având drept funcţie obiectiv diferenţa a două funcţii şi o mulţime admisibilă convexă. Pentru aceasta investigăm existenţa aşa numitelor *puncte locale ε-blunt spongioase* pentru orice $\varepsilon > 0$, o noţiune ce reprezintă o extindere a *punctelor de minim local ε-blunt* introduse şi investigate în [1]. În acest scop folosim formula dată în Capitolul 4 pentru ε-subdiferenţiala Dini-Hadamard a diferenţei a două funcţii, dar de asemenea şi alte rezultate ce îşi au originea în optimizarea convexă. Astfel arătăm cum tehnicile convexe şi cele nenetede pot interacţiona cu succes în caracterizarea optimalităţii.

Teoria prezentată aici se bazează pe [28].

5.1 An application

Ne începem expunerea cu prezentarea următoarei noţiuni.

Definiţia 5.1.1 *Fie $C \subseteq X$ o mulţime nevidă, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie dată, $\overline{x} \in \operatorname{dom} f \cap C$ şi $\varepsilon > 0$. Spunem că $\overline{x}$ este un* punct de minim local ε-blunt spongios al lui f pe mulţimea *C dacă există o mulţime spongioasă S în jurul lui $\overline{x}$ astfel încât pentru orice $x \in S \cap C$*

$$f(x) \geq f(\overline{x}) - \varepsilon\|x - \overline{x}\|.$$

În cazul în care $C = X$, $\overline{x}$ se numeşte simplu punct de minim local ε-blunt spongios al lui f.

Observaţia 5.1.2 Merită să observăm faptul că noţiunea de mai sus o generalizează pe cea de punct local de minim ε-blunt introdusă de Amahroq, Penot şi Syam în [1]. Cu toate că în spaţiile finit dimensionale cele două noţiuni coincid, acest lucru nu este valabil în general. Pentru a vedea acest lucru trebuie doar să aruncăm o privire la Exemplul 3.1.21.

Acolo, $\overline{x}$ este un punct local de minim ε-blunt spongios al lui f pentru orice $\varepsilon > 0$, dar nu este punct de minim local ε-blunt al lui f pentru $\varepsilon \in (0, 1)$.

Următoarea caracterizare a subdiferenţialei Dini-Hadamard prin intermediul punctelor de minim local ε-blunt spongioase este o consecinţă directă a Teoremei 3.3.15. Pentru un rezultat similar exprimat cu ajutorul subdiferenţialei Dini-Hadamard-like facem referire la [9, Propoziţia 18], unde funcţia implicată nu trebuie să fie în mod necesar calmă.

Propoziţia 5.1.3 *Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie dată şi $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$. Atunci:*

$$0 \in \partial^{DH} f(\overline{x}) \Leftrightarrow \begin{array}{l} f \textit{ este calmă în punctul } \overline{x} \textit{ şi } \overline{x} \textit{ este un minim local } \varepsilon - \textit{blunt spongios} \\ \textit{al lui } f \textit{ pentru orice } \varepsilon > 0. \end{array}$$

Consideră acum un spaţiu Banach Z cu Z^* dualul său topologic. Fie $C \subseteq X$ o mulţime convexă închisă şi $K \subseteq Z$ un con nevid, convex şi închis cu $K^* := \{z^* \in Z^* : \langle z^*, z\rangle \geq 0 \text{ for all } z \in K\}$ conul său dual. Fie apoi o funcţie $k : X \to Z$ care este presupusă a fi K-*convexă*, însemnând că pentru orice $x, y \in X$ şi orice $t \in [0, 1]$, $(1 - t)k(x) + tk(y) - k((1 - t)x + ty) \in K$, şi K-*epi închisă*, însemnând că K-*epigraficul* lui k, $\operatorname{epi}_K k := \{(x, z) \in X \times Z : z \in k(x) + K\}$, este o mulţime închisă. Observăm de asemenea că atunci când $Z = \mathbb{R}$ şi $K = \mathbb{R}_+$ noţiunea de K-epi închidere coincide cu noţiunea clasică de semicontinuitate inferioară. Pentru $z^* \in K^*$, $(z^*k) : X \to \mathbb{R}$ este definită prin $(z^*k)(x) = \langle z^*, k(x)\rangle$. Mai departe, fie $g, h : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ două funcţii date astfel încât $\operatorname{dom} g \subseteq \operatorname{dom} h$ şi $f := g - h$.

Următorul rezultat furnizează condiţii de optim pentru următoarea problemă de optimizare

$$\begin{array}{ll} (\mathcal{P}) & \inf_{x \in \mathcal{A}} f(x). \\ & \mathcal{A} = \{x \in C : k(x) \ \in -K\} \end{array}$$

Teorema 5.1.4 *Fie $\overline{x} \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} g) \cap \mathcal{A}$. Presupunem de asemenea că g este inferior semicontinuă şi aproape convexă în punctul $\overline{x}$, că f este calmă în $\overline{x}$ şi $\bigcup_{\lambda>0} \lambda(k(C) + K)$ este un subspaţiu liniar închis al lui Z. Atunci următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

(a) Dacă $\overline{x}$ este un punct de minim local ε-blunt spongios al lui f pe $\mathcal{A}$ pentru orice $\varepsilon > 0$, atunci următoarea relaţie are loc

$$\partial^{DH} h(\overline{x}) \subseteq \partial^{DH} g(\overline{x}) + \bigcup_{\substack{z^* \in K^* \\ (z^*k)(\overline{x})=0}} \partial((z^*k) + \delta_C)(\overline{x}). \tag{5.1}$$

(b) Invers, dacă h este direcţional aproape stelară în $\overline{x}$, $\partial^{DH} h$ este spongios gap-continuă în $\overline{x}$ şi (5.1) are loc, atunci $\overline{x}$ este un mimim local ε-blunt spongios al lui f pe $\mathcal{A}$ pentru orice $\varepsilon > 0$.

Observaţia 5.1.5 Pentru un rezultat similar celui din Teorema 5.1.4, dat în cazul particular $K = \{0\}$ şi $k(x) = 0$ pentru orice $x \in X$ şi prin intermediul subdiferenţialei Fréchet, facem referire la [1, Propoziţia 6]. În a doua parte a acelei afirmaţii autorii cer funcţiei h să fie aproape stelară în $\overline{x}$ cu $\widehat{\partial} h$ gap-continuă în $\overline{x}$ şi caracterizează punctele de minim local ε-blunt ale lui f pentru orice $\varepsilon > 0$. În acest scop ei folosesc o formulă exactă a subdiferenţialei limită, însă argumentând greşit, de vreme ce acest tip de formulă este valabil doar în spaţii Asplund. Cu toate acestea, afirmaţiile din [1, Propoziţia 6] rămân adevărate şi în spaţii Banach, iar demonstraţia se poate face în liniile demonstraţiei Teoremei 5.1.4.

Observaţia 5.1.6 Menţionăm de asemenea faptul că putem obţine şi un rezultat mai general folosind subdiferenţiala Dini-Hadamard-like (vezi [9, Teorema19]), întrucât f nu trebuie să fie neaparat calmă în $\overline{x}$. Mai mult, dacă ţinem cont de [119, Lema 22, Lema 24 and Lema 27], acest rezultat rămâne adevărat şi în cazul în care $\widetilde{\partial} h$ este direcţional aproape pseudo-disipativă în $\overline{x}$. Mai departe, dacă $K = \{0\}$, $k(x) = 0$ pentru orice $x \in X$, g este inferior semicontinuă şi aproape convexă în $\overline{x} \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} g) \cap \mathcal{A}$, iar h este convexă pe C şi continuă în $\overline{x}$, şi de aici direcţional aproape pseudo-disipativă în $\overline{x}$ (datorită remarcabilei proprietăţi de disipativitate a subdiferenţialei din sensul analizei convexe, vexi [119, Teorema 6]) atunci $\overline{x}$ este un minim local ε-blunt spongios al lui f pe $\mathcal{A}$ pentru orice $\varepsilon > 0$ dacă şi numai dacă

$$\partial h(\overline{x}) \subseteq \widetilde{\partial} g(\overline{x}) + N(\mathcal{A}, \overline{x}).$$

Bibliografie

[1] T. Amahroq, J.-P. Penot, A. Syam, *On the subdifferentiability of the difference of two functions and local minimization*, Set-Valued Analysis **16 (4)**, 413–427, 2008.

[2] H. Attouch, *Variational Convergence for Functions and Operators*, Pitman, Boston, Massachusetts, 1984.

[3] J.-P. Aubin, *Contingent derivatives of set-valued maps and existence of solutions to nonlinear inclusions and differential inclusions*,in Mathematical Analysis and Applications, edited by L. Nachbin, Academic Press, New York, 159–229, 1981.

[4] J.-P. Aubin, *Mutational and Morphological Analysis. Tools for Shape Evolution and Morphogenesis*, Systems and Control: Foundations and Applications, Birkhäuser Boston, 1999.

[5] J.-P. Aubin & I. Ekeland, *Applied Nonlinear Analysis*, Wiley, New York, 1984.

[6] J.-P. Aubin & H. Frankowska, *Set-Valued Analysis*, Birkhäuser, Boston, Massachusetts, 1990.

[7] D. Aussel, J.-N. Corvellec, M. Lassonde, *Mean value property and subdifferential criteria for lower semicontinuous functions*, Transactions of the American Mathematical Society **347 (10)**, 4147–4161, 1995.

[8] D. Aussel, A. Daniilidis, L. Thibault, *Subsmooth sets: functional characterizations and related concepts*, Transactions of the American Mathematical Society **357 (4)**, 1275–1301, 2005.

[9] A. Baias, **D.-M. Nechita**, *Looking for an exact difference formula for the Dini-Hadamard-like subdifferential*, Studia Universitas Babeş-Bolyai, Mathematica **57 (3)**, 2012.

[10] A. Baias, **D.-M. Nechita**, *Old-new tehnics for computing subdifferential formulae for convex risk functions*, submitted.

[11] H.H. Bauschke & J.M. Borwein, *On projection algorithms for solving convex feasibility problems*, SIAM Review **38 (3)**, 367–426, 1996.

[12] M.S. Bazaraa, J.J. Goodeand & M.Z.Nashed, *On the cone of tangents with applications to mathematical programming*, Journal of Optimization Theory and Applications **13**, 389–426, 1974.

[13] J. Benoist, *The size of the Dini Subdifferential*, Proceedings of the American Mathematical Society **129 (2)**, 525–530, 2001.

[14] Y. Benyamini, J. Lindenstrauss, *Geometric Nonlinear Functional Analysis*, Vol. 1, AMS, Providence, 2000.

[15] D.N. Bessis, F.H. Clarke, *Partial subdifferentials, derivatives and Rademacher's theorem*, Transactions of the American Mathematical Society **351 (7)**, 2899–2926, 1999.

[16] J.R. Birge, L. Qi, *The Michel-Penot subdifferential and stochastic programming*, Applied Mathematics preprint AM 8912, School of Mathematics, 1–25, 1989.

[17] H. Blumberg, *Exceptional sets*, Fundam. Math. **32**, 3–32, 1939.

[18] J.M. Borwein & S.P. Fitzpatrick, *Weak* sequential compactness and bornological limit derivatives*, Journal of Convex Analysis **2 (1-2)**, 59–67, 1995.

[19] J.M. Borwein & A.D. Ioffe, *Proximal analysis in smooth spaces*, CECM Research Report (93-04) Set-Valued Analysis **4 (1)**, 1–24, 1996.

[20] J.M. Borwein, B.S. Mordukhovich & Y.Shao, *On the equivalence of some basic principles of variational analysis*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **229 (1)**, 228–257, 1999.

[21] J.M. Borwein & D. Preiss, *A smooth variational principle with applications to subdifferentiability and to differentiability of convex functions*, Transactions of the American Mathematical Society **303**, 517–527, 1987.

[22] J.M. Borwein, J.S. Treiman & Q.J. Zhu, *Partially smooth variational principles and applications*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications **35 (8)**, Ser. B: Real World Applications, 103–1059, 1999.

[23] J.M. Borwein & Q.J. Zhu, *Viscosity solutions and viscosity subderivatives in smooth Banach spaces with applications to metric regularity*, SIAM Journal on Optimization **34 (5)**, 1568–1591, 1996.

[24] J. M. Borwein & Q. J. Zhu, *A survey on subdifferential calculus with applications*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications **38 (6)**, 687–773, 1999.

[25] J. M. Borwein and Q. J. Zhu, *Multifunctional and functional analytic techniques in nonsmooth analysis*, NATO Advanced Science Institutes Series C: Mathematical and Physical Sciences **528**, 61–157, 1999.

[26] R.I. Boţ, *Conjugate Duality in Convex Optimization*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 637, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010.

[27] R.I. Boţ, E.R. Csetnek *Regularity conditions via generalized interiority notions in convex optimization: New achievements and their relation to some classical statements*, to appear in Optimization.

[28] R.I. Boţ, **D.-M. Nechita**, *On the Dini-Hadamard subdifferential of the difference of two functions*, Journal of Global Optimization **50 (3)**, 485–502, 2011.

[29] A. Bruckner, *Differentiation of Real Functions*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1994.

[30] E. Caprari, J.-P. Penot, *Tangentially d.-s. functions*, Optimization **56 (1-2)**, 25–38, 2007.

[31] F.H. Clarke, *Necessary Conditions for Nonsmooth Problems in Optimal Control and the Calculus of Variations*, Ph.D. dissertation, Department of Mathematics, University of Washington, Seattle, 1973.

[32] F.H. Clarke, *Generalized gradients and applications*, Transactions of the American Mathematical Society **205**, 247–262, 1975.

[33] F.H. Clarke, *A new approach to Lagrange multipliers*, Mathematical of Operations Research **1**, 165–174, 1976.

[34] F.H. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1983.

[35] F.H. Clarke, *Methods of Dynamic and Nonsmooth Optimization*, CBMS-NSF Regional conference series in applied mathematics, Vol. 57 SIAM, Philadelphia, 1989.

[36] F.H. Clarke, Yu. S. Ledyaev, *Mean value inequalities in Hilbert spaces*, Transactions of the American Mathematical Society **344 (1)**, 307–324, 1994.

[37] F.H. Clarke, Yu. S. Ledyaev, R.J. Stern & P.R. Wolenski, *Nonsmooth Analysis and Control Theory*, Springer, New York, 1998.

[38] S. Cobzaş, *Spongy versus cone-porous*, preprint, 2010.

[39] M.G. Crandall & P.-L. Lions, *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Transactions of the American Mathematical Society **277**, 1–42, 1983.

[40] M. Degiovanni, A. Marino & M. Tosques, *Evolution equations with lack of convexity*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications **9**, 1401–1443, 1985.

[41] R. Deville, G. Godefroy & V. Zizler *A smooth variational principle with applications to Hamilton-Jacobi equations in infinite dimensions*, Journal of Functional Analysis **111 (1)**, 197–212, 1993.

[42] R. Deville, G. Godefroy & V. Zizler *Smoothness and Renormings in Banach Spaces*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics **64**, John Wiley Sons, New York, 1993.

[43] U. Dini, *Fondamenti per la Teoria delle Funzioni di Variabili Reali*, Pisa, Italy, 1878.

[44] A.V. Dmitruk, A.A. Milyutin & N.P. Osmolovskii, *Lyusterniks theorem and the theory of extrema*, Russian Mathematical Surveys **35 (6)**, 11–51, 1980.

[45] E.P. Dolzhenko, *Boundary properties of arbitrary functions*, Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Seriya Matematicheskaya **31**, 3–14, 1967 (in russian); Mathematics of the USSR-Izvestiya **1**, 1–12, 1967 (in english).

[46] A.L. Dontchevand & R.T. Rockafellar, *Characterizations of strong regularity for variational inequalities over polyhedral convex sets*, SIAM Journal on Optimization **6 (4)**, 1087–1105, 1996.

[47] M. Fabian, *On classes of subdifferentiability spaces of Ioffe*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications **12 (1)**, 63–74, 1988.

[48] M. Fabian, *Subdifferentiability and trustworthiness in the light of the new variational principle of Borwein and Preiss*, Acta Universitatis Carolinae **30 (2)**, 51–56, 1989.

[49] M. Fabian, P. Habala, P. Hjek, V.M. Santaluca, J. Pelant, V. Zizler, *Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry*, CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, Vol. 8, Springer-Verlag New York, 2001.

[50] C.A. Floudas, P.M. Pardalos, *Encyclopedia of Optimization*, 2nd edition, Springer, New York, 2009.

[51] H. Frankowska, *Necessary conditions for the Bolza problem*, Mathematics of Operations Research **10**, 361–366, 1985.

[52] S. Gautier, *Affine and eclipsing multifunctions*, Numerical Functional Analysis and Optimization **11 (7-8)**, 679–699, 1990.

[53] P.G. Georgiev, *Porosity and differentiability in smooth Banach spaces*, Proceedings of the American Mathematical Society **133 (6)**, 1621–1628, 2005.

[54] E. Giner, *Calmness properties and contingent subgradients of integral functionals on Lebesgue spaces* $L_p, 1 < p < \infty$, Set-Valued and Variational Analysis **17 (3)**, 223–243, 2009.

[55] J.-B. Hiriart-Urruty, *New concepts in nondifferentiable programming*, Bulletin de la Société Mathématique de France **60**, 57–85, 1979.

[56] J.-B. Hiriart-Urruty, *Miscellanies on nonsmooth analysis and optimization*, in Nondifferentiable Optimization: Motivations and Applications, Workshop at Sopron, 1984, V.F. Demyanov and D. Pallaschke (Eds.), Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 255, pp. 8–24, Springer, 1985.

[57] A.D. Ioffe, *Necessary and sufficient conditions for a local minimum, I: A reduction theorem and first order conditions*, SIAM Journal on Control and Optimization **17**, 245–250, 1979.

[58] A.D. Ioffe, *Approximate subdifferentials of nonconvex functions*, CEREMADE Publication 8120, Universiteé de Paris IX "Dauphine", 1981.

[59] A.D. Ioffe, *Calculus of Dini subdifferentials*, CEREMADE Publication 8110, Universiteé de Paris IX "Dauphine", 1981.

[60] A.D. Ioffe, *Nonsmooth analysis: Differential calculus of nondifferentiable mappings*, Transactions of the American Mathematical Society **266**, 1–56, 1981.

[61] A.D. Ioffe, *Sous-differentielles approaches de fonctions numériques*, Comptes Rendus de l'Acadmie des Sciences Paris, Série I **292**, 675–678, 1981.

[62] A.D. Ioffe, *On subdifferentiability spaces*, Annals of the New York Academy of Sciences **410**, 107–119, 1983.

[63] A.D. Ioffe, *Calculus of Dini subdifferentials of functions and contingent derivatives of set-valued maps*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications **8**, 517–539, 1984.

[64] A.D. Ioffe, *Subdifferentiability spaces and nonsmooth analysis*, Bulletin of the American Mathematical Society **10**, 87–89, 1984.

[65] A.D. Ioffe, *Approximate subdifferentials and applications. I. The finite dimensional theory*, Transactions of the American Mathematical Society **281**, 390–416, 1984.

[66] A. D. Ioffe, *Approximate subdifferentials and applications. II. Functions on locally convex spaces*, Mathematika **33**, 111–128, 1986.

[67] A.D. Ioffe, *Approximate subdifferentials and applications. III. The metric theory*, Mathematika **36 (1)**, 1–38, 1989.

[68] A.D. Ioffe, *Proximal analysis and approximate subdifferentials*, Journal of the London Mathematical Society **41 (1)**, 175–192, 1990.

[69] A.D. Ioffe, *Fuzzy principles and characterization of trustworthiness*, Set-Valued Analysis **6 (3)**, 265–276, 1998.

[70] A.D. Ioffe *Codirectional compactness, metric regularity and subdifferential calculus*,in Constructive, Experimental and Nonlinear Analysis, edited by M. Théra, Canadian Mathematical Society Conference Proceedings **27**, 123–163, 2000.

[71] A.D. Ioffe, *Metric regularity and subdifferential calculus*, Russian Mathematical Surveys **55 (3)**, 501–558, 2000.

[72] A.D. Ioffe, *Variational analysis and mathematical economics 1: Subdifferential calculus and the second theorem of welfare economics*, Advances in Mathematical Economics **12**, 71–95, 2009.

[73] A.D. Ioffe, *Typical convexity (concavity) of Dini-Hadamard upper (lower) directional derivatives of functions on separable Banach spaces*, Journal of Convex Analysis **17 (3-4)**, 1019–1032, 2010.

[74] A.D. Ioffe & J.P. Penot, *Subdifferentials of performance functions and calculus of coderivates of set-valued mappings*, Serdica Mathematical Journal **22 (3)**, 359–384, 1996.

[75] A.D. Ioffe & R.T. Rockafellar, *The Euler and Weierstrass conditions for nonsmooth variational problems*, Calculus of Variations and Partial Differential Equations **4 (1)**, 59–87, 1996.

[76] A.D. Ioffe & V.M. Tikhomirov, *Theory of Extremal Problems*, North-Holland, Amsterdam, The Netherlands, 1979.

[77] A. Kruger, B.S. Mordukhovich, *Extremal points and Euler equation in nonsmooth optimization*, Doklady Akademii Nauk SSSR **24**, 684–687, 1980.

[78] A. Kruger, B.S. Mordukhovich, *Generalized normals and derivatives, and necessary optimality conditions in nondifferentiable programming*, Part I: Depon. VINITI, No. 408-80; Part II: Depon. VINITI, No. 494-80, Moscow, 1980.

[79] A.G. Kusraevand & S.S. Kutateladze, *Subdifferentials: Theory and Applications*, Kluwer, Dordrecht, The Netherlands, 1995.

[80] M. Lassonde, *First order rules in nonsmooth constrained optimization*, Nonlynear Analysis **44 (8)**, 1031–1056, 2001.

[81] E.S. Levitin, *Perturbation Theory in Mathematical Programming and Its Applications*, Wiley, New York, 1994.

[82] P.D. Loewen, *A mean value theorem for Fréchet subgradients*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications **23 (11)**, 1365–1381, 1994.

[83] P.D. Loewen, X. Wang *On the multiplicity of Dini subgradients in separable spaces*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications **58 (1-2)**, 1–10, 2004.

[84] J.E. Martínez-Legaz, J.-P. Penot, *Regularization by erasement*, Mathematica Scandinavica **98 (1)**, 97–124, 2006.

[85] J.E. Martínez-Legaz & P.H. Sach, *A new subdifferential in quasiconvex analysis*, Journal of Convex Analysis **6 (1)**, 1–12, 1999.

[86] E.S. Levitin, A.A. Milyutin & N.P. Osmolovskii, *Higher order conditions for a local minimum in the problems with constraints*, Russian Mathematical Surveys **33**, 97–168, 1978.

[87] P. Michel & J.-P. Penot, *Calcul sous-différentiel pour des fonctions Lipschitziennes et non-Lipschiziennes*, Comptes Rendus de l'Acadmie des Sciences, Paris **298**, 269–272, 1985.

[88] P. Michel & J.-P. Penot, *A generalized derivative for calm and stable functions*, Differential and Integral Equations **5 (2)**, 189–196, 1992.

[89] B.S. Mordukhovich, *Maximum principle in problems of time optimal control with nonsmooth constraints*, Journal of Applied Mathematics and Mechanics **40**, 960–969, 1976.

[90] B.S. Mordukhovich, *Metric approximations and necessary optimality conditions for general classes of nonsmooth extremal problems*, Soviet Mathematics, Doklady **22**, 526–530, 1980.

[91] B.S. Mordukhovich, *Approximation methods in problems of optimization and control*, Nauka, Moscow 1988.

[92] B.S. Mordukhovich, *Generalized differential calculus for nonsmooth and setvalued mappings*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **183 (1)**, 250–288, 1994.

[93] B.S. Mordukhovich, Y. Shao, *Nonsmooth sequential analysis in Asplund spaces*, Transactions of the American Mathematical Society **348 (4)**, 1235–1280, 1996.

[94] B.S. Mordukhovich, *Variational Analysis and Generalized Differentiation, I. Basic Theory*, Series of Comprehensive Studies in Mathematics, Vol. 330, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.

[95] B.S. Mordukhovich, *Variational Analysis and Generalized Differentiation, II. Applications*, Series of Comprehensive Studies in Mathematics, Vol. 331, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.

[96] B.S. Mordukhovich, N.M. Nam, N.D. Yen, *Fréchet subdifferential calculus and optimality conditions in nondifferentiable programming*, Optimization **55 (5-6)**, 685–708, 2006.

[97] B.S. Mordukhovich & J.V. Outrata, *On second-order subdifferentials and their applications*, SIAM Journal on Optimization **12 (1)**, 139–169, 2001.

[98] B.S. Mordukhovich, Y. Shao, *Extremal characterization of Asplund spaces*, Proceedings of the American Mathematical Society **124 (1)**, 197–205, 1996.

[99] B.S. Mordukhovich, Y. Shao & Q.J. Zhu, *Viscosity coderivatives and their limiting behavior in smooth Banach spaces*, Positivity **4 (1)**, 1–39, 2000.

[100] J.J. Moreau, *Fonctionelles Convexes*, Collége de France, Paris, 1966.

[101] **D.-M. Nechita**, *On an extension of the Dini-Hadamard subdifferential*, Automation Computers Applied Mathematics **19**, 173–181, 2010.

[102] **D.-M. Nechita**, *About some links between the Dini-Hadamard-like normal cone and the contingent one*, Studia Universitas Babeş-Bolyai, Mathematica **57 (3)**, 2012.

[103] **D.-M. Nechita**, *A smooth variational description involving Dini-Hadamard-like decoupled subgradients*, Annals of the Tiberiu Popoviciu Seminar of Functional Equations, Approximation and Convexity **10**, 2012.

[104] **D.-M. Nechita**, *Some results concerning chain rules for Dini-Hadamard constructions*, submitted.

[105] L.W. Neustadt *Optimization: a Theory of Necessary Conditions*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1976.

[106] H.V. Ngai, D.T. Luc, M. Théra, *Approximate convex functions*, Journal of Nonlinear and Convex Analysis **1 (2)**, 155–176, 2000.

[107] H.V. Ngai, J.-P. Penot, *Approximately convex functions and approximately monotone operators*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications **66 (3)**, 547–564, 2007.

[108] H.V. Ngai, J.-P. Penot, *Semismoothness and directional subconvexity of functions*, Pacific Journal of Optimization **3 (2)**, 323-344, 2007.

[109] D. Pallaschke & S. Rolewicz, *Foundations of Mathematical Optimization: Convex Analysis with out Linearity*, Kluwer, Dordrecht, The Netherlands, 1998.

[110] P.M. Pardalos, T.M. Rassias, A.A. Khan, *Nonlinear Analysis and Variational Problems*. Series: Springer Optimization and Its Applications, Vol. 35, Springer, New-York, 2010.

[111] J.-P. Penot, *Calcul sous-différentiel et optimization*, Journal of Fundamental Analysis **27**, 248–276, 1978.

[112] J.-P. Penot, *Softness, sleekness and regularity in nonsmooth analysis*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications. Series A, Theory Methods **68 (9)**, 2750–2768, 2008.

[113] J.-P. Penot, *Delineating nice classes of nonsmooth functions*, Pacific Journal of Optimization **4 (3)**, 605–619, 2008.

[114] J.-P. Penot, *Subdifferential calculus and subdifferential compactness*, in Font-Romeu-Odeillo, M. Sofonea, J-N. Corvellec (eds.) Proc. of the Second Days on Applied Mathematics, Presses Universitaires de Perpgnan, pp. 209–226, 1995.

[115] J.-P. Penot, *Favorable classes of mappings and multimappings in nonlinear analysis and optimization*, Journal of Convex Analysis **3 (1)**, 97–116, 1996.

[116] J.-P. Penot, *Are generalized derivatives useful for generalized convex functions?*, Generalized Convexity, Generalized Monotonicity: Recent Results, edited by J.-P. Crouzeix, J.E. Martinez-Legaz and M. Volle, pp. 3–59, Kluwer, Dordrecht, The Netherlands, 1998.

[117] J.-P. Penot, *The compatibility with order of some subdifferentials*, Positivity **6 (4)**, 413–432, 2002.

[118] J.-P. Penot, *Gap continuity of multimaps*, Set-Valued Analysis **16 (4)**, 429–442, 2008.

[119] J.-P. Penot, *The directional subdifferential of the difference of two convex functions*, Journal of Global Optimization **49 (3)**, 505–519, 2011.

[120] R.R. Phelps, *Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability*, 2nd edition, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1364, Springer, 1993.

[121] L.S. Pontrjagin, *Linear differential games II*, Soviet Mathematics, Doklady **8**, 910–912, 1967.

[122] D. Preiss, L. Zajiček, *Directional derivatives of Lipschitz functions*, Israel Journal of Mathematics **125**, 1–27, 2001.

[123] B.N. Pshenichnii, *Leçons sur les jeux différentiels*, in Contrôle Optimal et Jeux Différentiels, Cahier de l'INRIA, Vol. 4, 145–226, 1971.

[124] B.N. Pshenichnyi, *Necessary Conditions for an Extremum*, Marcel Dekker, New York, 1971.

[125] B.N. Pshenichnyi, *Convex Analysis and Extremal Problems*, Nauka, Moscow, 1980.

[126] S.M. Robinson, *Local epi-continuity and local optimization*, Mathematical Programming Studies **37**, 208–222, 1987.

[127] R.T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, 1970.

[128] R.T. Rockafellar, *Directional Lipschitzian functions and subdifferential calculus*, Proceedings London Mathematical Society **39**, 331–355, 1979.

[129] R.T. Rockafellar, *Generalized directional derivatives and subgradients of nonconvex functions*, Canadian Journal of Mathematics, **32**, 257–280, 1980.

[130] R.T. Rockafellar, *The Theory of Subgradients and its Applications to Problems of Optimization. Convex and Nonconvex Functions*, Heldermann Verlag, Berlin, 1981.

[131] R.T. Rockafellar, *First- and second- order epi-differentiability in nonlinear programming*, Transactions of the American Mathematical Society **307 (1)**, 75–108, 1988.

[132] R.T. Rockafellar & R.J-B. Wets, *Variational Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1997.

[133] R.T. Rockafellar & R.J-B. Wets, *Variational analysis*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1998.

[134] S. Saks, *Theory of the Integral*, 2nd edition, Hafner Publishing Co., New York, 1937.

[135] L. Schwartz, *Théorie des Distributions*, Hermann, Paris, 1966.

[136] A. Shapiro, *On concepts of directional differentiability*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **66 (3)**, 477–487, 1990.

[137] S.L. Sobolev, *Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1963.

[138] L. Thibault, *Tangent cones and quasi-interiorly tangent cones to multifunctions*, Transactions of the American Mathematical Society **277**, 601–621, 1983.

[139] J.S. Treiman, *Characterization of Clarke's tangent and normal cones in finite and infinite dimensions*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications **7**, 771–783, 1983.

[140] J.S. Treiman, *Clarke's gradient and epsilon-subgradients in Banach spaces*, Transactions of the American Mathematical Society **294**, 65–78, 1986.

[141] J.S. Treiman, *Shrinking generalized gradients*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications **12 (12)**, 1429-1450, 1988.

[142] J.S. Treiman, *Finite dimensional optimality conditions: B-gradients*, Journal of Optimization Theory and Applications **62 (1)**, 139–150, 1989.

[143] J.S. Treiman, *Optimal control with small generalized gradients*, SIAM Journal on Control and Optimization **28 (3)**, 720–732, 1990.

[144] D. Yost, *Asplund spaces for beginners*, Acta Universitatis Carolinae, Mathematica et Physica **34 (2)**, 159–177, 1993.

[145] D. Yuan, A. Chinchuluun, X. Liu, P.M. Pardalos, *Generalized convexities and generalized gradients based on algebraic operations*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **321 (2)**, 675–690, 2006.

[146] L. Zajiček, *Sets of σ-porosity and sets of σ-porosity(q)*, asopis pro pstovn matematiky **101**, 350–359, 1976.

[147] L. Zajiček, *On the points of multivaluedness of metric projections in separable Banach spaces*, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae **19**, 513–523, 1978.

[148] L. Zajiček, *Differentiability of the distance function and points of multi-valuedness of the metric projection in Banach spaces*, Czechoslovak Mathematical Journal **33**, 292–308, 1983.

[149] L. Zajiček, *Smallness of sets of nondifferentiability of convex functions in nonseparable Banach spaces*, Czechoslovak Mathematical Journal, **116 (2)**, 288–296, 1991.

[150] L. Zajiček, *On σ-porous sets in Banach spaces*, Abstract and Applied Analysis **5**, 509–534, 2005.

[151] Q.J. Zhu, *Clarke-Ledyaev mean value inequality in smooth Banach spaces*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications **32 (3)**, 315–324, 1998.

[152] Q.J. Zhu, *The equivalence of several basic theorems for subdifferentials*, Set-Valued Analysis **6 (2)**, 171–185, 1998.

[153] D.E. Ward & J.M. Borwein, *Nonconvex calculus in finite dimensions*, SIAM Journal on Control and Optimization **25**, 1312–1340, 1987.