HABILITATION THESIS

Specialization: Mathematics

Alexandru Kristály

Elliptic Problems via Critical Point Theory

Cluj-Napoca, 2012

Introduction

The purpose of the present thesis is the presentation of the author's main contributions to the existence, non-existence, multiplicity and asymptotic behavior of solutions of certain PDEs of elliptic type. The common feature of the studied elliptic problems is that their (weak) solutions appear precisely as the *critical points* of certain energy functionals defined on suitable functional spaces. In order to handle elliptic problems defined on bounded/unbounded domains, various techniques are applied from the critical point theory (minimization arguments, minimax results, principle of symmetric criticality) combined with group-theoretical arguments. Model examples are presented on domains of standard Euclidean spaces, Riemannian manifolds and Heisenberg groups, exploiting their geometrical and analytical properties.

The thesis is divided into five chapters: (I) Elliptic problems involving sublinear terms at infinity; (II) Elliptic problems involving oscillatory nonlinearities; (III) Competition phenomena between pure power and oscillatory terms; (IV) Subelliptic problems on Heisenberg groups; (V) Further research plans: questions & perspectives. In the sequel, we present a brief description of these chapters.

In the first chapter we present some multiplicity results for parameter-depending elliptic problems involving sublinear terms at infinity. In Section 1.1 we deal with a degenerate elliptic problem defined on bounded domains of $\mathbb{R}^n$, in Section 1.2 a bifurcation phenomena on compact Riemannian manifolds is considered, while in Section 1.3 a multiplicity result for a Maxwell-Schrödinger-type system is established. Roughly speaking, the common feature of these sublinear problems is that for large parameters they have at least two nontrivial solutions, while for small parameters there exists only the zero solution. Some stability (with respect to subcritical perturbations) and asymptotical properties are also provided. The results in this chapter are contained in the papers [80], [65], [78], [77] and [76].

In the second chapter we study elliptic problems which involve a nonlinearity with an oscillatory behaviour near the origin or at infinity. More precisely, we present two independent approaches based on variational arguments in order to guarantee existence of infinitely many solutions for elliptic problems involving oscillatory nonlinearities: 1) *abstract approach*, based on Ricceri's variational principle; and 2) *direct approach*, based on minimization and truncation arguments as well as on the continuity of superposition operators. In Section 2.1, by a direct variational argument, we study an asymptotically critical problem on the unit sphere $\mathbb{S}^d$ ($d \geq 5$), by guaranteeing at least $s_d = [d/2] + (-1)^{d+1} - 1$ sequences $\{u_k^i\}_k \subset H_1^2(\mathbb{S}^d)$, $i \in \{1, ..., s_d\}$, of sign-changing weak solutions distinguished by their symmetry. Although the studied problem is smooth (i.e., the energy functional associated with the problem is of class C^1 on $H_1^2(\mathbb{S}^d)$), a specific construction requires the use of the non-smooth principle of symmetric criticality together with a Rubik-cube technique to specific subgroups of the orthogonal group $O(d+1)$. By Ricceri's variational principle, in Sections 2.2 & 2.3 we treat a Poisson-type elliptic system and a differential incusion problem, respectively. The results in this chapter are contained in the articles [67], [66] and [69].

In the third chapter we study a competition phenomenon in a model Dirichlet problem between a pure power term u^p and a nonlinearity $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ with oscillation near the origin or at the infinity. We are able to fully describe this phenomenon, showing that the number of distinct nontrivial solutions to the Dirichlet problem is *strongly influenced* by u^p and depends on the type of the nonlinearity f; roughly speaking, we can state that the number of solutions of the model Dirichlet problem is influenced by the sublinear term u^p ($p < 1$) when f oscillates near the origin (with no effect by superlinear terms), and by the superlinear term u^p ($p > 1$) when f oscillates at infinity (with no effect by sublinear terms). The threshold value $p = 1$ is also discussed. The results in this chapter are contained in the papers [73] and [68].

In the fourth chapter we consider a subelliptic problem on a symmetric unbounded domain of the Heisenberg group $\mathbb{H}^n = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$. By proving a general Lions-type compactness embedding result for symmetric unbounded domains of $\mathbb{H}^n$, we observe that the natural group action on the Heisenberg group $\mathbb{H}^n$ is given by the unitary group $U(n) \times \{1\}$ and its appropriate subgroups, which will be used to construct subspaces with specific symmetries and compactness properties in the Folland-Stein's horizontal Sobolev space. As an application, we study the multiplicity of solutions for a singular subelliptic problem (both with sublinear and superlinear terms) by exploiting elements from the critical point theory and group-theoretical arguments on the unitary group $U(n) \times \{1\}$. The results in this chapter are contained in the recent paper [10].

In the fifth chapter we list some open problems based on the research presented in the first four chapters. In Section 5.2 we formulate three classes of problems connecting PDEs either with Finsler geometry or Heisenberg groups, which can be considered as starting points for further investigation. In Section 5.3 we also present the recent research, teaching and mobility activity of the author.

August 2012

Acknowledgments

I wish to thank my colleagues who have collaborated with me after completing my Ph.D. at Babeş-Bolyai University: Z. M. Balogh, F. Faraci, M. Filippakis, A. Iannizzotto, L. Kozma, H. Lisei, W. Marzantowicz, I. Mezei, M. Mihăilescu, Gh. Moroşanu, D. Motreanu, V. Motreanu, D. O'Regan, N. Papageorgiou, V. Rădulescu, D. Repovš, Á. Róth, S. Tersian, Cs. Varga. I would like to express my gratitude to Ágoston Róth and Csaba Varga for their constant support over the years, and to my family for their patience.

Introducere

Obiectivul acestei teze este prezentarea rezultatelor principale a autorului în ceea ce priveşte existenţa, ne-existenţa, multiplicitatea şi comportamentul asimptotic ale soluţiilor unor ecuaţii cu derivate parţiale de tip eliptic. Caracteristica comună ale acestor ecuaţii eliptice constă în faptul că soluţiile lor (slabe) apar ca *puncte critice* ale funcţionalelor de energie asociate problemelor studiate. Pentru a studia probleme eliptice definite de domenii mărginte/nemărginite, vor fi combinate metode din teoria punctului critic (argumente de minimizare, rezultate de tip minimax, principiul simetriei critice) cu elemente din teoria grupurilor. Pe parcursul tezei, vor fi tratate probleme de tip model definite pe spaţii Euclidiene, pe varietăţi Riemann şi grupuri Heisenberg, exploatând specificul analitic sau geometric ale acestora.

Teza cuprinde cinci capitole: (I) Probleme eliptice cu termeni subliniari; (II) Probleme eliptice cu termeni oscilatoriu; (III) Competiţie între termeni de tip putere şi de tip oscilatoriu; (IV) Probleme subeliptice pe grupuri Heisenberg; (V) Direcţii de cercetare viitoare: întrebări şi perspective. În cele ce urmează, prezentăm o descriere scurtă ale acestor capitole.

În primul capitol prezentăm rezultate de multiplicitate pentru probleme eliptice care depind de un parametru real şi conţin un termen neliniar care are o creştere subliniară în infinit. În Secţiunea 1.1 tratăm o problemă eliptică degenerată, definită pe un domeniu mărginit în $\mathbb{R}^n$, în Secţiunea 1.2 prezentăm un rezultat de bifurcaţie pe varietăţi Riemann compacte, iar în Secţiunea 1.3 este prezentată un rezultat de multiplicitate pentru un sistem de tip Maxwell-Schrödinger. Trăsătura marcantă ale acestor probleme subliniare constă în faptul că pentru parametri mari există cel puţin două soluţii netriviale, iar pentru parametri mici nu există nicio soluţie ne-nulă. Sunt prezentate şi câteva rezultate de stabilitate (în raport cu perturbaţii subcritice) şi proprietăţi asimpototice ale soluţiilor. Rezultatele din acest capitol au fost publicate în articolele [80], [65], [78], [77] şi [76].

În capitolul doi studiem probleme eliptice ce conţin termeni neliniari de tip oscilatoriu în jurul originii sau în infinit. Mai precis, pentru a garanta existenţa unui şir de soluţii pentru problemele cu termen oscilatoriu, prezentăm două metode independente, bazate pe argumente variaţionale: 1) *metoda abstractă*, bazată pe principiul variaţional a lui Ricceri; şi 2) *metoda directă*, bazată pe argumente de minimizare, de trunchiere, şi continuitatea unor operatori superpoziţionali. În Secţiunea 2.1, printr-o metodă variaţională directă, studiem o problemă asimpototic-critică pe sfera unitate $\mathbb{S}^d$ ($d \geq 5$), garantând existenţa a cel puţin $s_d = [d/2] + (-1)^{d+1} - 1$ de şiruri $\{u_k^i\}_k \subset H_1^2(\mathbb{S}^d)$, $i \in \{1, ..., s_d\}$ de soluţii slabe, cu semn ne-constant, care au proprietăţi diferite din punct de vedere simetric. În pofida faptului că problema studiată este netedă (energia funcţională asociată problemei este de clasă C^1 pe

$H_1^2(\mathbb{S}^d)$), o construcţie specială necesită aplicarea versiunii nenetede a principiului simetriei critice împreună cu o tehnică din teoria grupului, bazată pe tehnica rezolvării a cubului Rubik. Prin intermediul principiului variaţional a lui Ricceri, în Secţiuniile 2.2 & 2.3 tratăm un sistem eliptic de tip Poisson şi o problemă de incluziune diferenţială. Rezultatele prezentate în acest capitol au fost publicate în articolele [67], [66] şi [69].

În capitolul trei studiem un fenomen de competiţie într-o problemă Dirichlet între un term de tip putere şi o funcţie neliniară $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care are un comportament oscilatoriu în jurul originii sau în infinit. Acest fenomen este descris complet, arătând că numărul soluţiilor netriviale, distincte ale problemei Dirichlet este *tare influenţat* de termenul de tip putere u^p şi depinde de comportamentul funcţiei f. Mai precis, arătăm că numărul soluţiilor pentru problema Dirichlet este influenţat de termenul sublinear u^p $(p < 1)$ când f oscilează în jurul originii (cu niciun efect din partea termenilor superliniari), şi de termenul superliniar u^p $(p > 1)$ în cazul în care f are oscilaţii în infinit (cu niciun efect din partea termenilor subliniari). Cazul de prag $p = 1$ este tratat separat. Rezultatele din acest capitol au fost publicate în articolele [73] şi [68].

În capitolul patru considerăm o problemă subeliptică pe un domeniu simetric, nemărginit a grupului Heisenberg $\mathbb{H}^n = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$. Demonstrând mai întâi o scufundare compactă de tip Lions pe domenii nemărginite şi simetrice a grupului $\mathbb{H}^n$, observăm că acţiunea cea mai naturală pe grupul Heisenberg $\mathbb{H}^n$ este dată de grupul unitar $U(n) \times \{1\}$ şi subgrupurile acestuia. Aceste subrupuri stau la baza construcţiei unor subspaţii cu simetrii specifice în spaţiul orizontal Sobolev de tip Folland-Stein. Ca o aplicaţie, studiem multiplicitatea soluţiilor unei probleme subeliptice singulare (cu termeni subliniari şi superliniari), definite pe domenii nemărginite şi simetrice a lui $\mathbb{H}^n$, utilizând argumente din teoria grupurilor unitare $U(n) \times \{1\}$ şi elemente din teoria punctului critic. Rezultatele din acest capitol sunt publicate în articolul [10].

În capitolul cinci listăm mai întâi câteva probleme deschise care au apărut pe parcursul rezultatelor descrise în prezenta teză. În Secţiunea 5.2 formulăm câteva clase de probleme care fac legătura între ecuaţii cu derivate parţiale şi geometria Finsler sau grupurile Heisenberg, care pot fi considerate ca puncte de plecare pentru diferite cercetări. În Secţiunea 5.3 este prezentată pe scurt evoluţia profesională/ştiinţifică a autorului.

August 2012

Contents