UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI, CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Habilitation Thesis

Self-Small Abelian Groups and Related Problems

(Abstract)

Author: Simion BREAZ

2013

Abstract

Let R be a unital ring. If M is a right R-module then it induces some well-known functors from the category of right (left) R-modules to the category of abelian groups: the covariant functor $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ and the contravariant functor $\mathrm{Hom}(-,M)$ (respectively the covariant functor $M\otimes_R -$) and their derived functors $\mathrm{Ext}^n_R(M,-)$ and $\mathrm{Ext}^n_R(-,M)$ (respectively $\mathrm{Tor}^n_R(M,-)$). The range of these functors can be restricted to the category of left or right modules over the endomorphism ring E of M (or other rings S such that M is an S-R-bimodule). It is well known that properties of these functors can provide useful information about the module M or about important subcategories of Mod-R. For instance, some commuting properties with respect particular (co)limits can be used to characterize important classes of modules. For instance, H. Lenzing proved in [**102**, Satz 3] that a right R-module M is finitely presented if and only if the functor $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ preserves direct limits (i.e. filtered colimits) or the tensor product $-\otimes_R M$ commutes with direct products, [**102**, Satz 2]. These theorems had a great influence in modern algebra: the first result is used to define finitely presented objects in various categories, e.g. [**1**], while the second is an important ingredient in Chase's characterization of right coherent rings [**58**, Theorem 2.1]. Commuting properties of the cohomology functors associated to a group provide important information about the group, [**117**], [**95**], while commuting properties of the tensor product have a great influence in the study of modules, [**25**], [**63**].

These functors are also very useful in order to "transfer" properties between two categories (of modules). In fact in many situations they can be viewed as pairs of adjoint functors (see [**140**] and [**142**]). The well known theorems of Morita [**105**] show that every equivalence between two module categories is representable, i.e. it is naturally equivalent to an equivalence induced by a functor $\mathrm{Hom}(P,-)$, where P is a finitely generated projective module, and a similar result is valid for dualities (under some finiteness restrictions). Therefore it is natural to ask for conditions such that a functor $\mathrm{Hom}(M,-):\text{Mod-}R\to\text{Mod-}E$, together with its right adjoint $-\otimes_E M$, have nice properties, in order to obtain a good transfer for the properties of objects from these two categories. One of these approaches has as starting point a basically equivalence which states that if M is a modules then $\mathrm{Hom}(M,-)$ induces an equivalence between the (full) subcategory $\mathrm{add}(M)$ of Mod-R which has as objects direct summands of finite direct sums of M and the category of finitely generated projective E-modules [**68**, Theorem 1.14]. This equivalence actually works in additive categories, by a result of R.B. Warfield [**132**]. Moreover, it can be extended to the subcategory $\mathrm{Add}(M)$ of direct summands of direct sums of copies of M, respectively to projective modules, under the assumption that $\mathrm{Hom}(M,-)$ preserves direct sums of copies of M, i.e. the natural homomorphism $\mathrm{Hom}(M,M)^{(\lambda)}\to\mathrm{Hom}(M,M^{(\lambda)})$ is an isomorphism. These modules were

introduced by Arnold and Murley in [**28**] in order to study some generalization of a well known Baer's Lemma, [**78**, Proposition 86.5].

The main aim of the present thesis is to survey some recent results about the structure of self-small modules and abelian groups. We will also discuss results about other commuting properties of some natural functors induced by a module M.

The problem of characterizing self-small modules can be viewed as a branch of the more general problem which asks to study commuting properties (i.e. preserving or inverting direct sums, direct products or, more general, some (co)limits) of the above mentioned functors. Some commuting properties are always valid: the covariant functors $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ and $\mathrm{Ext}^n_R(M,-)$ always preserve direct products, the contravariant functors $\mathrm{Hom}_R(-,M)$ and $\mathrm{Ext}^n_R(-,M)$ inverts direct sums, while the tensorial product always preserves direct limits (hence colimits).

In the first chapter we start with some general commuting properties which can be associated to an additive functor. It is shown that there are only two possible commuting properties of Hom functors which can be non-trivial: $\mathrm{Hom}(M,-)$ commutes with (some) direct sums and $\mathrm{Hom}(-,M)$ inverts (some) direct products, [**10**]. For instance, in Theorem 1.2.4, [**43**, Theorem 2], it is proved that the functor $\mathrm{Hom}(-,M)$ preserves direct products of copies of M if and only if $M=0$. This result provides an answer to a problem from [**90**]. We also present results from [**9**], [**42**] and [**50**] about commuting properties of Ext functors. It is proved that, in contrast to the case of Hom-functors, some commuting properties of the Ext functors are valid only in the trivial cases (Proposition 1.2.10 and Proposition 1.2.11). Then we concentrate on the solutions presented in [**53**] for the problem of identify the (commutative) rings with the property that all self-small modules are finitely generated. As samples of results we mention here Theorem 1.5.15 and Theorem 1.5.24 which state that a non-singular, respectively noetherian, commutative ring has this property if and only if it is artinian.

The second and the third chapters are dedicated to the study of internal structure of self-small abelian groups of finite torsion-free rank. They contain several characterizations of these groups: they are extensions of finite rank torsion-free groups by some special subgroups of products of finitely generated modules over the rings of p-adic integers, called essentially reduced groups (Theorem 2.2.14, Corollary 2.2.17), [**14**], or every self-small group of finite torsion-free rank can be viewed as a pushout of finite rank torsion-free group and a quotient-divisible group (Theorem 2.4.7), from [**51**]. There are also presented some special properties:

- the cancellation property for quotient divisible groups (Theorem 3.1.11) and torsion-free rank 1 self-small groups (Corollary 3.1.13), [**11**]
- properties of self-small groups of torsion-free rank 1, including a system of numerical invariants (Corollary 3.3.3), [**14**].

Some of these results lead to the conclusion that the class of finite torsion-free rank self-small groups is a good place where the properties of finite rank torsion-free (tffr) groups can be extended. However, there are also important differences between these two classes: some properties can extended from tffr-groups to self-small groups, but new ideas for proofs are needed, while other properties of torsion-free groups are not valid for self-small groups (see [**45**] for an extended discussion on this subject). We concentrate here to present the following results:

- an extension of Arnold-Fomin-Wickless duality, proved in [**51**], which shows that the class of self-small groups of finite torsion-free rank can be covered by some good subclasses and there is a family of dualities between these subclasses (Theorem 2.5.5);
- a version for mixed groups of a celebrate theorem of Butler (Bulter's Theorem characterizes an important class of finite rank torsion-free groups), Theorem **??**;
- characterizations from [**7**] and [**44**] of mixed groups which induce Warfield type dualities (Section 3.5).

In the end of the discussion about self-small groups we present the solutions from [**8**] for two problems which ask to find conditions such that an abelian group is determined, modulo quasi-isomorphisms, by (some values of) the functors Hom induced by this abelian group. These solutions are presented in Theorem 3.6.7, Corollary 3.6.8, Theorem 3.6.11 and Theorem 3.7.4. In Subsection 3.6 it is observed that some techniques developed for finite length modules can be adapted for the study of self-small groups of finite torsion-free rank and quasi-homomorphisms. This transfer of results and techniques is also valid in the other direction. However, these transfers are in general not simple since there are many differences between these classes. For instance for abelian groups the rôle of indecomposable projective modules is played by $\mathbb{Z}$, and this is simple modulo quasi-homomorphisms. However, in the case of finite length modules the indecomposable projective modules can be more complicated. We exemplify this transfer in Appendix A, which is based on the paper [**52**]. In Subsection A.2 we extend Theorem 3.7.4 from abelian groups to finite length modules.

In the fourth chapter we present a detailed study for the commuting properties of the Ext-functors. We prove that a module of projective dimension 1 has the property that the induced covariant Ext-functor preserves direct limits if and only if it admits a projective resolution such that the first syzygy associated to this resolution if finitely presented (Theorem 4.1.5), [**42**]. Self-Ext-small groups are characterized in Proposition 4.3.8 and Theorem 4.3.9, [**9**]. The techniques presented here are used to give new proofs for some results about the functor Ext (Corollary 4.1.11), respectively about tilting abelian groups (Corollary 4.3.3).

In the end, I want to note that there are many results about self-small modules/abelian groups which come from the initial motivation the study of these modules and use the pair of adjoint functors mentioned in the beginning of this introduction and some natural classes induced by them. Such examples for the case of abelian groups can be found in [**15**], [**16**], [**18**], [**46**]. But, in order to have a reasonable length of this thesis, I present here only theorems related to the internal structure of these modules/groups.

Rezumat

Fie R un inel cu unitate. Dacă M este un R-modul drept, atunci el induce în mod natural functori de la categoria R-modulelor drepte (stângi) la categoria grupurilor abeliene: functorul covariant $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ şi functorul contravariant $\mathrm{Hom}_R(-,M)$ (respectiv functorul covariant $M\otimes_R -$) împreună cu functorii derivaţi asociaţi lor $\mathrm{Ext}^n_R(M,-)$ şi $\mathrm{Ext}^n_R(-,M)$ (respectiv $\mathrm{Tor}^n_R(M,-)$). Codomeniul acestor functori poate fi restricţionat la categorii de module peste indelul de endomorfisme E al lui M (sau alte inele S astfel încât M este un S-R-bimodul). Sunt cunoscute multe rezultate care arată că proprietăţi ale acestor functori furnizează informaţii utile despre modulul M sau despre subcategorii importante ale categoriei Mod-R. În particular, proprietăţi de comutare cu anumite (co)limite pot fi folosite ca să caracterizăm clase importante de module. De exemplu, H. Lenzing a demonstrat în [**102**, Satz 3] că un R-modul drept M este finit prezentat dacă şi numai dacă functorul $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ păstrează limitele directe (i.e. colimitele filtrate) sau functorul produs tensorial $-\otimes_R M$ commută cu produsele directe, [**102**, Satz 2]. Aceaste teoreme au avut o influenţă deosebită în algebra modernă: prima este folosită ca să se definească obiectele finit prezentate în diverse categorii, e.g. [**1**], iar a doua este un ingredient important în caracterizarea inelelor coerente obţinută de Chase, [**58**, Theorem 2.1]. Mai mult, proprietăţi de comutare ale functorilor de cohomologie associaţi unui grup furnizează informaţii importante despre acel grup, [**117**], [**95**], iar anumite proprietăţi de comutare ale produsului tensorial sunt folosite cu succes în studiul modulelor, [**25**], [**63**].

Cu ajutorul acestor functori putem şi să transferăm proprietăţi între două categorii (de module). De fapt adeseori ei pot fi priviţi ca perechi de functori adjuncţi ([**140**], [**142**]). Mai mult, teoremele Morita [**105**] demonstrază că orice echivalentă între două categorii de module este reprezentabilă, adică este echivalentă natural cu un functor $\mathrm{Hom}_R(P,-)$ cu P un modul proiectiv finit generat. Un rezultat similar este valabil şi pentru dualităţi, dacă se impun unele condiţii de finitudine. Prin urmare, problema găsirii unor condiţii astfel încât functorii $\mathrm{Hom}_R(M,-):\text{Mod-}R\to\text{Mod-}E$ şi $-\otimes_E M$ să permită un bun transfer de proprietăţi între cele două categorii este una naturală. Un punct de plecare pentru studiul acestor proprietăţi este acela că pentru orice modul M functorul $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ induce o echivalenţă între subcategoriile pline $\mathrm{add}(M)$ (care are ca obiecte sumanzii direcţi în sume directe finite de copii ale lui M, şi categoria E-modulelor drepte proiective şi finit generate, [**68**, Theorem 1.14]. Această echivalenţă funcţionează de fapt în contextul categoriilor aditive, aşa cum a fost demonstrat de R.B. Warfiled [**132**]. Aceată echivalenţă poate fi extinsă la subcategoriile $\mathrm{Add}(M)$ a sumanzilor direcţi în sume directe de copii ale lui M, respectiv categoria E-modulelor proiective, dacă M îndeplineşte condiţia că $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ păstrează sumele directe de copii ale lui M, i.e. morfismul natural $\mathrm{Hom}(M,M)^{(\lambda)}\to\mathrm{Hom}(M,M^{(\lambda)})$ este un izomorpfism, oricare ar fi λ un ordinal. Aceste module au fost introduse de Arnold şi Murley în [**28**] cu scopul de a studia generalizări ale unui rezultat demonstrat de Baer pentru grupuri abeliene fără torsiune de rang 1, [**78**, Proposition 86.5].

Scopul principal al acestei teze este acela de a prezenta rezultate recente despre structura modulelor sau grupurilor abeliene auto-mici. De asemenea, vom prezenta şi rezultate legate de alte proprietăţi de comutare ale functorilor induşi de un modul M.

Problema caracterizării modulelor auto-mici poate fi provită ca o parte a problemei generale care cere studiul proprietăţilor de comutare (cu sumele sau produsele direct sau, mai general, cu diverse (co)limite) ale functorilor induşi de un modul. Unele proprietăţi sunt valabile intotdeauna: functorii covarianţi $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ şi $\mathrm{Ext}^n_R(M,-)$ păstrează produsele directe, functorii contravarianţi $\mathrm{Hom}_R(-,M)$ şi $\mathrm{Ext}^n_R(-,M)$ transformă sumele directe în produse directe, iar produsul tensorial şi functorii derivaţi asociaţi păstrează colimitele. Alte proprietăţi de acest tip sunt valabile doar în situaţiile triviale.

În primul capitol prezentăm proprietăţi generale ale functorilor aditivi legate de comutarea lor cu sumele şi produsele directe. Se demonstrează că pentru functorii Hom sunt doar două situaţii non-triviale: $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ comută cu (unele) sume direct, respectiv $\mathrm{Hom}_R(-,M)$ transformă produse directe în sume directe, [**10**]. De exemplu, în Teorema 1.2.4, [**43**, Theorem 2], sa arătat că $\mathrm{Hom}_R(-,M)$ păstrează produsele direct (de copii ale lui M) dacă şi numai dacă $M = 0$ (această teoremă dă o soluţie pentru o problemă formulată în [**90**]). Mai sunt discutate aici şi câteva rezultate din lucrările [**9**], [**42**] and [**50**] legate de proprietăţi de comutare ale functorilor Ext. Este demonstrat că există situaţii când proprietăţi de comutare ale functorilor Ext apar doar în cazuri triviale (Propoziţiile 1.2.10 şi 1.2.11), chiar dacă acestea sunt în general non-triviale în cazul functorilor Hom. Apoi prezentăm soluţiile găsite în [**53**] pentru problema care cere identificarea acelor inele (eventual comutative) pentru care orice modul auto-mic este finit generat. De exemplu, este demonstrat în Teoremele 1.5.15 şi 1.5.24 că un inel non-singular, respectiv noetherian, comutativ are această proprietate dacă şi numai dacă este artinian.

Al doilea şi cel de-al treilea capitol sunt dedicate studiului structurii interne a grupurilor auto-mici de rang fără torsiune finit. Aceste capitole conţin câteva caracterizări ale acestor grupuri: ele sunt extinderi ale unor grupuri fără torsiune de rang finit prin nişte subgrupuri speciale ale unor module peste inelul intregilor $\mathbb{Z}$-adici, numite grupuri esenţial reduse (Teorema 2.2.14, Corolarul 2.2.17), [**14**], sau orice grup auto-mic de rang fără torsiune finit poate fi privit ca un pushout a unui grup fără torsiune de rang finit cu un grup cu câturi divizibile (Teorema 2.4.7), [**51**]. Prezentăm de asemenea câteva proprietăţi speciale:

- proprietatea de simplificare pentru grupuri cu câturi divizibile (Teorema 3.1.11), respectiv pentru grupuri auto-mici de rang fără torsiune 1 (Corolarul 3.1.13), [**11**]
- proprietăţi ale grupurilor de rang fără torsiune 1, inclusiv un sistem de invarianţi numerici (Corolarul 3.3.3), [**14**].

Aceste rezultate duc la concluzia că putem privi clasa grupurilor auto-mici de rang fără torsiune finit ca un mediu bun pentru a încerca să extindem rezultate valabile pentru grupuri fără torsiune de rang finit. Totuşi există diferenţe importante între cele două clase: unele rezultate pot fi demonstrate, dar sunt necesare idei şi abordări noi, iar altele nu sunt valabile în contextul grupurilor auto-mici (în [**45**] este discutat acest subiect în detaliu). Dintre rezultatele care funcţionează pentru grupuri auto-mici, menţionăm următoarele:

- o extindere a dualităţii Arnold-Fomin-Wickless, demonstrată [**51**], care arată că clasa grupurilor auto-mici de rang fără torsiune finit poate fi acoperită cu subclase care au proprietăţi bune şi există o familie de dualităţi între aceste subclase (Theorem 2.5.5);
- o versiune pentru grupuri mixte a unei teoreme a lui Butler (teorem lui Bulter caracterizează an important class of finite rank torsion-free groups), Theorem **??**;
- caracterizări din [**7**] şi [**44**] ale grupurilor mixte care induc dualităţi de tip Warfield (Section 3.5).

În finalul discuţiei despre grupuri auto-mici sunt prezentate soluţiile date în [**8**] la două probleme care cer să se găsească condiţii astfel încât un grup abelian să fie determinat până la un quasi-izomorfism de unele valori ale functorilor Hom induşi de acel grup. Aceste soluţii sunt prezentate în Teorema 3.6.7, Corolarul 3.6.8, Teorema 3.6.11 şi Teorema 3.7.4. În secţiunea 3.6 constatăm că unele tehnici dezvoltate în studiul modulelor de lungime finită pot fi adaptate cazului grupurilor auto-mici de rang fără torsiune finit. Acest transfer de rezultate şi tehnici funcţionează uneori şi în cealaltă direcţie. Totuşi, în general aceste transferuri nu sunt imediate pentru că există mari diferenţe între cele două clase. De exemplu, în cazul grupurilor abeliene rolul obiectelor proiective indecompozabile este jucat de $\mathbb{Z}$, iar acesta este un obiect simplu în categoria quasi-morfismelor, dar în cazul modulelor de lungime finită, clasa modulelelor proiective poate fi mult mai complicată. Exemplificăm acest transfer în Appendixul A, bazat pe lucrarea [**52**]. În Secţiunea A.2 arătăm cum poate fi extinsă Teorema 3.7.4 de la grupuri abeliene la module de lungime finită.

În capitolul al patrulea prezentăm un studiu detaliat legat de proprietăţi de comutare ale functorilor covarianţi Ext. Demonstrăm că un modul M de dimensiune proiectivă 1 are proprietatea că functorul covariant $\mathrm{Ext}^1_R(M,-)$ comută cu limitele direct dacă şi numai dacă el comută cu sumele directe de copii ale lui R, ceea ce este echivalent cu faptul că există o rezoluţie proiectivă pentru M astfel încât primul syzygy asociat acestei rezoluţii este finit prezentat (Theorem 4.1.5), [**42**]. Grupurile abeliene auto-Ext-mici sunt descrise în Propoziţia 4.3.8 şi Teorema 4.3.9, [**9**]. Tehnicile prezentate aici sunt folosite pentru a da noi demonstraţii ale unor rezultate despre functorul Ext (Corolarul 4.1.11), respectiv despre grupuri abeliene tilting (Corolarul 4.3.3).

În final, doresc sa menţionez că există multe alte rezultate despre grupurile sau modulele auto-mici care vin din motivaţia iniţială care a dus la studiul acestor obiecte şi care folosesc perechea de functori adjuncţi menţionată la începutul acestui rezumat, [**15**], [**16**], [**18**], [**46**]. Dar, pentru ca această teză să aibă o lungime rezonabilă, am ales să prezint aici doar rezultate legate de structura internă a acestor obiecte.

Bibliography

1. J. Adámek and J. Rosický: Locally presentable categories and accessible categories, London Math. Soc. Lec. Note Series 189 (1994).
7. U. Albrecht, S. Breaz: *A note on mixed abelian groups*, Journal of Algebra, 323 (2010), 509–516.
8. U. Albrecht, S. Breaz: *Quasi-isomorphisms and groups of quasi-homomorphisms*, Journal of Algebra and its Applications, 8 (2009), 617–627.
9. U. Albrecht, S. Breaz, P. Schultz: The Ext functor and self-sums, *Forum Math*, DOI: 10.1515/forum-2011-0141, to appear.
10. U. Albrecht, S. Breaz, P. Schultz: Functorial properties of Hom and Ext, *Contemporary Mathematics*, Groups and Model Theory, editors L. Strüngmann, L. Fuchs, M. Droste, K. Tent, vol. 576 (2012), 1–15.
11. U. Albrecht, S. Breaz, C. Vinsonhaler, W. Wickless: *Cancellation properties for quotient divisible groups*, J. Algebra, 317 no.1, 2007, 424–434.
14. U. Albrecht, S. Breaz, W. Wickless: *Self-small abelian groups*, Bull. Aust. Math. Soc., 80 (2009), 205–216.
15. U. Albrecht, S. Breaz, W. Wickless: *A-Solvability and Mixed Abelian Groups*, Communications In Algebra, 37 (2009), 439–452.
16. U. Albrecht, S. Breaz, W. Wickless: *Finitely A-Cogenerated Abelian Groups*, Houston Journal Of Mathematics, 34 (2008) 409–421.
17. U. Albrecht, S. Breaz, W. Wickless: *Purity and Self-Small Groups*, Communications In Algebra, 35 (2007), 3789–3807.
18. U. Albrecht, S. Breaz, W. Wickless: *The finite quasi-Baer property*, J. Algebra, 293 (2005), 1–16.
25. L. Angeleri Hügel, S. Bazzoni, D. Herbera: *A solution to the Baer splitting problem*, Trans. A.M.S., 360 (2008), 2409–2421.
28. D.M. Arnold, C. E. Murley: *Abelian groups, A, such that* $\mathrm{Hom}(A,-)$ *preserves direct sums of copies of A*, Pacific J. Math., **56**, (1975), 7–21.
42. S. Breaz: Modules M such that $\mathrm{Ext}_1(M,-)$ commutes with direct limits, Alg. Repr. Th., to appear.
43. S. Breaz: *Direct products and the contravariant hom-functor*, Bull. London Math. Soc. 44 (2012), 136–138.
44. S. Breaz: *Warfield dualities induced by self-small mixed groups*, Journal of Group Theory, 13 (2010), 391–409.
45. S. Breaz: *Self-small abelian groups of finite torsion-free rank*, Algebra Symposium, Cluj-Napoca 2005, Editura Fundatiei pentru studii europene, 2006, 17–30.
46. S. Breaz: *The quasi-Baer-splitting property for mixed abelian groups*, Journal of Pure and Applied Algebra, 191 (2004), 75–87.
50. S. Breaz and P. Schultz: *When* Ext *commutes with direct sums*, to appear in Journal of Algebra and its Applications.
51. S. Breaz and P. Schultz: *Dualities for self-small groups*, Proceedings of the American Mathematical Society 140 (2012), 69-82.
52. S. Breaz, J. Trlifaj: *Modules determined by their annihilator classes*, Journal of the London Mathematical Society, 81 (2010), 225–240.
53. S. Breaz, J. Žemlička: *When every self-small module is finitely generated*, J. Algebra, 315 (2007), 885–893.
58. S. U. Chase: *Direct products of modules*, Trans. A.M.S. 97 (1960), 457–473.

63. V. Drinfeld: *Infinitedimensional vector bundles in algebraic geometry: an introduction*, in The Unity of Mathematics, Birkhauser, Boston 2006, 263-304.
68. Th. Faticoni: Modules over Endomorphism Rings, (Cambridge University Press, 2009).
78. L. Fuchs: Infinite Abelian Groups Vols. I, Academic Press, 1970.
90. B. Goldsmith and O. Kolman: *On cosmall Abelian groups*, J. of Algebra, 317 (2007), 510–518.
95. M. Hamilton: *When is group cohomology finitary?*, J. Algebra, 330 (2011), 1–21.
102. H. Lenzing: *Endlich präsentierbare Moduln*, Arch. Math. (Basel), 20 (1969), 262–266.
105. K. Morita: *Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum conditions*, Sci. Rep. Tokyo Hyoiku Daigaku Ser. A, 6 (1958), 83–142.
117. R. Strebel: *A homological finiteness criterium*, Math. Z., 151 (1976), 263–275.
132. R.B. Warfield: *The structure of mixed abelian groups*, Abelian Group Theory, Springer Verlag 616 (1977), 1–38.
140. R. Wisbauer: *Static modules and equivalences*, Interactions Between Ring Theory and Representations of Algebras, F.van Oystaeyen, M.Saorin(ed.), Marcel Dekker (2000), 423–449.
142. R. Wisbauer: *Cotilting objects and dualities*, Representations of algebras (Sao Paulo, 1999), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 224, Dekker, New York, 2002, 215–233.