TEZĂ DE ABILITARE

CATEGORII DE MODULE ŞI COMODULE: GENERALIZĂRI

SEPTIMIU CRIVEI

Universitatea Babeş-Bolyai

Cluj-Napoca 2012

HABILITATION THESIS

MODULE AND COMODULE CATEGORIES: GENERALIZATIONS

SEPTIMIU CRIVEI

Babeş-Bolyai University

Cluj-Napoca 2012

Rezumat

Prezenta teză de abilitare cuprinde trei părţi principale: *I. Realizări ştiinţifice şi profesionale*, *II. Planuri de evoluţie şi de dezvoltare a carierei* şi *III. Bibliografie.*

Partea I reprezintă miezul tezei, în care prezentăm cele mai importante rezultate ştiinţifice proprii, publicate în 20 de articole, şi principalele realizări profesionale şi academice, toate referindu-se la intervalul 2002-2012, care corespunde perioadei de timp de după obţinerea titlului de doctor în matematică în anul 2001. Am inclus rezultatele ştiinţifice proprii publicate în această perioadă, cu excepţia acelora care: (i) sunt conţinute într-o proporţie semnificativă în teza de doctorat sau sunt strâns legate de aceasta; (ii) fac parte din articole de sinteză apărute în volume ale unor conferinţe; sau (iii) se referă la abordări algoritmice.

Principalele tematici pe care le-am studiat sunt următoarele: structuri exacte şi în particular puritate, echivalenţe şi dualităţi, aproximări, proprietăţi de tip extending şi lifting. Acestea sunt organizate pe 5 capitole, pe nivele categoriale corespunzătoare gradului de generalitate, şi anume: 1. *Categorii exacte*, 2. *Categorii finit accesibile*, 3. *Categorii Grothendieck*, 4. *Categorii de module* şi 5. *Categorii de comodule.* Pentru a referi şi localiza uşor rezultatele publicate, fiecare secţiune a capitolelor corespunde unui articol având practic acelaşi titlu cu cel al secţiunii. Mai mult, subsecţiunile din teza de abilitare corespund secţiunilor articolelor.

În Capitolul 1 prezentăm rezultatele proprii despre categorii exacte în sensul lui Quillen. Generalizăm de la categorii preabeliene la categorii aditive complet idempotente slab un rezultat recent care arată că şirurile stabile exacte definesc o structură maximală exactă. Introducem şi studiem categorii aditive exacte pe o parte şi o versiune mai puternică obţinută prin adăugarea variantei unilaterale a ,,axiomei obscure“ a lui Quillen, şi arătăm că anumite rezultate omologice, cum ar fi Lema 3×3, pot fi demonstrate în acest context.

În Capitolul 2 extindem dualitatea Gruson-Jensen de la cazul modulelor unitare peste un inel cu suficienţi idempotenţi la cel al modulelor unitare fără torsiune peste un inel idempotent, când categoriile de module asociate sunt finit accesibile. Arătăm că într-o categorie aditivă finit accesibilă orice clasă de obiecte închisă la limite directe şi imagini epimorfe pure este acoperitoare, fapt care ne permite să extindem validitatea conjecturii acoperirii plate la categorii aditive local finit prezentate. Dualitatea Gruson-Jensen şi existenţa acoperirilor plate sunt stabilite pentru categorii care în general nu au suficiente obiecte proiective. Dăm şi o caracterizare a categoriilor aditive finit accesibile Krull-Schmidt.

În Capitolul 3 reamintim teorema Osofsky–Smith în categorii Grothendieck, deducem faptul că orice categorie Grothendieck local finit generată cu o familie de generatori finit generaţi complet injectivi este semisimplă, şi discutăm versiunea pentru teorii de torsiune a teoremei Osofsky clasice. Demonstrăm o generalizare a lemei lui Mitchell şi arătăm că aceasta este o lemă cheie care poate fi utilizată pentru a deduce într-o manieră uşoară şi unificată teorema lui Ulmer, teorema Gabriel-Popescu generalizată şi o generalizare a lemei lui Takeuchi. Dăm condiţii echivalente pentru ca orice obiect al unei categorii Grothendieck cu suficiente obiecte proiective să aibă o $\mathcal{X}$-acoperire care este un monomorfism, pentru o clasă n-Ext-ortogonală $\mathcal{X}$ de obiecte.

În Capitolul 4 stabilim condiţii echivalente pentru ca orice R-modul drept să aibă o $\mathcal{X}$-înfăşurătoare care este un epimorpfism, pentru o clasă n-Tor-ortogonală de R-module stângi. Considerăm (m, n)-puritatea pentru module şi arătăm că principalele proprietăţi ale purităţii

pot fi rafinate pentru (m, n)-puritate, incluzând legături cu (m, n)-injectivitatea şi (n, m)-platitudinea pentru module. Introducem şi cercetăm generalizări ale modulelor extending şi lifting relativ la o clasă proprie de şiruri scurte exacte de module, şi relativ la o clasă de module şi o clasă proprie de şiruri scurte exacte de module. Pentru o teorie de torsiune ereditară τ, studiem modulele self-τ-divizibile. Considerăm şi studiem clase de module asociate cu o clasă nevidă $\mathcal{C}$ de module închisă la copii izomorfe, între acestea fiind două clase importante în teoria claselor naturale şi conaturale de module. Arătăm o corespondenţă bijectivă care păstrează ordinea între mulţimile de elemente coînchise ale unor latici mărginite legate prin corespondenţe Galois potrivite, şi obţinem aplicaţii la anumite latici de submodule.

În Capitolul 5 stabilim câteva elemente de bază din teoria modelelor pentru comodule peste o coalgebră. Prezentăm o nouă demonstraţie pentru existenţa unei acoperiri plate pentru orice comodul peste o coalgebră semiperfectă. Studiem existenţa unei dualităţi Gruson-Jensen pentru categorii de comodule peste o coalgebră. Pentru o algebră Hopf H şi extinderi H-Galois A, B investigăm categoria ${}_A\mathcal{M}_B^H$ a bimodulelor Hopf relative şi echivalenţele Morita dintre A şi B induse de către ele.

Capitolul 6 prezintă pe scurt principalele realizări profesionale şi academice de după obţinerea titlului de doctor în matematică în 2001.

Partea II conţine planuri de evoluţie şi de dezvoltare a carierei. Principalele direcţii de cercetare se vor concentra pe contexte categoriale abstracte, cum ar fi categoriile exacte şi cele finit accesibile, cu aplicaţii la categorii particulare. Algebra omologică, aproximările şi perechile de functori adjuncţi vor fi unele dintre temele pe care intenţionăm să le abordăm şi/sau continuăm.

Partea III constă din bibliografia la care am făcut referire pe parcursul tezei de abilitare.

Autorul

Cluj–Napoca,
iunie 2012

Abstract

The present habilitation thesis consists of three main parts: *I. Scientific and professional achievements*, *II. Career evolution and development plans* and *III. Bibliography.*

Part I is the core of the thesis, in which we present our most important scientific results, published in 20 papers, and the main professional and academic achievements, all referring to the interval 2002-2012, which corresponds to the period of time passed after obtaining my Ph.D. degree in Mathematics in 2001. We have included our scientific results published during this period, except for those which are: (i) significantly contained in or related to the Ph.D. thesis; (ii) part of survey papers appeared in proceedings of conferences; or (iii) referring to algorithmic approaches.

The main topics that we have studied are the following ones: exact structures and in particular purity, equivalences and dualities, approximations, extending and lifting type properties. They are organized into 5 chapters, on categorical levels corresponding to their degree of generality, namely: 1. *Exact categories*, 2. *Finitely accessible categories*, 3. *Grothendieck categories*, 4. *Module categories* and 5. *Comodule categories.* In order to refer and localize easily the published results, each section of the chapters corresponds to a paper basically having the same title as the section. Moreover, the subsections in the habilitation thesis correspond to the sections of the papers.

In Chapter 1 we present our results on exact categories in the sense of Quillen. We generalize from pre-abelian categories to weakly idempotent complete additive categories a recent result showing that the stable exact sequences define a maximal exact structure. We introduce and study one-sided exact additive categories and a stronger version defined by adding the one-sided part of Quillen's "obscure axiom", and we show that some homological results, such as the 3×3 Lemma, can be proved in our context.

In Chapter 2 we extend the Gruson-Jensen duality from the case of unitary modules over a ring with enough idempotents to that of unitary and torsionfree modules over an idempotent ring, provided the corresponding module categories are finitely accessible. We show that in a finitely accessible additive category every class of objects closed under direct limits and pure epimorphic images is covering, which allow us to extend the validity of the Flat Cover Conjecture to locally finitely presented additive categories. Our Gruson-Jensen duality and the existence of flat covers are established for categories not having enough projectives. We also give a characterization of Krull-Schmidt finitely accessible additive categories.

In Chapter 3 we recall the Osofsky–Smith theorem in Grothendieck categories, we deduce that every locally finitely generated Grothendieck category with a family of completely injective finitely generated generators is semi-simple, and we discuss the torsion-theoretic version of the classical Osofsky theorem. We prove a generalization of the Mitchell Lemma, and we show that it is a key lemma that can be used in order to deduce in a unified easier way the Ulmer Theorem, the generalized Gabriel-Popescu Theorem and the generalized Takeuchi Lemma. We give equivalent conditions under which every object in a Grothendieck category with enough projectives has a monic $\mathcal{X}$-cover, when $\mathcal{X}$ is an n-th Ext-orthogonal class of objects.

In Chapter 4 we establish equivalent conditions under which every right R-module has an epic $\mathcal{X}$-envelope, when $\mathcal{X}$ is an n-th Tor-orthogonal class of left R-modules. We consider (m,n)-purity for modules and show that the main properties of purity may be refined for (m,n)-purity, including connections with (m,n)-injectivity and (n,m)-flatness of modules. We introduce and investigate generalizations of extending modules and lifting modules relative to a proper class of short exact sequences of modules, and relative to a class of modules and a proper class of short exact sequences of modules. For a hereditary torsion theory τ, we study self-τ-divisible modules. We consider and study some classes of modules associated to a non-empty class $\mathcal{C}$ of modules closed under isomorphic copies, among them being two important classes in the theory of natural and conatural classes of modules. We show an order-preserving bijective correspondence between the sets of coclosed elements of some bounded lattices related by suitable Galois connections, and we apply it to certain submodule lattices.

In Chapter 5 we establish some basic points in the model theory of comodules over a coalgebra. We present another proof for the existence of a flat cover for every comodule over a semiperfect coalgebra. We study the existence of a Gruson-Jensen duality for categories of comodules over a coalgebra. For a Hopf algebra H and H-Galois extensions A, B we investigate the category ${}_A\mathcal{M}_B^H$ of relative Hopf bimodules, and the Morita equivalences between A and B induced by them.

Chapter 6 briefly presents the main professional and academic achievements after the Ph.D. degree in Mathematics obtained in 2001.

Part II contains some career evolution and development plans. The main research directions will concentrate on abstract categorical contexts, such as exact categories and finitely accessible categories, with applications to particular categories. Homological algebra, approximations and adjoint pairs will be some of the topics intended to be approached and/or continued.

Part III consists of the bibliography we have referred to throughout the habilitation thesis.

The author

Cluj–Napoca,
June 2012