

BABEȘ-BOLYAI UNIVERSITY, CLUJ-NAPOCA
FACULTY OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

HABILITATION THESIS

The role of generalized convexity in vector optimization
and related variational problems

Nicolae Popovici

Associate Professor, Ph.D.
Department of Mathematics

CLUJ-NAPOCA
2016

Rezumat

Prezenta teză prezintă câteva dintre rezultatele științifice publicate de autor, singur sau în colaborare, după susținerea tezei de doctorat *Contribution à l'optimisation vectorielle* (coordonată de Michel Théra) la Universitatea din Limoges (Franța), în 1995 și echivalarea diplomei de doctorat de către Ministerul Educației Naționale din România în 1998.

Teza este structurată în două părți. Prima parte conține rezultatele științifice publicate iar partea a doua prezintă stadiul actual al cercetărilor autorului, precum și posibilele direcții de cercetare și de dezvoltare a carierei sale profesionale.

Rezultatele prezentate în prima parte au fost selectate din 17 articole apărute în 13 reviste cotate ISI: *Annals of Operations Research* (2015), *Carpathian Journal of Mathematics* (2016), *Journal of Global Optimization* (2007), *Journal of Mathematical Analysis and Applications* (2000), *Journal of Optimization Theory and Applications* (2001), *Journal of Nonlinear and Convex Analysis* (2011), *Mathematical Methods of Operations Research* (2003), *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications* (2010 și 2012), *Operations Research Letters* (2006, 2008 și 2010), *Optimization* (2005 și 2013), *Optimization Letters* (2015), *Proceedings of the American Mathematical Society* (2003) și *Set-Valued and Variational Analysis* (2015).

După susținerea tezei de doctorat, autorul a lucrat trei semestre (în 1998, 2001 și 2004) ca profesor invitat (maître de conférences invité) la Universitatea din Limoges. De altfel în ultimele două decenii autorul a efectuat numeroase stagii de cercetare, astfel încât o parte din rezultatele incluse în teză sunt rodul unei fructuoase colaborări cu Ovidiu Bagdasar (Derby, Marea Britanie), Joël Benoist (Limoges, Franța), Jonathan Michael Borwein (Newcastle, Australia), Daishi Kuroiwa (Matsue, Japonia), Davide La Torre (Milano, Italia) și Matteo Rocca (Varese, Italia).

Intrucât teza de abilitare se dorește a fi și un suport util unor potențiali doctoranzi, rezultatele au fost prelucrate și prezentate în mod unitar, fiind precedate de definițiile celor mai importante noțiuni și însoțite de exemple. Materialul este structurat în patru capitole.

În Capitolul 1 se prezintă câteva rezultate utile cu privire la conurile convexe. Printre altele, se introduce o funcție de scalarizare de tip Gerstewitz (Tammer) asociată unui con solid și vectorial-închis dintr-un spațiu liniar (Secțiunea 1.1). În cadrul spațiilor Banach se arată că orice con convex închis și generativ posedă o proprietate asemănătoare conurilor lacticeale, formulată prin intermediul direcțiilor extremale ale conului polar (Secțiunea 1.2). Apoi, în cadrul spațiilor euclidiene se stabilesc câteva estimări cantitative pentru conurile de tip Phelps înscrise într-un con convex cu interior nevid sau circumscrise unui con convex ascuțit (Secțiunea 1.3). În același cadru se stabilesc câteva rezultate care fac legătura dintre conul lexicografic și anumite conuri poliedrale canonice (Secțiunea 1.4).

Capitolul 2 este consacrat unor clase speciale de funcții generalizat convexe. Mai întâi se studiază funcțiile scalare și se stabilește o proprietate de tip "max local - min global" pentru funcții explicit cvasiconvexe (Secțiunea 2.1). În Secțiunea 2.2 se consideră funcții multivoce și funcții vectoriale. În cadrul studiului funcțiilor multivoce convexe, se evidențiază un procedeu prin care se pot construi funcții multivoce afine pornind de la două mulțimi convexe și se dau condiții suficiente pentru ca inversa unei funcții multivoce afine să fie afină (Subsecțiunea 2.2.1). Un spațiu larg este rezervat studiului funcțiilor multivoce con-convexe și a celor con-cvasiconvexe, pentru care se stabilesc mai multe caracterizări interesante. Una dintre acestea reprezintă o variantă multivocă a teoremei lui Crouzeix, conform căreia o funcție scalară reală este convexă dacă și numai dacă toate perturbările sale liniare sunt cvasiconvexe (Subsecțiunea 2.2.2). În următoarele două subsecțiuni se consideră doar funcții vectoriale (univoce). Se introduce o noțiune de explicit cvasiconvexitate în raport cu un con relativ solid, care în cadrul particular al funcțiilor cu valori într-un spațiu euclidian se dovedește a fi tocmai explicit cvasiconvexitatea pe componente (Subsecțiunea 2.2.3). Clasa acestor funcții se extinde la clasa funcțiilor lexicografic cvasiconvexe, care păstrează o serie de proprietăți importante ale funcțiilor explicit cvasiconvexe (Subsecțiunea 2.2.4).

Rolul convexității generalizate în optimizarea vectorială este evidențiat pe parcursul Capitolului 3, care reprezintă partea centrală a tezei. După ce se reamintesc câteva noțiuni și rezultate de bază (Secțiunea 3.1) se studiază mulțimile (slab) radiante în raport cu un con. În particular, se arată că frontiera unei mulțimi închise și radiante în raport cu un con convex având interior nevid este omeomorfă cu un hiperplan (Secțiunea 3.2). Secțiunea 3.3. este consacrată studiului mulțimilor umbrite. Mai întâi se stabilesc caracterizări ale mulțimilor simplu-umbrite și a celor complet-umbrite (Subsecțiunea 3.3.1). Apoi se studiază continuitatea secțiunilor conice și a funcțiilor marginale asociate. Se deduce o caracterizare interesantă a conurilor poliedrale (Subsecțiunea 3.3.2). Prin alegerea unor reprezentanți nenuli ai fețelor conului de ordine se introduc două tipuri de selecții dominante: proiective și poliedrale (Subsecțiunea 3.3.3). Acestea joacă un rol esențial în stabilirea contractibilității și a altor proprietăți topologice ale mulțimii punctelor eficiente ale unei mulțimi complet-umbrite (Subsecțiunea 3.3.4). Mulțimile slab-umbrite se bucură de aceste proprietăți doar în spațiul euclidian tridimensional, cadru în care se dă o descriere detaliată a mulțimii punctelor eficiente (Subsecțiunea 3.3.5). În Secțiunea 3.4 se studiază clasa mulțimilor slab-umbrite. Se stabilesc condiții necesare și/sau suficiente pentru ca o mulțime să fie slab-umbrită (Subsecțiunea 3.4.1), care se utilizează apoi pentru a demonstra că anumite clase importante de probleme de optimizare vectorială (multicriterială) sunt reductibile Pareto (Subsecțiunea 3.4.2). Rezultatele obținute în această subsecțiune permit stabilirea contractibilității mulțimii soluțiilor eficiente (Subsecțiunea 3.4.3).

Capitolul 4 încheie partea întâi a tezei. Aici se studiază câteva probleme variaționale înrudite cu problemele de optimizare vectorială. În ipoteze de convexitate generalizată se stabilesc condiții suficiente pentru scalarizarea și reductibilitatea Pareto a inegalităților variaționale vectoriale clasice (Secțiunea 4.1), a unor inegalități variaționale generalizate (Secțiunea 4.2), precum și a problemelor de echilibru în sens vectorial (Secțiunea 4.3).

În partea a doua a tezei se prezintă stadiul actual și principalele direcții de cercetare ale autorului pentru viitorul apropiat, precum și temele pe care ar dori să le abordeze împreună cu potențialii doctoranzi, în urma dobândirii calității de conducător de doctorat. Aceste direcții de cercetare ar putea fi armonizate cu unele dintre temele prioritare ale programului de doctorat *PhD Program in Methods and Models for Economic Decisions* de la Universitatea din Varese, în cadrul căruia autorul activează oficial din 2015.