Rezumatul tezei de abilitare

Existence and Multiplicity Results for Smooth and Nonsmooth Problems

de Hannelore Inge Lisei

Obiectivul acestei teze de abilitare este prezentarea rezultatelor principale ale cercetărilor autoarei din ultimii ani, rezultate care se referă la aplicaţiile metodelor variaţionale şi topologice în studiul existenţei şi multiplicităţii soluţiilor unor probleme netede şi nenetede.

Autoarea şi-a susţinut teza de doctorat cu titlul *Approximation and Optimal Control of the Stochastic Navier-Stokes Equation*, în anul 1999, la Universitatea Martin-Luther din Halle (Germania), sub îndrumarea domnului Prof. Dr. W. Grecksch. În perioada 1999–2002 a lucrat la Universitatea Tehnică din Berlin (Germania), fiind membră în proiectul "Infinite Dimensional Stochastic Dynamical Systems", finanţat de Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG). După întoarcerea la Universitatea Babeş-Bolyai din Cluj-Napoca, ea şi-a continuat cercetările în două direcţii: calculul variaţional şi analiza stocastică.

Teza de abilitare este structurată în două părţi: în Capitolul 1 se studiază probleme netede cu operatori omogeni şi neomogeni, iar în Capitolul 2, probleme nenetede, mai exact inegalităţi hemivariaţionale şi inegalităţi variaţional - hemivariaţionale definite pe domenii nemărginite.

În cadrul studiului problemelor netede cu ajutorul teoriei punctelor critice, soluţiile (slabe) ale ecuaţiilor cu derivate parţiale sunt punctele critice ale funcţionalelor de energie asociate problemelor studiate. Pentru a ilustra aceasta, considerăm următoarea problemă: fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domeniu mărginit cu frontiera netedă, $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie Carathéodory cu anumite proprietăţi, iar $-\Delta_p$ operatorul p-Laplace ($p > 1$). Atunci $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ este soluţie slabă a ecuaţiei

$$(1) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u(x) = g(x, u(x)), & x \in \Omega, \\ u = 0 \quad \text{pe } \partial\Omega, \end{cases}$$

dacă şi numai dacă are loc egalitatea

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x) \nabla v(x) dx = \int_\Omega g(x, u(x)) v(x) dx \text{ pentru orice } v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Aceasta este formularea variaţională a problemei (1). Cu alte cuvinte, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ este soluţie slabă a ecuaţiei (1) dacă şi numai dacă u este punct critic al funcţionalei $E : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$, definită prin

$$E(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u(x)|^p dx - \int_\Omega \int_0^{u(x)} g(x,t)dtdx,$$

adică $E'(u) = 0$. Această funcţională este netedă.

În articolul [2], K.C. Chang a studiat cazul în care $p = 2$ şi $g : \Omega \to \mathbb{R}$, unde g este o funcţie măsurabilă local mărginită, care nu este continuă. Astfel, K.C. Chang a extins teoria punctelor critice pentru funcţionale local Lipschitz, folosind gradientul generalizat introdus de F.H. Clarke. În acest context, u se numeşte punct critic al funcţionalei local Lipschitz E, dacă $0 \in \partial E(u)$, unde ∂E este gradientul generalizat al lui E în punctul u.

Formulăm următoarea problemă variaţional - hemivariaţională, care conţine operatorul p-Laplacian, în analogie cu problema netedă (1): fie $\mathcal{K} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ o mulţime nevidă, închisă şi convexă; se caută $u \in \mathcal{K}$ astfel încât

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)(\nabla v(x) - \nabla u(x))dx + \int_\Omega G^0(x, u(x); -v(x) + u(x))dx \geq 0 \tag{2}$$

pentru orice $v \in \mathcal{K}$, unde $G : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie Carathéodory, local Lipschitz în a doua variabilă, iar G^0 este derivata direcţională generalizată în sensul lui Clarke. În cazul în care $\mathcal{K} = W_0^{1,p}(\Omega)$, inegalitatea de mai sus devine o inegalitate hemivariaţională. Dacă $G' = g$ şi $\mathcal{K} = W_0^{1,p}(\Omega)$, obţinem formularea variaţională a problemei (1). Problemele de tipul (2) se rezolvă folosind teoria punctului critic pentru funcţionale local Lipschitz perturbate de funcţii convexe inferior semicontinue (a se vedea monografiile lui D. Motreanu şi P. D. Panagiotopoulos [15], D. Motreanu şi V. Rădulescu [16], L. Gasiński şi N.S. Papageorgiou [6]). Inegalităţile hemivariaţionale şi aplicaţiile lor sunt prezentate detaliat în monografiile lui P.D. Panagiotopoulos [18, 19], respectiv Z. Naniewicz şi P.D. Panagiotopoulos [17]. În problema de mai sus (precum şi în monografiile enumerate), domeniul Ω este mărginit. F. Gazzola şi V. Rădulescu [7] au publicat prima lucrare privind studiul inegalităţilor hemivariaţionale pe domenii nemărginite. Alţi autori, care au continuat cercetările inegalităţilor hemivariaţionale, respectiv variaţional - hemivariaţionale, sunt, de exemplu, A. Kristály [8], [9], Zs. Dályai şi Cs. Varga [3], Cs. Varga [29].

Capitolul 1 al tezei conţine aplicaţii ale teoriei punctului critic pentru funcţionale netede definite pe spaţii Banach, mai exact se studiază metode de localizare a soluţiilor multiple ale unor ecuaţii cu operatori omogeni, respectiv neomogeni. Acest capitol se

bazează pe următoarele trei articole recente ale autoarei: [12, 13, 14]. Metodele utilizate sunt principiul varaţional al lui Ekeland, teoreme de minimax şi de tipul trecătorii montane (mountain pass), scufundări compacte, proprietăţi ale funcţiei de dualitate.

În Secţiunea 1.1 se reamintesc definiţii şi proprietăţi ale spaţiilor Banach şi ale aplicaţiilor de dualitate, ce sunt folosite pe parcursul acestei teze.

Continuând cercetările lui M. Schechter [25, 26] referitoare la punctele critice ale unei funcţionale netede situate pe o bilă dintr-un spaţiu Hilbert, R. Precup [20, 21, 22] a studiat teoreme de punct critic pentru funcţionale de tip C^1 pe mulţimi inelare conice şi pe bile închise într-un spaţiu Hilbert. Metodele folosite de acest autor sunt condiţii de compactitate de tip Palais-Smale şi condiţii de tip Leray-Schauder pe frontieră.

În Secţiunea 1.2 şi Secţiunea 1.3 se extind şi se completează rezultatele obţinute de R. Precup. Se demonstrează teoreme de tip Schechter pentru puncte critice pe mulţimi de nivel şi pe mulţimi inelare conice din spaţii Banach reflexive şi local uniform convexe. Rezultatele sunt aplicate în Secţiunea 1.2.2 pentru probleme în care intervin operatori p-Laplace pe domenii mărginite şi nemărginite. În Secţiunea 1.3.2 se studiază localizarea pe mulţimi inelare a soluţiilor nenegative ale unor probleme la limită cu operatori p-Laplace.

În Secţiunea 1.4 se demonstrează versiuni ale teoremei generale de tip minimax a lui M. Willem [28, Theorem 2.8] şi a trecătorii montane (mountain pass) a lui Ambrosetti - Rabinowitz [1] pe o bilă. Pentru a putea folosi proprietăţile funcţiei de dualitate se presupune că spaţiul Banach este reflexiv, neted şi local uniform convex. Rezultatele demonstrate sunt utilizate pentru a localiza pe o anumită bilă, a cărei rază se poate estima, două soluţii netriviale pentru probleme Dirichlet cu operatori neomogeni în contextul spaţiilor Orlicz-Sobolev. În felul acesta se extind rezultatele obţinute de G. Dincă şi P. Matei în [4]. În cazul particular al operatorului p-Laplace se demonstrează existenţa a două soluţii, localizate pe o anumită bilă. Astfel se completează ţezultatele de localizare ale lui R. Precup şi Cs. Varga [23], respectiv H. Lisei şi O. Vas [13].

În Capitolul 2 al acestei teze se tratează probleme cu inegalităţi hemivariaţionale şi variaţional - hemivariaţionale pe domenii nemărginite. Acest capitol se bazează pe trei articole ale autoarei: [5, 10, 11]. Metodele utilizate sunt cele specifice analizei nenetede: versiunea nenetedă a teoremei trecătorii montane (mountain pass), teoreme topologice de tip minimax, principiul simetriei critice, teoreme de punct fix de tip Knaster - Kuratowski - Mazurkiweicz, rezultate din teoria celei mai bune aproximări în spaţii Banach. Menţionăm că principiul simetriei critice pentru funcţionale local Lipschitz a fost studiat de A. Kristály [8], [9], Zs. Dályai şi Cs. Varga [3], Cs. Varga [29]

În prima secţiune din Capitolul 2 se prezintă noţiuni şi proprietăţi din teoria gradientului generalizat pentru funcţionale de tip local Lipschitz. În Secţiunea 2.2 se extinde un rezultat de multiplicitate al lui B. Ricceri [24] pentru funcţionale local Lipschitz şi

se utilizează un rezultat din teoria celei mai bune aproximări în spaţii Banach, dat de I.G. Tsar'kov [27], pentru a demonstra existenţa a cel puţin trei soluţii pentru o clasă de inegalităţi hemivariaţionale pe domenii nemărginite. Aplicaţii ale acestui rezultat sunt date în Secţiunile 2.2.2 şi 2.2.3. În Secţiunea 2.3 se demonstrează existenţa şi multiplicitatea soluţiilor unor probleme în care intervin inegalităţi variaţional - hemivariaţionale pe $\mathbb{R}^{L+M}$, folosind rezultate pentru funcţionale de tip Motreanu-Panagiotopoulos. În Secţiunea 2.4 se studiază existenţa unei soluţii netriviale pentru o inegalitate variaţional - hemivariaţională pe un domeniu nemărginit, fără a folosi teoria punctului critic. Se utilizează o teoremă de punct fix de tip Knaster - Kuratowski - Mazurkiewicz. Aplicaţii pentru inegalităţi variaţional - hemivariaţionale sunt indicate la sfârşitul acestei secţiuni.

În Capitolul 3 se prezintă posibile direcţii de cercetare şi câteva probleme deschise, care au apărut pe parcursul cercetărilor descrise în această teză de abilitare. Acestea vor putea fi valorificate în proiecte şi colaborări viitoare.

Bibliografie

[1] A. Ambrosetti, P. H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal. **14** (1973), 349-381.

[2] K.C. Chang, Variational methods for non–differentiable functionals and their applications to partial differential equations, *J. Math. Anal. Appl.* **80** (1981) 102–129.

[3] Zs. Dályai, Cs. Varga, An existence result for hemivariational inequalities, *Electron. J. Differential Equations* **37** (2004), 1–17.

[4] G. Dincă, P. Matei, Variational and topological methods for operator equations involving duality mappings on Orlicz-Sobolev spaces, *Electron. J. Differential Equations* **2007** (2007), 1–47.

[5] F. Faraci, A. Iannizzotto, **H. Lisei**, Cs. Varga, A multiplicity result for hemivariational inequalities, *Journal of Math. Anal. and Appl.* **330** (2007) 683–698.

[6] L. Gasiński, N.S. Papageorgiou, *Nonsmooth critical point theory and nonlinear boundary value problems*, Series in Mathematical Analysis and Applications, 8. Chapman & Hall/CRC, 2005.

[7] F. Gazzola, V. Rădulescu, A nonsmooth critical point theory approach to some nonlinear elliptic equations in $\mathbb{R}^n$, *Differential Integral Equations* **13** (2000), 47–60.

[8] A. Kristály, Infinitely many radial and non-radial solutions for a class of hemivariational inequalities, *Rocky Mountain J. Math.* **35** (2005), 1173–1190.

[9] A. Kristály, Multiplicity results for an eigenvalue problem for hemivariational inequalities in strip–like domains, *Set–Valued Anal.* **13** (2005), 85–103.

[10] **H. Lisei**, Cs. Varga, Some applications to variational-hemivariational inequalities of the principle of symmetric criticality for Motreanu-Panagiotopoulos type functionals, *J. Global Optim.* **36** (2006), 283–305.

[11] **H. Lisei**, A.E. Molnár, Cs. Varga, On a class of inequality problems with lack of compactness, *J. Math. Anal. Appl.* **378** (2011), 741–748.

[12] **H. Lisei**, R. Precup, Cs. Varga, A Schechter type critical point result in annular conical domains of a Banach space and applications, *Discrete Contin. Dyn. Syst. – Ser. A (DCDS-A)* **36** (2016), 3775–3789.

[13] **H. Lisei**, O. Vas, Critical point result of Schechter type in a Banach space, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.* No. **14** (2016), 1–16.

[14] **H. Lisei**, O. Vas, Localization methods for the solutions of nonhomogeneous operator equations. Trimis spre publicare, 2016.

[15] D. Motreanu, P. D. Panagiotopoulos, *Minimax Theorems and Qualitative Properties of the Solutions of Hemivariational Inequalities,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.

[16] D. Motreanu, V. Rădulescu, *Variational and non-variational methods in nonlinear analysis and boundary value problems. Nonconvex Optimization and its Applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003.

[17] Z. Naniewicz, P.D. Panagiotopoulos, *Mathematical Theory of Hemivariational Inequalities and Applications*, Marcel Dekker, New York, 1995.

[18] P.D. Panagiotopulos, *Inequality problems in mechanics and applications – Convex and nonconvex energy functionals*, Birkhäuser-Verlag, Basel, 1985.

[19] P.D. Panagiotopulos, *Hemivariational inequalities. Applications in Mechanics and Engineering*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New-York, 1993.

[20] R. Precup, A compression type mountain pass theorem in conical shells, *J. Math. Anal. Appl.* **338** (2008), 1116–1130.

[21] R. Precup, Critical point localization theorems via Ekeland's variational principle, *Dynam. Systems Appl.* **22** (2013), 355–370.

[22] R. Precup, On a bounded critical point theorem of Schechter, *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math.* **58** (2013), 87–95.

[23] R. Precup, Cs. Varga, Localization of positive critical points in ordered Banach spaces and applications. Va apărea în *Topol. Method Nonl. An.*

[24] B. Ricceri, A general multiplicity theorem for certain nonlinear equations in Hilbert spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* **133** (2005) 3255–3261.

[25] M. Schechter, A bounded mountain pass lemma without the (PS) condition and applications, *Trans. Amer. Math. Soc.* **331** (1992), 681–703.

[26] M. Schechter, *Linking Methods in Critical Point Theory*, Birkhäuser, Boston, 1999.

[27] I.G. Tsar'kov, Nonunique solvability of certain differential equations and their connection with geometric approximation theory, *Math. Notes* **75** (2004), 259–271.

[28] M. Willem, *Minimax Theorems*, Birkhäuser, Boston, 1996.

[29] Cs. Varga, Existence and infinitely many solutions for an abstract class of hemivariational inequalities, *J. Inequal. Appl.* **2** (2005) 89–105.