.

REZUMATUL TEZEI DE ABILITARE

APROXIMAREA, ORDONAREA ŞI APLICAŢII ALE NUMERELOR FUZZY

prezentată de către prof. univ. dr. IOAN BAN

DEPARTAMENTUL DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
UNIVERSITATEA DIN ORADEA

Aprilie 2016

Teza de abilitare are 3 capitole prezentate pe baza unor lucrări recente ale autorului sau în colaborare şi un capitol în care sunt descrise cateva direcţii de cercetare viitoare. Bibliografia cuprinde un număr de 290 de titluri, 42 dintre acestea fiind elaborate şi publicate de către autor, singur sau în colaborare.

Numerele fuzzy au adesea o formă prea complicată pentru a fi procesate, astfel că, uneori, se simte nevoia aproximării lor cu numere fuzzy particulare, mai simple. Pe de altă parte, ne-am dori ca această aproximare să nu fie brutală şi să conserve, dacă-i posibil, una sau mai multe caracteristici ale numărului fuzzy pe care îl aproximăm. În plus, se consideră că existenţa unor proprietăţi - identitatea, invarianţa la translaţii, invarianţa la înmulţirea cu scalari, aditivitatea, continuitatea, monotonia, compatibilitatea cu principiul de extensie al lui Zadeh, conservarea unor mulţimi de nivel sau a altor caracteristici ale numărului fuzzy - ale operatorului de aproximare obţinut, ridică calitatea aproximării şi o fac mai utilă în diverse aplicaţii.

Ca o consecinţă a celor prezentate mai sus, în primul capitol este considerată următoarea problemă cu caracter general: Fie $\mathbb{F} \subset F(\mathbb{R})$ o submulţime a mulţimii numerelor fuzzy $F(\mathbb{R})$ şi $\mathbb{D}$ o metrică pe $F(\mathbb{R})$. Notăm $p_k : F(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, k \in \{1, ..., n\}$ caracteristici numerice ataşate numerelor fuzzy. Pentru $A \in F(\mathbb{R})$, să se studieze existenţa, unicitatea şi eventual să se determine elementul $T_A \in \mathbb{F}_A^{p_1,...,p_n}$ astfel ca

$$\mathbb{D}(A, T_A) = \min_{T \in \mathbb{F}_A^{p_1,...,p_n}} \mathbb{D}(A, T), \tag{1}$$

unde

$$\mathbb{F}_A^{p_1,...,p_n} = \{T \in \mathbb{F} : p_k(T) = p_k(A), \forall k \in \{1, ..., n\}\}. \tag{2}$$

În lucrările publicate ale autorului şi implicit în teza de abilitare sunt considerate următoarele mulţimi: $\mathbb{F} = F^T(\mathbb{R})$ - mulţimea numerelor fuzzy trapezoidale, $\mathbb{F} = F^t(\mathbb{R})$ - mulţimea numerelor fuzzy triunghiulare, $\mathbb{F} = F^S(\mathbb{R})$ - mulţimea numerelor fuzzy trapezoidale simetrice, $\mathbb{F} = F^s(\mathbb{R})$ - mulţimea numerelor fuzzy triunghiulare simetrice, $\mathbb{F} = F_{L-R}(\mathbb{R})$ - mulţimea $L - R$ numerelor fuzzy, $\mathbb{F} = F_{L-R}^*(\mathbb{R})$ - mulţimea $L - R$ numerelor fuzzy unimodale, $\mathbb{F} = F_T^{s_L,s_R}(\mathbb{R})$ - mulţimea numerelor fuzzy (s_L, s_R) semi-trapezoidale şi $\mathbb{F} = F_t^{s_L,s_R}(\mathbb{R})$ - mulţimea numerelor fuzzy (s_L, s_R) semi-triunghiulare.

În paragrafele 1.1.1-1.1.3 şi 1.3.1-1.3.3 este considerată distanţa de tip euclidian între numere fuzzy, adică $\mathbb{D} = d$, unde

$$d(A, B) = \sqrt{\int_0^1 (A_L(\alpha) - B_L(\alpha))^2 d\alpha + \int_0^1 (A_U(\alpha) - B_U(\alpha))^2 d\alpha} \tag{3}$$

pentru două numere fuzzy A şi B. Problema (1)-(2) este abordată considerând $\mathbb{F} = F^T(\mathbb{R}), n = 2, p_1(A) = \int_0^1 A_L(\alpha) d\alpha$ şi $p_2(A) = \int_0^1 A_U(\alpha) d\alpha$ în paragraful 1.1.1, $\mathbb{F} = F^T(\mathbb{R}), n = 2, p_1(A) = Amb(A) = \int_0^1 (A_U(\alpha) - A_L(\alpha)) d\alpha$ şi $p_2(A) = Val(A) = \int_0^1 (A_U(\alpha) + A_L(\alpha)) d\alpha$ în paragraful 1.1.2, $\mathbb{F} = F^T(\mathbb{R})$ sau $\mathbb{F} = F^t(\mathbb{R}), n = 1, p_1(A) = Amb(A) = \int_0^1 (A_U(\alpha) - A_L(\alpha)) d\alpha$ în paragraful 1.1.3, prezentarea bazându-se pe articolele [**Ban**, Fuzzy Sets and Systems 159 (2008) 1327-1344], [**Ban et. al**, Computers and Mathematics with Applications 61 (2011) 1379-1401] şi [**Ban & Coroianu**, International Journal of Approximate Reasoning 53 (2012) 805-836]. Metodele utilizate pentru obţinerea soluţiilor sunt fie de tip geometric, fie sunt aplicaţii ale teoremei Karush-Kuhn-Tucker. Apoi, în 1.3.1-1.3.3, este considerată o singură caracteristică care trebuie sa fie conservată, adică $n = 1$, dar forma sa este mai generală, anume

$$p_1(A) = al_e(A) + bu_e(A) + cx_e(A) + dy_e(A), a, b, c, d \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

unde $[l_e(A), u_e(A), x_e(A), y_e(A)]$ este aproximarea trapezoidală extinsă a numărului fuzzy A. Menţionăm că toate caracteristicile principale ale unui număr fuzzy sunt de forma (4), astfel încât rezultatele obţinute în [**Ban & Coroianu**, Fuzzy Sets and Systems 257 (2014) 3-22] pentru cazul $\mathbb{F} = F^T(\mathbb{R})$, [**Ban & Coroianu**, International Journal of Approximate Reasoning 62 (2015) 1-26] pentru cazul $\mathbb{F} = F^t(\mathbb{R})$, [**Ban & Coroianu**, Soft Computing 20 (2016) 1249-1261] pentru cazul $\mathbb{F} = F^s(\mathbb{R})$ şi prezentate în paragrafele 1.3.1-1.3.3 capătă o importanţă sporită în acest topic.

În paragrafele 1.2.1 şi 1.2.2 este considerată o distanţă ponderată între numere fuzzy, adică $\mathbb{D} = d_\lambda$, unde

$$d_\lambda(A, B) = \sqrt{\int_0^1 \lambda_L(\alpha)(A_L(\alpha) - B_L(\alpha))^2 d\alpha + \int_0^1 \lambda_U(\alpha)(A_U(\alpha) - B_U(\alpha))^2 d\alpha}, \quad (5)$$

λ_L şi λ_U fiind funcţii nenegative astfel încat $0 < \int_0^1 \lambda_L(\alpha)\,d\alpha < \infty$ şi $0 < \int_0^1 \lambda_U(\alpha)\,d\alpha < \infty$. În 1.2.1 - prezentarea având la bază articolul publicat recent [**Ban, Coroianu & Khastan**, Fuzzy Sets and Systems 283 (2016) 56–82] - generalitatea rezultatelor obţinute este asigurată atât prin alegerea $\mathbb{F} = F_{L-R}(\mathbb{R})$ sau $\mathbb{F} = F^*_{L-R}(\mathbb{R})$ astfel încât rezultatele obţinute sunt valabile, de exemplu, pentru numere fuzzy trapezoidale sau triunghiulare, cât şi prin acceptarea oricăror caracteristici numerice de forma

$$p_k(A) = a_{k1}l_e(A) + a_{k2}u_e(A) + a_{k3}x_e(A) + a_{k4}y_e(A), a_{k1}, a_{k2}, a_{k3}, a_{k4} \in \mathbb{R},$$

unde $k \in \{1, ..., n\}$ şi $[l_e(A), u_e(A), x_e(A), y_e(A)]$ este aproximarea trapezoidală extinsă a numărului fuzzy A. Totuşi, există un pret al generalităţii rezultatelor, calculul efectiv nu poate fi prezentat în cazul general, chiar dacă metoda este sugerată în lucrarea deja menţionată. În schimb, în paragraful 1.2.2, care se bazează pe articolele [**Ban, Bica & Coroianu**, Communications in Computer and Information Science (Springer), vol. 299 (2012), pp. 29-38] şi [**Ban & Coroianu**, Communications in Computer and Information Science (Springer), vol. 299 (2012), pp. 49-58], calculul aproximării semi-trapezoidale sau semi-triunghiulare ponderate a unui număr fuzzy cu păstrarea ambiguităţii ponderate, adică $\mathbb{D} = d_\lambda, \mathbb{F} = F_T^{s_L,s_R}(\mathbb{R})$ sau $\mathbb{F} = F_t^{s_L,s_R}(\mathbb{R}), n = 1$ şi $p_1(A) = Amb_\lambda(A)$ în problema generală (1)-(2), unde

$$\begin{aligned} Amb_\lambda(A) = & \int_0^1 \lambda_U(\alpha)\left(1 - (1-\alpha)^{1/s_R}\right)A_U(\alpha)\,d\alpha \\ & - \int_0^1 \lambda_L(\alpha)\left(1 - (1-\alpha)^{1/s_L}\right)A_L(\alpha)\,d\alpha, \end{aligned}$$

poate fi făcut în totalitate.

Un număr fuzzy intuiţionist este o mulţime fuzzy intuiţionistă

$$A_{\langle\rangle} = \{\langle x, \mu_A(x), v_A(x)\rangle : x \in \mathbb{R}\}$$

astfel încât μ_A şi $1 - v_A$ sunt numere fuzzy. Distanţa de tip euclidian între numere fuzzy (vezi (3)) poate fi cu uşurintă extinsă la numere fuzzy intuiţioniste prin

$$\widetilde{d}^2(A_{\langle\rangle}, B_{\langle\rangle}) = \frac{1}{2}d^2(\mu_A, \mu_B) + \frac{1}{2}d^2(1 - \nu_A, 1 - \nu_B). \quad (6)$$

În aceste condiţii, aproximarea numerelor fuzzy intuiţioniste poate fi redusă la aproximarea unor numere fuzzy, în condiţii destul de puţin restrictive, astfel că, de exemplu, rezultatele din paragrafele 1.1.1-1.1.3 pot fi aplicate la calculul acestora. Rezultatele sunt cuprinse în ultimul paragraf al capitolului 1 şi se bazează pe rezultate din [**Ban**, Computational Intelligence, Theory and Applications (Springer), 2006, pp. 229-240], [**Ban**, Academic House (Warszaw), 2008, pp. 53-83], [**Ban**, Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets 14 (2008) 38-47], [**Ban & Coroianu**, Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets 15 (2009) 13-25] şi [**Ban & Coroianu**, Academic House (Warszaw), 2011, pp. 43-61].

Menţionăm că unele rezultate din capitolul 1 pot fi găsite şi în monografia [**Ban, Coroianu & Grzegorzewski**, Fuzzy Numbers: Approximations, Ranking and Applications, Polish Academy of Sciences, 2015].

Câteva dintre cercetările viitoare legate de aproximarea numerelor fuzzy sunt punctate în capitolul 4. Astfel, demonstrarea continuităţii Lipschitz a unor clase generale de operatori de aproximare sau determinarea celor mai bune constante Lipschitz pentru aceşti operatori vor fi avute în vedere. Apoi, abordări de tipul celor din secţiunea 1.3, dar considerând mai mulţi parametrii în forma generală, care sa fie conservaţi simultan, constituie o temă de cercetare foarte interesantă. Aproximarea numerelor fuzzy intuiţioniste prin numere fuzzy particulare a fost abordată cu succes în secţiunea 1.4 şi în lucrările mentionate acolo. Dar există alte tipuri de numere (graduale, cu valori interval etc) a căror aproximare prin numere fuzzy particulare nu a fost tratată încă. Studiul proprietăţilor operatorilor de aproximare a numerelor fuzzy şi aplicaţii ale acestora (de exemplu la calculul cu numere fuzzy bazat pe principiul de extensie al lui Zadeh) este o altă temă care poate genera rezultate foarte interesante.

Ordonarea numerelor fuzzy este unul dintre cele mai importante subiecte ale analizei fuzzy deoarece o alegere bună a ordonării este decisivă în aplicaţii legate de teoria deciziei, optimizare, inteligenţă artificială, analiza sistemelor socio-economice etc. Pe de altă parte, tema ordonării numerelor fuzzy este intens dezbătută pentru că nu există încă o metodă unanim acceptată de către toţi utilizatorii. Iată de ce, în articolele [**Ban & Coroianu**, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 23 (2015) 327-339], [**Ban & Coroianu**, Communication in Computer and Information Science (Springer), vol. 443 (2014), pp. 254-263] şi [**Ban & Coroianu**, World Conference on Soft Computing (2015), pp. 1-6] am încercat să punem puţină ordine în acest domeniu. Principalele rezultate obţinute sunt prezentate în capitolul 2 al tezei de abilitare.

Lista de condiţii rezonabile pe care ar trebui să le verifice orice ordonare a numerelor fuzzy din $\mathcal{S} \subseteq F(\mathbb{R})$, propusă în [Wang & Kerre, Fuzzy Sets and Systems 118 (2001) 375-385], este în general agreeată de cercetătorii din domeniu:

$\mathbb{A}_1$) $A \succeq A$ pentru orice $A \in \mathcal{S}$.
$\mathbb{A}_2$) Oricare ar fi $(A, B) \in \mathcal{S}^2$, dacă $A \succeq B$ si $B \succeq A$ atunci $A \sim B$.
$\mathbb{A}_3$) Oricare ar fi $(A, B, C) \in \mathcal{S}^3$, dacă $A \succeq B$ si $B \succeq C$ atunci $A \succeq C$.
$\mathbb{A}_4$) Oricare ar fi $(A, B) \in \mathcal{S}^2$, dacă $\inf \operatorname{supp}(A) \geq \sup \operatorname{supp}(B)$ atunci $A \succeq B$.
$\mathbb{A}'_4$) Oricare ar fi $(A, B) \in \mathcal{S}^2$, dacă $\inf \operatorname{supp}(A) > \sup \operatorname{supp}(B)$ atunci $A \succ B$.
$\mathbb{A}_5$) Fie $A, B, A + C$ si $B + C$ elemente ale lui $\mathcal{S}$. Dacă $A \succeq B$, atunci $A + C \succeq B + C$.
$\mathbb{A}'_5$) Fie $A, B, A + C$ si $B + C$ elemente ale lui $\mathcal{S}$. Dacă $A \succ B$, atunci $A + C \succ B + C$.
$\mathbb{A}_6$) Oricare ar fi $(A, B) \in \mathcal{S}^2$ şi $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel incat $\lambda \cdot A, \lambda \cdot B \in \mathcal{S}$, dacă $A \succeq B$ atunci $\lambda \cdot A \succeq \lambda \cdot B$ pentru $\lambda \geq 0$ şi $\lambda \cdot A \preceq \lambda \cdot B$ pentru $\lambda \leq 0$.

Cel mai adesea, o ordine pe o mulţime de numere fuzzy este dată printr-un indice de ordonare, adică o funcţie $P : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$. Un indice de ordonare P induce a relaţie binară $\succeq_P$, unde $A \succeq_P B$ dacă şi numai dacă $P(A) \geq P(B)$. Aceasta implică următoarele definiţii:

$$\begin{array}{lll} A \preceq_P B & \text{dacă şi numai dacă} & P(A) \leq P(B), \\ A \succ_P B & \text{dacă şi numai dacă} & P(A) > P(B), \\ A \prec_P B & \text{dacă şi numai dacă} & P(A) < P(B), \\ A \sim_P B & \text{dacă şi numai dacă} & P(A) = P(B). \end{array}$$

Două ordonări de numere fuzzy $\succeq^1$ şi $\succeq^2$ pe $\mathcal{S} \subseteq F(\mathbb{R})$ se numesc echivalente dacă, pentru orice $A, B \in \mathcal{S}$, $A \succeq^1 B$ implică $A \succeq^2 B$ şi $A \not\succeq^1 B$ implică $A \not\succeq^2 B$.

O categorie particulară de indici de ordonare sunt defuzificatorii. Ei satisfac condiţia:

$\mathbb{A}_4''$) $P(A) \in \text{supp}(A)$ pentru orice $A \in \mathcal{S}$.

O observaţie de mare importanţă în demonstrarea rezultatelor principale ale autorului este aceea că dacă $P : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ este un indice de ordonare pe $\mathcal{S}$ astfel încât $\succeq_P$ satisface $\mathbb{A}_4'$ atunci există un indice de ordonare $R : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ care satisface $\mathbb{A}_4''$ şi $\succeq_R$ este echivalentă cu $\succeq_P$.

Introducem următoarele notaţii:

$$M(\mathcal{S}) = \left\{P : \mathcal{S} \to \mathbb{R} | \succeq_P \ \text{ verifică } \mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3, \mathbb{A}_4, \mathbb{A}_4', \mathbb{A}_5, \mathbb{A}_5', \mathbb{A}_6\right\}$$

şi

$$M_*(\mathcal{S}) = \left\{P : \mathcal{S} \to \mathbb{R} | P \text{ verifică } \mathbb{A}_4'' \text{ şi } \succeq_P \ \text{ verifică } \mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3, \mathbb{A}_5, \mathbb{A}_5', \mathbb{A}_6\right\}.$$

Următoarele caracterizări ale elementelor mulţimilor $M(\mathcal{S})$ şi $M_*(\mathcal{S})$ au fost obţinute în [**Ban & Coroianu**, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 23 (2015) 327-339] şi prezentate în secţiunea 2.1.2.:

Fie $S \subseteq F(\mathbb{R})$ astfel încât $S + S \subseteq S$ şi $\lambda \cdot S \subseteq S$ pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$ şi un indice de ordonare $P : S \to \mathbb{R}$. Atunci:
(i) $P \in M_*(S)$ dacă şi numai dacă P verifică A_4'' pe S şi P este liniar pe S.
(ii) $P \in M(S)$ dacă şi numai dacă există $R \in M_*(S)$ astfel încât $\succeq_P$ şi $\succeq_R$ sunt echivalente pe S.

În cazul numerelor fuzzy triunghiulare şi al celor trapezoidale, caracterizarea indicilor de ordonare "buni" poate fi făcută aproape complet, rezultatele fiind publicate în [**Ban & Coroianu**, Communication in Computer and Information Science (Springer), vol. 443 (2014), pp. 254-263] şi respectiv [**Ban & Coroianu**, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 23 (2015) 327-339] şi prezentate în secţiunile 2.2 şi 2.3:

(i) $R \in M_*(F^t(\mathbb{R}))$ dacă şi numai dacă există $c \in [0,1]$ astfel încât $R(\Delta) = x_0 - c\sigma + c\beta$ pentru orice $\Delta = [x_0, \sigma, \beta] \in F^t(\mathbb{R})$.
(ii) $R \in M_*(F^T(\mathbb{R}))$ dacă şi numai dacă există $c \in [-1, 0]$ astfel încât $R(T) = \frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}y_0 + c\sigma - c\beta$ pentru orice $T = [x_0, y_0, \sigma, \beta] \in F^T(\mathbb{R})$.

Destul de interesant, pentru că $L - R$ numerele fuzzy depind (ca şi numerele fuzzy trapezoidale) de patru parametrii, obţinem o caracterizare identică cu cea din cazul trapezoidal în cazul $L = R$ (vezi paragraful 2.4 al tezei de abilitare sau [**Ban & Coroianu**, World Conference on Soft Computing (2015), pp. 1-6]).

Ţinând cont de caracterizarea indicilor de ordonare adecvaţi pe mulţimea numerelor fuzzy trapezoidale putem da o metodă de obţinere a indicilor de ordonare pe mulţimea numerelor fuzzy în felul următor ([**Ban & Coroianu**, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 23 (2015) 327-339] sau secţiunea 2.5):

Fie $\mathcal{T} : F(\mathbb{R}) \to F^T(\mathbb{R})$ şi $R \in M_*(F^T(\mathbb{R}))$. Daca $\mathcal{T}$ este liniar şi supp $(\mathcal{T}(A)) \subseteq$ supp (A) pentru orice $A \in F(\mathbb{R})$ atunci $\overline{R} : F(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definit prin $\overline{R}(A) = R(\mathcal{T}(A))$ este liniar şi $\overline{R} \in M_*(F(\mathbb{R}))$.

În anumite condiţii, destul de puţin restrictive şi uşor de verificat, putem stabili forma indicilor de ordonare care au proprietăţi corespunzătoare celor acceptate.

Fie $\overline{R} \in M_*(F(\mathbb{R}))$ astfel încât pentru orice numere fuzzy A şi B cu acelaşi suport şi nucleu avem $A \sim_{\overline{R}} B$. Atunci există $c \in [-1, 0]$ astfel încât

$$\overline{R}(A) = (\frac{1}{2} + c)(A_L(1) + A_U(1)) - c(A_L(0) + A_U(0)).$$

Rezultatele din capitolul 2 pot fi găsite şi în monografia [**Ban, Coroianu & Grzegorzewski**, Fuzzy Numbers: Approximations, Ranking and Applications, Polish Academy of Sciences, 2015].

Câteva dintre cercetările viitoare legate de ordonarea numerelor fuzzy sunt punctate în capitolul 4. Astfel, în continuarea rezultatelor prezentate în capitolul 2 ar fi interesant de caracterizat indicii de ordonare care satisfac toate condiţiile naturale, cu excepţia compatibilităţii cu înmulţirea cu scalari, sau caracterizări ale indicilor de ordonare pe alte submulţimi remarcabile de numere fuzzy decât cele considerate deja. Apoi, aşa cum am constatat, indicii de ordonare care satisfac toate condiţiile impuse, depind de un parametru. O problema deschisă este să găsim o condiţie naturală care să ducă la determinarea acestui parametru.

Este deja unanim acceptat că mulţimile fuzzy, în particular numerele fuzzy, au aplicaţii multiple, oriunde există situaţii de incertitudine. Autorul tezei de abilitare are preocupări legate de agregarea numerelor fuzzy, metode de teoria deciziei, calculul importanţei fuzzy a atributelor pornind de la coeficientul de corelaţie şi analiza importanţă-performanţă prin instrumente ale teoriei clasificării. Rezultatele obţinute sunt prezentate pe scurt în capitolul 3 al tezei de abilitare.

Problema agregării datelor este foarte importantă în toate activităţile care presupun procesarea datelor pentru a obţine o concluzie în vederea luării unei decizii. Evident că este de dorit ca rezultatul agregării să fie cât mai reprezentativ pentru setul de date considerat şi, dacă-i posibil, să fie uşor de determinat.

Fie $A_1, ..., A_n$ o mulţime de numere fuzzy. Notăm cu $T_{A_1,...,A_n}$ numărul fuzzy trapezoidal cel mai apropiat de toate numerele fuzzy $A_1, ..., A_n$, cu $\overline{A}$ media aritmetică a numerelor fuzzy $A_1, ..., A_n$ şi cu $T\left(\overline{A}\right)$ numărul fuzzy trapezoidal cel mai apropiat de numărul fuzzy $\overline{A}$, distanţa considerată fiind cea de tip euclidian între numere fuzzy (3). În [**Ban, Coroianu, Grzegorzewski**, Fuzzy Sets and Systems 177 (2011) 45-59], prezentată în secţiunea 3.1, s-a obţinut că $T_{A_1,...,A_n} = T\left(\overline{A}\right)$, adică nu are importanţă dacă aproximarea trapezoidală a datelor se face înainte sau după agregarea acestora. În plus, s-a demonstrat că concluzia este aceeaşi chiar dacă este considerată aproximarea trapezoidală care conservă intervalul de expectanţă.

O problemă standard de teoria multicriterială a deciziei presupune evaluarea şi ordonarea unor alternative, în raport cu anumite criterii, de către un comitet de decidenţi. Adesea metodele standard de rezolvare a problemelor de decizie multicriteriala nu pot fi aplicate datorită informaţiei incomplete sau incerte. Astfel, evaluările decidenţilor şi/sau ponderile decidenţilor sau/şi criteriilor pot fi exprimate prin numere fuzzy, iar metodele clasice de decizie trebuie sa fie adaptate. În lucrarea [**Ban & Ban**, Expert Systems with

Applications 39 (2012) 7216-7225], prezentată în secţiunea 3.2, se porneşte de la ideea din [**Chu & Lin**, Computers and Mathematics with Applications 57 (2009) 445-454], metoda descrisă acolo se optimizează, dar se şi generalizează apoi la cazul în care datele de intrare sunt numere fuzzy mai complicate. Pentru ordonarea alternativelor este folosită valoarea de expectanţă, dovedită deja în [**Ban & Coroianu**, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 23 (2015) 327-339] ca fiind un indice adecvat pentru ordonarea numerelor fuzzy.

Datorită specificului gândirii şi percepţiei umane, numerele fuzzy sunt considerate ca fiind mai potrivite decât numerele reale pentru a reprezenta opiniile clienţilor legate de performanţa şi importanţa atributelor serviciilor primite. În articolele [**Ban, Ban & Tuşe**, Journal of Intelligent and Fuzzy Systems 30 (2016) 583-596] şi [**Ban, Ban & Tuşe**, Derived fuzzy importance of attributes based on the weakest triangular norm-based fuzzy arithmetic and applications to the hotel services, trimisă spre publicare], prezentate pe scurt în secţiunea 3.3. a tezei de abilitare, este elaborată o metodă de calcul indirect a importanţei fuzzy a atributelor pe baza coeficientului de corelaţie dintre performanţa atributelor şi nivelul de satisfacţie global al beneficiarilor unui anumit serviciu. Mai exact, în ipoteza că atributele considerate sunt $\{C_1, ..., C_n\}$, iar clienţii $\{D_1, ..., D_m\}$, notând cu $\widetilde{X_{ij}}$ numărul fuzzy care reprezintă performanţa atributului C_j în opinia clientului D_i şi cu $\widetilde{X_i}$ numărul fuzzy care exprimă satisfacţia globală a clientului D_i în raport cu serviciul de care a beneficiat, putem defini importanţa atributului C_j prin

$$\widetilde{w_j} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \left(\widetilde{X_{ij}} - \widetilde{X_j^M}\right) \cdot \left(\widetilde{X_i} - \widetilde{X^M}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(\widetilde{X_{ij}} - \widetilde{X_j^M}\right)^2 \cdot \sum_{i=1}^{m} \left(\widetilde{X_i} - \widetilde{X^M}\right)^2}}, \tag{7}$$

unde,

$$\widetilde{X_j^M} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^{m} \widetilde{X_{ij}}, \tag{8}$$

$$\widetilde{X^M} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^{m} \widetilde{X_i}. \tag{9}$$

Chiar dacă la nivel formal această abordare este simplă, calculul efectiv al numărului fuzzy $\widetilde{w_j}$ ridică dificultăţi majore. Astfel, dacă operaţiile considerate în (7)-(9) sunt cele impuse de principiul standard de extensie al lui Zadeh, atunci determinarea valorilor $(\widetilde{w_j})_L(\alpha)$ şi $(\widetilde{w_j})_U(\alpha)$ conduce la rezolvarea unor probleme de extrem cu restricţii. Pentru că acest demers trebuie facut pentru fiecare $\alpha \in [0, 1]$, o soluţie analitică este foarte dificil de dat, astfel că în [**Ban, Ban & Tuşe**, Journal of Intelligent and Fuzzy Systems 30 (2016) 583-596] a fost propusă o metodă aproximativă de calcul. Din păcate, chiar şi această alternativă poate conduce la dificultăţi de calcul, mai ales in cazul unor volume mari ale datelor de intrare, corespunzătoare unui număr mare de atribute şi/sau clienţi.

Pentru a depăşi dificultăţile legate de calculul din (7)-(9), în lucrarea [**Ban, Ban & Tuşe**, Derived fuzzy importance of attributes based on the weakest triangular norm-based fuzzy arithmetic and applications to the hotel services, trimisă spre publicare] este propusă folosirea operaţiilor între numere fuzzy generate de norma triunghiulară T_W, unde

$$T_W(x, y) = \begin{cases} x, & \text{dacă } y = 1 \\ y, & \text{dacă } x = 1 \\ 0, & \text{în caz contrar.} \end{cases} \tag{10}$$

Pe această cale, operaţiile între numerele fuzzy sunt simplificate semnificativ, iar valorile importanţei atributelor date prin (7)-(9) pot fi determinate exact. Ambele metode de calcul descrise mai sus au fost folosite la prelucrarea datelor obţinute aplicând un chestionar la hotelurile de 4 stele din Oradea, iar în [**Ban, Ban & Tuşe**, Derived fuzzy importance of attributes based on the weakest triangular norm-based fuzzy arithmetic and applications to the hotel services, trimisă spre publicare] rezultatele primite au fost comparate între ele şi, fiecare dintre ele, cu cele obţinute prin calculul direct al importanţei atributelor.

Analiza Importanţă-Performanţă este o tehnică binecunoscută folosită în elaborarea strategiilor de marketing în industria serviciilor, mai ales în turism şi industria ospitalităţii. Autorul a abordat acest subiect în lucrările [**Ban, Ban & Tuşe**, Expert Systems with Applications 50 (2016) 9-16] şi [**Ban, Ban & Tuşe**, Optimization of Importance-Performance Analysis by Fuzzy C-Means Algorithm, în lucru] care sunt prezentate pe scurt în secţiunea 3.4 a tezei de abilitare.

În varianta sa tradiţională, Analiza Importanţă-Performanţă presupune distribuţia unei mulţimi de atribute în patru mulţimi "Keep up the good work", "Concentrate here", "Low priority" şi "Possible overkill", corespunzând celor patru posibilităţi "ridicat-ridicat", "scăzut-ridicat", "scăzut-scăzut" şi "ridicat-scăzut" ale perechii (performanţă, importanţă). Ţinând cont că aceste clase sunt mai degrabă fuzzy decât crisp, în [**Ban, Ban & Tuşe**, Expert Systems with Applications 50 (2016) 9-16] a fost lansată ideea utilizării teoriei clasificării fuzzy pentru a le determina. Pe lângă faptul că algoritmii de clasificare fuzzy reuşesc în mod natural să identifice structura existentă în datele disponibile, mai obţinem şi alte avantaje: gradul de apartenenţă al unui atribut la una din mulţimile mentionate mai sus ne indică cat de mult atributul aparţine clasei respective, evitându-se situaţia când două atribute avand perechile (performanţă, importanţă) foarte apropiate aparţin la mulţimi diferite; deciziile manageriale devin mai fine datorită abordării fuzzy, iar interpretarea rezultatelor mai elastică; priorităţile de dezvoltare şi direcţiile în care eforturile ar fi nefolositoare sau chiar periculoase sunt identificate pe o bază riguroasă etc. Algoritmul folosit în [**Ban, Ban & Tuşe**, Expert Systems with Applications 50 (2016) 9-16] este o adaptare a algoritmului C-medii fuzzy (vezi [**Bezdek**, Pattern Recognition with Fuzzy Objective. Functions Algorithms, Plenum Press (1981)] sau [**Dumitrescu, Lazzerini & Jain**, Fuzzy Sets and Their Application to Clustering and Training, CRC Press (2000)]) şi poate fi descris astfel:

Fie $\{a^1, ..., a^n\}$ *o mulţime de atribute. Fie* $x^j = (p^j, w^j)$ *perechea care reprezintă performanţa şi importanţa atributului* $a^j, j \in \{1, ..., n\}$

Pasul 1: Fie $l = 0$;
Fie $x^j = (p^j, w^j) \in \mathbb{R}^2, j \in \{1, ..., n\}$.
Pentru $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ *si* $j \in \{1, ..., n\}$ *punem* $q_{ij}^{-1} = 0$.

Pasul 2: Calculează

$$(L^1)_0 = \left((L_1^1)_0, (L_2^1)_0\right) = \left(\max_{1\le j\le n} p^j, \max_{1\le j\le n} w^j\right), \tag{11}$$

$$(L^2)_0 = \left((L_1^2)_0, (L_2^2)_0\right) = \left(\min_{1\le j\le n} p^j, \max_{1\le j\le n} w^j\right), \tag{12}$$

$$(L^3)_0 = \left((L_1^3)_0, (L_2^3)_0\right) = \left(\min_{1\le j\le n} p^j, \min_{1\le j\le n} w^j\right), \tag{13}$$

$$(L^4)_0 = \left((L_1^4)_0, (L_2^4)_0\right) = \left(\max_{1\le j\le n} p^j, \min_{1\le j\le n} w^j\right). \tag{14}$$

Pasul 3: Pentru $i \in \{1,2,3,4\}$ *si* $j \in \{1,...,n\}$ *calculează*

$$(d_{ij})_l = d^2\left(x^j, (L^i)_l\right) = \left(p^j - (L_1^i)_l\right)^2 + \left(w^j - (L_2^i)_l\right)^2.$$

Pasul 4: Pentru $j \in \{1,...,n\}$ *calculează*

Dacă $(d_{1j})_l = 0$ *sau* $(d_{2j})_l = 0$ *sau* $(d_{3j})_l = 0$ *sau* $(d_{4j})_l = 0$ *atunci* $q_{ij}^l = 1$ *pentru un* $i \in \{1,2,3,4\}$ *satisfăcând* $(d_{ij})_l = 0$ *şi* $q_{kj}^l = 0$ *pentru* $k \in \{1,2,3,4\}$, $k \neq i$.

Altfel,

$$q_{ij}^l = \frac{1}{\frac{(d_{ij})_l}{(d_{1j})_l} + \frac{(d_{ij})_l}{(d_{2j})_l} + \frac{(d_{ij})_l}{(d_{3j})_l} + \frac{(d_{ij})_l}{(d_{4j})_l}}, \text{ pentru } i \in \{1,2,3,4\}.$$

Pasul 5: Dacă $\left|q_{ij}^l - q_{ij}^{l-1}\right| < 10^{-5}$ *pentru orice* $i \in \{1,2,3,4\}$ *şi* $j \in \{1,...,n\}$ *atunci* $P = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, *unde* $A_i\left(x^j\right) = q_{ij}^l := q_{ij}$, *şi STOP. Altfel, pune* $l := l+1$.

Pasul 6: Pentru $i \in \{1,2,3,4\}$ *calculează*

$$(L^i)_l = \left((L_1^i)_l, (L_2^i)_l\right) = \left(\frac{\sum_{j=1}^n \left(q_{ij}^{l-1}\right)^2 p^j}{\sum_{j=1}^n \left(q_{ij}^{l-1}\right)^2}, \frac{\sum_{j=1}^n \left(q_{ij}^{l-1}\right)^2 w^j}{\sum_{j=1}^n \left(q_{ij}^{l-1}\right)^2}\right)$$

ş*i mergi la Pasul 3.*

Se obţin astfel atomii A_1, A_2, A_3, A_4 corespunzând mulţimilor de atribute "*Keep up the good work*", "*Concentrate here*", "*Low priority*" şi respectiv "*Possible overkill*".

Chiar dacă în varianta tradiţională a Analizei Importanţă-Performanţă sunt folosite două axe perpendiculare pentru a împărţi planul (performanţă, importanţă) în patru cadrane corespunzătoare celor patru mulţimi de atribute descrise mai sus, în literatură există şi alte versiuni ale metodei, care propun împărţirea aceluiaşi plan în 3, 4 sau chiar 9 cadrane. În lucrarea [**Ban, Ban & Tuşe**, Optimization of Importance- Performance Analysis by Fuzzy C-Means Algorithm, în lucru] am adaptat acelaşi algoritm C-medii fuzzy pentru a putea obţine partiţiile fuzzy corespunzătoare acestor abordări. În plus, pentru că în literatură nu există un criteriu obiectiv de alegere a numărului de cadrane şi a modului în care acestea sunt obţinute, evaluarea partiţiilor fuzzy obţinute pentru a stabili care este cea mai buna alegere devine importantă.

Analiza Importanţă-Performanţă prin intermediul algoritmilor de clasificare fuzzy este de-abia la început ([**Ban, Ban & Tuşe**, Expert Systems with Applications 50 (2016) 9-16]), astfel încât în afara celor precizate mai sus există multe alte posibilităţi de continuare, unele detaliate in secţiunea 4.3. De exemplu, pornind de la un set de date iniţiale am putea elabora o metodă de determinare a numărului optim de clusteri în care poate fi împarţită mulţimea de atribute. Aceasta ar avea consecinţe şi asupra altor probleme intens dezbătute în literatură, cum ar fi cea a numărului de atribute care trebuie considerat când analizăm calitatea unui serviciu.

Direcţiile de cercetare noi corespunzătoare temelor abordate în capitolele 1-3 au fost precizate deja. În secţiunea 4.4 a capitolului 4 precizăm şi alte câteva direcţii de cercetare ale autorului. Astfel, ţinând cont de multitudinea de integrale fuzzy introduse, problema descompunerii acestora în sensul din [**Ban & Fechete**, Information Sciences 177 (2007) 1430-1440] şi [**Ban & Fechete**, Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets 13 (2007) 1-7] pare a furniza rezultate interesante fără eforturi prea mari. Ulterior, rezultatele obţinute pot fi folosite pentru a demonstra inegalităţi integrale (Chebyshev, Jensen, Minkowski, Godunova, Hölder etc) folosind modelul deja experimentat în [**Ban**, Cybernetics and Information Technologies 9 (2009) 5-13] şi [**Ban**, Developments in Fuzzy Sets, Intuitionistic Fuzzy

Sets, Generalized Nets and Related Topics, Polish Academy of Sciences, Warszaw, 2010, pp. 43-51]. Un alt subiect priveşte continuitatea funcţiilor cu valori numere fuzzy. Astfel, în [**Ban & Coroianu**, Computers and Mathematics with Applications 62 (2011) 3103-3110] s-a demonstrat că orice operator cu valori numere fuzzy trapezoidale care păstrează mulţimile de nivel 1 este discontinuu relativ la orice metrică ponderată de tip euclidian. Studiul poate fi continuat trecând la mulţimi de nivel $\alpha, \alpha \in [0, 1)$ şi la alte mulţimi remarcabile de numere fuzzy.