

HABILITATION THESIS

**Special Types of Fuzzy Spaces and  
Fuzzy Relations**

Sorin Nădăban

Specialization: Mathematics

2016

## Rezumat

Scopul acestei teze este să pună în evidență principalele rezultate științifice ale autorului, obținute în ultimii ani și publicate în mai multe reviste internaționale de mare impact, precum și planul de evoluție și de dezvoltare a carierei științifice și profesionale.

Ținând cont de scopul propus aceasta teză este structurată în două părți. Prima parte, care prezintă rezultatele științifice, este, la rândul ei, organizată în patru capitole. În primul capitol am prezentat aparatul de termeni și concepte, precum și rezultatele preliminare obținute în domeniu, pe care le utilizez în capitolele următoare, pentru a asigura astfel articularea internă a tezei.

După ce L.A. Zadeh a introdus în cunoscuta sa lucrare [106] conceptul de mulțime fuzzy, mulți matematicieni au încercat să extindă în context fuzzy o mare parte dintre rezultatele matematice clasice. O problemă prioritară a fost obținerea unei definiții adecvate de spațiu metric fuzzy. Menționez că noțiunea de spațiu metric fuzzy a fost introdusă de I. Kramosil și J. Michálek [53] în 1975. Conceptul introdus de aceștia este echivalent, într-un anumit sens, cu cel de spațiu metric statistic. Amintesc faptul că spațiile metrice statistice au fost studiate cu mulți ani înainte, iar un survey asupra lor a fost realizat de B. Schweizer și A. Sklar în lucrarea [91]. În 1994, A. George și P. Veeramani [35] au modificat definiția lui I. Kramosil și J. Michálek în intenția de a obține o topologie Hausdorff pe un spațiu metric fuzzy. În ultima perioadă, diferite tipuri de spații metrice fuzzy generalizate au fost considerate de către diferiți autori, sub diferite abordări. Astfel, V. Gregori și S. Romaguera [40] au introdus noțiunile de spațiu cvasi-metric fuzzy și spațiu cvasi-pseudo-metric fuzzy. Noi concepte de spații metrice fuzzy generalizate au fost introduse de A.D. Ray și P.K. Saha [81], G. Sun și K. Yang [98], T. Bag [5], R. Plebaniak [79], B.C. Tripathy et al. [102]. Rezultatele pe care le-am obținut în acest context, publicate în revistele *Informatica(2016)* și *International Journal of Computers Communications & Control(2016)* (vezi [75], [76]), constituie obiectul capitolului 2 "Tipuri speciale de spații metrice fuzzy".

În prima secțiune, se obțin proprietăți ale spațiilor cvasi-pseudo-metrice fuzzy. Un rezultat important al cercetării mele este acela că orice relație de ordine parțială poate fi definită printr-o cvasi-metrică fuzzy, în timp ce o relație de echivalență poate fi modelată printr-o pseudo-metrică fuzzy. De asemenea, sunt formulate teoreme de descompunere a unei cvasi-pseudo-metrici fuzzy într-o familie crescătoare și continuă la dreapta de cvasi-pseudo-metrici. Subliniez și câteva exemple importante de cvasi-pseudo-metrici fuzzy. Astfel, am arătat că orice cvasi-(pseudo-)metrică induce într-un mod natural o

cvasi-(pseudo-)metrică fuzzy. De asemenea, am dat un exemplu de spațiu cvasi-metric fuzzy care nu este un spațiu metric fuzzy. Alt exemplu arată că există un spațiu cvasi-pseudo-metric fuzzy care nu este un spațiu cvasi-metric fuzzy și nici un spațiu pseudo-metric fuzzy. În final, am dat un exemplu de spațiu pseudo-metric fuzzy care nu este un spațiu metric fuzzy.

În secțiunea a doua, am introdus și studiat conceptul de spațiu b-metric fuzzy, generalizând, în acest fel, atât noțiunea de spațiu metric fuzzy introdusă de I. Kramosil și J. Michálek, cât și conceptul de spațiu b-metric. Pe de altă parte, am introdus conceptul de spațiu cvasi-b-metric fuzzy, extinzând noțiunea de spațiu cvasi-metric fuzzy recent introdusă de V. Gregori și S. Romaguera. În final, am obținut o teoremă de descompunere a unei cvasi-pseudo-b-metrici fuzzy într-o familie crescătoare de cvasi-pseudo-b-metrici.

Noțiunea de normă fuzzy a fost introdusă pentru prima dată de A.K. Katsaras [48] în 1984. În 1992, C. Felbin [32] introduce un alt concept de normă fuzzy, care asociază fiecărui element al unui spațiu liniar un număr real fuzzy. Urmând ideile lui S.C. Cheng și J.N. Mordeson [22], în 2003, T. Bag și S.K. Samanta [7] introduc un nou concept de normă fuzzy, care se dovedește a fi cea mai potrivită și mai ușor de aplicat în diverse și diferite dezvoltări. Dar, conform lui T. Bag și S.K. Samanta, o normă fuzzy este o mulțime fuzzy ce satisface cinci axiome. În scopul de a obține mai multe rezultate, T. Bag și S.K. Samanta au impus alte două axiome. Privite în ansamblul lor, cele șapte axiome sunt foarte exigente și restrâng foarte mult familia spațiilor liniare normate fuzzy. Din acest motiv, putem spune că o definiție clară privind conceptul de normă fuzzy nu a fost încă dată, mulți autori încercând să simplifice și să îmbunătățească definiția lui T. Bag și S.K. Samanta (vezi [86], [60], [37], [1], [49]). Capitolul al 3-lea al prezentei teze, "Spații liniare normate fuzzy", are la bază rezultatele pe care le-am obținut în acest context și care au fost publicate în reviste importante precum Fuzzy Sets and Systems(2016), Informatica(2014), International Journal of Computers Communications & Control(2015) (see [70, 72, 73, 74]).

Continuând ideile lui T. Bag și S.K. Samanta, în prima secțiune a capitolului 3, am obținut teoreme de descompunere a unei norme fuzzy într-o familie de semi-norme, în condiții mult mai generale. Rezultatele sunt atât pentru norme fuzzy de tip Bag-Samanta, cât și pentru norme fuzzy de tip Katsaras. Ca o consecință, obținem topologii local convexe induse de aceste tipuri de norme. În final, introduc conceptul de descompunere atomică a unui spațiu liniar normat fuzzy, care are un rol important în dezvoltarea unei teorii wavelet fuzzy.

Scopul secțiunii a doua este să introduc anumite norme fuzzy speciale pe  $\mathbb{K}^n$  și să obțin, în acest fel, spații normate euclidiene fuzzy. Mai întâi, demonstrez că produsul cartezian al unei familii finite de spații liniare nor-

mate fuzzy este un spațiu liniar normat fuzzy. Astfel, orice normă fuzzy pe  $\mathbb{K}$  generează o normă fuzzy pe  $\mathbb{K}^n$ . În final, arăt că orice spațiu normat euclidian fuzzy este complet.

În secțiunea a 3-a, introduc noțiunea de aplicație uniform continuă fuzzy și demonstrez teorema de continuitate uniformă în context fuzzy. În plus, este introdus conceptul de aplicație lipschitziană fuzzy și este obținută o versiune fuzzy a principiului contracției a lui Banach. În final, acord o atenție specială diferitelor caracterizări ale operatorilor liniari continui fuzzy, iar principiile clasice ale analizei funcționale (principiul mărginirii uniforme, teorema aplicației deschise, teorema graficului închis) sunt extinse într-un context fuzzy mult mai general.

În ultima secțiune a capitolului 3, introduc mai întâi noțiunea de pseudo-normă fuzzy, iar apoi extind, îmbunătățesc și completez rezultatele obținute de T. Bag și S.K. Samanta pentru norme fuzzy, în contextul pseudo-normelor fuzzy. În continuare, introduc și discut noțiunile de F-normă fuzzy și F-spațiu fuzzy. Cu ajutorul unor rezultate auxiliare, obțin o caracterizare a metrizabilității spațiilor liniare topologice în termeni de F-norme fuzzy, înlocuind normele fuzzy de tip  $(N, *_L)$  sau  $(N, \cdot)$  utilizate în lucrarea [1], cu F-norme fuzzy de tip  $(F, \min)$ .

În capitol 4, intitulat "Tipuri speciale de relații fuzzy", prezint, într-un mod unitar, anumite tipuri speciale de relații fuzzy: relații afine fuzzy, relații liniare fuzzy, relații convexe fuzzy, relații M-convexe fuzzy. Toate aceste relații fuzzy sunt caracterizate și, de asemenea, sunt stabilite incluziuni între aceste clase de relații fuzzy. Sunt definite într-un mod natural suma a două relații fuzzy și înmulțirea cu scalari a unei relații fuzzy. În secțiunea a 4-a, sunt investigate relațiile liniare fuzzy, printre rezultatele obținute fiind de remarcat caracterizarea relațiilor liniare fuzzy și faptul că inversa unei relații liniare fuzzy este tot o relație liniară fuzzy. În plus, demonstrez că prin compunerea a două relații liniare fuzzy se obține tot o relație liniară fuzzy. În final, arăt că familia relațiilor liniare fuzzy este închisă la adunare și la înmulțirea cu scalari. Acest capitol se bazează pe rezultatele publicate în revistele *Procedia Computer Science*(2014) și *Filomat*(2016) (vezi [71, 77]).

În partea a doua a tezei, adică în capitolul 5, voi descrie planurile mele de dezvoltare a carierei științifice și profesionale. Planul de evoluție și de dezvoltare a carierei continuă în linii mari direcțiile deja abordate, dar presupune și deschiderea unor noi orizonturi didactice și științifice prin identificarea unor modalități de îmbunătățire a calității procesului de învățământ precum și de creștere a cercetării științifice individuale și în colectiv.

Sunt prezentate mai întâi direcțiile de cercetare pe care îmi propun să le urmăresc: algebre normate fuzzy, teoreme de punct fix în spații liniare normate fuzzy, spații Hilbert fuzzy, operatori liniari și mărginiți pe F-spații

fuzzy, teoria wavelet fuzzy, teoreme de punct fix în spații b-metrice fuzzy. Voi acorda o atenție specială aplicațiilor. În acest context, domeniile mele de interes pot evolua către o cercetare interdisciplinară, prin utilizarea rezultatelor obținute în aplicații în economie, informatică, inginerie. În afară de articolele științifice pe care intenționez să le public în următorii ani, am ca proiect de durată o monografie științifică despre analiza funcțională fuzzy.

În ceea ce privește activitatea didactică îmi propun să predau cursuri la programele de studii de masterat, în dorința de a împărtăși din experiența mea tinerilor matematicieni și să-i atrag să lucreze în domeniul analizei funcționale fuzzy. Nu în ultimul rând, intenționez să-mi extind colaborările științifice și didactice atât în România, cât și în străinătate și să aplic pentru granturi de cercetare.