UNIVERSITATEA DIN ORADEA

DEPARTAMENTUL DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

REZUMATUL TEZEI DE ABILITARE

CU TITLUL:

CAZURI SPECIALE DE SUBORDONĂRI ŞI SUPERORDONĂRI DIFERENŢIALE

PREZENTATĂ DE CĂTRE

CONF. UNIV. DR. **GEORGIA IRINA OROS**

Rezumat

Această teză, alcătuită din 6 capitole, o introducere şi o bibliografie, se bazează pe 45 lucrări selectate ale autoarei (scrise singură sau în colaborare) împreună cu rezultatele selectate din două monografii de cercetare ale autoarei [GIO1], [GIO2] (toate menţionate în bibliografie).

Analiza complexă este una dintre ramurile clasice ale matematicii, ce îşi are rădăcinile în secolul al XIX-lea, unele chiar înainte, nume importante care au contribuit la dezvoltarea acestui domeniu fiind Euler, Gauss, Cauchy, Riemann, Weierstrass. Ea se ocupă îndeosebi de studiu funcţiilor complexe analitice care sunt împărţite în două mari clase: funcţii olomorfe şi funcţii meromorfe, dar şi de studiul funcţiilor neanalitice.

Analiza complexă este una dintre disciplinele la care şcoala românească de matematică a adus importante contribuţii, prin D. Pompeiu, Gh. Călugăreanu, P.T. Mocanu, şi totodată ea este o ramură a matematicii cu largi aplicaţii în diferite domenii ale ştiinţei şi tehnicii. O direcţie importantă a analizei complexe este teoria geometrică a funcţiilor analitice. Interpretarea geometrică a unor proprietăţi matematice exprimare pur analitic şi pe de altă parte exprimarea în limbaj analitic a unor proprietăţi geometrice constituie unul din obiectivele majore ale teoriei geometrice a funcţiilor analitice. Teoria geometrică a funcţiilor a început să se dezvolte ca o ramură aparte a analizei complexe la începutul secolului al XX-lea când au apărut primele lucrări importante în acest domeniu, datorate lui P. Koebe [Koe], I.W. Alexander [Alx], L. Bieberbach [Bie]. În 1916, matematicianul L. Bieberbach a enunţat celebra conjectură care îi poartă numele şi care nu a putut fi demonstrată până în 1984, când a fost demonstrată surprinzător de Louis de Branges într-un moment când anumiţi experţi încercau mai degrabă să demonstreze că nu este adevărată. Conjectura lui Bieberbach a impulsionat cercetările în acest domeniu timp de aproape un secol.

Una din direcţiile urmărite a fost aceea a introducerii unor clase de funcţii univalente, cum ar fi de exemplu funcţiile stelate, funcţiile convexe, funcţiile Mocanu (α-convexe) pentru care conjectura lui Bieberbach să poată fi verificată.

În mod natural se pune problema de a vedea ce alte condiţii se pot adăuga condiţiei $f'(z) \neq 0$, $\forall\ z \in D$ (care asigură univalenţa locală) care să asigure univalenţa globală a funcţiei f în domeniul D. Este de dorit să se obţină condiţii necesare şi suficiente de univalenţă. În cazul când D este un disc, astfel de condiţii au fost obţinute pentru prima oară în anul 1931 de Gh. Călugăreanu, în [Cal] care a pus bazele unei şcoli de teoria funcţiilor univalente la Universitatea Babeş-Bolyai din Cluj-Napoca, condusă apoi de Acad. P.T. Mocanu.

Condiţiile necesare şi suficiente de univalenţă sunt date de obicei sub forma unor inegalităţi diferenţiale şi fiecare condiţie suficientă de univalenţă defineşte o anumită clasă de funcţii univalente. Au apărut şi luat amploare noi metode de cercetare în domeniul analizei complexe dintre care menţionăm metoda parametrică a lui Loewner, metoda reprezentărilor integrale, metoda subordonărilor diferenţiale (cunoscută şi ca metoda funcţiilor admisibile) şi metoda superordonărilor diferenţiale.

Metoda subordonărilor diferenţiale a fost elaborată de S.S. Miller şi P.T. Mocanu în [Mi-Mo1] şi [Mi-Mo2]. Aplicarea acestei metode permite obţinerea unor rezultate deosebit de importante în domeniul teoriei geometrice a funcţiilor complexe precum şi demonstrarea pe o cale simplă a unor rezultate clasice din acest domeniu. Multe extinderi sau generalizări ale acestor rezultate clasice au putut fi introduse tot datorită acestei teorii.

Metoda superordonărilor diferenţiale a fost introdusă ca o metodă duală a metodei subordonărilor diferenţiale de S.S. Miller şi P.T. Mocanu în [Mi-Mo9].

Activitatea ştiinţifică, începută cu teza de doctorat "Studiul unor clase de funcţii univalente", susţinută la Universitatea Babeş-Bolyai Cluj-Napoca, Facultatea de Matematică şi Informatică, 2006, conducător ştiiţific prof. univ. dr. Grigore Şt. Sălăgean, se desfăşoară în domeniul Teoriei Geometrice a Funcţiilor Analitice (Funcţii Univalente) şi a funcţiilor neanalitice şi se referă în special la următoarele teme:

1. Studiul unor clase de funcţii univalente obţinute cu ajutorul unor operatori diferenţiali şi studierea în aceste clase a unor subordonări şi superordonări diferenţiale.
2. Introducerea unor clase de funcţii univalente care extind clasa funcţiilor Mocanu (α-convexe).
3. Studiul unor noi operatori diferenţiali şi cu ajutorul lor a noi clase de funcţii univalente.
4. Studiul unor noi operatori integrali pe clase de funcţii univalente.
5. Elaborarea teoriei noţiunii de tare subordonare diferenţială ca o extindere a noţiunii de subordonare diferenţială.

6. Elaborarea teoriei noţiunii de tare superordonare diferenţială ca o problemă duală a noţiunii de tare subordonare diferenţială.

7. Obţinerea unor criterii suficiente de univalenţă folosind tare subordonările diferenţiale liniare.

8. Obţinerea unor criterii suficiente de univalenţă folosind tare subordonările diferenţiale neliniare.

Principalele contribuţii referitoare la cele 8 teme conţinute în teza de abilitare sunt:

În primul capitol, "Second order differential subordinations", în paragrafele 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5 sunt prezentate noţiunile fundamentale legate de metoda subordonărilor diferenţiale sau metoda funcţiilor admisibile, noţiuni care pot fi găsite în monografia [Mi-Mo8] sau în articolele menţionate în această teză.

Metoda subordonărilor diferenţiale poate fi formulată pe scurt, astfel:

Considerăm Ω şi Δ două submulţimi ale lui $\mathbb{C}$. Fie p o funcţie analitică în discul unitate U, cu $p(0) = a$ şi fie $\psi(r, s, t; z) : \mathbb{C}^3 \times U \to \mathbb{C}$. Se pune problema studierii unor implicaţii de forma:

$$\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) \subset \Omega \Rightarrow p(U) \subset \Delta. \tag{1.1.1}$$

Dacă Ω şi Δ sunt domenii simplu conexe din $\mathbb{C}$, diferite de $\mathbb{C}$, şi $a \in \Delta$, atunci există transformările conforme $q : U \to \Delta$, $q(U) = \Delta$, $q(0) = a$ şi $h : U \to \Omega$, $h(U) = \Omega$, $h(0) = \psi(a, 0, 0; 0)$ şi dacă ψ este olomorfă în U, atunci (1.1.1) poate fi scrisă

$$\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) \prec h(z) \Rightarrow p(z) \prec q(z). \tag{1.1.2}$$

În paragraful 1.6 sunt prezentate noţiunile legate de subordonările diferenţiale de tip Briot-Bouquet precum şi teoremele cele mai importante necesare în dezvoltarea subordonărilor diferenţiale de tip Briot-Bouquet.

În paragraful 1.7 apare prima contribuţie personală legată de studiul unor clase de funcţii univalente obţinute cu ajutorul operatorului $D_\lambda^n f$ introdus în [Al-O]. Folosind acest operator diferenţial se defineşte clasa de funcţii univalente $R^n(\lambda, \alpha)$.

Definiţia 1.7.1. [Al-O] Pentru $0 \le \alpha < 1$, $\lambda \ge 0$, $n \in \mathbb{N}$, vom nota cu $R^n(\lambda, \alpha)$ clasa funcţiilor $f \in A$ care satisfac inegalitatea

$$\mathrm{Re}\,[D_\lambda^{n+1} f(z)]' > \alpha,\ z \in U,$$

unde

$$D_\lambda^{n+1} f(z) = (1 - \lambda) D_\lambda^n f(z) + \lambda z [D_\lambda^n f(z)]',\ z \in U$$

$D_\lambda^{n+1} f$ se numeşte operatorul diferenţial Sălăgean,

$$D^n f(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty} j^n a_j z^j,\ z \in U.$$

Rezultatul principal obţinut în lucrarea [GIO-GhO2] este:

Teorema 1.7.1. [GIO-GhO2] *Fie*

$$h(z) = \frac{1 + (2\alpha - 1)z}{1 + z},\ z \in U,$$

o funcţie convexă în U, cu $h(0) = 1$, $0 \le \alpha < 1$.

Dacă $\lambda > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $f \in A$, satisface subordonarea diferenţială

$$D_\lambda^{n+1} f(z) \prec h(z),\ z \in U,$$

atunci

$$[D_\lambda^n f(z)]' \prec q(z) = 2\alpha - 1 + \frac{2(1 - \alpha)}{\lambda} \cdot \frac{1}{z^{\frac{1}{\lambda}} \sigma\left(\frac{1}{\lambda}\right)}$$

unde

$$\sigma(x) = \int_0^z \frac{t^{x-1}}{1 + t} dt,\ z \in U. \tag{1.7.1}$$

Funcţia q este convexă şi cea mai bună dominantă a subordonării diferenţiale.

Din această teoremă se poate obţine cu uşurinţă proprietatea de incluziune:

Corolar 1.7.1. [GIO-GhO2] *Avem*

$$R^{n+1}(\alpha, \lambda) \subset R^{n+1}(\delta, \lambda)$$

unde

$$\delta = \delta(\lambda, \alpha) = 2\alpha - 1 + 2(1 - \alpha) \frac{1}{\lambda} \sigma\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

unde σ este dat de (1.7.1).

Folosind acelaşi operator diferenţial definim clasa de funcţii univalente notată cu $S_\lambda(\alpha, \beta, n)$.

Definiţia 1.7.2. [GIO-GhO3] Dacă $\alpha \geq 0$, $0 \leq \beta < 1$, $\lambda > 0$, şi $n \in \mathbb{N} = \mathbb{N}^* \cup \{0\}$, notăm cu $S_\lambda(\alpha, \beta, n)$ clasa funcţiilor $f \in A$ care satisfac inegalitatea

$$\operatorname{Re}\left[\frac{\alpha}{\lambda} \cdot \frac{D_\lambda^{n+2} f(z)}{f(z)} + \frac{D_\lambda^{n+1} f(z)}{f(z)}\left(1 - \frac{\alpha(1-\lambda)}{\lambda} - \alpha \cdot \frac{zf'(z)}{f(z)}\right)\right] > \beta.$$

Observaţia 1.7.1. a) Dacă $\alpha = 0$, $n = 0$, $\beta = 0$ şi $\lambda = 1$, atunci obţinem

$$\operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)} > 0, \ z \in U,$$

clasa funcţiilor stelate.

b) Pentru $\alpha = 0$, $n = 0$, $0 \leq \beta < 1$ şi $\lambda \neq 1$ obţinem

$$\operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)} > \beta, \ z \in U,$$

clasa funcţiilor stelate de ordinul β.

c) Pentru $\lambda = 1$, $\alpha \geq 0$, $0 \leq \beta < 1$, $n \in \mathbb{N}^* \cup \{0\}$, obţinem

$$\operatorname{Re}\left[\alpha\frac{D^{n+2} f(z)}{f(z)} + \frac{D^{n+1} f(z)}{f(z)}\left(1 - \alpha\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)\right] > \beta, \ z \in U,$$

clasa $S(\alpha, \beta, n)$ studiată în [GIO3].

În această clasă sunt studiate mai multe subordonări diferenţiale interesante şi se obţine proprietatea:

Corolarul 1.7.3. [GIO-GhO3] *Avem*

$$S_\lambda(\alpha, \beta, n) \subset S_\lambda(\alpha, \delta, n)$$

unde

$$\delta = 2\beta - 1 + \frac{2(1-\beta)}{\alpha}\sigma\left(\frac{1}{\alpha}\right),$$

$$\sigma\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \int_0^z \frac{t^{\frac{1}{\alpha}} - 1}{1+t} dt, \ z \in U.$$

Definiţia 1.7.3. [GIO-GhO4] Dacă $0 \leq \alpha < 1$, $\lambda \geq 0$, $n, m \in \mathbb{N}^* \cup \{0\}$, notăm cu $R_n^m(\lambda, \alpha)$ clasa funcţiilor $f \in A_n$ care satisface inegalitatea

$$\operatorname{Re}\,[D_\lambda^m f(z)]' > \alpha, \ z \in U,$$

unde

$$D_\lambda^m f(z) = (1-\lambda) D_\lambda^m f(z) + \lambda z [D_\lambda^m f(z)]', \ z \in U.$$

Observaţia 1.7.5. Această clasă de funcţii univalente generalizează clasele de funcţii studiate:

a) Pentru $0 \leq \alpha < 1$, $\lambda \geq 0$, $n = 1$, $m \in \mathbb{N}^* \cup \{0\}$, obţinem clasa

$$\operatorname{Re}\,[D^m f(z)]' > \alpha,$$

studiată în [AL-O].

b) Pentru $0 \leq \alpha < 1$, $n = 1$, $m = 1$, obţinem

$$\operatorname{Re}\,[f'(z) + \lambda z f''(z)] > \alpha, \ z \in U,$$

clasa studiată de Ponnusamy în [Pon].

c) Pentru $\alpha = 0$, $n = 1$, $m = 0$, $\lambda = 0$, obţinem

$$\operatorname{Re} f'(z) > 0, \ z \in U,$$

care este un criteriu de univalenţă.

Rezultatul important legat de această clasă este:

Teorema 1.7.4. [GIO-GhO4] *Clasa $R_n^m(\lambda, \alpha)$ este convexă.*

În această clasă s-au studiat interesante subordonări diferenţiale, după cum urmează:

Propoziţia 1.7.6. [GIO-GhO4] *Fie $n, m \in \mathbb{N}$, $\lambda \geq 0$, $c \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\, c > 0$ şi ω un număr real dat de*

$$\omega = \frac{n^2 + |c+2|^2 - |n^2 - 2c - 4|}{4n\mathrm{Re}\,(c+2)}.$$

Fie h o funcţie analitică în U cu $h(0) = 1$ şi care satisface inegalitatea

$$\mathrm{Re}\, \frac{zh''(z)}{h'(z)} + 1 \geq \omega.$$

Dacă $f \in S_\lambda^m(\lambda, \alpha)$ şi

$$F(z) = I_c(f) = \frac{c+2}{z^{c+1}} \int_0^z t^c f(t) dt, \ \mathrm{Re}\, c > 0, \tag{1.7.3}$$

atunci

$$[D_\lambda^m f(z)]' \prec h(z), \ z \in U,$$

implică

$$[D_\lambda^m F(z)]' \prec q(z), \ z \in U,$$

unde q este soluţia ecuaţiei diferenţiale

$$q(z) + \frac{n}{c+2} z q'(z) = h(z), \ h(0) = 1$$

dată de

$$q(z) = \frac{c+2}{n z^{(c+2)/n}} \int_0^z t^{\frac{c+2}{n} - 1} h(t) dt.$$

Mai mult, rezultatul este cel mai bun.

Dacă înlocuim în teoremă

$$h(z) = \frac{1 + (2\alpha - 1)z}{1+z}$$

obţinem următorul rezultat (interesant).

Corolarul 1.7.4. [GIO-GhO4] *Dacă $\alpha < 1$, $n, m \in \mathbb{N}$, $\lambda \geq 0$, $\mathrm{Re}\, c > 0$ şi operatorul integral I_c dat de (1.7.3), atunci $I_c[S_n^m(\lambda, \alpha)] \subset S_n^m(\lambda, \delta)$, unde*

$$\delta = \min_{|z|=1} \mathrm{Re}\, q(z) = \delta(c, n, \alpha)$$

şi

$$q(z) = \frac{c+1}{n z^{(n+2)/n}} \int_0^z t^{\frac{c+2}{n} - 1} \cdot \frac{1 + (2\alpha - 1)t}{1+t} dt$$

iar rezultatul este cel mai bun, şi

$$\delta = 2\alpha - 1 + \frac{(c+2)(2 - 2\alpha)}{n} \cdot \sigma\left(\frac{c+2}{n}\right), \ \text{unde } \sigma(x) = \int_0^z \frac{t^{x-1}}{1+t} dt.$$

În lucrarea [Tă-GIO-Şe] s-a definit clasa $S_n(\beta)$:

Definiţia 1.7.4. [Tă-GIO-Şe] Dacă $0 \leq \beta < 1$ şi $n \in \mathbb{N}$, vom nota cu $S_n(\beta)$ clasa funcţiilor $f \in A$ care satisfac inegalitatea

$$\mathrm{Re}\,(S^n f(z)) > \beta, \ z \in U,$$

unde $S^n f(z)$ este operatorul diferenţial al lui Sălăgean.

Pentru această clasă s-au demonstrat:

Teorema 1.7.8. [Tă-GIO-Şe] *Clasa de functi $S_n(\beta)$ este o clasă de funcţii convexe.*

Teorema 1.7.9. [Tă-GIO-Şe] *Fie q o funcţie convexă în U cu $q(0) = 1$, şi fie*

$$h(z) = q(z) + \frac{1}{c+1} z q'(z), \ z \in U,$$

unde $c \in \mathbb{C}$, cu $\mathrm{Re}\, c > -2$.

Dacă $f \in S_n(\beta)$ şi $F = I_c(f)$, unde

$$F(z) = I_c(f) = \frac{c+2}{z^{c+1}} \int_0^z t^c f(t) dt, \ \mathrm{Re}\, c > -2$$

atunci $[S^n f(z)]' \prec h(z)$, $z \in U$, implică

$$[S^n F(z)]' \prec q(z), \ z \in U$$

şi q este cea mai bună dominantă.

În paragraful 1.8 se prezintă operatorul diferenţial D_λ^α obţinut ca o combinaţie convexă a operatorilor diferenţiali Sălăgean şi Ruscheweyh.

Definiţia 1.8.1. [GIO-GhO5] Fie $\alpha \geq 0$, $\lambda \geq 0$. Notăm cu $D_\lambda^\alpha : A \to A$,

$$D_\lambda^\alpha f(z) = (1-\lambda)S^\alpha f(z) + \lambda R^\alpha f(z),\ z \in U,$$

unde prin S^α şi R^α am notat operatorul diferenţial Sălăgean şi Ruscheweyh.

Observaţia 1.8.1. a) Pentru $\lambda = 0$, $D_0^\alpha f(z) = S^\alpha f(z)$, operatorul Sălăgean.

b) Pentru $\lambda = 1$, $D_1^\alpha f(z) = R^\alpha f(z)$, $z \in U$, operatorul Ruscheweyh.

c) Pentru $\alpha = 0$, $D_\lambda^0 f(z) = (1-\lambda)S^0 f(z) + \lambda R^0 f(z) = (1-\lambda)f(z) + \lambda f(z) = f(z)$.

d) Pentru $\alpha = 1$, $D_\lambda^1 f(z) = (1-\lambda)S' f(z) + \lambda R' f(z) = (1-\lambda)zf'(z) + \lambda zf'(z) = zf'(z) = R^1 f(z) = S^1 f(z)$, $z \in U$.

Rezultatul important din această lucrare este:

Propoziţia 1.8.1. [GIO-GhO5] *Fie* $h(z) = \dfrac{1+(2\alpha-1)z}{1+z}$ *o funcţie convexă în U, cu $h(0) = 1$, $0 \leq \beta < 1$.*

Presupunem că $\alpha \geq 0$, $\lambda \geq 0$ şi $f \in A$ satisface subordonarea diferenţială

$$[D_\lambda^{\alpha+1} f(z)]' + \frac{\lambda\alpha z[R^\alpha f(z)]''}{\alpha+1} \prec h(z),$$

atunci

$$[D_\lambda^\alpha f(z)]' \prec q(z),\ z \in U,$$

unde $q(z) = 2\beta - 1 + 2(1-\beta) \cdot \dfrac{\ln(1+z)}{z}$, $z \in U$. *Funcţia q este convexă şi cea mai bună dominantă.*

Folosind acest operator diferenţial s-a definit clasa $\Sigma(\alpha, \lambda, n+1)$.

Definiţia 1.8.2. [GIO-Că-GhO] Dacă $0 \leq \alpha < 1$, $\lambda \geq 0$ şi $n \in \mathbb{N}$, notăm clasa $\Sigma(\alpha, \lambda, n+1)$ clasa funcţiilor $f \in \Sigma$ care satisfac relaţia

$$\operatorname{Re}\left\{[D_\lambda^{n+1} g(z)]' + \frac{\lambda zn[R^n g(z)]''}{n+1}\right\} > \alpha,$$

unde

$$f(z) = \frac{1}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

$$g(z) = z^2 f(z) = z + a_0 z^2 + a_1 z^3 + \ldots,\ z \in U.$$

Pentru această clasă de funcţii s-a demonstrat proprietatea:

Teorema 1.8.4. [GIO-Ca-GhO] *Dacă $0 \leq \alpha < 1$, $\lambda \geq 0$ şi $n \in \mathbb{N}$, atunci*

$$\Sigma(\alpha, \lambda, n+1) \subset \Sigma(\delta, \lambda, n+1),$$

unde $\delta = \delta(\alpha) = 2\alpha - 1 + 2(1-\alpha)\ln 2$.

În lucrare sunt studiate interesante subordonări diferenţiale.

În paragraful 1.9 se prezinyă rezultate obţinute folosind operatorul diferenţial

$$D^{n+p-1} f(z) = z^p + \sum_{k=m+p}^{\infty} \frac{(n+k-2)!}{(n-1)!(k-1)!} a_k z^k,$$

cu proprietatea

$$(n+p)D^{n+p} f(z) = z[D^{n+p-1} f(z)]' + nD^{n+p-1} f(z),\ z \in U,$$

pentru funcţii din clasa $A_m(p)$. $A_m(p)$ este clasa funcţiilor de forma

$$f(z) = z^p + \sum_{k=m+p}^{\infty} a_k z^k,\ p, m \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Acest operator îl vom numi operatorul lui Ruscheweyh de ordinul $(n+p-1)$. Folosind acest operator s-au studiat subordonări interesante în lucrarea [GIO-GhO-Ow].

Rezultatul principal din această lucrare este:

Teorema 1.9.1. [GIO-GhO-Ow] *Fie q o funcţie convexă în U şi fie funcţia h dată de*

$$h(z) = q(z) + \frac{m}{p} zq'(z),\ z \in U,$$

cu $h(0)=1$, $m\in\mathbb{N}$, $p\in\{1,2,\ldots\}$. Dacă $f\in A_m(p)$ şi satisface subordonarea diferenţială

$$\frac{1}{p}\,\frac{[D^{n+p-1}f(z)]'}{z^{p-1}}\prec h(z),$$

atunci

$$\frac{D^{n+p-1}f(z)}{z^p}\prec q(z),\ \ z\in U,$$

şi rezultatul este cel mai bun.

În paragraful 1.10 sunt prezentate rezultate obţinute folosind operatorul Dziok-Srivastava dat de:

$$H_m^l(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_l;\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m)f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_{n-1}\ldots(\alpha_l)_{n-1}}{(\beta_1)_{n-1}\ldots(\beta_m)_{n-1}}\cdot a_n\frac{z^n}{(n-1)!}\tag{1.10.1}$$

unde $\alpha_i\in\mathbb{C}$, $i=1,2,\ldots,l$, $\beta_j\in\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}$, $j=1,2,\ldots,m$, $f\in A$.

Pentru simplificarea scrierii, vom nota

$$H_m^l[\alpha_1]f(z)=H_m^l(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_l;\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m)f(z).\tag{1.10.2}$$

Pentru acest operator avem proprietatea

$$\alpha_1H_m^l[\alpha_1+1]f(z)=z\{H_m^l[\alpha_1]f(z)\}'+(\alpha-1)H_m^l[\alpha_1]f(z),\ z\in U.\tag{1.10.3}$$

Rezultatul principal din această lucrare este dat de următoarea teoremă care ne dă un criteriu de univalenţă exprimat cu ajutorul operatorului diferenţial Dziok-Srivastava pentru funcţiile $f\in A$.

Teorema 1.10.1. [GIO10] *Fie $l,m\in\{0,1,2,\ldots\}$, $l\le m+1$, $\alpha_i\in\mathbb{C}$, $i=1,2,\ldots,l$, $\beta_j\in\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}$, $j=1,2,\ldots,m$ şi $H_m^l[\alpha_1]f(z)$ operatorul diferenţial Dziok-Srivastava dat de (1.10.1).*

Dacă $f\in A$, $\alpha_1\ge0$ şi $\dfrac{H_m^l[\alpha_1]f(z)}{z}\neq0$, în U şi verifică subordonarea diferenţială

$$\frac{z\{H_m^l[\alpha_1+1]f(z)\}'}{H_m^l[\alpha_1+1]f(z)}+(1-\alpha_1)\frac{H_m^l[\alpha_1+1]f(z)}{H_m^l[\alpha_1]f(z)}+\alpha_1-1\prec h(z),$$

unde

$$h(z)=\frac{1+z}{1-z}+\frac{2z}{(1-z)[1+\gamma+(1-\gamma)z]},\ \ 0\le\gamma<1,\ \ z\in U,$$

atunci

$$\frac{H_m^l[\alpha_1+1]f(z)}{H_m^l[\alpha_1]f(z)}\prec\frac{1+z}{1-z},\ \ z\in U$$

şi rezultatul este cel mai bun.

Observaţia 1.10.1. Pentru $m=0$, $l=1$, $\alpha_1=1$, $H_0^1[z]f(z)=f(z)$, $H_1^1[z]f(z)=zf'(z)$, subordonarea

$$\frac{H_m^l[\alpha_1+1]f(z)}{H_m^l[\alpha_1]f(z)}\prec\frac{1+z}{1-z}$$

este echivalentă cu $\operatorname{Re}\dfrac{zf'(z)}{f(z)}>0$, adică $f\in S^*$.

În lucrarea [GIO-GhO7], folosind acelaşi operator s-a obţinut subordonarea diferenţială

$$(1-\lambda)\frac{H_m^l[\alpha_1+1]f(z)}{H_m^l[\alpha_1]f(z)}+\lambda\frac{[H_m^l[\alpha_1+1]f(z)]'}{[H_m^l[\alpha_1]f(z)]'}\prec\frac{1-z}{1+z}$$

care este echivalentă cu condiţia

$$\operatorname{Re}\left[(1-\lambda)\frac{zf'(z)}{f(z)}+\lambda\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\right]>0,$$

condiţia ca funcţia $f\in A$ să aparţină clasei M_λ (clasa funcţiilor Mocanu).

În paragraful 1.11 este prezentat studiul unor subordonări diferenţiale în semiplanul drept, folosind inegalităţile diferenţiale

$$\operatorname{Re}\left[A(z)zp'(z)+B(z)p^2(z)+C(z)p(z)+D(z)\right]>0$$

şi

$$\operatorname{Re}\left[A(z)p^2(z)-B(z)(zp'(z))^2+C(z)zp'(z)+D(z)\right]>0.$$

Observaţia 1.11.1. Rezultatele obţinute în Teoremele 1.11.1 şi 1.11.2 ne oferă posibilitatea de a obţine condiţii suficiente de univalenţă, stelaritate, convexitate, alfa-convexitate (funcţii Mocanu), aproape convexe, dacă

$$p(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)},\ p(z) = \frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1,\ p(z) = (1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)} + \alpha\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1\right),\ p(z) = f'(z),\ z \in U.$$

În capitolul al doilea, "Second-order differential superordination", în paragrafele 2.1, 2.2, 2.3 sunt prezentate noţiunile de bază ale metodei superordonărilor introdusă de S.S. Miller şi P.T. Mocanu în [Mi-Mo9].

Această metodă poate fi prezentată pe scurt astfel:

Fie Ω şi Δ două submulţimi ale lui $\mathbb{C}$, fie p o funcţie analitică în discul unitate U şi fie $\varphi(r, s, t; z) : \mathbb{C}^3\theta U \to \mathbb{C}$.

Se pune problema studierii unor implicaţii de forma:

$$\Omega \subset \{\varphi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) :\ z \in U\} \Rightarrow \Delta \subset p(U). \tag{2.1.1}$$

Dacă Ω şi Δ sunt domenii simplu conexe din $\mathbb{C}$, diferite de $\mathbb{C}$, atunci există transformările conforme $q : U \to \Delta$, $q(U) = \Delta$, $q(0) = p(0)$ şi $h : U \to \Omega$, $h(U) = \Omega$, $h(0) = \psi(p(0), 0, 0; 0)$. Dacă în plus funcţiile p şi $\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z)$ sunt univalente în U, atunci implicaţia (2.1.1) poate fi reformulată

$$h(z) \prec \varphi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) \Rightarrow q(z) \prec p(z). \tag{2.1.2}$$

În paragraful 2.4 sunt prezentate contribuţiile personale legate de temele amintite folosind operatorul diferenţial Dziok-Srivastava.

În [GIO6] se definesc superordonările diferenţiale de ordinul întâi şi sunt obţinute mai multe rezultate legate de superordonări diferenţiale de ordinul întâi. Iată un astfel de rezultat:

Teorema 2.4.1. [GIO6] *Fie $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\Omega \neq \mathbb{C}$, $q \in \mathcal{H}[a, n]$, $\alpha_1 > 0$ şi fie $\varphi \in \Phi_n[\Omega, q]$. Dacă $\frac{H_m^l[\alpha_1]f(z)}{z} \in Q(1)$ şi $\psi\left(\frac{H[\alpha_1]f(z)}{z}, \frac{H_m^l[\alpha_1+1]f(z)}{z}; z\right)$ este univalentă în U, atunci*

$$\Omega \subset \left\{\varphi\left(\frac{H_m^l[\alpha_1]f(z)}{z}, \frac{H_m^l[\alpha_1+1]f(z)}{z}\right)\right\}$$

implică

$$q(z) \prec \frac{H_m^l[\alpha_1]f(z)}{z},\ z \in U,$$

unde $H_m^l[\alpha_1]f(z)$ este dat de (1.10.2).

În lucrarea [GIO10], folosind acelaşi operator diferenţial se obţin superordonări diferenţiale:

Teorema 2.4.5. [GIO10] *Fie $l, m \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $l \leq m+1$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, \ldots, l$, $\beta_j \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$, $j = 1, 2, \ldots, m$ şi $H_m^l[\alpha_1]f(z)$ operatorul liniar Dziok-Srivastava.*

Dacă $p \in \mathcal{H}[1, 1] \cap \mathbb{Q}$, $p(U) \subset D$ şi

$$\frac{z\{H_m^l[\alpha_1+1]f(z)\}'}{H_m^l[\alpha_1+1]f(z)} + (1-\alpha_1)\frac{H_m^l[\alpha_1+1]f(z)}{H_m^l[\alpha_1]f(z)} + \alpha_1 - 1$$

este univalentă în U, atunci

$$1 + z + \frac{z}{1+\gamma+z} \prec \frac{z\{H_m^l[\alpha_1+1]f(z)\}'}{H_m^l[\alpha_1]f(z)} + (1-\alpha_1)\frac{H_m^l[\alpha_1+1]f(z)}{H_m^l[\alpha_1]f(z)} + \alpha_1 - 1$$

implică

$$1 + z \prec \frac{H_m^l[\alpha_1+1]f(z)}{H_m^l[\alpha_1]f(z)},\ z \in U,\ \gamma \geq 0$$

şi $q(z) = 1 + z$ este cea mai bună subordonantă.

În paragraful 2.5 sunt prezentate superordonări diferenţiale obţinute folosind operatorul integral

$$I(f)(z) = F(z) = \left[\frac{\beta+\gamma}{z^\gamma}\int_0^z f^\beta(t)t^{\gamma-1}dt\right]^{\frac{1}{\gamma}}, \tag{2.5.1}$$

şi publicate în articolul [GhO-GIO2], obţinându-se un rezultat de tip sandwich:

$$1 + Rz \prec \frac{zF'(z)}{F(z)} \prec 1 + z,\ R \in (0, 1],\ z \in U.$$

Rezultatul principal este dat de teorema:

Teorema 2.5.5. [GIO5] *Fie* $R \in [0,1]$ *şi* h *o funcţie convexă, cu* $h(0) = 1$*, definită astfel*

$$h(z) = 1 + Rz + \frac{zR}{2 + Rz}, \ z \in U.$$

Dacă $f \in A$ *şi* $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ *este univalentă,* $\frac{zF'(z)}{F(z)} \in \mathcal{H}[1,1] \cap Q$*,* $h(z) \prec \frac{zf'(z)}{f(z)}$*, atunci*

$$q(z) = 1 + Rz \prec \frac{zF'(z)}{F(z)}, \ z \in U,$$

unde F *este dat de (2.5.1).*

Funcţia q *este cea mai bună sunordonantă.*

În paragraful 2.6 sunt prezentate subordonări diferenţiale obţinute folosind operatorul diferenţial Ruscheweyh.

Teorema 2.6.1. [GhO-GIO6] *Fie* $h(z) = \frac{1 + (2\alpha - 1)z}{1 + z}$*, o funcţie convexă în* U*, cu* $h(0) = 1$*. Fie* $f \in A_n$ *şi presupunem că* $[D^{m+1}f(z)]'$ *este univalentă în* U *şi* $[D^m f(z)]' \in \mathcal{H}[1,1] \cap Q$*. Dacă*

$$h(z) \prec [D^{m+1}f(z)]',$$

atunci

$$q(z) \prec [D^m f(z)]', \ z \in U,$$

unde

$$q(z) = \frac{m+1}{nz^{\frac{m+1}{n}}} \int_0^z \frac{1 + (2\alpha - 1)t}{1 + t} t^{\frac{m+1}{n} - 1} dt.$$

Funcţia q *este convexă şi este cea mai bună subordonantă.*

În capitolul 3, "The univalent differential and integral operators" sunt cuprinse contribuţiile personale legate de tema 5.

În paragraful 3.1 se prezintă operatorul integral $I(f_1, f_2, \ldots, f_n)$.

Definiţia 3.1.1. [GIO7] Fie $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i \in \{1, 2, 3, \ldots, m\}$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, cu $\operatorname{Re}\alpha > 0$, $A^m = A \times A \times \ldots \times A$. Vom nota cu $I : A^m \to A$, operatorul integral

$$I(f_1, f_2, \ldots, f_m)(z) = F(z) \tag{3.1.1}$$

$$= \left[\alpha \int_0^z t^{\alpha - 1} \left(\frac{R^n f_1(t)}{t}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{R^n f_2(t)}{t}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{R^n f_m(t)}{t}\right)^{\alpha_m} dt\right]^{\frac{1}{\alpha}},$$

unde $f_i \in A$, $i \in \{1, 2, 3, \ldots, m\}$, şi R^n este operatorul diferenţial Ruscheweyh.

Acest operator generalizează alţi operatori integrali cum ar fi

$$I(z) = \int_0^z \frac{f(t)}{t} dt,$$

numit operatorul lui Alexander [Alx],

$$I(z) = \int_0^z \left[\frac{f(t)}{t}\right]^\beta dt$$

operatorul Miller-Mocanu-Reade, [Mi-Mo-Re],

$$I(z) = \int_0^z [f'(t)]^\beta dt,$$

studiat în [Pa-Pe],

$$I(z) = \int_0^z \left[\frac{f_1(t)}{t}\right]^{\alpha_1} \cdots \left[\frac{f_m(t)}{t}\right]^{\alpha_m} dt$$

studiat în [Br-Br],

$$I(f_1, f_2, \ldots, f_m)(z) = \int_0^z \left(\frac{R^n f_1(t)}{t}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{R^n f_m(t)}{t}\right)^{\alpha_m} dt,$$

studiat în [GIO-GhO6],

$$G_\alpha(z) = \left[\alpha \int_0^z t^{\alpha - 1} \left(\frac{g(t)}{t}\right) dt\right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

studiat în [Pes1], [Pes2],

$$F_\alpha(z) = \left[\alpha \int_0^z t^{\alpha-1} f'(t)dt\right]^{\frac{1}{\alpha}},$$

studiat în [Pes2], [Pes4].

În lucrarea [GIO7] sunt studiate condiţiile necesare şi suficiente pentru ca operatorul $I(f_1, f_2, \ldots, f_m)(z)$ să fie univalent.

Teorema 3.1.1. [GIO7] *Fie $\alpha \in \mathbb{C}$, cu $\operatorname{Re}\alpha > 0$, $f_i \in A$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, cu $|\alpha_1|+|\alpha_2|+\ldots+|\alpha_m| \le 1$. Dacă*

$$\left|\frac{z[R^n f_i(z)]'}{R^n f_i(z)} - 1\right| \le 1,\ z \in U,\ i \in \{1, 2, \ldots, m\},$$

atunci $F(z)$ dat de (3.1.1) aparţine clasei S.

Condiţii suficiente de univalenţă pentru acest operator au fost obţinute şi în [GIO8], [GIO9].

Teorema 3.1.6. [GIO9] *Fie $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mu \ge 0$, α şi c numere complexe cu $\operatorname{Re}\alpha > 0$, $|c| \le 1$, $c \ne -1$ şi $f_i \in A$, $a_k \in \mathbb{C}$, $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Dacă*

i) $|\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_m| \le (1 - |c|)\dfrac{|\alpha|}{1 + \mu(1 + |\alpha|)}$;

ii) $|R^n f_k(z)| \le 1$;

iii) $\left|\dfrac{1 - |z|^{2\alpha}}{\alpha}\left[\dfrac{z^2(R^n f_k(z))'}{(R^n f_k(z))^2} - 1\right]\right| \le 1,\ z \in U,\ k \in \{1, 2, \ldots, m\}$,

unde R^n este operatorul Ruscheweyh, atunci funcţia F dată de (3.1.1) aparţine clasei S.

În lucrarea [Şe-GIO] s-au determinat condiţiile de univalenţă a operatorului integral

$$G_{\alpha,M}(z) = \left[\frac{\alpha}{M}\int_0^z t^{\frac{\alpha}{M}-1}\left[\frac{g(t)}{t}\right]^{\frac{\alpha-1}{M^2}} dt\right]^{\frac{M}{\alpha}} \tag{3.1.2}$$

folosind criteriile lui Ahlfors, Becker şi Pascu.

Teorema 3.1.7. [Şe-GIO] *Fie $M \ge 1$, α un număr complex cu $\operatorname{Re}\alpha > 0$, $\alpha \ne 1$ şi c un număr complex $|c| \le 1$, $c \ne -1$. Fie funcţia $g \in A$, satisfăcând condiţiile*

$$\left|\frac{g(z)}{z}\right| \le 3M - 2,\ \left|\frac{z^2 g'(z)}{g^2(z)} - 1\right| \le \frac{1}{3M-2},\ z \in U \text{ şi } |c| + \frac{3|\alpha - 1|}{|\alpha|} \le 1,$$

atunci operatorul integral dat de (3.1.2) aparţine clasei S.

Observaţia 3.1.1. Acest operator generalizează alţi operatori cunoscuţi studiaţi în [Pas1], [Pas2], [Pes1], [Pes2].

În paragraful 3.2 sunt prezentaţi operatorii diferenţiali $I_p(\beta, m, n; \lambda, l)$ şi clasa funcţiilor univalente notate $S_p^\alpha(\beta, m, n; \lambda, l)$.

Definiţia 3.2.1. [GIO23] Pentru $l, \lambda, \beta \in \mathbb{R}$, $l \ge 0$, $\beta \ge 0$, $\lambda \ge 0$, $n, p \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ şi $f \in A(p, n)$ definim operatorul

$$I_p(\beta, m, n; \lambda, l)f(z) = z^p + \sum_{k=p+n}^{\infty}\left[\frac{(1-\lambda)(p-k) + l + \dfrac{(m+k-1)!}{m!(k-1)!}}{p + l - k + (m+k-1)!}\right]^\beta \frac{(m+k-1)!}{m!k!} a_k z^k,\ z \in U. \tag{3.2.1}$$

$A(p, n)$ este clasa funcţiilor de forma

$$f(z) = z^p + \sum_{k=p+n}^{\infty} a_k z^k,\ z \in U.$$

Acest operator generalizează un mare număr de operatori diferenţiali cunoscuţi.

Definiţia 3.2.2. [GIO23] Fie $0 \le \alpha < 1$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $p, n \in \mathbb{N}$, $l, \lambda, \beta \in \mathbb{R}$, $l \ge 0$, $\lambda \ge 0$, $\beta \ge 0$. Funcţia $f \in A(p, n)$ aparţine clasei $S_p^\alpha(\beta, m, n; \lambda, l)$ dacă este satisfăcută condiţia

$$\operatorname{Re} I_p'(\beta, m, n; \lambda, l)f(z) > \alpha,\ z \in U, \tag{3.2.2}$$

unde $I_p(\beta, m, n; \lambda, l)f(z)$ este operatorul dat de (3.2.1).

În Teorema 3.2.1 [GIO23] am arătat că $S_1^\alpha(\beta + 1, m, n; \lambda, l) \subset S_1^\alpha(\delta, m, n; \lambda, l)$, unde

$$\delta = \delta(\alpha, m, n, l, k, \lambda) = 2\alpha - 1 + 2(1 - \alpha)\frac{E(m, l, k)}{\lambda n}\sigma\left[\frac{E(m, l, k)}{\lambda n}\right],$$

$$\sigma\left[\frac{E(m,l,k)}{\lambda n}\right]=\int_0^z\frac{t^{\frac{E(m,l,k)}{\lambda n}-1}}{1+t}dt,\ z\in U$$

şi

$$E(m,l,k)=1+l-k+\frac{(m+k-1)!}{m!(k-1)!}. \tag{3.2.3}$$

Definiţia 3.2.3. [GIO23] Fie $0\leq\alpha<1$, $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $p,n\in\mathbb{N}$, $l,\lambda,\beta\in\mathbb{R}$, $\lambda\geq 1$, $\beta\geq 0$, $f\in A(p,n)$. Notăm cu $L:A(p,n)\to A(P,n)$ operatorul integral

$$L(f)=F(z)=\frac{p+E(m,l,k)}{\lambda z^{\frac{p(1-\lambda)+E(m,l,k)-1}{\lambda}}}\int_0^z f(t)t^{\frac{p(1-\lambda)+E(m,l,k)-1}{\lambda}}dt \tag{3.2.4}$$

unde $E(m,l,k)$ este dat de (3.2.3).

Observaţia 3.2.3. Acest operator generalizează operatorii cunoscuţi,

$$F(z)=\int_0^z\frac{f(t)}{t}dt \text{ operatorul Alexander,}$$

$$F(z)=\frac{2}{z}\int_0^z f(t)dt \text{ operatorul Libera,}$$

$$F(z)=\frac{l+1}{z^l}\int_0^z f(t)t^{l-1}dt \text{ operatorul lui Bernardi.}$$

Folosind operatorul integral (3.2.4) am demonstrat următoarea teoremă.

Teorema 3.2.2. [GIO23] *Fie $0\leq\alpha<1$, $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}p=1$, $n\in\mathbb{N}$, $l,k,\beta\in\mathbb{R}$, $\lambda\geq 1$, $\beta\geq 0$ şi $f\in A_n$. Atunci f aparţine clasei $S_1^\alpha(\beta,m,n;\lambda,l)$ dacă şi numai dacă F dată de (3.2.4) aparţine clasei $S_1^\alpha(\beta+1,m,n;\lambda,l)$.*

În paragraful 3.3 am studiat stelaritatea operatorului Bernardi.

În lucrările [Le-Mi-Zl] şi [Pas2] s-a arătat că:

i) $L_\gamma[S^*]\subset S^*$, (ii) $L_\gamma[K]\subset K$, (iii) $L_\gamma(C)\subset C$,
unde S^* este clasa funcţiilor stelate, K clasa funcţiilor complexe, C clasa funcţiilor aproape convexe, iar

$$L_\gamma[f](z)=F(z)=\frac{\gamma+1}{z^\gamma}\int_0^z f(t)t^{\gamma-1}dt \tag{3.3.1}$$

este operatorul Bernardi.

În lucrarea [GIO14] am extins această proprietate pentru funcţiile stelate de ordin negativ:

$$S\left(-\frac{1}{2\gamma}\right)=\left\{f\in A,\ \frac{f(z)}{z}\neq 0,\ \operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)}>-\frac{1}{2\gamma},\ \gamma\geq 1\right\}.$$

Teorema 3.3.1. [GIO14] *Fie $f\in A$, $\dfrac{f(z)}{z}\neq 0$, $z\in U$, $\gamma\geq 1$. Dacă*

$$\operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)}>-\frac{1}{2\gamma}$$

atunci $F\in S^*$, unde F este dată de (3.3.1).

În lucrarea [GIO13], am arătat că dacă $f\in K\left(-\dfrac{1}{2\gamma}\right)$, $\gamma\geq 1$, atunci F dată de (3.3.1) este conexă.

Teorema 3.3.2. [GIO13] *Fie $f\in A$, $\gamma\geq 1$. Dacă*

$$\operatorname{Re}\left[\frac{zf''(z)}{f'(z)}+1\right]\geq-\frac{1}{2\gamma},$$

atunci F dată de (3.3.1) este convexă.

În paragraful 3.4 sunt prezentate condiţiile în care imaginea unei funcţii f convexă prin operatorul integral

$$I(f)=F(z)=\frac{1}{[g(z)]^c}\int_0^z f(w)g(w)^{c-1}g'(w)dw \tag{3.4.1}$$

este o funcţie convexă, unde $c\in\mathbb{C}$ cu $\operatorname{Re}c>0$.

Teorema 3.4.1. [GIO-GhO8] *Fie* $f, g \in \mathcal{H}(U)$ *şi fie operatorul*

$$I(f) = F(z) = \frac{1}{[g(z)]^c} \int_0^z f(w)g(w)^{c-1}g'(w)dw. \tag{3.4.1}$$

Dacă sunt satisfăcute:
(i) $\operatorname{Re} \dfrac{czg'(z)}{g(z)} > 0,\ z \in U,\ \operatorname{Re} c > 0,$
(ii) $\operatorname{Re} \left(\dfrac{zg''(z)}{g'(z)} + 1 \right) > \operatorname{Re} \dfrac{(c+1)zg'(z)}{g(z)},\ z \in U,$
(iii) $I(C) \subset C$
atunci $I(K) \subset K$.

În paragraful 3.5 sunt prezentate condiţiile necesare ca imaginea funcţiei $f \in A$, prin operatorul integral

$$I(f)(z) = F(z) = \frac{2}{z} \int_0^z f(t)dt \tag{3.5.1}$$

să fie o funcţie convexă.

Teorema 3.5.2. [GhO-GIO5] *Fie* $M \in [0, M_0]$, *unde* $M_0 = 0,41284489$ *este rădăcina ecuaţiei*

$$7M^8 + 14M^7 + 48M^6 + 30M^5 + 67M^4 + 18M^3 + 18M^2 + 2M - 8 = 0.$$

Dacă $f \in A$ *şi satisface inegalitatea*

$$\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right| < M$$

atunci $\operatorname{Re} \dfrac{zF'(z)}{F'(z)} + 1 > 0$*, unde* F *este dată de (3.5.1).*

În paragraful 3.6 sunt prezentate condiţiile ca imaginea unei funcţii $f \in \mathcal{H}[1,1]$, prin operatorul Bernardi să fie o funcţie convexă.

Teorema 3.6.1. [GIO21] *Fie* $f \in \mathcal{H}[1,1]$, $\gamma \geq 1$ *şi*

$$L_\gamma[f](z) = F(z) = \frac{\gamma}{z^\gamma} \int_0^z f(t)t^{\gamma-1}dt,\ z \in U. \tag{3.6.1}$$

Dacă

$$\operatorname{Re} \left[\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1 \right] > -\frac{1}{2\gamma},\ z \in U,$$

atunci F *dată de (3.6.1) este convexă.*

În Capitolul 4, "Classes of univalent functions which extend the class of Mocanu functions", se arată mai multe clase de funcţii care extind clasa

$$M_\alpha = \left\{ f \in A,\ \operatorname{Re} \left[(1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)} + \alpha \left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1 \right) \right] > 0,\ z \in U \right\},$$

numită clasa funcţiilor Mocanu sau clasa funcţiilor α-convexe.

Este cunoscută teorema de dualitate pentru această clasă:

Teoremă. [Mo-Bu-Să] *Dacă* $\alpha \geq 0$ *atunci* $f \in M_\alpha \Leftrightarrow F \in S^*$*, unde*

$$F(z) = f(z) \left[\frac{zf'(z)}{f(z)} \right]^\alpha. \tag{4.1.1}$$

În lucrarea [GhO-GIO3] am definit clasa de funcţii $M_{\alpha,\beta}$.

Definiţia 4.1.1. [GhO-GIO3] Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ şi $f \in A$ cu $\dfrac{f(z)f'(z)}{z} \neq 0$, $z \in U$. Vom spune că $f \in A$ aparţine clasei $M_{\alpha,\beta}$ dacă funcţia $F : U \to \mathbb{C}$, definită de

$$F(z) = z \left[\frac{f(z)}{z} \right]^\beta \left[\frac{zf'(z)}{f(z)} \right]^\alpha \tag{4.1.2}$$

este stelată în U.

Observaţia 4.1.1. a) Dacă $\beta = 1$, $\alpha \geq 0$, $F(z) = f(z) \left[\dfrac{zf'(z)}{f(z)} \right]^\alpha$ şi $M_{\alpha,1} = M_\alpha$.

b) Dacă $\alpha = \beta = 1$, atunci $F(z) = zf'(z)$, $M_{1,1} = K$.

Rezultatele importante pentru această clasă sunt:

Teorema 4.1.1. [GhO-GIO3] *Fie* $\alpha \in \mathbb{R}$ *şi* $\beta \geq 1$*, atunci* $M_{\alpha,\beta} \subset S^*$.

Teorema 4.1.2. [GhO-GIO3] *Fie* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*,* $\alpha \geq 0$*,* $\beta \geq 1$ *şi* $\lambda \in (0, \lambda_1)$*, unde*

$$\lambda_1 = \frac{2\beta - \alpha - 2 + \sqrt{(2\beta - \alpha - 2)^2 + 8\alpha\beta}}{4\beta},\ \lambda_1 \in (0,1). \tag{4.1.3}$$

Dacă $f \in M_{\alpha,\beta}$*, atunci* $f \in S^*(\lambda)$.

În lucrarea [GhO-GIO4] am studiat subordonări diferenţiale de ordinul întâi obţinând cea mai bună dominantă pentru o funcţie $f \in M_{\alpha,\beta}$.

Teorema 4.1.5. [GhO-GIO4] *Fie* $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$*,* $\alpha > 0$*,* $\beta \geq 1$*,* $\lambda \in (0, \lambda_1)$*, unde* λ_1 *este dat de (4.1.3). Dacă* $f \in M_{\alpha,\beta}$ *atunci*

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec (1-\lambda)q(z) + \lambda$$

unde q *este este dat de*

$$q(z) = \left[\frac{\beta(1-\lambda)}{\alpha}(1-z)^{\frac{2}{\alpha}} \int_0^1 \frac{t^{\frac{\beta}{\alpha}-1}}{(1-tz)^{\frac{2}{\alpha}}} dt\right]^{-1} - \frac{\lambda}{1-\lambda}.$$

Funcţia q *este cea mai bună dominantă.*

În lucrarea [GIO11] am definit clasa $M^n_{\alpha,\beta}(\delta)$. Rezultate importante sunt:

Teorema 4.1.3. [GIO11] *Fie* $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R}$*,* $1 - \beta \leq \delta < 1$*. Atunci* $M^n_{\alpha,\beta}(\delta) \subset S^*$.

Teorema 4.1.4. [GIO11] *Fie* $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R}$ *reale,* $\alpha > 0$*,* $\beta > 0$*,* $0 \leq \delta < 1$*,* n *un număr întreg pozitiv şi fie* $\lambda \in (0, \lambda_1)$*, unde*

$$\lambda_1 = \frac{2\delta + 2\beta - 2 - \alpha n + \sqrt{(2\delta + 2\beta - 2 - \alpha n)^2 + 8\alpha\beta n}}{4\beta},\ \lambda_1 \in (0,1). \tag{4.1.4}$$

Dacă $f \in M^n_{\alpha,\beta}(\delta)$ *atunci* $f \in S^*(\lambda)$.

În lucrarea [GIO12] am studiat diferite subordonări diferenţiale pentru funcţiile din clasa $M^n_{\alpha,\beta}(\delta)$, obţinând cea mai bună dominantă în

Teorema 4.1.6. [GIO12] *Fie* n *un număr întreg,* $\alpha, \beta, \delta, \lambda$ *numere reale* $\alpha > 0$*,* $\beta \geq 1$*,* $0 \leq \delta < 1$*,* $\lambda \in (0, \lambda_1)$*, unde* λ_1 *este dat de (4.1.4). Dacă* $f \in M^n_{\alpha,\beta}(\delta)$*, atunci*

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec (1-\lambda)q(z) + 1$$

unde q *este dat de*

$$q(z) = \left[\frac{\beta(1-\lambda)}{\alpha}(1-z)^{\frac{2}{\alpha n}} \int_0^1 \frac{t^{\frac{\beta+\delta}{\alpha n}-1}\alpha n}{(1-tz)^{\frac{2}{\alpha n}}}\right]^{-1} - \frac{\lambda}{1-\lambda}.$$

Funcţia q *este cea mai bună dominantă.*

În Capitolul 5, "Strong differential subordinations", se defineşte noţiunea de tare subordonare diferenţială, noţiune introdusă în [An-Ro] de J.A. Antonino şi S. Romaguera, concept aplicat în mod special la subordonările de tip Briot-Bouquet.

Definiţia 5.1.1. [Ant], [An-Ro] Fie $H(z, \xi)$ analitică în $U \times \overline{U}$ şi $f(z)$ o funcţie analitică şi univalentă în U. Funcţia $H(z, \xi)$ este tare subordonată funcţiei $f(z)$ şi scriem $H(z, \xi) \prec\prec f(z)$, dacă pentru orice $\xi \in \overline{U}$, funcţia $H(z, \xi)$ de variabilă z este subordonată funcţiei $f(z)$.

Observaţia 5.1.1. a) Deoarece funcţia f este analitică şi univalentă, Definiţia 5.1.1 este echivalentă cu $H(0, \xi) = f(0)$ şi $\mathcal{H}(U \times \overline{U}) \subset f(U)$.

b) Dacă $H(z, \xi) \equiv H(z)$, atunci tare subordonarea diferenţială devine subordonare diferenţială.

În lucrarea [GIO-GhO9] am dezvoltat teoria generală a tare subordonărilor diferenţiale care poate fi formulată astfel:

Fie $\Omega, \Delta \subset \mathbb{C}$, fie funcţia $p \in \mathcal{H}(U)$, cu $p(0) = a$, $a \in \mathbb{C}$ şi $\psi : \mathbb{C}^3 \times \overline{U} \to \mathbb{C}$. Se pune problema studierii unor implicaţii de forma

$$\{\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z, \xi) \mid z \in U,\ \xi \in \overline{U}\} \subset \Omega \Rightarrow p(U) \subset \Delta. \tag{5.1.1}$$

Dacă mulţimile Ω şi Δ sunt domenii simplu conexe, atunci (5.1.1) se poate formula în termenii subordonării

$$\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z, \xi) \prec\prec h(U) \Rightarrow p(z) \prec q(z), \tag{5.1.2}$$

unde $h(U) = \Omega$, $q(U) = \Delta$, h şi q fiind transformări conforme.

Sunt prezentate adaptate acestei noţiuni: definiţia clasei de funcţii admisibile $\Psi_n[\Omega, q]$, lemele fundamentale precum şi teoremele necesare dezvoltării tare subordonărilor diferenţiale.

În paragraful 5.2 se defineşte noţiunea de tare subordonare diferenţială liniară.

Definiţia 5.2.1. [GIO-GhO10] O tare subordonare diferenţială de forma

$$A(z,\xi)zp'(z) + B(z,\xi)p(z) \prec\prec h(z),\ z \in U,\ \xi \in \overline{U},\ A, B : U \times \overline{U} \to \mathbb{C},$$

unde $A(z,\xi)zp'(z) + B(z,\xi)p(z)$ este analitică în U, pentru orice $\xi \in \overline{U}$, iar $h(z)$ este analitică şi univalentă în U, se numeşte tare subordonare diferenţială liniară de ordinul întâi.

În continuare sunt studiate tare subordonări diferenţiale liniare atât într-un disc cu centrul în origine cât şi în semiplanul drept.

În cazul discului am obţinut următorul rezultat.

Teorema 5.2.1. [GIO-GhO10] *Fie $p \in \mathcal{H}[0, n]$, $A, B : U \times \overline{U} \to \mathbb{C}$, cu $A(z,\xi)zp'(z) + B(z,\xi)p(z)$ analitici în U, pentru orice $\xi \in \overline{U}$ şi*

$$\mathrm{Re}\,[nA(z,\xi) + B(z,\xi)] \geq 1,\ \mathrm{Re}\,A(z,\xi) > 0.$$

Dacă

$$A(z,\xi)zp'(z) + B(z,\xi)p(z) \prec\prec Mz,\ z \in U,\ \xi \in \overline{U},$$

atunci

$$p(z) \prec Mz,\ z \in U,\ M > 0.$$

În cazul semiplanului am obţinut următorul rezultat.

Teorema 5.2.2. [GIO-GhO10] *Fie $p \in \mathcal{H}[1, 1]$, $A, B : U \times \overline{U} \to \mathbb{C}$, cu $A(z,\xi)zp'(z) + B(z,\xi)p(z)$, o funcţie analitică în U pentru orice $\xi \in \overline{U}$ şi $\mathrm{Re}\,(z,\xi) \geq 0$, $\mathrm{Im}\,B(z,\xi) \leq n\mathrm{Re}\,A(z,\xi)$. Dacă*

$$\mathrm{Re}\,[A(z,\xi)zp'(z) + B(z,\xi)p(z)] > 0,\ z \in U,\ \xi \in \overline{U}$$

atunci $\mathrm{Re}\,p(z) > 0$, $z \in U$.

În paragraful 5.3 se prezintă tare subordonarea diferenţială liniară de ordinul doi:

Definiţia 5.3.1. [GIO17] O tare subordonare diferenţială

$$A(z,\xi)z^2p''(z) + B(z,\xi)zp'(z) + C(z,\xi)p(z) + D(z,\xi) \prec\prec h(z),$$

unde $A, B, C, D : U \times \overline{U} \to \mathbb{C}$ şi $A(z,\xi)z^2p''(z) + B(z,\xi)zp'(z) + C(z,\xi)p(z) + D(z,\xi)$ o funcţie analitică în z pentru orice $\xi \in \overline{U}$, şi funcţia h analitică şi univalentă în U, se numeşte tare subordonare liniară de ordinul doi.

Sunt studiate aceste tare subordonări atât în discul cu centrul în origine cât şi în semiplanul drept.

Din tare subordonarea diferenţială liniară definită în semiplanul drept studiată în [GIO17]. Dacă $p \in \mathcal{H}[1, n]$ satisface tare subordonarea diferenţială

$$A(z,\xi)z^2p''(z) + B(z,\xi)zp'(z) + C(z,\xi)p(z) + D(z,\xi) \prec\prec \frac{1+z}{1-z},\ z \in U,\ \xi \in \overline{U}$$

atunci $\mathrm{Re}\,p(z) > 0$, $z \in U$ şi se obţin condiţii suficiente de univalenţă pentru funcţiile stelate, convexe, funcţii Mocanu, funcţii aproape-convexe înlocuind

$$p(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)},\ p(z) = 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)},\ p(z) = (1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)} + \alpha\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right]$$

şi $p(z) = f'(z)$, $z \in U$, în discul unitate.

În paragraful 5.4 se definesc tare subordonările diferenţiale neliniare de ordinul doi.

Definiţia 5.4.1. [GIO-GhO11] O tare subordonare de forma

$$A(z,\xi)z^2p''(z) + B(z,\xi)zp'(z) + C(z,\xi)p(z) + D(z,\xi)p^2(z) + E(z,\xi) \prec\prec h(z),$$

unde $A, B, C, D, E : U \times \overline{U} \to \mathbb{C}$, iar $A(z,\xi)z^2p''(z) + B(z,\xi)zp'(z) + C(z,\xi)p(z) + D(z,\xi)p^2(z) + E(z,\xi)$ este o funcţie analitică în z pentru orice $\xi \in \overline{U}$, şi h o funcţie analitică şi univalentă în U, se numeşte tare subordonare neliniară de ordinul doi.

Sunt studiate atât tare subordonările diferenţiale în discul cu centrul în origine cât şi în semiplanul drept.

Tare subordonarea neliniară definită în semiplanul drept a fost studiată în [GIO-GhO11].

Dacă $p \in \mathcal{H}[1, n]$ şi satisface inegalitatea

$$\mathrm{Re}\,[A(z,\xi)z^2p''(z) + B(z,\xi)zp'(z) + C(z,\xi)p(z) + D(z,\xi)p^2(z) + E(z,\xi)] > 0,\ z \in U,\ \xi \in \overline{U},$$

atunci

$$\mathrm{Re}\,p(z) > 0,\ z \in U.$$

Din acest studiu se obţin condiţii suficiente de univalentă pentru funcţiile stelate, convexe, funcţii Mocanu, funcţii aproape convexe, înlocuind

$$p(z)=\frac{zf'(z)}{f(z)},\ p(z)=1+\frac{zf''(z)}{f'(z)},\ p(z)=(1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)}+\alpha\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right),\ p(z)=f'(z),\ z\in U,$$

în discul unitate.

În paragraful 5.5 se prezintă clasele de funcţii a căror coeficienţi devin funcţii olomorfe de variabilă ξ introduse în lucrarea [GIO20] după cum urmează:

Notăm

$$\mathcal{H}^*[a,n,\xi]=\{f\in\mathcal{H}(U\times\overline{U})\mid f(z,\xi)=a+a_n(\zeta)z^n+a_{n+1}(\xi)z^{n+1}+\dots,\ z\in U,\ \xi\in\overline{U}\},$$

cu $a_k(\xi)$ funcţii olomorfe în $\overline{U}$, $k\geq n$,

$$\mathcal{H}_u(U\times\overline{U})=\{f\in\mathcal{H}^*[a,n,\xi]\mid f(z,\xi)\text{ univalentă în }U,\text{ pentru orice }\xi\},$$

$$A\xi_n=\{f(z,\xi)\in\mathcal{H}(U\times\overline{U})\mid f(z,\xi)=z+a_{n+1}(\xi)z^{n+1}+\dots,\ z\in U,\ \xi\in\overline{U}\},$$

cu $a_k(\xi)$ funcţii olomorfe în $\overline{U}$, $k\geq n+1$ şi $A\xi_1=A\xi$,

$$\mathcal{H}_u(U)=\{f(z,\xi)\in\mathcal{H}_\xi[a,n]\mid f(z,\xi)\text{ este univalentă în }U,\text{ pentru orice }\xi\in\overline{U}\},$$

$$S\xi=\{f(z,\xi)\in A\xi_n\mid f(z,\xi)\text{ univalentă în }U,\text{ pentru orice }\xi\in\overline{U}\},$$

$$S^*\xi=\left\{f(z,\xi)\in A\xi\mid \operatorname{Re}\frac{z\dfrac{\partial f}{\partial z}(z,\xi)}{f(z,\xi)}>0,\ z\in U,\ \xi\in\overline{U}\right\},$$

clasa funcţii stelate în $\mathcal{H}(U\times\overline{U})$,

$$K\xi=\left\{f(z,\zeta)\in A\xi\mid \operatorname{Re}\frac{z\dfrac{\partial^2 f(z,\xi)}{\partial z^2}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}(z,\xi)}+1>0,\ z\in U,\ \xi\in\overline{U}\right\},$$

clasa funcţiilor convexe în $\mathcal{H}(U\times\overline{U})$,

$$A(p)\xi=\left\{f(z,\xi)\in\mathcal{H}(U\times\overline{U})\mid f(z,\xi)=z^p+\sum_{k=p+1}^{\infty}a_k(\xi)z^k,\ p\in\mathbb{N},\ z\in U,\ \xi\in\overline{U}\right\},$$

şi $A(1)\xi=A\xi$.

În lucrarea [GIO24] am studiat tare subordonările neliniare de forma

$$A(z,\xi)zp'(z)+B(z,\xi)p(z)+C(z,\xi)p^2(z)+D(z,\xi)\prec\prec h(z),$$

unde $A(z,\xi)zp'(z)+B(z,\xi)p(z)+C(z,\xi)p^2(z)+D(z,\xi)$ este o funcţie analitică în U, pentru orice $\xi\in\overline{U}$ şi funcţia h este analitică şi univalentă în U.

Din tare subordonarea diferenţială studiată în semiplanul drept

$$\operatorname{Re}\left[A(z,\xi)zp'(z)+B(z,\xi)p(z)+C(z,\xi)p^2(z)+D(z,\xi)\right]>0$$

care implică $\operatorname{Re}p(z)>0$ se obţin condiţii suficiente de univalenţă pentru funcţiile stelate, convexe, funcţii Mocanu (α-convexe), funcţii aproape convexe, înlocuind

$$p(z)=\frac{zf'(z)}{f(z)},\ p(z)=1+\frac{zf''(z)}{f'(z)},\ p(z)=\frac{(1-\alpha)zf'(z)}{f(z)}+\alpha\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)$$

şi $p(z)=f'(z)$, $z\in U$, în discul unitate.

În paragraful 5.6 se prezintă studiul tare subordonărilor diferenţiale de tipul Briot-Bouquet. S-au demonstrat teoremele necesare dezvoltării acestor tare subordonări diferenţiale, pentru a obţine dominante şi cea mai bună dominantă.

Mai întâi se prezintă tare subordonări diferenţiale publicate în [GIO22] şi obţinute folosind operatorii integrali:

$$L_\gamma^m f(z,\xi)=\frac{\gamma+1}{z^\gamma}\int_0^z L_\gamma^{m-1}f(t,\xi)t^{\gamma-1}dt$$

şi

$$H^m f(z,\xi) = \frac{p+1}{z}\int_0^z H^{m-1} f(t,\xi)dt.$$

În capitolul şase, ”Tare superordonări diferenţiale” sunt prezentate rezultatele conţinute în lucrarea [GIO16]. În această lucrare am introdus pentru prima oară noţiunea de tare superordonare diferenţială ca şi concept dual celui de tare subordonare diferenţială după modelul introducerii noţiunii de superordonare dat de profesorii Miller şi Mocanu în [Mi-Mo10]. Forma generală a acestei teorii poate fi dată pe scurt după cum urmează:

Fie Ω şi Δ două submulţimi a mulţimii $\mathbb{C}$, p analitică în discul unitate U, şi fie $\varphi : (r,s,t;\xi) : \mathbb{C}^3 \times U \times \overline{U} \to \mathbb{C}$.

Se pune problema studierii unor implicaţii de forma:

$$\Omega \subset \{\varphi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z, \xi) : \ z \in U, \ \xi \in \overline{U}\} \Rightarrow \Delta \subset p(U). \tag{6.1.1}$$

În cazul când Ω şi Δ sunt domenii simplu conexe din $\mathbb{C}$, diferite de $\mathbb{C}$, atunci există reprezentările conforme $q : U \to \Delta$, $q(U) = \Delta$, $q(0) = p(0)$ şi $h : U \to \Omega$, $h(U) = \Omega$, $h(0) = \varphi(p(0), 0, 0; 0, \xi)$. Dacă în plus funcţiile p şi $\varphi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z, \xi)$ sunt univalente în U, pentru orice $\xi \in \overline{U}$, atunci implicaţia (6.1.1) se poate reformula în termenii subordonării:

$$h(z) \prec\prec \varphi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z, \xi) \Rightarrow q(z) \prec p(z), \ z \in U. \tag{6.1.2}$$

Observaţia 6.1.1. Implicaţia (6.1.2) are loc şi dacă h şi q sunt numai funcţii analitice.

În continuare sunt prezentate definiţiile, lemele şi teoremele necesare dezvoltării acestei teorii introduse în [GIO16].

Voi menţiona aici definiţia clasei funcţiilor admisibile:

Definiţia 6.1.3. [GIO16] Fie Ω o submulţime a mulţimii numerelor complexe, $q \in \mathcal{H}[a,n]$, cu $q'(z) \neq 0$. Vom numi clasa funcţiilor admisibile, notată $\Phi_n[\Omega, q]$, formată din funcţiile $\varphi : \mathbb{C}^3 \times U \times \overline{U} \to \mathbb{C}$ care satisfac condiţia de admisibilitate

$$\varphi(r,s,t;\zeta,\xi) \in \Omega \tag{A'}$$

unde $r = q(z)$, $s = \dfrac{zq'(z)}{m}$

$$\operatorname{Re}\left[\frac{t}{s} + 1\right] \leq \frac{1}{m}\operatorname{Re}\left[\frac{zq''(z)}{q'(z)} + 1\right],$$

$z \in U$, $\xi \in \overline{U}$, $\zeta \in \partial U \setminus E(q)$ şi $m \geq n \geq 1$. Pentru $n = 1$, vom scrie $\Phi_1[\Omega, q] = \Phi[\Omega, q]$.

Dacă $\varphi : \mathbb{C}^2 \times U \times \overline{U} \to \mathbb{C}$, atunci condiţia de admisibilitate (A') devine

$$\varphi\left(q(z), \frac{zq'(z)}{m}; \zeta, \xi\right) \in \Omega \tag{A''}$$

unde $z \in U$, $\zeta \in \partial U \setminus E(q)$, $\xi \in \overline{U}$ şi $m \geq n \geq 1$.

Teorema 6.1.1. [GIO16] *Fie $\Omega \subset \mathbb{C}$, $q \in \mathcal{H}[a,n]$ şi fie $\varphi \in \Phi_n[\Omega, q]$. Dacă $p \in Q(a)$ şi $\varphi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z, \xi)$ este o funcţie univalentă în U, pentru orice $\xi \in \overline{U}$, atunci*

$$\Omega \subset \{\varphi(p(z), zp'(z), z^2p''(z)); z \in U, \ \xi \in \overline{U}\}$$

implică

$$q(z) \prec\prec p(z), \ z \in U.$$

În paragraful 6.2 este prezentată tare superordonarea diferenţială de ordinul întâi:

Definiţia 6.2.1. [GIO15] Se numeşte tare superordonare de ordinul întâi, o superordonare de forma

$$h(z) \prec\prec A(z,\xi)zp'(z) + B(z,\xi)p(z), \ z \in U, \ \xi \in \overline{U}, \tag{6.2.1}$$

unde h este o funcţie analitică în U, şi $A(z,\xi)zp'(z) + B(z,\xi)p(z)$ este o funcţie univalentă în U, pentru orice $\xi \in \overline{U}$.

Observaţia 6.2.1. Dacă $A(z,\xi) = B(z,\xi) \equiv 1$, atunci (6.2.1) devine

$$h(z) \prec zp'(z) + p(z), \ z \in U$$

o superordonare diferenţială studiată de S.S. Miller şi P.T. Mocanu în [Mi-Mo10].

Dacă $A(z,\xi) \equiv 1$ şi $B(z,\xi) \equiv 0$, atunci (6.2.1) devine

$$h(z) \prec zp'(z), \ z \in U,$$

superordonarea diferenţială studiată de S.S. Miller, P.T. Mocanu în [Mi-Mo10].

În continuare sunt prezentate mai multe teoreme legate de această noţiune, cum ar fi:

Teorema 6.2.1. [GIO15] *Fie* $\Omega \subset \mathbb{C}$, $q \in \mathcal{H}[a,n]$, $\varphi : \mathbb{C}^2 \times U \times \overline{U} \to \mathbb{C}$ *şi presupunem că* $\varphi(q(z), tzq'(z); \zeta, \xi) \in \Omega$, *pentru* $z \in U$, $\zeta \in \partial U \setminus E(q)$, $\xi \in \overline{U}$ *şi* $0 < t < \frac{1}{n} \leq 1$. *Dacă* $p \in Q(a)$ *şi* $\varphi(p(z), zp'(z); z, \xi)$ *este o funcţie univalentă în* U, *pentru orice* $\xi \in \overline{U}$, *atunci*

$$\Omega \subset \{\varphi(p(z), zp'(z); z),\ z \in U,\ \xi \in \overline{U}\}$$

implică

$$q(z) \prec p(z).$$

În paragraful 6.3 se prezintă diferite tare superordonări diferenţiale folosind ca metodă de demonstraţie lanţurile de subordonare Loewner.

Definiţia 6.3.1. [GIO18] Funcţia $L : U \times \overline{U} \times [0, \infty) \to \mathbb{C}$ se numeşte lanţ de subordonare Loewner, dacă $L(z, \xi; t)$ este o funcţie analitică şi univalentă în U, pentru orice $\xi \in \overline{U}$, $t \geq 0$, $L(z, \xi; t)$ este diferenţiabilă în $\mathbb{R}^+$ pentru $z \in U$, $\xi \in \overline{U}$ şi $L(z, \xi; s) \prec\prec L(z, \xi; t)$, unde $0 \leq s \leq t$.

Lema 6.3.1. [GIO18] *Fie funcţia* $L(z, \xi; t) = a_1(\xi, t) + a_2(\xi, t)z^2 + \ldots$, *cu* $a_1(\xi, t) \neq 0$, *pentru orice* $\xi \in \overline{U}$, $t \geq 0$ *şi* $\lim\limits_{t \to \infty} |a_1(\xi, t)| = \infty$. *Atunci funcţia* $L(z, \xi; t)$ *este un lanţ de subordonare Loewner, dacă*

$$\operatorname{Re} z \cdot \frac{\partial L(z, \xi; t)/\partial z}{\partial L(z, \xi; t)/\partial t} > 0,\ z \in U,\ \xi \in \overline{U},\ t \geq 0.$$

În această lucrare am studiat tare superordonări diferenţiale pentru funcţii din clasele de funcţii definite în [GIO20].

Teorema 6.3.1. [GIO18] *Fie* $q(z, \xi) \in \mathcal{H}^*[a, 1, \xi]$, *fie* $\varphi : \mathbb{C}^2 \times U \times \overline{U} \to \mathbb{C}$ *şi fie*

$$\varphi(q(z, \xi), zq'(z, \xi)) \equiv h(z, \xi),\ z \in U,\ \xi \in \overline{U}.$$

Dacă $L(z, \xi; t) = \varphi(q(z, \xi), tzq'(z, \xi))$ *este un lanţ de subordonare şi* $p \in \mathcal{H}^*[a, 1, \xi] \cap Q_\xi$, *atunci*

$$h(z, \xi) \prec\prec \varphi(p(z, \xi), zp'(z, \xi))$$

implică

$$q(z, \xi) \prec\prec p(z, \xi),\ z \in U,\ \xi \in \overline{U}.$$

Dacă $\varphi(q(z, \xi), zq'(z, \xi)) = h(z, \xi)$ *are o soluţie univalentă* $q(z, \xi) \in Q_\xi$, *atunci* $q(z, \xi)$ *este cea mai bună subordonată.*

În paragraful 6.4, folosind operatorii integrali definiţi în paragraful 5.7, se prezintă tare superordonări diferenţiale de forma:

Teorema 6.4.1. [GIO22] *Fie* $h(z, \xi)$ *o funcţie convexă în* U, *pentru orice* $\xi \in \overline{U}$, $h(0, \xi) = a$. *Presupunem că ecuaţia diferenţială*

$$q(z, \xi) + \frac{zq'_z(z, \xi)}{q(z, \xi)} = h(z, \xi),\ z \in U,\ \xi \in \overline{U}$$

are o soluţie univalentă $q(z, \xi)$ *care satisface* $q(0, \xi) = a$ *şi* $q(z, \xi) \prec\prec h(z, \xi)$.

Dacă $p(z, \xi) \in \mathcal{H}[a, 1] \cap Q_\xi$ *şi* $p(z, \xi) + \frac{zp'_z(z, \xi)}{p(z, \xi)}$ *este univalentă în* U, *pentru orice* $\xi \in \overline{U}$, $f(z, \xi) \in A\xi$, *atunci*

$$h(z, \xi) \prec\prec \frac{L_\gamma^m f(z, \xi)}{z} + \frac{z[L_\gamma^m f(z, \xi)]'_z}{L_\gamma^m f(z, \xi)} - 1$$

implică

$$q(z, \xi) \prec\prec \frac{L_\gamma^m f(z, \xi)}{z},\ z \in U,\ \xi \in \overline{U}.$$

Funcţia $q(z, \xi)$ *este cea mai bună subordonantă.*

Importanţa rezultatelor cuprinse în teza de abilitare este dovedită de numărul mare al citărilor în lucrările cercetătorilor din acest domeniu care activează în ţară şi în străinătate, peste 80 de citări în reviste cotate ISI dintre care 42 în reviste cu factor de impact mai mare de 0,500 şi alte peste 80 de citări în reviste indexate BDI.

Ca direcţii de cercetare viitoare îmi propun continuarea studierii proprietăţilor de stelaritate şi convexitate pentru operatori diferenţiali şi integrali şi continuarea studiului tare subordonărilor şi tare superordonărilor diferenţiale. Tare subordonările diferenţiale şi tare superordonările diferenţiale s-au dovedit a fi noţiuni de interes, lucrările unde au fost introduse aceste teme, [GIO-GhO9] respectiv [GIO16] fiind citate de peste 50, respectiv 30 de ori.

Bibliografie

[Ac-Ow] M. Acu, S. Owa, *Note on a class of starlike functions*, in Proceeding of the International Short Joint Work on Study on Calculus Operators in Univalent Function Theory, 1-10, RIMS, Kyoto, Japan, August 2006.

[Ahl1] L. Ahlfors, *Complex Analysis*, Mc Graw-Hill Book Comp., New York, 1966.

[Ahl2] L. Ahlfors, *Conformal Invariants*, Topics in Geometric Function Theory, Mc Graw-Hill Book Comp., New York, 1973.

[Al-O] F.M. Al-Oboudi, *On univalent functions defined by a generalized Sălăgean operator*, Ind. J. Math. Math. Sci., 2004, no. 25-28, 1429-1436.

[Al-Mo] H. Al-Amiri, P.T. Mocanu, *On certain subclass of meromorphic close-to-convex functions*, Bull. Math. Soc. Sc. Mat. Roumanie, 38(86)(1994), no. 1-2, 3-15.

[Alx] I.W. Alexander, *Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions*, Ann. of Math., 17(1915), 12-22.

[Ant] J.A. Antonino, *Strong differential subordination and applications to univalency conditions*, J. Korean Math. Soc., 43(2006), no. 2, 311-322.

[An-Ro] J.A. Antonino, S. Romaguera, *Strong differential subordination to Briot-Bouquet differential equations*, Journal of Differential Equations, 114(1994), 101-105.

[Au-Mo] M.K. Aouf, A.O. Mustafa, *On a subclass of $n-p$-valent prestarlike functions*, Comput. Math. Appl., 55(2008), 851-861.

[Baz] I.E. Bazilević, *On a case of integrability in quadratures of the Lovner-Kuforev equation* (limba rusă), Mat. Sb., N.S., 37(79)(1955), 471-476.

[Bec] J. Becker, *Lövnersche Differentialgleichung und quasikonform fortsetzbare schlichte Funktionen*, J. Reine Angew. Math., 255(1972), 23-43.

[Ber] S.D. Bernardi, *Convex and starlike univalent functions*, Trans. Amer. Math. Soc., 135(1969), 429-446.

[Bie1] L. Bieberbach, *Über einige Extremalprobleme im Gebiete der Konformem Abbildung*, Math. Ann., 77(1916), 153-172.

[Bie2] L. Bieberbach, *Über die Koeffizientem derjenigen Potenzreihen, welche eine Schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln*, Preuss Akad. Wiess Sitzungsb, 1916, 940-955.

[Bie-Lew] A. Bielecki, Z. Lewandrowski, *Sur un théorème concernant les fonctions univalentes linéairement accessible de M. Biernachi*, Ann. Polon. Math., 12(1962), 61-63.

[Bra] L. de Branges, *A proof of the Bieberbach conjecture*, Acta Math., 154(1985), 137-152.

[Br-Br] D. Breaz, N. Breaz, *Two integral operators*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Mathematica, Cluj-Napoca, 3(2002), 13-21.

[Bri] L. Brichmann, *ϕ-like analytic function I*, Bull. Amer. Math. Soc., 79(1973), 555-558.

[Bul] T. Bulboacă, *Differential subordinations and superordinations. Recent results*, Casa Cărţii de Ştiinţă, Cluj-Napoca, 2005.

[Car1] C. Carathéodory, *Über den Variabilitatsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene werte nicht annehmen*, Math. Ann., 64(1907), 95-115.

[Car2] C. Carathéodory, *Über den Variabilitatsbereich der Fourier schen Konstanten von positiven harmonischen Funktion*, Rend. Circ. Mat. Palermo, 32(1911), 193-217.

[Car3] C. Carathéodory, *Untersuchungen über die Konformen Abbildungen von testen und veränderlichen Gebieten*, Mat. Ann., 72(1912), 107-144.

[Ca-Wh] W.M. Causey, W.L. White, *Starlikeness of certain functions with integral representations*, JMAA, 64(1978), 458-466.

[Căl1] G. Călugăreanu, *Sur la condition nécessaire et suffisante pour l'univalence d'une fonction holomorphe dans un circle*, C.R. Acad. Sci. Paris, 193(1931), 1150-1153.

[Căl2] G. Călugăreanu, *Sur les conditions nécessaires et suffisantes pour l'univalence d'une fonction holomorphe dans un circle*, Mathematica, 6(1932), 75-79.

[Căl3] G. Călugăreanu, *Elemente de Teoria Funcţiilor de o Variabilă Complexă*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1963.

[Ch-Sc1] Z. Charzyński, M. Schiffer, *A geometric proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient*, Scripta Math., 25(1960), 173-181.

[Ch-Sc2] Z. Charzyński, M. Schiffer, *A new proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient*, Arch. Rational Mech. Anal., 5(1960), 187-193.

[Ch-Le-Ow] M.P. Chen, S.K. Lee, S. Owa, *A remark on certain regular functions*, Simon Stiven, 65(1991), no. 1-2, 23-30.

[Ch-Ow] M.P. Chen, S. Owa, *A property of certain analytic functions involving Ruscheweyh derivatives*, Proc. Japan Acad., Ser. A65(1989), no. 10, 333-335.

[Ch-Ki-GIO] N.E. Cho, T.H. Kim, *Multiplier transformations and strongly close-to-convex functions*, Bulletin of the Korean Mathematical Society, 40(2003), no. 3, 399-410.

[Ch-Ki] N.E. Cho, T.H. Kim, G.I. Oros, *Strong differential subordination and superordination for multivalent functions associated with the multiplier transformation* (to appear).

[Ch-Sr] N.E. Cho, H.M. Srivastava, *Argument estimates of certain analytic functions defined by a class of multiplier transformation*, Math. and Computer Modelling, 37(2003), no. 1-2, 39-49.

[Dar] H.E. Darwish, *A remark on p-valent functions of missing coefficients* (to appear).

[Dur] P.L. Duren, *Univalent Functions*, Springer, New York, 1983.

[Dz-Sr] J. Dziok, H.M. Srivastava, *Classes of analytic functions associated with the generalized hypergeometric function*, Appl. Math. Comput., 103(1999), 1-13.

[Ec-Mi-Mo] P. Ecnigenburg, S.S. Miller, P.T. Mocanu, M.O. Reade, *On a Briot-Bouquet differential subordination*, in General Inequalities 3, vol. 64 of International Schriftenreihe Numerische Mathematik, 339-348, Birkhäuser, Basel, Switzerland, 1983.

[Fr-GhO] B.A. Frasin, Gh. Oros, *Order of certain classes of analytic and univalent functions using Ruscheweyh derivative*, General Mathematics, 12(2004), no. 2, 3-10.

[Go-So] R.M. Goel, N.S. Sohi, *A new criterion for p-valent functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 78(1980), 353-357.

[Gol1] G.M. Goluzin, *On the majorization principle in function theory*, Dokl. Akad. SSSR, 42(1935), 647-649.

[Gol2] G.M. Goluzin, *Geometric Theory of Functions of a Complex Variable*, A.M.S. Transl. of Math. Monographs, 26(1969).

[Goo] A.W. Goodman, *Univalent Functions*, Mariner Publ. Comp. Tampa, Florida, 1983.

[Gro] T. Gronwall, *Some remarks on conformal representation*, Ann. of Math. (2), 16(1914-1915), 72-76.

[Gru] H. Grunsky, *Koeffizientenbedingugen für schlich abbildende meromorphe Funktionen*, Math. Z., 45(1939), 29-61.

[Ha-Ma] D.J. Hallenbeck, T.H. Mac Gregor, *Linear Problems and Convexity Technique in Geometric Function Theory*, Pitman Adv. Publ. Program, Boston-London-Merbourne, 1984.

[Ha-Mo-Ne] P. Hamburg, P.T. Mocanu, N. Negoescu, *Analiză matematică (Funcţii convexe)*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, Romania, 1982.

[Ha-Ru] D.J. Hallenbeck, St. Ruscheweyh, *Subordination by convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 52(1975), 191-105.

[Hil] E. Hille, *Ordinary differential equations in the complex plane*, John Wiley, New York, 1976.

[Ho-A1] A.A. Holhoş, *New class of univalent functions*, General Mathematics, vol. 13, nr. 4(2005), 33-38.

[Ho-A2] A.A. Holhoş, *Some properties of the classes of n-starlike functions*, Bull. Math. Soc. Sci. Math., Roumanie N.S. 49(97/2006), nr. 3, 247-252.

[Ho-Ho] A.A. Holhoş, V.C. Holhoş, *A remark on the Hadamard products of n-starlike functions*, General Mathematics, Univ. Lucian Blaga, Sibiu, vol. 12, 1(2004), 43-51.

[Ho-V] V.C. Holhoş, *Conditions for starlikeness and for convexity*, Mathematica, Tome 47(70), nr. 1(2005), 74-76.

[Jac] I.S. Jack, *Functions starlike and convex of order* α, J. London Math. Soc., 3(1971), 469-474.

[Ka-Or] M. Kamali, H. Orhan, *On a subclass of certain starlike functions with negative coefficients*, Bull. Korean Math. Soc., 41(2004), no. 1, 53-71.

[Kap] W. Kaplan, *Close to convex schlicht functions*, Michig. Math. J., 1, 2(1952), 169-185.

[Ki-Me] J.J. Kim, E.P. Merkes, *On an integral of powers of spirallike function*, Kyungpook Math. J., 12(1972), 249-253.

[Koe] P. Koebe, *Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven*, Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys., 1907, 191-210.

[Ki-Me-Ra] S.S. Kumar, H.C. Taneja, *Ravichandran classes of multivalent functions defined by Dziok-Srivastava linear operator and multiplier transformations*, Kyungpook Math., 46(2006), 281-305.

[Le-Mi-Zl] Z. Lewandowski, S.S. Miller, E. Zlotkiewicz, *Generating for some classes of univalent functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 56(1976), 111-117.

[Lib] R.J. Libera, *Some classes of regular univalent functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 16(1965), 755-758.

[Löw1] K. Löwner, *Untersuchungen über die verzerrung bei konformen Abbildungen des Einheitskreises* $|z| < 1$*, die durch Funktionen mit nichtverschwindender Ableitung geliefert werden*, S.B. Säschs Akad. Wiss. Leipzig, Berichte, 69(1917), 89-106.

[Löw2] K. Löwner, *Untersuchungen über schlichte Konforme Abbildungen des Einheitsckreises*, Math. Ann., 89(1923), 103-121.

[Mac] T.H. MacGregor, *A subordination for convex functions of order* α, Journal of the London Mathematical Society, 9(1975), no. 4, 530-536.

[Me-Wr] E.P. Merkes, D.J. Wright, *On univalent of certain integral*, Proc. Amer. Math. Soc., 27(1971), 97-100.

[Mi-Mo1] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *Second order differential inequalities in the complex plane*, J. Math. Anal. Appl., 65(1978), 298-305.

[Mi-Mo2] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *Differential subordinations and univalent functions*, Michigan Math. J., 28(1981), 157-171.

[Mi-Mo3] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *On some classes of first order differential subordinations*, Michigan Math. J., 32(1985), 185-195.

[Mi-Mo4] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *Differential subordinations and inequalities in the complex plane*, J. of Diff. Eqns., 67(1987), no. 2, 199-211.

[Mi-Mo5] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *The theory and applications of second order differential subordinations*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Math., 34(1989), no. 4, 3-33.

[Mi-Mo6] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *Classes of univalent integral operators*, J. Math. Anal. Appl., 157(1991), no. 1, 147-165.

[Mi-Mo7] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *Briot-Bouquet differential equations and differential subordinations*, Complex Variables, 33(1997), 217-237.

[Mi-Mo8] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *Differential subordination. Theory and application*, Marcel Dekker, Inc., New York, 2000.

[Mi-Mo9] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *Subordinants of differential superordinations*, Complex Variables, 48(2003), no. 10, 815-826.

[Mi-Mo10] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *Subordinants of differential superordinations*, Complex Variables, 48(2003), no. 10, 815-826.

[Mi-Mo11] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *Briot-Bouquet differential superordinations and sandwich theorem*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 329(2007), no. 1, 327-335.

[Mi-Mo-Re1] S.S. Miller, P.T. Mocanu, M.O. Reade, *On generalized convexity in conformal mappings II*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 21(1976), no. 2, 219-225.

[Mi-Mo-Re2] S.S. Miller, P.T. Mocanu, M.O. Reade, *A particular starlike integral operator*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, 22(1977), no. 2, 44-47.

[Mi-Mo-Re3] S.S. Miller, P.T. Mocanu, M.O. Reade, *Starlike integral operators*, Pacific Journal of Mathematics, 79(1978), no. 1, 157-168.

[Mi-Mo-Re4] S.S. Miller, P.T. Mocanu, M.O. Reade, *On some particular classes of starlike integral operators*, Babeş-Bolyai Univ., Fac. of Math., Seminar of Geometric Function Theory, Preprint nr. 4, 1982, 159-165.

[Moc1] P.T. Mocanu, *Une propriété de convexité generalisée dans la théorie de representation*m Mathematica (Cluj), 11(34)(1969), 127-133.

[Moc2] P.T. Mocanu, *On a close-to-convexity preserving integral operator*, Mathematica (Cluj), 2(1987), 49-52.

[Moc3] P.T. Mocanu, *Convexity and close-to-convexity preserving integral operator*, Mathematica (Cluj), 25(48), 2(1983), 177-182.

[Moc3] P.T. Mocanu, *On a class of first-order differential subordinations*, Babeş-Bolyai Univ., Fac. of Math., Res. Sem. on Mathematical Analysis, Preprint 7(1991), 37-46.

[Mo-Bu-Să] P.T. Mocanu, T. Bulboacă, G.S. Sălăgean, *Teoria geometrică a funcţiilor univalente*, Casa Cărţii de Ştiinţă, Cluj-Napoca, Romania, 1999.

[Neh] Z. Nehari, *Conformal mapping*, Dover, New York, NY, USA, 1975.

[Noo] K.I. Noor, *On quasi-convex functions and related topics*, Internat. J. Math. and Math. Sci., 10(2)(1987), 241-258.

[Or-Ki] H. Orhan, H. Kiziltunc, *A generalization on subfamily of p-valent function with negative coefficients*, Appl. Math. Comput., 155(2004), 521-530.

[GIO1] G.I. Oros, *Utilizarea subordonărilor diferenţiale în studiul unor clase de funcţii univalente*, Casa Cărţii de Ştiinţă, Cluj-Napoca, 2008.

[GIO2] G.I. Oros, *New differential subordinations and superordinations. Strong differential subordination, Strong differential superordination*, LAP Lambert Academic Publishing, 2011.

[GIO3] G.I. Oros, *Differential subordinations obtained by using Sălăgean operator*, J. of Approximation Th. and Applications, 2(2006), no. 2, 113-120.

[GIO4] G.I. Oros, *A new differential inequality*, Acta Universitatis Apulensis, 16(2008), 81-85.

[GIO5] G.I. Oros, *Briot-Bouquet differential superordinations and sandwich theorem*, Libertas Mathematica, 26(2006), 55-59.

[GIO6] G.I. Oros, *First order differential superordinations using the Dziok-Srivastava linear operator*, Math. Reports, 12(62), 1(2010), 37-44.

[GIO7] G.I. Oros, *An univalence preserving integral operator*, Journal of Inequalities and Applications, vol. 2008, art. ID 263408, 10 pages.

[GIO8] G.I. Oros, *On an univalent integral operator*, Int. J. Open Problems Complex Analysis, 1(2009), no. 2, 19-28.

[GIO9] G.I. Oros, *Applications of certain differential inequalities to the univalence of an integral operator*, Journal of Mathematical Inequalities, 3(2009), no. 4, 599-605.

[GIO10] G.I. Oros, *Briot-Bouquet differential subordinations and superordinations using Dziok-Srivastava differential operator*, Math. Reports, 11(61)(2009), no. 2, 155-163.

[GIO11] G.I. Oros, *A new class of univalent functions which extends the class of Mocanu functions*, Advances in Applied Mathematica Analysis, 1(2006), no. 2.

[GIO12] G.I. Oros, *On a new class of univalent functions which extends the class of Mocanu functions*, Proceeding Book of the International Symposium on Geometric Function Theory and Applications, August 20-24, 2007, Istanbul, Turkey, 161-168.

[GIO13] G.I. Oros, *New results related to the convexity and starlikeness of the Bernardi integral operator*, Hacetlepe Journal of Mathematics and Statistic, 38(2)(2009), 137-143.

[GIO14] G.I. Oros, *New results related to the starlikeness of Bernardi integral operator*, Complex Variables and Eliptic Equations, 54(2009), no. 10, 923-926.

[GIO15] G.I. Oros, *First order strong differential superordination*, General Mathematica, 15(2007), no. 2-3, 77-87.

[GIO16] G.I. Oros, *Strong differential superordination*, Acta Universitatis Apulensis, 19(2009), 101-106.

[GIO17] G.I. Oros, *Sufficient conditions for univalence obtained by using second order linear strong differential subordinations*, Turk J. Math., 34(2010), 13-20.

[GIO18] G.I. Oros, *An application of the subordination chain*, Fractional Calculus and Applied Analysis, 13(2010), no. 5, 521-530.

[GIO19] G.I. Oros, *Briot-Bouquet strong differential subordination*, Journal of Computational Analysis and Applications, 14(2012), no. 4, 733-737.

[GIO20] G.I. Oros, *On a new strong differential subordination*, Acta Universitatis Apulensis, 32(2012), 243-250.

[GIO21] G.I. Oros, *New results related to the convexity of the Bernardi integral operator*, Journal of Mathematical Inequalities, 7(2007), no. 3, 535-541.

[GIO22] G.I. Oros, *Strong differential subordinations and superordinations obtained with some new integral operators*, Advances in Difference Equations, 2013, 2013:317.

[GIO23] G.I. Oros, *A class of univalent functions obtained by a general multiplier transformation*, General Mathematics, 20(2012), no. 2-3, 74-85.

[GIO24] G.I. Oros, *Sufficient conditions for univalence obtained by using first order nonlinear strong differential subordinations*, Journal of Computational Analysis and Applications, 16(2014), no. 1, 149-152.

[GIO-GhO-Br] G.I. Oros, Gh. Oros, D. Breaz, *Sufficient conditions for univelance of an integral operator*, Journal of Inequalities and Applications, vol. 2008(2008), Art. ID 127645, 7 pages, doi:101155/2008/127645.

[GhO-GIO1] Gh. Oros, G.I. Oros, *Differential superordination defined by Ruscheweyh derivative*, Hokkaido Mathematical Journal, 36(2007), 1-8.

[GhO-GIO2] Gh. Oros, G.I. Oros, *An application of Briot-Bouquet differential subordinations*, Bul. Acad. Moldova, Chişinău, 50(2006), no. 1, 101-104.

[GhO-GIO3] Gh. Oros, G.I. Oros, *A class of univalent functions which extends the class of Mocanu functions*, Math. Reports, 10(60)(2008), no. 2, 165-168.

[GhO-GIO4] Gh. Oros, G.I. Oros, *On a class of univalent functions which extends the class of Mocanu functions*, P.U.M.A., 17(2006), no. 3-4, 379-385.

[GhO-GIO5] Gh. Oros, G.I. Oros, *Convexity condition for the Libera integral operator*, Complex Variables and Eliptic Equations, 51(2006), no. 1, 69-75.

[GhO-GIO6] Gh. Oros, G.I. Oros, *On a special differential inequality*, Acta Universitatis Apulensis, Proceeding of the International Conference on Theory and Applications of Mathematics and Informatics - ICTAMI 2003, Alba Iulia, Part B, 177-182.

[GIO-GhO1] G.I. Oros, Gh. Oros, *On univalent functions defined by a generalized Sălăgean operator*, Proceeding of the Sixth Congres of Romanian Mathematicians, Bucharest, 2007, vol. 1, 179-184.

[GIO-GhO2] G.I. Oros, Gh. Oros, *On a class of univalent functions defined by a generalized Sălăgean operator*, Complex Variables and Elliptic Equations, 53(2008), no. 9, 869-877.

[GIO-GhO3] G.I. Oros, Gh. Oros, *Differential subordinations obtained by using generalized Sălăgean operator*, Journal of Approximation Theory and Applications, 3(2007), no. 1-2, 75-84.

[GIO-GhO4] G.I. Oros, Gh. Oros, *The study of a class of univalent functions*, Journal of Approximation Theory and Applications, 2(2006), no. 2, 103-111.

[GIO-GhO5] G.I. Oros, Gh. Oros, *Differential subordinations obtained by using generalized Sălăgean and Ruscheweyh operators*, Acta Universitatis Apulensis, 14(2007), 129-140.

[GIO-GhO6] G.I. Oros, Gh. Oros, *A convexity property for an integral operator* F_m, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Mathematica, LV(2010), no. 3, 169-177.

[GIO-GhO7] G.I. Oros, Gh. Oros, *Subordinations and superordinations using the Dziok-Srivastava linear operator*, Journal of Math. and Application, 31 (2009), 99-106.

[GIO-GhO8] G.I. Oros, Gh. Oros, *On a convexity preserving integral operator*, Fractional Calculus Applied Analysis, 13(2010), no. 5, 531-536.

[GIO-GhO9] G.I. Oros, Gh. Oros, *Strong differential subordination*, Turk J. Math., 33(2009), 249-257.

[GIO-GhO10] G.I. Oros, Gh. Oros, *First order linear strong differential subordinations*, General Mathematics, 15(2007), no. 2-3, 98-107.

[GIO-GhO11] G.I. Oros, Gh. Oros, *Second-order non-linear strong differential subordinations*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, 16(2009), 171-178.

[GIO-GhO12] G.I. Oros, Gh. Oros, *Second order differential subordinations and superordinations using the Dziok-Srivastava linear operator*, Mathematica, 54(77)(2012), 155-164.

[GIO-GhO13] G.I. Oros, Gh. Oros, *On a first order nonlinear differential subordination in the right half-plane*, Proceeding Book of the International Symposion on Geometric Function Theory and Applications, August 20-24, 2007, Istanbul, Turkey, 161-168.

[GIO-Că-GhO] G.I. Oros, A. Cătaş, Gh. Oros, *On certain subclasses of meromorphic close-to-convex functions*, Hindawi Publishing Corporation Journal of Inequalities and Applications, vol. 2008, art. ID246909, 12 pages, doi:101155/2008/246909.

[GIO-GhO-Ki-Ch] G.I. Oros, Gh. Oros, In Hwa Kim, N.E. Cho, *Differential subordinations associated with the Dziok-Srivastava operator*, Math. Reports, 13(63), 1(2011), 57-64.

[GIO-GhO-Ow] G.I. Oros, Gh. Oros, S. Owa, *Differential subordinations on p-valent functions of missing coefficients*, International Journal of Applied Mathematics, 22(2009), no. 6, 1021-1030.

[GIO-Că-GhO] G.I. Oros, A. Cătaş, Gh. Oros, *On certain subclasses of meromorphic close-to-convex functions*, Hindawi Publishing Corporation Journal of Inequalities and Applications, vol. 2008, art. ID246909, 12 pages, doi:101155/2008/246909.

[Tă-GIO-Şe] A.O. Tăut, G.I. Oros, R. Şendruţiu, *On a class of univalent functions defined by Sălăgean differential operator*, Banach J. Math. Anal., 3(2009), no. 1, 61-67.

[GhO-Tă] Gh. Oros, A.O. Tăut, *Best subordinants of the strong differential superordination*, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistic, 38(3)(2009), 293-298.

[Ow-Pa-Pe] S. Owa, N.N. Pascu, V. Pescar, *Univalence of certain analytic functions*, Applications of Complex Function Theory to Differential Equations, Kyoto Univ., 9(1999), 106-112.

[Ow-Fu-Sa-Og] S. Owa, S. Fukui, X. Sakaguchi, S. Ogawa, *An application of the Ruscheweyh derivatives*, Internat. J. Math. and Math. Sci., 9(4)(1986).

[Oz-Nu] S. Ozaki, M. Nunokawa, *The Schwartzian derivative and univalent functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 33(2)(1972), 392-394.

[Pap] M. Papp, *On certain subclass of meromorphic m-valent close-to-convex functions*, PU.M.A. 9(1998), no. 1-2, 155-163.

[Pas1] N.N. Pascu, *An improvement of Becher's univalence criterion*, Proceedings of the Commemorative Session Simion Stoilow, Braşov, 1978, 43-48.

[Pas2] N.N. Pascu, *Alpha-close-to-convex functions*, Romanian Finish Seminar on Complex Analysis, Springer, Berlin, 1979, 331-335.

[Pas3] N.N. Pascu, *On a univalence criterion II*, Itinerant Seminar on Functional Equation, Approximation and Convexity, Cluj-Napoca, Preprint 6(1985), 153-154.

[Pa-Pe] N.N. Pascu, V. Pescar, *On the integral operators of Kim-Merkes and Pfaltzgraff*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Mathematica, 32(55)(1990), no. 2, 185-192.

[Pa-Ra] N.N. Pascu, I. Radomir, *A generalization of Ahlfors's and Becher's criterion of univalence*, Preprint no. 5, 1986, Babeş-Bolyai Univ., Fac. of Math., Research Seminaries, Cluj-Napoca.

[Pat] J. Patel, *Inclusion relations and convolution properties of certain subclasses of analytic functions defined by generalized Sălăgean operator*, Bulletin of the Belgian Mathematical Society, Simion Stevin, 15(2008), no. 1, 33-47.

[Pa-Ch-Sr] J. Patel, N.E. Cho, H.M. Srivastava, *Certain subclasses of multivalent functions associated with a family of linear operators*, Mathematical and Computer Modelling, 43(2006), no. 3-4, 320-338.

[Pes1] V. Pescar, *On some integral operator which preserve the univalence*, Punjab University Journal of Mathematics, 30(1997), 1-10.

[Pes2] V. Pescar, *Sufficient conditions for univalence*, General Mathematics, 2(1994), no. 3, 139-144.

[Pes3] V. Pescar, *On the univalence of some integral operators*, General Mathematics, 14(2006), no. 2, 77-84.

[Pe-Ow] V. Pescar, S. Owa, *Sufficient conditions for univalence of certain integral operator*, Indian J. Math., 42(2000), no. 3, 347-351.

[Pom] Ch. Pommerenke, *Univalent functions*, Vanderhoeck and Ruprecht, Göttingen.

[Pon] S. Ponnusany, *Differential subordination and starlike functions*, Complex Var. Theory Appl., 19(1992), 185-194.

[Rob] R.M. Robinson, *Univalent majorants*, Trans. Amer. Math. Soc., 61(1947), 1-35.

[Rob1] M.S. Robertson, *A remark on the odd schlicht functions*, Bull. Amer. Math. Soc., 42(1936), 366-370.

[Rob2] M.S. Robertson, *Analytic functions starlike in one direction*, Amer. J. Math., 58(1936), 465-472.

[Rob3] M.S. Robertson, *On the theory of univalent functions*, Ann. Math., 37(1936), 374-408.

[Roy] W.C. Royster, *Convexity and starlikeness of analytic functions*, Duke Math. J., 19(1952), 447-457.

[Ru1] S. Ruscheweyh, *New criteria for univalent functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 49(1975), 109-115.

[Ru2] S. Ruscheweyh, *An extension of Becker's univalence condition*, Math. Ann., 220(1976), 285-290.

[Ur-So] B.A. Uralegaddi, C. Somanatha, *Certain classes of univalent functions in Current Topics*, in Analytic Function Theory, World Scientific, River Edge, NJ, USA, 1992, 371-374.

[Sa] K. Sakaguchi, *A note on p-valent functions*, J. Math. Soc. Japan, 14(1962), 312-321.

[Săl1] G.S. Sălăgean, *Subclasss of univalent functions*, in Complex Analysis, Proceedings of the Romanian Finish Seminar, Part 1 (Bucharest, 1981), vol. 1013 of Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin, Germany, 362-372.

[Săl2] G.S. Sălăgean, *Properties of starlikeness and convexity preserved by some integral operators*, Romanian Finish Seminar on Complex Analysis (Proc. Bucharest, 1976), Lecture Notes in Mathematics, 743, Springer, Berlin, 1979, 362-372.

[Sch1] M. Schiffer, *Faber polynomials in the theory of univalent functions*, Bull. Amer. Math. Soc., 54(1948), 503-517.

[Sch2] M. Schiffer, *Sur un problème d'extrémum de la representation conforme*, Bull. Soc. Math. France, 66(1938), 48-55.

[Sin] R. Singh, *On Bazilevic functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 38(1973), 261-271.

[Siv] S. Sivaprasad, Kumar, H.C. Taneja, V. Ravichandran, *Classes of multivalent functions defined bu Dziok-Srivastava linear operator and multiplier transformation*, Kyungpook Mathematical Journal, 46(2006), no. 1, 97-109.

[Sr-Ow-Pa] H.M. Srivastava, S. Owa, D.Z. Pashkuleva, *Some inequalities associated with a class of regular functions*, Utilitas Math., 34(1988), 163-168.

[Sr-Su-St-Si] H.M. Srivastava, K. Suchithra, A. Stephen, B. Sivasubramanian, *Inclusion and neighborhood properties of certain subclasses of multivalent functions of complex order*, J. Ineq. Pure Appl. Math., 7(6)(2006), 1-8.

[Sto] S. Stoilov, *Teoria funcţiilor de variabilă complexă*, vol. I, Editura Academiei, 1954, vol. II, Editura Academiei, 1958, Bucureşti.

[Str] E. Strohhäcker, *Beitrage zur Theorie der Schlichten Funktionen*, Math. Z., 37(1933), 353-380.

[Suf] T.J. Suffridge, *Some remarks on convex maps of the unit disc*, Duke Math. J., 37(1970), 775-777.

[Şe-GIO] R. Şendruţiu, G.I. Oros, *Sufficient conditions for univalence of certain integral operator*, Acta Univ. Apulensis, 9(2012), 287-293.

[Ur-So] B.A. Uralegaddi, Somanatha, *Certain classes of univalent functions*, In Current Topics in Analytic Function Theory, World Scientific Publishing Company, Singapore, 1992, 371-374.

[Wh-Wa] E.T. Whittaker, G.N. Watson, *A course of modern analysis: An introduction to the general theory of infinite processes and of analytic functions with an account of the principal transcendental functions*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 4 edition, 1927.

[Wi-Fe] D.R. Wilken, J. Feng, *A remark on convex and starlike functions*, Journal of the London Mathematical Society, Second Series, 21(1980), no. 2, 287-290.