Universitatea Babeş-Bolyai

Raza de stelaritate şi convexitate a unor funcţii speciale

Rezumatul tezei de abilitare

Árpád Baricz, PhD

Cluj-Napoca, 2017

Introducere

Obiectivul acestei teze este prezentarea unor rezultate principale a autorului în legătură cu proprietăţile geometrice a unor funcţii speciale ca şi funcţia Bessel, q-Bessel, Struve şi Lommel de prima speţă. Caracteristica comună ale acestor funcţii constă în faptul că aceste funcţii sunt întregi având coeficienţii seriei Taylor exprimate explicit şi având toate zerourile reale pentru parametrii corespunzători. Pentru a studia proprietăţile geometrice a funcţiilor speciale menţionate anterior folosim metode de bază a analizei complexe şi a funcţiilor întregi reale.

Teza cuprinde opt secţiuni. Primele două secţiuni conţin descrierea precisă a razelor de stelaritate şi convexitate a trei feluri de funcţii Bessel normalizate de prima speţă, iar secţiunea a treia conţine q-analogia rezultatelor primelor două secţiuni pentru funcţiile q-Bessel de tip Jackson şi Hahn-Exton (sau a treia Jackson). Secţiunea a patra este devotată studiului razelor de stelaritate a funcţiilor Struve şi Lommel de prima speţă. În secţiunea a cincea studiem o combinaţie liniară a funcţiilor Bessel de prima speţă, numită funcţie Dini şi demonstrăm nişte rezultate interesante în legătură cu aproape convexitatea acestei funcţii. Secţiunile şase şi şapte sunt devotate rezultatelor auxiliare în legătură cu funcţiile Bessel, q-Bessel, Struve şi Lommel. Aici rezultatele legate de zerourile funcţiilor sus menţionate sunt importante şi în sine, chiar dacă au fost deduse pentru a demonstra rezultatele secţiunilor a doua, a treia şi a patra. În final, ultima secţiune conţine observaţii, concluzii finale şi o scurtă descriere a impactului rezultatelor obţinute. În această secţiune este prezentată pe scurt evoluţia profesională, ştiinţifică a autorului.

Teza este bazată pe articolele publicate [BDY, 2016], [BDM, 2016], [BDOY, 2016], [BKS, 2014] şi [BS, 2014].

Rezumatul tezei de abilitare conţine rezultatele principale (fără demonstraţie) pentru primele cinci secţiuni. Rezultatele auxiliare a secţiunilor şase şi şapte, precum şi conţinutul secţiunii a opta nu sunt prezentate în acest rezumat.

Martie, 2017 — Árpád Baricz

RAZA DE STELARITATE ŞI CONVEXITATE A UNOR FUNCŢII SPECIALE

1. Raza de stelaritate a funcţiilor Bessel normalizate

În această secţiune determinăm raza de stelaritate a funcţiilor Bessel normalizate pentru trei tipuri de normalizări. Seria Mittag-Leffler cu privire la funcţii Bessel, precum şi rezultatul lui Ismail şi Muldoon [IM, 1995] asupra zerourilor funcţiilor Bessel de prima speţă, joacă un rol important în demonstraţii.

Fie $\mathbb{D}(0,r)$ discul $\{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$, unde $r > 0$, şi fie $\mathbb{D} = \mathbb{D}(0,1)$. Prin $\mathcal{A}$ înţelegem clasa funcţiilor analitice $f : \mathbb{D}(0,r) \to \mathbb{C}$ care satisfac condiţiile $f(0) = f'(0) - 1 = 0$. Denotăm cu $\mathcal{S}$ clasa funcţiilor din $\mathcal{A}$ care sunt univalente în $\mathbb{D}(0,r)$ şi fie $\mathcal{S}^*(\alpha)$ (subclasa lui $\mathcal{S}$) a funcţiilor stelate de ordin α în $\mathbb{D}(0,r)$, unde $0 \leq \alpha < 1$. Caracterizarea analitică a acestei clase este

$$\mathcal{S}^*(\alpha) = \left\{ f \in \mathcal{S} \ : \ \mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha \ \text{ pentru orice } \ z \in \mathbb{D}(0,r) \right\},$$

şi folosim notaţia $\mathcal{S}^* = \mathcal{S}^*(0)$. Numărul real

$$r^*_\alpha(f) = \sup\left\{ r > 0 \ : \ \mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha \ \text{ pentru orice } \ z \in \mathbb{D}(0,r) \right\}$$

se numeşte raza de stelaritate de ordin α a funcţiei f. Notăm că $r^*(f) = r^*_0(f)$ este cea mai mare rază astfel încât domeniul $f(\mathbb{D}(0, r^*(f)))$ este un domeniu stelat în raport cu originea.

Reamintim că o funcţie $g \in \mathcal{S}$ aparţine clasei $\mathcal{K}$ a funcţiilor convexe dacă imaginea discului $\mathbb{D}(0,r)$, adică $g(\mathbb{D}(0,r))$, este un domeniu convex în $\mathbb{C}$. Mai mult, pentru $\alpha \in [0,1)$ considerăm clasa funcţiilor convexe de ordin α definită prin

$$\mathcal{K}(\alpha) = \left\{ g \in \mathcal{S} \ : \ \mathrm{Re}\left(1 + \frac{zg''(z)}{g'(z)}\right) > \alpha \ \text{ pentru orice } \ z \in \mathbb{D}(0,r) \right\},$$

care pentru $\alpha = 0$ se reduce la $\mathcal{K}$. Notăm că funcţiile convexe nu trebuie neapărat să fie normalizate, definiţia clasei $\mathcal{K}(\alpha)$ este valabilă şi pentru funcţia analitică $g : \mathbb{D}(0, r) \to \mathbb{C}$ cu proprietatea $g'(0) \neq 0$. Acum să considerăm raza de convexitate de ordin α a funcţiei analitice g

$$r_\alpha^c(g) = \sup\left\{ r > 0 \ : \ \operatorname{Re}\left(1 + \frac{zg''(z)}{g'(z)}\right) > \alpha \ \text{ pentru orice } \ z \in \mathbb{D}(0, r) \right\}.$$

Menţionăm că $r^c(f) = r_0^c(g)$ este de fapt raza cea mai mare pentru care domeniul $g(\mathbb{D}(0, r^c(g)))$ este convex în $\mathbb{C}$. Pentru mai multe detalii asupra funcţiilor stelate şi convexe ne referim la cartea [Du, 1983].

Prin definiţie funcţia analitică $h : \mathbb{D}(0, r) \to \mathbb{C}$ este aproape convexă dacă există o funcţie convexă $\phi : \mathbb{D}(0, r) \to \mathbb{C}$ astfel încât $h'(z)/\phi'(z)$ are partea reală pozitivă pentru orice $z \in \mathbb{D}(0, r)$. Orice funcţie aproape convexă este univalentă, şi clasa funcţiilor aproape convexe include clasa funcţiilor convexe. Mai mult, orice funcţie stelată este şi aproape convexă. Pentru caracterizare şi interpretare geometrică a funcţiilor aproape convexe ne referim la [Ka, 1952].

Funcţia Bessel de prima speţă de ordin ν este definită prin [OLBC, 2010, p. 217]

$$J_\nu(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n + \nu + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\nu}, \quad z \in \mathbb{C},$$

şi este o soluţie particulară a ecuaţiei diferenţiale liniare omogene Bessel de ordin doi. Deoarece funcţia Bessel J_ν nu aparţine clasei $\mathcal{A}$, studiem următoarele normalizări:

$$f_\nu(z) = (2^\nu \Gamma(\nu + 1) J_\nu(z))^{\frac{1}{\nu}} = z - \frac{1}{4\nu(\nu + 1)} z^3 + \ldots, \ \nu \neq 0, ,$$

$$g_\nu(z) = 2^\nu \Gamma(\nu + 1) z^{1-\nu} J_\nu(z) = z - \frac{1}{4(\nu + 1)} z^3 + \frac{1}{32(\nu + 1)(\nu + 2)} z^5 - \ldots,$$

$$h_\nu(z) = 2^\nu \Gamma(\nu + 1) z^{1-\frac{\nu}{2}} J_\nu(\sqrt{z}) = z - \frac{1}{4(\nu + 1)} z^2 + \ldots,$$

unde $\nu > -1$. Notăm că de fapt pentru $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ avem

$$f_\nu(z) = \exp\left(\frac{1}{\nu} \operatorname{Log}\left(2^\nu \Gamma(\nu + 1) J_\nu(z)\right)\right),$$

unde Log reprezintă determinarea principală a logaritmului, şi în această teză fiecare funcţie multivocă este considerată cu determinarea principală.

În continuare reamintim câteva rezultate despre proprietăţile geometrice ale funţiilor f_ν, g_ν şi h_ν. Brown [Br, 1960] a determinat raza de stelaritate a funcţiei f_ν în cazul când $\nu > 0$. În [Br, 1960, Theorem 2] a demonstrat că raza de stelaritate $r^*(f_\nu)$ este cea mai mică rădăcină pozitivă a funcţiei $z \mapsto J'_\nu(z)$. Mai mult, în [Br, 1960, Theorem 3] Brown a demonstrat că pentru $\nu > 0$ raza de stelaritate a funcţiei g_ν este cea mai mică rădăcină pozitivă a funcţiei $z \mapsto zJ'_\nu(z) + (1-\nu)J_\nu(z)$. Kreyszig şi Todd [KT, 1960, Theorem 3] au demonstrat că pentru $\nu > -1$ funcţia g_ν este univalentă în $|z| \leq \rho_\nu$ dar nu este univalentă într-un disc cu o rază mai mare, unde ρ_ν este un punct pe axa reală în care funcţia g_ν ia valoare maximă. Brown [Br, 1960, p. 282] a remarcat că pentru $\nu > 0$ raza de stelaritate a funcţiei g_ν, adică, $r^*(g_\nu)$ este de fapt raza de univalenţă ρ_ν considerată de Kreyszig şi Todd [KT, 1960]. Brown [Br, 1962, Theorem 5.1] a demonstrat şi că raza de stelaritate a funcţiei g_ν este ρ_ν când $\nu \in (-1/2, 0)$. Pe de altă parte, Hayden şi Merkes [HM, 1964, Theorem C] au demonstrat că pentru $\mu = \operatorname{Re}\nu > -1$ raza de stelaritate a funcţiei g_ν nu este mai mică decât cea mai mică rădăcină pozitivă a funcţiei g'_μ. Menţionăm că Brown a folosit metoda lui Nehari [Ne, 1949] şi Robertson [Ro, 1954], iar faptul că funcţia Bessel este soluţia particulară a ecuaţiei diferenţiale Bessel joacă un rol foarte important în demonstraţii. Este de remarcat faptul că metoda folosită în această secţiune este mai simplă decât metodele folosite în [Br, 1960, Br, 1962, HM, 1964, KT, 1960], şi metoda noastră bazată pe un studiu amănunţit a zerourilor funcţiilor Bessel ne dă rezultate mai bune. Pentru rezultate referitoare la razele de stelaritate a funcţiilor normalizate Bessel ne referim la [Br, 1982, MRS, 1962, Ro, 1954, Wi, 1962]. În final remarcăm că alte proprietăţi geometrice a funcţiilor g_ν şi h_ν au fost obţinute în [Ba, 2008, Ba2, 2010, BP, 2010, Sz, 2010, SK, 2009].

Rezultatul principal a acestei secţiuni este teorema următoare [BKS, 2014, Theorem 1]. Aici I_ν este funcţia Bessel modificată de prima speţă de ordin ν, care satisface relaţia $I_\nu(z) = \mathrm{i}^{-\nu} J_\nu(\mathrm{i}z)$ şi de aceea este numită şi ca funcţia Bessel de prima speţă cu argument imaginar.

Teorema 1. [BKS, 2014, Theorem 1] *Fie $1 > \beta \geq 0$. Atunci următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

a. *Dacă $\nu \in (-1, 0)$, atunci $r^*_\beta(f_\nu) = x_{\nu,\beta}$, unde $x_{\nu,\beta}$ este rădăcina unică pozitivă a ecuaţiei $zI'_\nu(z) - \beta\nu I_\nu(z) = 0$. Mai mult, dacă $\nu > 0$, atunci $r^*_\beta(f_\nu) = x_{\nu,\beta,1}$, unde $x_{\nu,\beta,1}$ este cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuaţiei $zJ'_\nu(z) - \beta\nu J_\nu(z) = 0$.*

b. *Dacă $\nu > -1$, atunci $r^*_\beta(g_\nu) = y_{\nu,\beta,1}$, unde $y_{\nu,\beta,1}$ este cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuaţiei $zJ'_\nu(z) + (1 - \beta - \nu)J_\nu(z) = 0$.*

c. *Dacă $\nu > -1$, atunci $r^*_\beta(h_\nu) = z_{\nu,\beta,1}$, unde $z_{\nu,\beta,1}$ este cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuaţiei $zJ'_\nu(z) + (2 - 2\beta - \nu)J_\nu(z) = 0$.*

În particular, când $\beta = 0$, obţinem următorul rezultat.

Corolarul 1. [BKS, 2014, Corollary 1] *Următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

a. *Dacă $\nu \in (-1, 0)$, atunci raza de stelaritate a funcţiei f_ν este $x_{\nu,0}$, unde $x_{\nu,0}$ este rădăcina unică pozitivă a ecuaţiei $I'_\nu(z) = 0$. Dacă $\nu > 0$, atunci raza de stelaritate a funcţiei f_ν este $x_{\nu,0,1}$, ceea ce înseamnă cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuaţiei $J'_\nu(z) = 0$.*

b. *Dacă $\nu > -1$, atunci raza de stelaritate a funcţiei g_ν este $y_{\nu,0,1}$, ceea ce înseamnă cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuaţiei $zJ'_\nu(z) + (1 - \nu)J_\nu(z) = 0$.*

c. *Dacă $\nu > -1$, atunci raza de stelaritate a funcţiei h_ν este $z_{\nu,0,1}$, ceea ce înseamnă cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuaţiei $zJ'_\nu(z) + (2 - \nu)J_\nu(z) = 0$.*

Menţionăm că părţile **a** şi **b** a Corolarului 1 completează rezultatele din [Br, 1960, Theorem 2], [Br, 1960, Theorem 3] şi [Br, 1962, Theorem 5.1]. Partea **c** completează rezultatele din [Ba, 2008, BP, 2010, Sz, 2010, SK, 2009].

2. **Raza de convexitate a funcţiilor Bessel normalizate**

În această secţiune determinăm raza de convexitate a trei tipuri de funcţii Bessel normalizate, pe care am studiat în secţiunea anterioară. În demonstraţia rezultatelor principale folosim serii Mittag-Leffler pentru fracţiile funcţiilor Bessel de prima speţă, properietăţi speciale a zerourilor funcţiei Bessel şi a derivatei sale, şi faptul că rădăcina cea mai mică a unei funcţii Dini este mai mică decât rădăcina cea mai mică a funcţiei Bessel de prima speţă. Mai mult, în această secţiune găsim parametrii optimali astfel încât funcţiile normalizate Bessel să fie convexe în discul unitate. Rezultatele acestei secţiuni completează în mod natural rezultatele secţiunii anterioare despre raza de stelaritate a funcţiilor Bessel.

Teorema 2. [BS, 2014, Theorem 1.1] *Dacă* $\nu > 0$ *şi* $\alpha \in [0,1)$, *atunci raza de convexitate de ordin* α *a funcţiei* f_ν *este cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuaţiei*

$$1 + \frac{rJ_\nu''(r)}{J_\nu'(r)} + \left(\frac{1}{\nu} - 1\right)\frac{rJ_\nu'(r)}{J_\nu(r)} = \alpha.$$

Mai mult, $r_\alpha^c(f_\nu) < j_{\nu,1}' < j_{\nu,1}$, *unde* $j_{\nu,1}$ *şi* $j_{\nu,1}'$ *sunt cele mai mici zerouri pozitive ale funcţiilor* J_ν *şi* J_ν'.

Teorema 3. [BS, 2014, Theorem 1.2] *Dacă* $\nu > -1$ *şi* $\alpha \in [0,1)$, *atunci raza de convexitate de ordin* α *a funcţiei* g_ν *este cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuaţiei*

$$1 + r\frac{rJ_{\nu+2}(r) - 3J_{\nu+1}(r)}{J_\nu(r) - rJ_{\nu+1}(r)} = \alpha.$$

Mai mult, $r_\alpha^c(g_\nu) < \alpha_{\nu,1} < j_{\nu,1}$, *unde* $\alpha_{\nu,1}$ *este cea mai mică rădăcină pozitivă a funcţiei Dini* $z \mapsto (1-\nu)J_\nu(z) + zJ_\nu'(z)$.

Teorema 4. [BS, 2014, Theorem 1.3] *Dacă* $\nu > -1$ *şi* $\alpha \in [0,1)$, *atunci raza de convexitate de ordin* α *a funcţiei* h_ν *este cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuaţiei*

$$1 + \frac{r^{\frac{1}{2}}}{2} \cdot \frac{r^{\frac{1}{2}}J_{\nu+2}(r^{\frac{1}{2}}) - 4J_{\nu+1}(r^{\frac{1}{2}})}{2J_\nu(r^{\frac{1}{2}}) - r^{\frac{1}{2}}J_{\nu+1}(r^{\frac{1}{2}})} = \alpha.$$

Mai mult, are loc $r_\alpha^c(h_\nu) < \beta_{\nu,1} < j_{\nu,1}$, *unde* $\beta_{\nu,1}$ *este cea mai mică rădăcină pozitivă a funcţiei Dini* $z \mapsto (2-\nu)J_\nu(z) + zJ_\nu'(z)$.

În continuare prezentăm nişte rezultate importante pentru funcţiile f_ν, g_ν şi h_ν. Determinăm constantele optimale pentru parametrii funcţiilor Bessel normalizate astfel încât să fie funcţii convexe.

Teorema 5. [BS, 2014, Theorem 1.4] *Funcţia f_ν este convexă de ordin $\alpha \in [0,1)$ în $\mathbb{D}$ dacă şi numai dacă $\nu \geq \nu_\alpha(f_\nu)$, unde $\nu_\alpha(f_\nu)$ este rădăcina unică a ecuaţiei*

$$\nu(\nu^2-1)J_\nu^2(1) + (1-\nu)(J_\nu'(1))^2 = \alpha\nu J_\nu(1)J_\nu'(1),$$

situată în (ν^*, ∞), unde $\nu^* \simeq 0.3901\ldots$ este soluţia ecuaţiei $J_\nu'(1) = 0$. Mai mult, f_ν este convexă în $\mathbb{D}$ dacă şi numai dacă $\nu \geq 1$.

Teorema 6. [BS, 2014, Theorem 1.5] *Funcţia g_ν este convexă de ordin $\alpha \in [0,1)$ în $\mathbb{D}$ dacă şi numai dacă $\nu \geq \nu_\alpha(g_\nu)$, unde $\nu_\alpha(g_\nu)$ este rădăcina unică a ecuaţiei*

$$(2\nu + \alpha - 2)J_{\nu+1}(1) = \alpha J_\nu(1),$$

situată în $[0, \infty)$. În particular, g_ν este convexă în $\mathbb{D}$ dacă şi numai dacă $\nu \geq 1$.

Teorema 7. [BS, 2014, Theorem 1.6] *Funcţia h_ν este convexă de ordin $\alpha \in [0,1)$ în $\mathbb{D}$ dacă şi numai dacă $\nu \geq \nu_\alpha(h_\nu)$, unde $\nu_\alpha(h_\nu)$ este rădăcina unică a ecuaţiei*

$$(2\nu + 2\alpha - 4)J_{\nu+1}(1) = (4\alpha - 3)J_\nu(1),$$

situată în $[0, \infty)$. În particular, h_ν este convexă dacă şi numai dacă $\nu \geq \nu_0(h_\nu)$, unde $\nu_0(h_\nu) \simeq -0.1438\ldots$ este rădăcina unică a ecuaţiei

$$(2\nu - 4)J_{\nu+1}(1) + 3J_\nu(1) = 0.$$

Mai mult, funcţia h_ν este convexă de ordin $\frac{3}{4}$ dacă şi numai dacă $\nu \geq \frac{5}{4}$.

Folosind metoda subordonărilor diferenţiale Selinger [Se, 1995] a demonstrat că funcţia $\varphi_\nu : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, definită prin

$$\varphi_\nu(z) = \frac{h_\nu(z)}{z} = 2^\nu\Gamma(\nu+1)z^{-\frac{\nu}{2}}J_\nu(\sqrt{z}) = 1 - \frac{1}{4(\nu+1)}z + \ldots,\ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

este convexă dacă $\nu \geq -\frac{1}{4}$. Szász şi Kupán [SK, 2009], folosind o altă metodă au îmbunătăţit rezultatul anterior şi au demonstrat că φ_ν este convexă în $\mathbb{D}$ dacă $\nu \geq \nu_1 \simeq -1.4069\ldots$, unde ν_1 este soluţia ecuaţiei $4\nu^2 + 17\nu + 16 = 0$. Recent, Baricz şi Ponnusamy [BP, 2010] au prezentat patru îmbunătăţiri ai acestui rezultat şi cel mai bun rezultat dintre cele patru este următorul (vezi [BP, 2010, Theorem 3]): funcţia φ_ν este convexă în $\mathbb{D}$ dacă $\nu \geq \nu_2 \simeq -1.4373\ldots$, unde ν_2 este rădăcina unică a ecuaţiei $2^\nu\Gamma(\nu+1)(I_{\nu+2}(1)+2I_{\nu+1}(1))=2$. Mai mult, Baricz şi Ponnusamy [BP, 2010] au conjecturat că φ_ν este convexă în $\mathbb{D}$ dacă şi numai dacă $\nu \geq -1.875$. Rezultatele următoare ne dau un răspuns negativ la această conjectură şi ne arată raza de convexitate a funcţiei φ_ν.

Teorema 8. [BS, 2014, Theorem 1.7] *Dacă $\nu > -2$ şi $\alpha \in [0,1)$, atunci raza de convexitate de ordin α a funcţiei φ_ν este cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuaţiei*

$$\frac{r^{\frac{1}{2}}J_\nu(r^{\frac{1}{2}})}{2J_{\nu+1}(r^{\frac{1}{2}})}-\nu=\alpha.$$

Mai mult, avem că $r_\alpha^c(\varphi_\nu) < j_{\nu+1,1}$.

Teorema 9. [BS, 2014, Theorem 1.8] *Funcţia φ_ν este convexă de ordin $\alpha \in [0,1)$ în $\mathbb{D}$ dacă şi numai dacă $\nu \geq \nu_\alpha(\varphi_\nu)$, unde $\nu_\alpha(\varphi_\nu)$ este rădăcina unică a ecuaţiei*

$$(2\nu+2\alpha)J_{\nu+1}(1)=J_\nu(1),$$

situată în $(\nu^\star,\infty)$, unde $\nu^\star \simeq -1.7744\ldots$ este soluţia ecuaţiei $J_{\nu+1}(1)=0$. În particular, φ_ν este convexă în $\mathbb{D}$ dacă şi numai dacă $\nu \geq \nu_0(\varphi_\nu)$, unde $\nu_0(\varphi_\nu) \simeq -1.5623\ldots$ este rădăcina unică a ecuaţiei $J_\nu(1)=2\nu J_{\nu+1}(1)$, situată în $(\nu^\star,\infty)$.

3. **Raza de stelaritate şi convexitate a funcţiilor q-Bessel normalizate**

În această secţiune considerăm funcţiile q-Bessel de tip Jackson sau Hahn-Exton (sau a treia Jackson). Aceste funcţii sunt definite prin relaţiile

$$J_\nu^{(2)}(z;q)=\frac{(q^{\nu+1};q)_\infty}{(q;q)_\infty}\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\nu}}{(q;q)_n\left(q^{\nu+1};q\right)_n}q^{n(n+\nu)}$$

şi

$$J_\nu^{(3)}(z;q)=\frac{(q^{\nu+1};q)_\infty}{(q;q)_\infty}\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n z^{2n+\nu}}{(q;q)_n\left(q^{\nu+1};q\right)_n}q^{\frac{1}{2}n(n+1)},$$

unde $z \in \mathbb{C}$, $\nu > -1$, $q \in (0,1)$ şi

$$(a;q)_0=1,\quad (a;q)_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1-aq^{k-1}\right),\quad (a;q)_\infty=\prod_{k\geq 1}\left(1-aq^{k-1}\right).$$

O caracteristică comună a acestor funcţii este că ele sunt q-extensii a funcţiei clasice Bessel de prima speţă J_ν. Pentru z fixat avem $J_\nu^{(2)}((1-z)q;q) \to J_\nu(z)$ şi $J_\nu^{(3)}((1-z)q;q) \to J_\nu(2z)$ când $q \nearrow 1$. Cartea lui Watson [Wa, 1944] conţine informaţii amănunţite despre funcţia Bessel de prima speţă, iar proprietăţile acestor q-extensii a funcţiei Bessel de prima speţă se pot găsi în [Ab, 2005, AMA, 2010, Is, 1982, IM2, 1988, Ko, 1994, Ko, 1992]. În această secţiune studiem properietăţile funcţiilor q-Bessel. Folosind produsul canonic Weierstrassian a funcţiilor $J_\nu^{(2)}$ şi $J_\nu^{(3)}$, şi combinând metodele din [BKS, 2014, BS, 2014, BDOY, 2016] determinăm exact raza de stelaritate şi convexitate pentru şase funcţii normalizate legate de funcţii q-Bessel de tip Jackson. Aceste rezultate sunt q-generalizările rezultatelor corespunzătoare pentru funcţia clasică Bessel, obţinute în [BKS, 2014] şi [BS, 2014]. Caracterizarea funcţiilor întregi din clasa Laguerre-Pólya folosind polinoamele hiperbolice şi proprietatea intermediară a zerourilor funcţiilor Jackson şi Hahn-Exton q-Bessel şi a derivatelor sale joacă un rol important în demonstraţii. Deducem şi o condiţie necesară şi suficientă pentru aproape convexitatea unei funcţii Jackson q-Bessel şi a derivatelor sale.

Deoarece funcţiile $J_\nu^{(2)}(\cdot;q)$ şi $J_\nu^{(3)}(\cdot;q)$ nu aparţin clasei $\mathcal{A}$, în primul rând vom normaliza aceste funcţii. Pentru $\nu > -1$ definim următoarele funcţii cu privire la $J_\nu^{(2)}(\cdot;q)$:

$$f_\nu^{(2)}(z;q) = \left(2^\nu c_\nu(q) J_\nu^{(2)}(z;q)\right)^{\frac{1}{\nu}}, \ \nu \neq 0,$$

$$g_\nu^{(2)}(z;q) = 2^\nu c_\nu(q) z^{1-\nu} J_\nu^{(2)}(z;q),$$

$$h_\nu^{(2)}(z;q) = 2^\nu c_\nu(q) z^{1-\frac{\nu}{2}} J_\nu^{(2)}(\sqrt{z};q),$$

unde $c_\nu(q) = (q;q)_\infty / \left(q^{\nu+1};q\right)_\infty$. În mod similar îi asociem funcţiei $J_\nu^{(3)}(\cdot;q)$ următoarele funcţii:

$$f_\nu^{(3)}(z;q) = \left(c_\nu(q) J_\nu^{(3)}(z;q)\right)^{\frac{1}{\nu}}, \ \nu \neq 0,$$

$$g_\nu^{(3)}(z;q) = c_\nu(q) z^{1-\nu} J_\nu^{(3)}(z;q),$$

$$h_\nu^{(3)}(z;q) = c_\nu(q) z^{1-\frac{\nu}{2}} J_\nu^{(3)}(\sqrt{z};q).$$

Funcţiile $f_\nu^{(s)}(\cdot;q)$, $g_\nu^{(s)}(\cdot;q)$, $h_\nu^{(s)}(\cdot;q)$, $s \in \{2,3\}$, aparţin clasei $\mathcal{A}$.

Primul rezultat principal este despre raza de stelaritate a acestor funcţii q-Bessel.

Teorema 10. [BDM, 2016, Theorem 1] *Fie* $\nu > -1$ *şi* $s \in \{2,3\}$. *Atunci următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

a. *Dacă* $\alpha \in [0,1)$ *şi* $\nu > 0$, *atunci* $r^*_\alpha\left(f^{(s)}_\nu\right) = x_{\nu,\alpha,1}$, *unde* $x_{\nu,\alpha,1}$ *este cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuaţiei*

$$r \cdot dJ^{(s)}_\nu(r;q)/dr - \alpha\nu J^{(s)}_\nu(r;q) = 0.$$

Mai mult, dacă $\alpha \in [0,1)$ *şi* $\nu \in (-1,0)$, *atunci* $r^*_\alpha\left(f^{(s)}_\nu\right) = x_{\nu,\alpha}$, *unde* $x_{\nu,\alpha}$ *este rădăcina unică pozitivă a ecuaţiei*

$$\mathrm{i}r \cdot dJ^{(s)}_\nu(\mathrm{i}r;q)/dr - \alpha\nu J^{(s)}_\nu(\mathrm{i}r;q) = 0.$$

b. *Dacă* $\alpha \in [0,1)$, *atunci* $r^*_\alpha\left(g^{(s)}_\nu\right) = y_{\nu,\alpha,1}$, *unde* $y_{\nu,\alpha,1}$ *este cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuaţiei*

$$r \cdot dJ^{(s)}_\nu(r;q)/dr - (\alpha+\nu-1)J^{(s)}_\nu(r;q) = 0.$$

c. *Dacă* $\alpha \in [0,1)$, *atunci* $r^*_\alpha\left(h^{(s)}_\nu\right) = z_{\nu,\alpha,1}$, *unde* $z_{\nu,\alpha,1}$ *este cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuaţiei*

$$\sqrt{r} \cdot dJ^{(s)}_\nu(\sqrt{r};q)/dr - (2\alpha+\nu-2)J^{(s)}_\nu(\sqrt{r};q) = 0.$$

Următorul rezultat este despre raza de convexitate a funcţiilor q-Bessel normalizate.

Teorema 11. [BDM, 2016, Theorem 2] *Fie* $\nu > -1$ *şi* $s \in \{2,3\}$. *Atunci următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

a. *Dacă* $\nu > 0$ *şi* $\alpha \in [0,1)$, *atunci raza de convexitate de ordin* α *a funcţiei* $f^{(s)}_\nu(\cdot;q)$ *este cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuaţiei*

$$1 + \frac{r \cdot d^2J^{(s)}_\nu(r;q)/dr^2}{dJ^{(s)}_\nu(r;q)/dr} + \left(\frac{1}{\nu} - 1\right)\frac{r \cdot dJ^{(s)}_\nu(r;q)/dr}{J_\nu(r;q)} = \alpha.$$

Mai mult, are loc $r^c_\alpha(f^{(2)}_\nu) < j'_{\nu,1}(q) < j_{\nu,1}(q)$ *şi* $r^c_\alpha(f^{(3)}_\nu) < l'_{\nu,1}(q) < l_{\nu,1}(q)$, *unde* $j_{\nu,1}(q)$, $l_{\nu,1}(q)$, $j'_{\nu,1}(q)$ *şi* $l'_{\nu,1}(q)$ *sunt cele mai mici rădăcini pozitive ale funcţiilor* $J^{(2)}_\nu(\cdot;q)$, $J^{(3)}_\nu(\cdot;q)$, $z \mapsto dJ^{(2)}_\nu(z;q)/dz$ *şi* $z \mapsto dJ^{(3)}_\nu(z;q)/dz$.

b. *Dacă* $\nu > -1$ *şi* $\alpha \in [0,1)$, *atunci raza de convexitate de ordin* α *a funcţiei* $g_\nu^{(s)}(\cdot;q)$ *este cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuaţiei*

$$1-\nu+r\frac{(2-\nu)\cdot dJ_\nu^{(s)}(r;q)/dr+r\cdot d^2J_\nu^{(s)}(r;q)/dr^2}{(1-\nu)J_\nu^{(s)}(r;q)+r\cdot dJ_\nu^{(s)}(r;q)/dr}=\alpha.$$

Mai mult, avem că $r_\alpha^c(g_\nu^{(2)}) < \alpha_{\nu,1}(q) < j_{\nu,1}(q)$ *şi* $r_\alpha^c(g_\nu^{(3)}) < \gamma_{\nu,1}(q) < l_{\nu,1}(q)$, *unde* $\alpha_{\nu,1}(q)$ *şi* $\gamma_{\nu,1}(q)$ *sunt cele mai mici rădăcini pozitive ale funcţiilor* $z \mapsto z\cdot dJ_\nu^{(2)}(z;q)/dz+(1-\nu)J_\nu^{(2)}(z;q)$ *şi* $z \mapsto z\cdot dJ_\nu^{(3)}(z;q)/dz+(1-\nu)J_\nu^{(3)}(z;q)$.

c. *Dacă* $\nu > -1$ *şi* $\alpha \in [0,1)$, *atunci raza de convexitate de ordin* α *a funcţiei* $h_\nu^{(s)}(\cdot;q)$ *este cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuaţiei*

$$1-\frac{\nu}{2}+\frac{\sqrt{r}}{2}\frac{(3-\nu)\cdot dJ_\nu^{(s)}(\sqrt{r};q)/dr+\sqrt{r}\cdot d^2J_\nu^{(s)}(\sqrt{r};q)/dr^2}{(2-\nu)J_\nu^{(s)}(\sqrt{r};q)+\sqrt{r}\cdot dJ_\nu^{(s)}(\sqrt{r};q)/dr}=\alpha.$$

Mai mult, are loc $r_\alpha^c(h_\nu^{(2)}) < \beta_{\nu,1}(q) < j_{\nu,1}(q)$ *şi* $r_\alpha^c(h_\nu^{(3)}) < \delta_{\nu,1}(q) < l_{\nu,1}(q)$, *unde* $\beta_{\nu,1}(q)$ *şi* $\delta_{\nu,1}(q)$ *sunt cele mai mici rădăcini pozitive ale funcţiilor* $z \mapsto z\cdot dJ_\nu^{(2)}(z;q)/dz+(2-\nu)J_\nu^{(2)}(z;q)$, *and* $z \mapsto z\cdot dJ_\nu^{(3)}(z;q)/dz+(2-\nu)J_\nu^{(3)}(z;q)$.

Aceste teoreme sunt q-extensiile ale rezultatelor obţinute în [BKS, 2014] şi [BS, 2014]. În final, enunţăm următorul rezultat, care este q-extensia primei părţi a rezultatului [BS, 2016, Theorem 1] pentru funcţia Jackson q-Bessel a doua.

Teorema 12. [BDM, 2016, Theorem 3] *Dacă* $\nu > -1$, *atunci* $h_\nu(\cdot;q) = h_\nu^{(2)}(\cdot;q)$ *este stelată şi toate derivatele sale sunt aproape convexe în discul unitate* $\mathbb{D}$ *dacă şi numai dacă* $\nu \geq \max\{\nu_0(q),\nu^*(q)\}$, *unde* $\nu_0(q)$ *este rădăcina unică a ecuaţiei* $dh_\nu^{(2)}(z;q)/dz\Big|_{z=1} = h'_\nu(1;q) = 0$, *şi* $\nu^*(q)$ *este rădăcina unică a ecuaţiei* $j_{\nu,1}(q) = 1$.

4. **Raza de stelaritate a unor funcţii speciale**

În această secţiune studiem proprietăţile geometrice a funcţiilor Lommel şi Struve de prima speţă. Pentru fiecare funcţie folosim trei normalizări astfel încât funcţiile obţinute sunt analitice în planul complex. Pentru fiecare şase funcţii determinăm raza de stelaritate. Realitatea şi proprietatea intermediară a zerourilor funcţiilor Struve şi Lommel joacă un rol important în demonstraţiile rezultatelor principale. Rezultatele cu privire la zerouri sunt realizate folosind proprietăţiile funcţiilor întregi din clasa Laguerre-Pólya. Un rezultat vechi a lui Pólya joacă de asemenea un rol important în demonstraţii.

Considerăm două funcţii speciale, funcţia Lommel de prima speţă $s_{\mu,\nu}$ şi funcţia Struve de prima speţă $\mathbf{H}_\nu$. Aceste funcţii sunt definite explicit în termeni de funcţia hipergeometrică ${}_1F_2$

$$s_{\mu,\nu}(z) = \frac{z^{\mu+1}}{(\mu-\nu+1)(\mu+\nu+1)}\, {}_1F_2\left(1; \frac{\mu-\nu+3}{2}, \frac{\mu+\nu+3}{2}; -\frac{z^2}{4}\right), \tag{4.1}$$

unde $\frac{1}{2}(-\mu \pm \nu - 3) \notin \mathbb{N}$, şi

$$\mathbf{H}_\nu(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+1}}{\sqrt{\frac{\pi}{4}}\,\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}\, {}_1F_2\left(1; \frac{3}{2}, \nu+\frac{3}{2}; -\frac{z^2}{4}\right), \quad -\nu-\frac{3}{2} \notin \mathbb{N}. \tag{4.2}$$

O caracteristică comună a acestor funcţii este că sunt soluţiile ecuaţiilor diferenţiale neomogene Bessel [Wa, 1944]. Într-adevăr funcţia Lommel de prima speţă $s_{\mu,\nu}$ este soluţia ecuaţiei

$$z^2 w''(z) + z w'(z) + (z^2 - \nu^2) w(z) = z^{\mu+1},$$

iar funcţia Struve $\mathbf{H}_\nu$ de prima speţă apare ca soluţia ecuaţiei

$$z^2 w''(z) + z w'(z) + (z^2 - \nu^2) w(z) = \frac{4\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+1}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}.$$

În 1972 Steinig [St, 1972] a examinat semnul lui $s_{\mu,\nu}(z)$ pentru valori reale a lui μ, ν şi pentru z pozitiv. El a demonstrat că pentru $\mu < \frac{1}{2}$ funcţia $s_{\mu,\nu}$ are o infinitate de schimbări de semn pe intervalul $(0,\infty)$. În 2012 Koumandos şi Lamprecht [KL, 2012] au obţinut estimări pentru localizarea zerourilor funcţiei $s_{\mu-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ pentru $\mu \in (0,1)$. Inegalităţile de tip Turán pentru funcţia $s_{\mu-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ au fost demonstrate în [BK, 2016], iar pentru funcţia Struve în [BPS, 2017].

Proprietăţile geometrice a funcţiei $s_{\mu-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ şi a funcţiei Struve au fost obţinute în [BS, 2016] şi [YO, 2013]. Motivată de aceste rezultate în această secţiune studiem stelaritatea unor funcţii speciale legate de funcţiile Lommel şi Struve. Deoarece $s_{\mu,\nu}$ şi $\mathbf{H}_\nu$ nu aparţin clasei $\mathcal{A}$, avem nevoie de normalizarea acestor funcţii. Definim următoarele funcţii cu privire la

$s_{\mu,\nu}$:

$$f_{\mu,\nu}(z) = ((\mu - \nu + 1)(\mu + \nu + 1)s_{\mu,\nu}(z))^{\frac{1}{\mu+1}},$$

$$g_{\mu,\nu}(z) = (\mu - \nu + 1)(\mu + \nu + 1)z^{-\mu}s_{\mu,\nu}(z)$$

şi

$$h_{\mu,\nu}(z) = (\mu - \nu + 1)(\mu + \nu + 1)z^{\frac{1-\mu}{2}}s_{\mu,\nu}(\sqrt{z}).$$

În mod similar îi asociem funcţiei $\mathbf{H}_\nu$ următoarele funcţii

$$u_\nu(z) = \left(\sqrt{\pi}2^\nu\Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right)\mathbf{H}_\nu(z)\right)^{\frac{1}{\nu+1}},$$

$$v_\nu(z) = \sqrt{\pi}2^\nu z^{-\nu}\Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right)\mathbf{H}_\nu(z)$$

şi

$$w_\nu(z) = \sqrt{\pi}2^\nu z^{\frac{1-\nu}{2}}\Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right)\mathbf{H}_\nu(\sqrt{z}).$$

În mod evident funcţiile $f_{\mu,\nu}$, $g_{\mu,\nu}$, $h_{\mu,\nu}$, u_ν, v_ν şi w_ν aparţin clasei $\mathcal{A}$. Rezultatele principale ale acestei secţiuni ne arată valorile exacte a razelor de stelaritate pentru aceste şase funcţii.

Fie $f_\mu(z) = f_{\mu-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(z)$, $g_\mu(z) = g_{\mu-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(z)$ şi $h_\mu(z) = h_{\mu-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(z)$. Primul rezultat principal a acestei secţiuni este următorul:

Teorema 13. [BDOY, 2016, Theorem 1] *Fie $\mu \in (-1,1)$, $\mu \neq 0$. Atunci următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

a. *Dacă $0 \leq \alpha < 1$ şi $\mu \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, atunci $r^*_\alpha(f_\mu) = x_{\mu,\alpha}$, unde $x_{\mu,\alpha}$ este cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuaţiei*

$$z\, s'_{\mu-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(z) - \alpha\left(\mu + \frac{1}{2}\right)s_{\mu-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(z) = 0.$$

În particular, $r^*(f_\mu) = x_\mu$, unde x_μ este cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuaţiei $z\, s'_{\mu-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(z) = 0$. Mai mult, dacă $0 \leq \alpha < 1$ şi $\mu \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$, atunci $r^*_\alpha(f_\mu) = q_{\mu,\alpha}$, unde $q_{\mu,\alpha}$ este rădăcina unică pozitivă a ecuaţiei

$$\mathrm{i}z s'_{\mu-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathrm{i}z) - \alpha\left(\mu + \frac{1}{2}\right)s_{\mu-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathrm{i}z) = 0.$$

b. *Dacă* $0 \leq \alpha < 1$, *atunci* $r^*_\alpha(g_\mu) = y_{\mu,\alpha}$, *unde* $y_{\mu,\alpha}$ *este cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuaţiei*

$$z\, s'_{\mu-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(z) - \left(\mu + \alpha - \frac{1}{2}\right) s_{\mu-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(z) = 0.$$

În particular, $r^*(g_\mu) = y_\mu$, *unde* y_μ *este cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuaţiei*

$$z\, s'_{\mu-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(z) - \left(\mu - \frac{1}{2}\right) s_{\mu-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(z) = 0.$$

c. *Dacă* $0 \leq \alpha < 1$, *atunci* $r^*_\alpha(h_\mu) = t_{\mu,\alpha}$, *unde* $t_{\mu,\alpha}$ *este cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuaţiei*

$$zs'_{\mu-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(z) - \left(\mu + 2\alpha - \frac{3}{2}\right) s_{\mu-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(z) = 0.$$

În particular, $r^*(h_\mu) = t_\mu$, *unde* t_μ *este cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuaţiei*

$$zs'_{\mu-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(z) - \left(\mu - \frac{3}{2}\right) s_{\mu-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(z) = 0.$$

Rezultatul corespunzător cu privire la funcţia Struve este teorema următoare.

Teorema 14. [BDOY, 2016, Theorem 2] *Fie* $|\nu| < \frac{1}{2}$. *Atunci următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

a. *Dacă* $0 \leq \alpha < 1$, *atunci* $r^*_\alpha(u_\nu) = \delta_{\nu,\alpha}$, *unde* $\delta_{\nu,\alpha}$ *este cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuaţiei*

$$z\mathbf{H}'_\nu(z) - \alpha(\nu + 1)\mathbf{H}_\nu(z) = 0.$$

În particular, $r^*(u_\nu) = \delta_\nu$, *unde* δ_ν *este cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuaţiei*

$$z\mathbf{H}'_\nu(z) = 0.$$

b. *Dacă* $0 \leq \alpha < 1$, *atunci* $r^*(v_\nu) = \rho_{\nu,\alpha}$, *unde* $\rho_{\nu,\alpha}$ *este cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuaţiei*

$$z\mathbf{H}'_\nu(z) - (\alpha + \nu)\mathbf{H}_\nu(z) = 0.$$

În particular, $r^*(v_\nu) = \rho_\nu$, unde ρ_ν este cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuaţiei

$$z\mathbf{H}'_\nu(z) - \nu\mathbf{H}_\nu(z) = 0.$$

c. *Dacă $0 \leq \alpha < 1$, atunci $r^*_\alpha(w_\nu) = \sigma_{\nu,\alpha}$, unde $\sigma_{\nu,\alpha}$ este cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuaţiei*

$$z\mathbf{H}'_\nu(z) - (2\alpha + \nu - 1)\mathbf{H}_\nu(z) = 0.$$

În particular, $r^*(w_\nu) = \sigma_\nu$, unde σ_ν este cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuaţiei

$$z\mathbf{H}'_\nu(z) - (\nu - 1)\mathbf{H}_\nu(z) = 0.$$

Menţionăm că stelaritatea funcţiilor h_μ (în cazul când $\mu \in (-1, 1)$, $\mu \neq 0$) şi w_ν (în cazul când $|\nu| \leq \frac{1}{2}$), a fost studiată în [BS, 2016], şi s-a demonstrat că toate derivatele acestor funcţii sunt aproape convexe în $\mathbb{D}$.

5. Aproape convexitatea funcţiilor Dini normalizate

Recent, în [BCD, 2016] şi [BS, 2016] a fost studiată aproape convexitatea derivatelor funcţiei Bessel. În această secţiune deducem condiţii suficiente şi necesare pentru aproape convexitatea unei combinaţii speciale a funcţiilor Bessel şi a derivatelor sale. Pentru a demonstra rezultatele noastre folosim un rezultat a lui Shah şi Trimble [ST, 1971, Theorem 2] despre funcţii transcendente întregi cu derivate univalente şi nişte relaţii Mittag-Leffler a funcţiilor Bessel de prima speţă.

Fie funcţia $h_\nu : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, definită prin

$$h_\nu(z) = 2^\nu \Gamma(\nu + 1) z^{1-\frac{\nu}{2}} J_\nu(\sqrt{z}) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n \Gamma(\nu + 1) z^{n+1}}{4^n n! \Gamma(\nu + n + 1)},$$

unde J_ν este funcţia Bessel de prima speţă (vezi [OLBC, 2010, p. 217]). Recent, folosind rezultatul lui Shah şi Trimble [ST, 1971, Theorem 2], în [BS, 2016] autorii au demonstrat că funcţia h_ν şi toate derivatele sale sunt convexe în $\mathbb{D}$ dacă şi numai dacă $\nu \geq \nu_\star$, unde

$\nu_\star \simeq -0.1438\ldots$ este rădăcina unică a ecuaţiei

$$3J_\nu(1) + 2(\nu-2)J_{\nu+1}(1) = 0$$

pe intervalul $(-1,\infty)$. Menţionăm că teorema de dualitate a lui Alexander implică că prima parte a rezultatului anterior este echivalentă cu faptul că funcţia

$$\begin{aligned} z \mapsto q_\nu(z) = zh'_\nu(z) &= 2^{\nu-1}\Gamma(\nu+1)z^{1-\frac{\nu}{2}}\left((2-\nu)J_\nu(\sqrt{z}) + \sqrt{z}J'_\nu(\sqrt{z})\right) \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n(n+1)\Gamma(\nu+1)z^{n+1}}{4^n n!\Gamma(\nu+n+1)} \end{aligned}$$

este stelată în $\mathbb{D}$ dacă şi numai dacă $\nu \geq \nu_\star$. În această secţiune demonstrăm că are loc o afirmaţie mai puternică.

Teorema 15. [BDY, 2016, Theorem 1.2] *Funcţia q_ν este stelată în $\mathbb{D}$ şi toate derivatele sale sunt aproape convexe (în consecinţă univalente) dacă şi numai dacă $\nu \geq \nu_\star$, unde $\nu_\star \simeq -0.1438\ldots$ este rădăcina unică a ecuaţiei transcendente $3J_\nu(1)+2(\nu-2)J_{\nu+1}(1) = 0$ pe intervalul $(-1,\infty)$.*

Fie funcţia $r_\nu : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, definită prin

$$\begin{aligned} r_\nu(z) &= 2^\nu\Gamma(\nu+1)z^{1-\frac{\nu}{2}}\left((1-\nu)J_\nu(\sqrt{z}) + \sqrt{z}J'_\nu(\sqrt{z})\right) \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n(2n+1)\Gamma(\nu+1)z^{n+1}}{4^n n!\Gamma(\nu+n+1)}. \end{aligned}$$

Folosind idea demonstraţiei a Teoremei 15 prezentăm următorul rezultat. Menţionăm că rezultate similare pentru funcţii Bessel de prima speţă au fost demonstrate în [BKS, 2014, BS, 2014, BS, 2016], dar folosind alte metode.

Teorema 16. [BDY, 2016, Theorem 1.3] *Funcţia r_ν este stelată în $\mathbb{D}$ şi toate derivatele sale sunt aproape convexe dacă şi numai dacă $\nu \geq \nu^\star$, unde $\nu^\star \simeq 0.3062\ldots$ este rădăcina unică a ecuaţiei transcendente $J_\nu(1) - (3-2\nu)J_{\nu+1}(1) = 0$ pe intervalul $(0,\infty)$.*

Prima parte a rezultatului anterior este foarte similară cu următorul (vezi Teorema 6 sau [BS, 2014, Theorem 1.5]): funcţia $z \mapsto g_\nu(z) = 2^\nu\Gamma(\nu+1)z^{1-\nu}J_\nu(z)$ este convexă în $\mathbb{D}$

dacă şi numai dacă $\nu \geq 1$. Folosind teorema de dualitate a lui Alexander, acest rezultat este echivalent cu următorul: funcţia

$$z \mapsto 2^{\nu}\Gamma(\nu+1)z^{1-\nu}\left((1-\nu)J_{\nu}(z)+zJ'_{\nu}(z)\right)=\frac{r_{\nu}(z^2)}{z}$$

este stelată în $\mathbb{D}$ dacă şi numai dacă $\nu \geq 1$.

Acum să considerăm funcţia $w_{a,\nu}:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$, definită prin

$$\begin{aligned} w_{a,\nu}(z) &= \frac{2^{\nu}}{a}\Gamma(\nu+1)z^{1-\frac{\nu}{2}}\left((a-\nu)J_{\nu}(\sqrt{z})+\sqrt{z}J'_{\nu}(\sqrt{z})\right) \\ &= \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n(2n+a)\Gamma(\nu+1)z^{n+1}}{a\cdot 4^n n!\Gamma(n+\nu+1)}. \end{aligned}$$

Următorul rezultat este generalizarea Teoremelor 15 şi 16.

Teorema 17. [BDY, 2016, Theorem 1.4] *Fie* $\nu > -\frac{3}{4}$ *şi* $a \geq \frac{2}{4\nu+3}$. *Funcţia* $w_{a,\nu}$ *este stelată şi toate derivatele sale sunt aproape convexe în* $\mathbb{D}$ *dacă şi numai dacă* $\nu \geq \nu_a$, *unde* ν_a *este rădăcina unică a ecuaţiei* $(2a-1)J_{\nu}(1)-(a-2\nu+2)J_{\nu+1}(1)=0$ *pe* $\left(-\frac{3}{4},\infty\right)$.

Notăm faptul că Teoremele 15 şi 16 în particular rezultă că funcţiile

$$z \mapsto q_{\frac{1}{2}}(z)=\frac{3}{2}\sqrt{z}\left(\sin\sqrt{z}+\sqrt{z}\cos\sqrt{z}\right),$$

$$z \mapsto q_{\frac{3}{2}}(z)=\frac{3}{2\sqrt{z}}\left(\sqrt{z}\cos\sqrt{z}+(z-1)\sin\sqrt{z}\right),$$

$$z \mapsto r_{\frac{1}{2}}(z)=z\cos\sqrt{z}$$

şi

$$z \mapsto r_{\frac{3}{2}}(z)=3\cos\sqrt{z}-\frac{3(z-2)\sin\sqrt{z}}{2\sqrt{z}}$$

sunt stelate în $\mathbb{D}$ şi toate derivatele lor sunt aproape convexe în discul $\mathbb{D}$. Mai mult, obţinem că funcţia

$$z \mapsto \frac{r_{\frac{3}{2}}(z^2)}{z}=\frac{3\cos z}{z}-\frac{3(z^2-2)\sin z}{2z^2}$$

este stelată în $\mathbb{D}$. Aici am folosit formulele [OLBC, 2010, p. 228]

$$J_{\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z \quad \text{and} \quad J_{\frac{3}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(\frac{\sin z}{z}-\cos z\right).$$

References

[AS, 1965] M. Abramowitz, I.A. Stegun (Eds.), *Handbook of Mathematical Functions with formulas. Graphs and Mathematical Tables,* New York: Dover Publications, 1965.

[Ab, 2005] L.D. Abreu, A q-sampling theorem related to the q-Hankel transform, *Proc. Amer. Math. Soc.* 133(4) (2005) 1197–1203.

[Ab, 2006] L.D. Abreu, Completeness, special functions and uncertainty principles over q-linear grids, *J. Phys. A* 39(47) (2006) 14567–14580.

[ABC, 2003] L.D. Abreu, J. Bustoz, J.L. Cardoso, The roots of the third Jackson q-Bessel function, *Internat. J. Math. Math. Sci.* 67 (2003) 4241–4248.

[AB, 2017] I. Aktaş, Á. Baricz, Bounds for radii of starlikeness of some q-Bessel functions, arXiv:1701.05029.

[ABO, 2016] I. Aktaş, Á. Baricz, H. Orhan, Bounds for radii of starlikeness and convexity of some special functions, arXiv:1610.03233.

[ABY, 2016] I. Aktaş, Á. Baricz, N. Yağmur, Bounds for the radii of univalence of some special functions, arXiv:1604.02649.

[Al, 1915] J.W. Alexander, Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions, *Ann. of Math.* 17 (1915) 12–29.

[Al, 1997] H. Alzer, On some inequalities for the gamma and psi functions, *Math. Comput.* 66 (1997) 373–389.

[AMA, 2010] M.H. Annaby, Z.S. Mansour, O.A. Ashour, Sampling theorems associated with biorthogonal q-Bessel functions, *J. Phys. A Math. Theor.* 43(29) (2010) Art. 295204.

[AMA, 2011] M.H. Annaby, Z.S. Mansour, O.A. Ashour, Asymptotic formulae for eigenvalues and eigenfunctions of q-Sturm-Liouville problems, *Math. Nachr.* 284(4) (2011) 443–470.

[Ba, 2006] Á. Baricz, Geometric properties of generalized Bessel functions of complex order, *Mathematica* 48(71) (2006) 13–18.

[Ba, 2008] Á. Baricz, Geometric properties of generalized Bessel functions, *Publ. Math. Debrecen* 73 (2008) 155–178.

[Ba1, 2010] Á. Baricz, Turán type inequalities for modified Bessel functions, *Bull. Aust. Math. Soc.* 82 (2010) 254–264.

[Ba2, 2010] Á. Baricz, *Generalized Bessel Functions of the First Kind*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1994, Springer, Berlin, 2010.

[BCD, 2016] Á. Baricz, M. Çağlar, E. Deniz, Starlikeness of Bessel functions and their derivatives, *Math. Inequal. Appl.* 19(2) (2016) 439–449.

[BDY, 2016] Á. Baricz, E. Deniz, N. Yağmur, Close-to-convexity of normalized Dini functions, *Math. Nachr.* 289 (2016) 1721–1726.

[BDM, 2016] Á. Baricz, D.K. Dimitrov, I. Mező, Radii of starlikeness and convexity of some q-Bessel functions, *J. Math. Anal. Appl.* 435(1) (2016) 968–985.

[BDOY, 2016] Á. Baricz, D.K. Dimitrov, H. Orhan, N. Yagmur, Radii of starlikeness of some special functions, *Proc. Amer. Math. Soc.* 144(8) (2016) 3355–3367.

[BK, 2016] Á. Baricz, S. Koumandos, Turán type inequalities for some Lommel functions of the first kind, *Proc. Edinb. Math. Soc.* 59 (2016) 569–579.

[BKS, 2014] Á. Baricz, P.A. Kupán, R. Szász, Radii of starlikeness of normalized Bessel functions of the first kind, *Proc. Amer. Math. Soc.* 142(6) (2014) 2019–2025.

[BPS, 2014] Á. Baricz, T.K. Pogány, R. Szász, Monotonicity properties of some Dini functions, *Proc. of the 9th IEEE Intern. Symp. Appl. Computat. Intell. Informatics*, May 15-17, Timişoara, Romania, (2014) 323–326.

[BP, 2010] Á. Baricz, S. Ponnusamy, Starlikeness and convexity of generalized Bessel functions, *Integral Transforms Spec. Funct.* 21(9) (2010) 641–653.

[BPS, 2017] Á. Baricz, S. Ponnusamy, S. Singh, Turán type inequalities for Struve functions, *J. Math. Anal. Appl.* 445(1) (2017) 971–984.

[BS, 2017] Á. Baricz, S. Singh, Zeros of some special entire functions, arXiv:1702.00626.

[BS, 2014] Á. Baricz, R. Szász, The radius of convexity of normalized Bessel functions of the first kind, *Anal. Appl.* 12(5) (2014) 485–509.

[BS, 2015] Á. Baricz, R. Szász, The radius of convexity of normalized Bessel functions, *Anal. Math.* 41(3) (2015) 141–151.

[BS, 2016] Á. Baricz, R. Szász, Close-to-convexity of some special functions and their derivatives, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* 39(1) (2016) 427–437.

[BSO, 2016] Á. Baricz, R. Szász, H. Orhan, The radius of alpha convexity of normalized Bessel functions of the first kind, *Comput. Methods Funct. Theory* 16(1) (2016) 93–103.

[BSY, 2016] Á. Baricz, R. Szász, N. Yağmur, Products of Bessel and modified Bessel functions, arXiv:1601.01998.

[BTK, 2017] Á. Baricz, E. Toklu, E. Kadioğlu, Radii of starlikeness and convexity of Wright functions, arXiv:1702.00631.

[BY, 2017] Á. Baricz, N. Yağmur, Geometric properties of some Lommel and Struve functions, *Ramanujan J.* 42(2) (2017) 325–346.

[BH, 2003] W. Bergweiler, W.K. Hayman, Zeros of solutions of a functional equation, *Comput. Methods Funct. Theory* 3 (2003) 55–78.

[BK, 1995] M. Biernacki, J. Krzyż, On the monotonity of certain functionals in the theory of analytic function, *Ann. Univ. Mariae Curie-Sk lodowska. Sect. A.* 9 (1995) 135–147.

[BDR, 2002] C.F. Bracciali, D.K. Dimitrov, A. Sri Ranga, Chain sequences and symmetric Koornwinder polynomials, *J. Comput. Appl. Math.* 143 (2002) 95–106.

[Br, 1960] R.K. Brown, Univalence of Bessel functions, *Proc. Amer. Math. Soc.* 11(2) (1960) 278–283.

[Br, 1962] R.K. Brown, Univalent solutions of $W'' + pW = 0$, *Canad. J. Math.* 14 (1962) 69–78.

[Br, 1982] R.K. Brown, Univalence of normalized solutions of $W''(z) + p(z)W(z) = 0$, *Internat. J. Math. Math. Sci.* 5(3) (1982) 459–483.

[DS, 2017] E. Deniz, R. Szász, The radius of uniform convexity of Bessel functions, arXiv:1702.07493.

[DC, 2009] D.K. Dimitrov, Y.B. Cheikh, Laguerre polynomials as Jensen polynomials of Laguerre-Pólya entire functions, *J. Comput. Appl. Math.* 233 (2009) 703–707.

[DL, 2011] D.K. Dimitrov, F.R. Lucas, Higher order Turán inequalities for the Riemann ξ-function *Proc. Amer. Math. Soc.* 139 (2011) 1013–1022.

[DMR, 2010] D.K. Dimitrov, M.V. de Mello, F.R. Rafaeli, Monotonicity of zeros of Jacobi-Sobolev type orthogonal polynomials, *Applied Numer. Math.* 60 (2010) 263–276.

[DR, 2011] D.K. Dimitrov, P.K. Rusev, Zeros of entire Fourier transforms, *East J. Approx.* 17 (2011) 1–110.

[Du, 1983] P.L. Duren, *Univalent Functions*, Grundlehren Math. Wiss. 259, Springer, New York, 1983.

[HM, 1964] T.L. Hayden, E.P. Merkes, Chain sequences and univalence, *Illinois J. Math.* 8 (1964) 523–528.

[Ha, 2005] W.K. Hayman, On the zeros of a q-Bessel function, Complex analysis and dynamical systems II, 205–216, *Contemp. Math.* 382, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[Is, 1982] M.E.H. Ismail, The zeros of basic Bessel functions, the functions $J_{\nu+ax}(x)$, and associated orthogonal polynomials, *J. Math. Anal. Appl.* 86 (1982) 1–19.

[IM1, 1988] M.E.H. Ismail, M.E. Muldoon, Zeros of combinations of Bessel functions and their derivatives, *Appl. Anal.* 31 (1988) 73–90.

[IM2, 1988] M.E.H. Ismail, M.E. Muldoon, On the variation with respect to a parameter of zeros of Bessel and q-Bessel functions, *J. Math. Anal. Appl.* 135 (1988) 187–207.

[IM, 1995] M.E.H. Ismail, M.E. Muldoon, Bounds for the small real and purely imaginary zeros of Bessel and related functions, *Methods Appl. Anal.* 2(1) (1995) 1–21.

[Ja, 1971] I.S. Jack, Functions starlike and convex of order α, *J. London Math. Soc.* 3(2) (1971) 469–474.

[Je, 1913] J.L.W.V. Jensen, Recherches sur la théorie des équations, *Acta Math.* 36 (1913) 181–195.

[Ka, 1952] W. Kaplan, Close-to-convex schlicht functions, *Michigan Math. J.* 1 (1952) 169–185.

[Ko, 1994] H.T. Koelink, R.F. Swarttouw, On the zeros of the Hahn-Exton q-Bessel function and associated q-Lommel polynomials, *J. Math. Anal. Appl.* 186 (1994) 690–710.

[Ko, 1992] T.H. Koornwinder, R.F. Swarttouw, On q-analogues of the Hankel- and Fourier transforms, *Trans. Amer. Math. Soc.* 333 (1992) 445–461.

[KL, 2012] S. Koumandos, M. Lamprecht, The zeros of certain Lommel functions, *Proc. Amer. Math. Soc.* 140 (2012) 3091–3100.

[KT, 1960] E. Kreyszig, J. Todd, The radius of univalence of Bessel functions, *Illinois J. Math.* 4 (1960) 143–149.

[Kv, 1995] A.A. Kvitsinsky, Spectral zeta functions for q-Bessel equations, *J. Phys. A.* 28(6) (1995) 1753–1764.

[La, 1999] L.J. Landau, Ratios of Bessel functions and roots of $\alpha J_\nu(x) + xJ'_\nu(x) = 0$, *J. Math. Anal. Appl.* 240 (1999) 174–204.

[Le, 1996] B.Ya. Levin, *Lectures on Entire Functions*, Amer. Math. Soc.: Transl. of Math. Monographs, vol. 150, 1996.

[MRS, 1962] E.P. Merkes, M.S. Robertson, W.T. Scott, On products of starlike functions, *Proc. Amer. Math. Soc.* 13 (1962) 960–964.

[Ne, 1949] Z. Nehari, The Schwarzian derivative and schlicht functions, *Bull. Amer. Math. Soc.* 55 (1949) 545–551.

[Ob, 2003] N. Obrechkoff, *Zeros of Polynomials*, Publ. Bulg. Acad. Sci., Sofia, 1963 (in Bulgarian); English translation (by I. Dimovski and P. Rusev) published by The Marin Drinov Acad. Publ. House, Sofia, 2003.

[OLBC, 2010] F.W.J. Olver, D.W. Lozier, R.F. Boisvert, C.W. Clark (Eds.), *NIST Handbook of Mathematical Functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010.

[OA, 2017] H. Orhan, I. Aktaş, Bounds for radii of convexity of some q-Bessel functions, arXiv:1702.04549.

[Po, 1918] G. Pólya, Über die Nullstellen gewisser ganzer Funktionen, *Math. Z.* 2 (1918) 352–383.

[PV, 1997] S. Ponnusamy, M. Vuorinen, Asymptotic expansions and inequalities for hypergeometric functions, *Mathematika* 44 (1997) 278–301.

[RS, 2002] Q.I. Rahman, G. Schmeisser, *Analytic Theory of Polynomials*, Oxford University Press, Oxford, 2002.

[Ro, 1954] M.S. Robertson, Schlicht solutions of $W'' + pW = 0$, *Trans. Amer. Math. Soc.* 76 (1954) 254–274.

[Se, 1995] V. Selinger, Geometric properties of normalized Bessel functions, *Pure Math. Appl.* 6(1995) 273–277.

[ST, 1971] S.M. Shah, S.Y. Trimble, Entire functions with univalent derivatives, *J. Math. Anal. Appl.* 33 (1971) 220–229.

[Sk, 1954] H. Skovgaard, On inequalities of the Turán type, *Math. Scand.* 2 (1954) 65–73.

[St, 1972] J. Steinig, The sign of Lommel's function, *Trans. Amer. Math. Soc.* 163 (1972) 123–129.

[Sz, 2010] R. Szász, On starlikeness of Bessel functions of the first kind, In: Proceedings of the 8th Joint Conference on Mathematics and Computer Science, Komárno, Slovakia, 2010, 9pp.

[SK, 2009] R. Szász, P.A. Kupán, About the univalence of the Bessel functions, *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math.* 54(1) (2009) 127–132.

[Wa, 1944] G.N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1944.

[Wi, 1962] H.S. Wilf, The radius of univalence of certain entire functions, *Illinois J. Math.* 6 (1962) 242–244.

[YO, 2013] N. Yağmur, H. Orhan, Starlikeness and convexity of generalized Struve functions, *Abstr. Appl. Anal.* 2013 (2013) Art. 954513.