UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI

TEZA DE ABILITARE

- REZUMAT -

Domeniul: MATEMATICĂ

GENERATORI ESENŢIALI PE SPAŢII LOCAL CONVEXE

Ludovic Dan LEMLE

Cluj Napoca, 2017

Rezumat

Prezenta teză de abilitare face o trecere în revistă a activităţilor didactice, administrative şi de cercetare desfăşurate de candidat în perioada care a trecut de la obţinerea titlului de doctor în matematică în cotutelă la Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand, Franţa şi Universitatea de Vest din Timişoara, România. Ea are la bază interacţiunea dintre diverse domenii ale analizei funcţionale, ale analizei stochastice şi ale fizicii matematice al căror numitor comun îl reprezintă teoria semigrupurilor de operatori liniari.

Capitolul 1 se referă la cariera profesională anterioară în ceea ce priveşte activităţile didactice, activităţile administrative şi activităţile de cercetare relevante.

Sunt prezentate în ordine cronologică atât poziţiile didactice ocupate de-a lungul timpului, începând cu cea de profesor de liceu şi terminând cu actuala poziţie de conferenţiar universitar la Universitatea Politehnica Timişoara, cât şi diversele structuri academice din care candidatul a făcut sau face parte ca urmare a unor alegeri academice.

De asemenea, sunt prezentate atât activităţile de cercetare din perioada studiilor doctorale, cât şi cele desfăşurate după obţinerea titlului de doctor. Cea mai mare parte a acestor activităţi s-au desfăşurat în cadrul unor stagii de cercetare la Université Claude Bernard de Lyon (Franţa), Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand (Franţa), Wuhan University (China), Chinese Academy of Sciences (China), Central European University of Budapest (Hungary) şi Shanghai Jiao Tong University (China), fiind posesor al unei burse doctorale Erasmus, a două burse post-doctorale (A.T.E.R. - Attaché Temporaire d'Enseignement et de Recherche şi A.U.F. - Agence Universitaire de la Francophonie) şi al unei burse de cercetare FP7, sau având calitatea de director al unui proiect bilateral româno-chinez finanţat de A.N.C.S. şi al unui proiect bilateral franco-român finanţat de Laboratoire Européen Associé C.N.R.S. Franco-Roumain Math-Mode, Institutul de Matematică "Simion Stoilow" al Academiei Române.

Capitolele 2, 3 şi 4 conţin o sinteză a unor rezultate referitoare la generatorii esenţiali publicate de autor după obţinerea titlului de doctor.

În Capitolul 2 sunt prezentaţi generatorii esenţiali pe spaţii local convexe. Punctul de start îl reprezintă unicitatea operatorilor diferenţiali în sensul esenţial-autoadjuncţiei. Relativ la *operatorul lui Laplace* $\mathcal{L} = \frac{\Delta}{2}$ cu domeniul $\mathcal{D} = C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, se ştie (a se vedea Reed şi Simon [95], Simon [104], Kato [63]) că există echivalenţe între:

(i) esenţial-autoadjuncţia lui $\mathcal{L}$ pe $L^2(\mathbb{R}^N, dx)$;

(ii) unicitatea soluţiei tari a problemei Cauchy asociată;

(iii) unicitatea soluţiei slabe pentru problema Cauchy duală asociată.

Ţinând seama de aceste echivalenţe, se poate spune că, într-un anumit sens, $\mathcal{L}$ este *unic în* $L^2(\mathbb{R}^N, dx)$. Este bine cunoscut faptul că se poate extinde acest tip de unicitate a operatorului $\mathcal{L}$ de la spaţiul $L^2(\mathbb{R}^N, dx)$ la spaţiile $L^p(\mathbb{R}^N, dx)$, pentru orice $p \in [1, \infty)$. În acest caz, se mai spune că $\mathcal{L}$ este un *generator esenţial pe* $L^p(\mathbb{R}^N, dx)$.

În mod natural se pot formula următoarele întrebări:

1. ce sens ar putea avea afirmaţia că $\mathcal{L}$ este un generator esenţial pe $L^\infty(\mathbb{R}^N, dx)$?

2. s-ar putea să existe echivalenţe între afirmaţiile următoare
   (i) $\mathcal{L}$ este un generator esenţial pe $L^\infty(\mathbb{R}^N, dx)$;
   (ii) $L^\infty(\mathbb{R}^N, dx)$-unicitatea soluţiei tari pentru problema Cauchy;
   (iii) $L^1(\mathbb{R}^N, dx)$-unicitatea soluţiei slabe pentru problema Chaucy duală?

Răspunsurile la aceste întrebări sunt cu atât mai importante cu cât remarcăm că soluţia $u(t,x)$ a ecuaţiei Fokker-Planck-Kolmogorov reprezintă distribuţia căldurii la momentul t în punctul x. Prin urmare, energia totală a sistemului la momentul t este dată de

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u(t,x)|dx = \|u(t,x)\|_{L^1}$$

adică norma din L^1 a soluţiei ecuaţiei Fokker-Planck-Kolmogorov.

Aşadar există motive foarte serioase, de natură fizică, pentru care L^∞-unicitatea operatorilor diferenţiali eliptici este foarte importantă datorită posibilei sale echivalenţe cu L^1-unicitatea soluţiei slabe a ecuaţiei Fokker-Planck-Kolmogorov.

Din păcate, un binecunoscut rezultat al lui Lotz [86] stabileşte că generatorul oricărui C_0-semigrup pe $(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ trebuie să fie mărginit. Mai mult, o celebră teoremă a lui Phillips ne asigură că pentru un C_0-semigrup $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ pe un spaţiu local convex $(\mathcal{X}, \beta)$, semigrupul adjunct $\{T^*(t)\}_{t\geq 0}$ nu mai este tare continuu pe spaţiul dual $\mathcal{X}^*$ în raport cu topologia tare $\beta(\mathcal{X}^*, \mathcal{X})$ din dual.

Suntem aşadar conduşi la o analiză subtilă privind semigrupurile de clasă C_0, aşa că în continuare sunt prezentate câteva rezultate remarcabile cu privire la semigrupurile de clasă C_0 pe spaţii local convexe, insistând pe domeniul de unicitate al unui C_0-semigrup şi, mai ales, pe comportamentul special al semigrupurilor adjuncte.

Un prim rezultat foarte important stabileşte care subspaţii asigură unicitatea unui C_0-semigrup, mai precis, se arată că singurul domeniu de unicitate al unui C_0-semigrup $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ pe un spaţiu local convex este un *core* al generatorului $\mathcal{A}$. Principala modalitate de a depăşi dificultăţile pentru demonstrarea acestui rezultat în cazul spaţiilor local convexe este aceea de a utiliza o calibrare "bună".

După cum se ştie, unul din rezultatele foarte importante privind semigrupurile adjuncte îl reprezintă celebra teoremă a lui Phillips (a se vedea [117, Theorem, p.273]). Dacă $\mathcal{X}$ este un spaţiu reflexiv, atunci teorema lui Phillips se poate aplica fără nicio problemă pe întreg spaţiul dual $\mathcal{X}^*$. În caz contrar, caracterizarea domeniului adjunctului generatorului $\mathcal{D}(\mathcal{A}^*)$ precum şi a închiderii sale poate deveni o problemă foarte dificilă chiar şi în cazul unor operatori foarte simpli.

Modalitatea de evitare a acestor probleme este aceea de a considera o nouă topologie pe spaţiul dual $\mathcal{X}^*$ în raport cu care $\{T^*(t)\}_{t\geq 0}$ să devină un C_0-semigrup având ca generator operatorul $\mathcal{A}^*$. În acest sens, Wu şi Zhang [115] au considerat pe $\mathcal{X}^*$ *topologia convergenţei uniforme pe submulţimile compacte din* $(\mathcal{X}, \beta)$, notată prin $\mathcal{C}(\mathcal{X}^*, \mathcal{X})$.

Utilizând această topologie, se poate demonstra o variantă satisfăcătoare a teoremei lui Phillips şi se pot introduce generatorii esenţiali ale căror proprietăţi sunt prezentate în finalul capitolului.

În Capitolul 3 sunt prezentate o serie de proprietăţi interesante ale semigrupurilor de clasă C_0 pe dualul unui spaţiu Banach. Pentru început este prezentat un rezultat de perturbare cu operatori mărginiţi şi apoi un rezultat de perturbare de tip Desch-Schappacher pentru C_0-semigrupuri. De asemenea, sunt prezentate şi câteva rezultate privind aproximarea semigrupurilor de clasă C_0, mai precis, sunt demonstrate formula lui Chernoff şi formula Lie-Trotter. În încheierea acestui capitol, se rescriu proprietăţile generatorilor esenţiali pentru cazul dualului unui spaţiu Banach şi se pun bazele pentru modul de abordare a unor probleme în care se studiază generatori esenţiali concreţi.

Este foarte clar că topologia naturală pentru studiul semigrupurilor de clasă C_0 pe spaţiul $L^\infty\left(\mathbb{R}^N, dx\right)$ este *topologia convergenţei uniforme pe submulţimile compacte din* $L^1\left(R^N, dx\right)$, notată prin $\mathcal{C}\left(L^\infty, L^1\right)$. Dacă $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ este un C_0-semigrup pe $L^1\left(R^N, dx\right)$ având generatorul $\mathcal{A}$, atunci $\{T^*(t)\}_{t\geq 0}$ este un C_0-semigrup pe $\left(L^\infty\left(R^N, dx\right), \mathcal{C}\left(L^\infty, L^1\right)\right) := L^\infty_{\mathcal{C}}(\mathbb{R}^N, dx)$ având generatorul $\mathcal{A}^*$. Mai mult, se poate observa că $L^\infty_{\mathcal{C}}(\mathbb{R}^N, dx)$ este un spaţiu local convex complet iar dualul să topologic este $(L^1, \|\,.\,\|_1)$.

Capitolul 4 prezintă câteva exemple de generatori esenţiali şi unicitatea soluţiei ecuaţiei Fokker-Planck-Kolomogorov asociate. Pentru început, utilizând o teoremă a valorii medii pentru funcţii subarmonice, se arată că operatorul lui Schrodinger cu potenţial de clasă Kato este un generator esenţial pe $L^\infty(\mathbb{R}^N, dx)$. În continuare se arată că operatorul de difuziune Nelson este un generator esenţial pe $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ în raport cu o măsură invariantă. Tehnica folosită pentru demonstraţie utilizează o inegalitate de tip Kato şi o teoremă de tip Liouville. Pentru a arăta că operatorul de difuziune nesimetric este un generator esenţial pe $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ în raport cu o măsură invariantă se utilizează de asemenea o inegalitate de tip Kato, dar absenţa unei teoreme de tip Liouville face ca lucrurile să devină mai complicate, aşa încât se impune o analiză comparativă între cazul unidimensional şi cazul multidimensional. În cazul operatorului de difuziune simetric pe o varietate Riemanniană necompactă devine absolut necesară utilizarea unor condiţii geometrice în contextul curburii m-dimensionale Bakry-Emery Ricci. În încheierea acestui capitol, este prezentat un exemplu de generator esenţial infinit dimensional, mai precis, se arată că generatorul unui sistem laticeal cu spin compact este un generator esenţial pe spaţiul funcţiilor continue şi mărginite.

Ultimul capitol al tezei conţine câteva direcţii de dezvoltate a carierei profesionale viitoare. Dezvoltarea activităţii de cercetare ştiinţifică se va axa pe participarea la evenimente de specialitate naţionale şi internaţionale cu vizibilitate mare, prin publicarea rezultatelor cercetării în jurnale cu scor de influenţă ridicat şi prin participarea la proiecte de cercetare. De asemenea, dezvoltarea activităţii didactice va avea în vedere o continuă îmbunătăţire a metodelor de predare.

Mulţumiri

Aş vrea să profit de această ocazie pentru a prezenta mulţumirile mele domnului prof. univ. dr. *Liming Wu* pentru tot ajutorul pe care mi l-a acordat de-a lungul anilor, nu numai în perioada studiilor doctorale ci şi după aceea. Fără pasiunea sa, fără ideile sale şi fără disponibilitatea sa, nu aş fi reuşit să ajung astăzi în această onorantă poziţie. În particular, aş vrea să-i mulţumesc domnului *Liming Wu* pentru multiplele stagii de cercetare atât la Universitatea din Wuhan cât şi la Academia de Ştiinţe din China, acolo unde am avut deosebita şansă să vorbesc cu regretatul *Paul Malliavin* şi cu foarte celebrii *Michael Röckner* şi *Srinivasa Varadhan*.

În acelaşi timp, doresc să exprim întreaga mea gratitudine domnului prof. univ. dr. *Dumitru Gaşpar* de la care am deprins pasiunea pentru cercetare şi care mi-a oferit posibilitatea de a studia la două din universităţile de top din Franţa: Université "Claude Bernard" de Lyon şi Université "Blaise Pascal" de Clermont-Ferrand.

În timpul multiplelor stagii de cercetare prin diverse universităţi din lume am avut plăcerea să cunosc şi să lucrez cu matematicieni de mare valoare dintre care îi amintesc cu tot respectul pe *Gilles Cassier* de la Université Claude Bernard de Lyon, *Dan Timotin* de la Institutul de Matematică "Simion Stoilow" al Academiei Române, *Bernard Chevreau* de la Université de Bordeaux, *Mihail Megan* de la Universitatea de Vest din Timişoara, *Gheorghe Moroşanu* de la Central European University of Budapest, *Jiang Yiwen* de la Military Economics Academy din Wuhan, *Yu Miao* de la Henan University şi *Xiang Zhang* de la Shanghai Jiao Tong University.

Trebuie să menţionez că toate eforturile mele ar fi fost complet inutile fără susţinerea şi încurajările permanente ale soţiei mele *Ioana* şi ale fiicei noastre *Katerina Lucia*, care au suportat cu mult curaj şi răbdare absenţele mele din timpul stagiilor de cercetare.

De asemenea, nu pot să nu adresez cuvinte de mulţumire unor colegi şi prieteni foarte buni care au fost alături de mine de fiecare dată când am avut nevoie de un sfat bun: *Flavius Pater* şi *Tudor Bînzar* de la Universitatea Politehnica Timişoara, *Şerban Roşu* şi *Mihaela Frăţilă* de la Universitatea de Medicină şi Farmacie "Victor Babeş" din Timişoara, *Păstorel Gaşpar* şi *Sorin Nădăban* de la Universitatea "Aurel Vlaicu" din Arad, *Daniel Breaz* de la Universitatea "1 Decembrie" din Alba Iulia, *Eugen Constantinescu* şi *Laurian Suciu* de la Universitatea "Lucian Blaga" din Sibiu, *Ma Yutao* de la Peking University şi *Ran Wang* de la Wuhan University.

Mulţumiri speciale celor două colege de birou, *Diana Bistrian* şi *Diana Stoica* de la Facultatea de Inginerie din Hunedoara, pentru modul în care am colaborat în toţi aceşti ani.

La final, vreau să exprim întreaga mea recunoştinţă pentru ospitalitatea şi amabilitatea cu care am fost înconjurat de către toate persoanele pe care am avut plăcerea să le cunosc în timpul stagiilor de cercetare de la Lyon, Clermont-Ferrand, Wuhan, Beijing, Budapesta şi Shanghai.

Bibliografie

[1] A.A. Albanese A.A., Kühnemund F., Trotter-Kato approximation theorems for locally equicontinuous semigroups, *Riv. Mat. Univ. Parma* **1**(2002), 19-53

[2] Albanese A., Mangino E., Cores for Feller semigroups with an invariant measure, *J. Differential Equations* **225**(2006), 361-377

[3] Albanese A., Lorenzi L., Mangino E., L^p-uniqueness for elliptic operators with unbounded coefficients in $\mathbb{R}^N$, *J. Funct. Anal.* **256**(2009), 1238-1257

[4] Albeverio S., Kondratiev Yu. G., Röckner M., An approximate criterium of essential self-adjointness of Dirichlet operators, *Potential Anal.* **1**(1992), 307-317

[5] Albeverio S., Kondratiev Yu. G., Röckner M., Uniqueness of the stochastic dynamics for continuous spin systems on a lattice, *J. Funct. Anal.* **133**(1995), 10-20

[6] Albeverio S, Kondratiev Yu. G., Röckner M., Dirichlet operators via stochastic analysis, *J. Funct. Anal.* **128**(1995), 102-132

[7] Albeverio S., Brzezniak Z., Daletskii A., Stochastic differential equations on product loop manifolds, *Bull. Sci. Math.* **127**(2003), 649-667

[8] Albeverio S., Daletskii A., Kondratiev Yu. G., Stochastic equations and Dirichlet operators on infinite product manifolds, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top* **6**(2003), 455-488

[9] Albeverio S., Kondratiev Yu. G., Röckner M., Tsikalenko T. V., Glauber dynamics for quantum lattice systems, *Rev. Math. Phys.* **13**(2001), 51-124

[10] Albeverio S., Röckner M., Zhang T. S., Markov uniqueness and its applications to martingale problems, stochastic differential equations and stochastic quantization, *C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada* **15**(1993), 1-6

[11] Albeverio S., Ma Z.M., Perturbation of Dirichlet form: lower boundedness, closability and form cores, *J. Funct. Anal.* **99**(1991), 332-356

[12] Aizenman M., Simon B., Brownian motion and Harnack's inequality for Schrödinger Operators, *Comm. Pure Appl. Math.* **35**(1982), 209-271

[13] Arendt W., The abstract Cauchy problem, special semigroups and perturbation. *One Parameter Semigroups of Positive Operators* (R. Nagel, Eds.), Lect. Notes in Math., **1184**, Springer, Berlin, 1986

[14] Arendt W., Metafune G., Pallara D., Schrödinger operators with unbounded drift, *J. Operator Theory* **55**(2006), 185-211

[15] Babalola V.A., Semigroups of operators on locally convex spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* **199**(1974), 163-179

[16] Bakry D., L'hypercontractivité et son utilisation en théorie des semigroupes, *Lect. Notes Math.* **1581**(1994), 1-114

[17] Bakry D., Bolley F., Gentil I., Dimension dependent hypercontractivity for Gaussian kernels, *Probab. Theory Relat. Fields* **154**(2012), 845-874

[18] Bakry D., Emery M., Diffusion hypercontractives, *Lect. Notes in Math.* **1123**(1985), 177-206

[19] Bakry D., Ledoux M., A logorithmic Sobolev form of the Li-Yau parabolic inequality, *Rev. Mat. Iberoamericana* **22**(2006), 683-702

[20] Bakry D., Qian Z.M., Harnack inequalities on a manifold with positive or negative Ricci curvature *Rev. Mat. Iberoamericana* **15**(1999), 143-179

[21] Bogachev V.I., Krylov N., Röckner M., Elliptic regularity and essential self-adjointness of Dirichlet operators on $\mathbb{R}^n$, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* **24**(1997), 451-461

[22] Bogachev V.I., Röckner M., Wang F.Y., Elliptic equations for invariant measure on finite and infinite dimensional manifolds, *J. Math. Pures Appl.* **80**(2001), 177-221

[23] Bogachev V.I., Röckner M., On L^p-uniqueness of symmetric diffusion operators on Riemannian manifolds, *Mat. Sb.* **194**(2003), 15-24

[24] Bogachev V.I., Da Prato G., Röckner M., On parabolic equation for measures, *Comm. on Partial Diff. Eq.* **33**(2008), 397-418

[25] Bogachev V. I., Da Prato G., Röckner M., Parabolic equations for measures on infinte dimnesional spaces, *Dokl. Math.* **78**(2008), 544-549

[26] Bogachev V. I., Da Prato G., Röckner M., Fokker-Planck equations and maximal dissipativity for Kolmogorov operators with time dependent singular drifts in Hilbert spaces, *J. Funct. Anal.* **256**(2009), 1269-1298

[27] Bogachev V. I., Da Prato G., Röckner M., Existence and uniqueness of solutions for Fokker-Planck equations on Hilbert spaces, *J. Evol. Equ.* **10**(2010), 487-509

[28] Bogachev V. I., Röckner M., Wang F. Y., Invariance implies Gibbsian: some new results, *Commun. Math. Phys.* **248**(2004), 335-355

[29] Bogachev V. I., Da Prato G., Röckner M., Uniqueness for solutions of Fokker-Planck equations on infinite dimensional spaces, *Comm. Partial Differential Equation* **36**(2011), 925-939

[30] Bogachev V.I., Röckner M., Shaposhnikov M., On the uniqueness problems related to the Fokker-Planck-Kolmogorov equation for measures, *J. Math. Sci.* **179**(2011), 7-47

[31] Bogachev V.I., Kirillov A.I., Shaposhnikov S.V., On Probability and Integrable Solutions to the Stationary Kolmogorov Equation, *Doklady Math.* **83**(2011), 154-159

[32] Bogachev V.I., Röckner M., Shaposhnikov S.V., On positive and probability solutions to the stationary Fokker-Planck-Kolmogorov equation, *Doklady Math.* **85**(2012), 245-249

[33] Bogachev V.I., Krylov N.V., Röckner M., Shaposhnikov S.V., *Fokker-Planck-Kolmogorov Equations*, A.M.S. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 207, 2015

[34] Butzer P.L., Berens H., *Semi-Groups of Operators and Approximations*, Springer Verlag, New York Inc., 1967

[35] Cerrai S., A Hille-Yosida theorem for weakly continuous semigroups, *Semigroups Forum* **49**(1994), 349-367

[36] Choe Y.H., C_0-semigroups on Locally Convex Space, *J. Math. Anal. Appl.* **106**(1985), 293-320

[37] Clément P.H., Heijmans H.J.A.M., Angenent S., van Duijn C.J., de Patger B., *One-parameter Semigroups*, CWI Monograph 5, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, Tokyo, 1987

[38] Cycon H.L., Froese R.G., Kirsch W., Simon B., *Schrödinger operators with applications to quantum mechanics and global geometry*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1987

[39] Davies E.B., *One-parameter semigroups*, Academic Press, London, New York, Toronto, Sydney, San Francisco, 1980

[40] Dembart B., On the Theory of Semigroups of Operators on Locally Convex Spaces, *J.Funct. Anal.* **16**(1974), 123-160

[41] Desch W., Schappacher W., On Relatively Bounded Perturbations of Linear C_0-Semigroups, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **11**(1984), 327-341

[42] Deuschel J. D., Stroock D. W., Hypercontractivity and spectral gap of symmetric diffusion with applications to the stochastic Ising models, *J. Funct. Anal.* **92**(1990), 30-48

[43] Doss H., Royer G., Processus de diffusion associe aux mesures de Gibbs sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw Gebiete* **46**(1978), 107-124

[44] Dynkin E.B., *Markov Processes*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 121,122, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1965

[45] Eberle E., L^p Uniqueness of non-symmetric diffusion operators with singular drift coefficients, *J. Funct. Anal.* **173**(2000), 328-342

[46] Eberle A., Uniqueness and Non-Uniqueness of Semigroups Generated by Singular Diffusion Operators, *Lect. Notes Math.* **1718**(1999), Springer, Berlin

[47] Engel K.J., Nagel R., *One-parameter semigroups for linear evolution equation*, Springer, Berlin, 2000

[48] Ethier N., Kurtz G., *Markov processes (Characterization and Convergence*, John-Wiley & Sons, 1986

[49] Fattorini H.O., Ordinary differential equations in linear topological spaces, *J. Diff. Eq.* **5**(1968), 72-105

[50] Feller W., The parabolic differential equations and the associated semigroups of transformations, *Ann. Math.* **55**(1952), 468-519

[51] Feller W., Semi-goups of transformations in general weak topologies, *Ann. Math.* **57**(1953), 287-308

[52] Feller W., On the generation of unbounded semigroups of bounded linear operators, *Ann. of Math.* **58**(1953), 166-174

[53] Gallot S., Hulin D., Lafontaine J., *Reimannian Geometry* (Third edition) Springer, 2004

[54] Hille E., *Functional Analysis and Semi-Groups*, A.M.S., New York, 1948

[55] Hille E., Phillips R.S., *Functional Analysis and Semi-Groups*, A.M.S., Providence, Rhode Island, 1957

[56] Holley R. A., Stroock D. W., A martingale approach to infinite systems of interacting processes, *Ann. Probab.* **4**(1976), 195-228

[57] Holley R. A., Stroock D. W., Diffusions on an infinite dimensional torus, *J. Funct. Anal.* **42**(1981), 29-63

[58] Holley R. A., Stroock D. W., Logarithmic sobolev inequalities and stochastic Ising models, *J. Statist. Phys.* **46**(1987), 1159-1194

[59] Ikeda N., Watanabe S., *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, North-Holland, Amsterdam, Kodansha, Tokyo, 1981

[60] Jefferies B., Weakly integrable semigroups on locally convex spaces, *J. Funct. Anal.* **66**(1986), 347-364

[61] Jefferies B., The generation of weakly integrable semigroups, *J. Func. Anal.* **73**(1987), 195-215

[62] Jost J., *Reimannian geometry and geometric analysis* (Fourth edition), Springer, 2005

[63] Kato T., *Perturbation theory for linear operators*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1984

[64] Kato T., Schrödinger operators with singular potentials, *Israel J. Math.* **13**(1972), 135-148

[65] Komatsu H., Semigroups of operators in locally convex spaces, *J. Math. Soc. Japan* **16**(1964), 230-262

[66] Köthe G., *Topological Vector Spaces*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenchaften 237, Springer, Berlin, 1979

[67] Kõmura T., Semigroups of Operators in Locally Convex Spaces, *J. Funt. Anal.* **2**(1968), 258-296

[68] Leha G., Ritter G., On solutions to stochastic differential equations with discontinuous drift in Hilbert space, *Math. Ann.* **270**(1985), 109-123

[69] Lemle L.D., L^∞-uniqueness of Schrödinger operators on a Riemannian manifold, *Differ. Geom. Dyn. Syst.* **9**(2007), 103-110

[70] Lemle L.D., $L^1(\mathbb{R}^d, dx)$-uniqueness of weak solution for the Fokker-Planck equation associated to a class of Dirichlet operators, *Electron. Res. Announc. Math. Sci.* **15**(2008), 65-70

[71] Lemle L.D., Desch-Schappacher perturbation theorem for C_0-semigroups on the dual of a Banach space, *Acta Universitatis Apulensis* **15**(2008), 191-194

[72] Lemle L.D., Wu L., Unicité des pré-générateurs dans les espaces localement convexes, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* **347**(2009), 1281-1284

[73] Lemle L.D., Existence and uniqueness for C_0-semigroups on the dual of a Banach space, *Carpathian J. Math.* **26**(2010), 67-76

[74] Lemle L.D., *L^∞-uniqueness for one-dimensional diffusions*, Operator Theory Live, Theta, Bucharest, 2010, pp.99-112

[75] Lemle L.D., Wu L.M., Uniqueness of C_0-semigroups on a general locally convex vector space and an application, *Semigroup Forum* **82**(2011), 485-496

[76] Lemle L.D., Pater L.F., Berdie A., Kato's type inequality for symmetric diffusion operators, *AIP Conference Proceedings* **1389**(2011), 528-531

[77] Lemle L.D., Stoica D.M., Chernoff product formula for C_0-semigroups on L^∞, *A.I.P. Conference Proceedings* **1493**(2012), 994-997

[78] Lemle L.D., Wang R., Wu L.M., Uniqueness of Fokker-Planck equations for spin lattice systems (I): compact case, *Semigroup Forum* **86**(2013), 583-591

[79] Lemle L.D., Wang R., Wu L.M., Uniqueness of Fokker-Planck equations for spin lattice systems (II): non-compact case, *Sci. China Math.* **57**(2014), 161-172

[80] Lemle L.D., On the L^∞-uniqueness of multidimensional Nelson diffusion, *Carpathian J. Math.* **30**(2014), 209-215

[81] Lemle L.D., On the L^∞-uniqueness of symmetric diffusion operators on complete non-compact Riemannian manifolds, *J. Geom. Anal.* **25**(2015), 2375-2385

[82] Lemle L.D., On the approximation of C_0-semigroups on the dual of a Banach space, *Operators and Matrices* (acceptat pentru publicare)

[83] Liskevich V., On the uniqueness problem for Dirichlet operators, *J. Funct. Anal.* **162**(1999), 1-13

[84] Li P., Uniqueness of L^1 solution for the Laplace equation and the heat equation on Riemannian manifolds, *J. Diff. Geom.* **20**(1984), 447-457

[85] Li X.D, Liouville theorems for symmetric diffusion operators on complete Riemannian manifolds, *J. Math. Pures Appl.* **84**(2005), 1295-1361

[86] Lotz H.P., Semigroups on L^∞ and H^∞, in *One Parameter Semigroups of Positive Operators* (R. Nagel, Ed.), Springer, Berlin, 1986, 54-58

[87] Meyer P.A., Zheng W.A., Construction de processus de Nelson reversible, *Lect. Notes Math.* **1123**(1984), 12-26

[88] Miyadera I., Semi-groups of operators in Fréchet space and applications to partial differential equations, *Tohoku Math. J.* **11**(1959), 162-183

[89] Moore R.T., Banach algebras of operators in locally convex spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.* **75**(1969), 68-73

[90] Ouhabaz E.M, Robinson D.W., Uniqueness properties of degenerate elliptic operators, *J. Evol. Equ.* **12**(2012), 647-673

[91] Õuchi S., Semi-groups of operators in locally convex spaces, *J. Math. Soc. Japan* **25**(1973), 265-276

[92] Pazy A., *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer Verlag, New York, Berlin, 1983

[93] Pater F.L., Note on Kato's type inequality, *Math. Inequal. Appl.* **16**(2013), 249-254

[94] Phillips R.S., Perturbation Theory for Semi-Groups of Linear Operators, *Trans. Amer. Math. Soc.* **74**(1953), 199-221

[95] Reed M., Simon B., *Methods of Modern Mathematical Physics, II, Fourier Analysis, Self-adjointness*, Academic Press, New York, 1975

[96] Robinson D.W., Uniqueness of diffusion operators and capacity estimates, *J. Evol. Equ.* **13**(2013), 229-250

[97] Röckner M., *L^p-analysis of finite and infinite dimensional diffusion operators*, *Lect. Notes in Math.* **1715**(1998), 65-116

[98] Röckner M., Zhang T.S., On uniqueness of generalized Schrödinger operators and applications, *J. Funct. Anal.* **105**(1992), 187-231

[99] Röckner M., Zhang T.S., Uniqueness of generalized Schrödinger operators, Part II, *J. Funct. Anal.* **119**(1994), 455-467

[100] Schaefer H.H., *Topological Vector Spaces*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1971

[101] Schechter M., *Spectra of partial differential operators*, North-Holland, Amsterdam, 1971

[102] Schwartz L., *Lectures on mixed problems in partial differential equations and the representation of semi-groups*, Tata Institute of Fundamantal Research, 1958

[103] Shaposhnikov S.V., On the uniqueness of integrable and probability solutions to the Cauchy problem for the Fokker-Planck-Kolmogorov equations, *Dokl. Math.* **84**(2011), 565-570

[104] Simon B., Schrödinger Semigroups, *Bull. Amer. Math. Soc.* **7**(1982), 447-526

[105] Sobajima M., L^p-theory for second-order elliptic operators with unbounded coefficients, *J. Evol. Equ.* **12**(2012), 957-971

[106] Stannat W., (Nonsymmetric) Dirichlet operators on L^1: existence, uniqueness and associated Markov processes, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pissa*, C1 Sci. **28**(1999), 99-140

[107] Stannat W., Time-dependent diffusion operators on L^1, *J. Evol. Equ.* **4**(2004), 463-495

[108] Stroock D.W., Varadhan S.R.S., *Multidimensional diffusion processes*, Springer-Verlag, New York, 1979

[109] Stroock D.W., Zegarlinski B., The equivalence of the Logarithmic Sobolev inequality and the Dobrushin-Shlosman mixing condition. *Comm. Math. Phys.* **144**(1992), 303-323

[110] Vrabie I.I., *Semigrupuri de operatori liniari şi aplicaţii*, Editura Universităţii "Al. I. Cuza", Iaşi, 2001

[111] Wielens N., On the essential self-adjointness of generalized Schrödinger operators, *J. Funct. Anal.* **61**(1985), 98-115

[112] Wu L.M., Uniqueness of Nelson's diffusions, *Probab. Theory Relat. Fields* **114**(1999), 549-585

[113] Wu L.M., Uniqueness of Nelson's diffusion II: Infinite dimensional setting and applications, *Potential Anal.* **13**(2000), 269-301

[114] Wu L.M., L^p-Uniqueness of Schrödinger Operators and the Capacitary Positive Improving Property, *J. Funct. Anal.* **182**(2001), 51-80

[115] Wu L.M., Zhang Y., A new topological approach for uniqueness of operators on L^∞ and L^1-uniqueness of Fokker-Planck equations, *J. Funct. Anal.* **241**(2006), 557-610

[116] Wu L.M., Uniqueness of Schrödinger Operators Restricted in a Domain, *J. Funct. Anal.* **153**(1998), 276-319

[117] Yosida K., *Functional Analysis*, Springer Verlag, New York, 1971