UNIVERSITATEA "BABEŞ-BOLYAI"
Facultatea de Matematică şi Informatică
Cluj-Napoca, România

Teză de abilitare
REZUMAT

Contribuţii la problema de reprezentabilitate Brown

George Ciprian Modoi

2018

1 Preliminarii

Proprietatea de reprezentabilitate Brown este un înlocuitor pentru celebra Teoremă a functorilor adjuncţi a lui Freyd, care ne permite să construim functori adjuncţi în contextul categoriilor triangulate. In cele ce urmează $\mathcal{T}$ este o categorie triangulată, iar $\mathcal{A}$ este o categorie aditivă (adesea $\mathcal{A}$ este chiar abeliană).

Spunem că $\mathcal{T}$ satisface *reprezentabilitatea Brown* dacă ea are coproduse şi orice functor cohomologic $F : \mathcal{T} \to \mathcal{A}b$ care transformă coprodusele în produse este (contravariant) reprezentabil, adică el este natural izomorf cu $\mathcal{T}(-, X)$ pentru un anume $X \in \mathcal{T}$.

2 Abelianizarea

Categoria $\mathrm{mod}(\mathcal{T})$ a tuturor functorilor $F : \mathcal{T}^o \to \mathcal{A}b$ pentru care există un şir exact

$$\mathcal{T}(-, X) \to \mathcal{T}(-, Y) \to F \to 0,$$

este numită *abelianizarea* lui $\mathcal{T}$.

2.1 O reformulare a reprezentabilităţii Brown

Teoremă 2.1.1. *Pentru o categorie triangulata cu coproduse $\mathcal{T}$, următoarele condiţii sunt echivalente:*

(i) *$\mathcal{T}$ satisface reprezentabilitatea Brown.*

(ii) *Pentru orice functor homologic care comută cu coprodusele $f : \mathcal{T} \to \mathcal{A}$, având codomeniul o categorie $\mathcal{A}$ abeliană, AB3 cu suficiente obiecte injective, functorul indus*

$$f_* : \mathrm{mod}(\mathcal{T}) \to \mathcal{A}$$

are un adjunct la dreapta.

(iii) *Orice functor exact care comută cu coprodusele $F : \mathrm{mod}(\mathcal{T}) \to \mathcal{A}$, având codomeniul o categorie $\mathcal{A}$ abeliană, AB3 cu suficiente obiecte injective are un adjunct la dreapta.*

(iv) *Orice functor exact care comută cu coprodusele $F : \mathrm{mod}(\mathcal{T}) \to \mathcal{A}b^o$ are un adjunct la dreapta.*

2.2 Criteriul lui Heller revăzut

Spunem că $F : \mathcal{T} \to \mathcal{A}b$ are un *obiect soluţie* dacă există un obiect $S \in \mathcal{T}$ şi un epimorfism functorial

$$\mathcal{T}(S, -) \to F \to 0.$$

Următoarea Teoremă a fost demonstrată mai întâi de Heller în [28, Theorem 1.4], aşadar o vom numi *criteriul lui Heller*de reprezentabilitate.

Teoremă 2.2.3. *Dacă $\mathcal{T}$ este o categorie triangulată cu produse, atunci un functor homologic care comută cu coprodusele $F : \mathcal{T} \to \mathcal{A}b$ este reprezentabil dacă şi numai dacă el are un obiect soluţie.*

3 Deconstructibilitatea în categorii triangulate

3.1 Deconstructibilitatea

Considerăm o mulţime de objecte ale lui $\mathcal{T}$ care este Σ-închisă pe care o notăm cu $\mathcal{S}$. Definim $\mathrm{Prod}(\mathcal{S})$ ca fiind subcategoria plină a lui $\mathcal{T}$ având ca obiecte toţi factorii direcţi a produselor arbitrare de obiecte din $\mathcal{S}$. În continuare definim inductiv $\mathrm{Prod}_0(\mathcal{S}) = \{0\}$, iar $\mathrm{Prod}_n(\mathcal{S})$ este subcategoria plină a lui $\mathcal{T}$ ale cărei obiecte Y se pot înscrie într-un triunghi

$$X \to Y \to Z \to \Sigma X$$

cu $X \in \mathrm{Prod}(\mathcal{S})$ şi $Z \in \mathrm{Prod}_n(\mathcal{S})$. Un obiect $X \in \mathcal{T}$ este numit $\mathcal{S}$*-cofiltrat* dacă el poate fi scrie ca o limită homotopică $X \cong \underleftarrow{\mathrm{holim}}\, X_n$ a unui turn invers

$$X_0 \leftarrow X_1 \leftarrow X_2 \leftarrow \cdots$$

cu $X_0 \in \mathrm{Prod}_0(\mathcal{S})$ şi X_{n+1} care se poate înscrie într-un triunghi $P_n \to X_{n+1} \to X_n \to \Sigma P_n$, pentru un anume $P_n \in \mathrm{Prod}_1(\mathcal{S})$. Inductiv avem $X_n \in \mathrm{Prod}_n(\mathcal{S})$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Spunem că $\mathcal{T}$ (respectiv, $\mathcal{T}^o$) este *deconstructiblă* dacă $\mathcal{T}$ are coproduse (produse) şi există o mulţime Σ-închisă $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$, care nu este o clasă proprie, astfel încât orice obiect $X \in \mathcal{T}$ este $\mathcal{S}$-filtrat (cofiltrat).

Teoremă 3.1.3. *Fie $\mathcal{T}$ o categorie triangulată cu produse. Dacă $\mathcal{T}^o$ este deconstructibilă, atunci $\mathcal{T}^o$ satisface reprezentabilitatea Brown.*

Teoremă de mai sus este numită *criteriul deconstructibilităţii* relativ la reprezentabilitatea Brown.

3.3 Bine–generare şi deconstructibilitate

Teoremă 3.3.3. *Fie $\mathcal{T}$ o categorie triangulată cu coproduse care este $\aleph_1$-perfect generată de o mulţime. Atunci $\mathcal{T}$ este deconstructibilă şi satisface reprezentabilitatea Brown.*

Corolar 3.3.5. *Dacă $\mathcal{T}$ o categorie triangulată bine–generată, atunci $\mathcal{T}$ este deconstructibilă şi satisface reprezentabilitatea Brown.*

4 Categorii quasi-local presentabile

4.1 Categorii abeliene quasi-local presentabile

Notăm cu $\mathfrak{R}$ clasa tuturor cardinalelor regulare.

Considerăm o categorie cocompletă $\mathcal{A}$ care este o reuniune

$$\mathcal{A} = \bigcup_{\lambda \in \mathfrak{R}} \mathcal{A}_\lambda,$$

a unui şir de subcategorii $\{\mathcal{A}_\lambda \mid \lambda \in \mathfrak{R}\}$ astfel încât $\mathcal{A}_\kappa \subseteq \mathcal{A}_\lambda$ pentru orice $\kappa \leq \lambda$, subcategoria $\mathcal{A}_\lambda$ este local λ–presentabilă, iar functorul de incluziune $I_\lambda : \mathcal{A}_\lambda \to \mathcal{A}$ are un adjunct la dreapta $R_\lambda : \mathcal{A} \to \mathcal{A}_\lambda$, pentru orice $\lambda \in \mathfrak{R}$. Numim *quasi-local presentabilă* o categorie $\mathcal{A}$ ca mai sus, care satisface de asemenea condiţia că R_λ păstrează colimitele, pentru orice $\lambda \in \mathfrak{R}$.

Teoremă 4.1.5. *Fie $\mathcal{A}$ o categorie abeliană, quasi-local presentabilă care satisface nişte condiţii tehnice adiţionale. Atunci orice functor contravariant, exact $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}b$ care aplică coprodusele în produse este reprezentabil (în mod necesar printr-un obiect injectiv).*

4.2 Abelianizarea unei categorii triangulate bine–generate este quasi-local presentabilă

Propoziţie 4.2.2. *Considerăm un cardinal regular $\kappa > \aleph_0$. Dacă $\mathcal{T}$ o categorie traingulată bine–generată, mai precis compact κ–generată, atunci* $\operatorname{mod}(\mathcal{T})$ *este o categorie abeliană, quasi-local presentabilă, care satisface condiţiile adiţionale din Teorema 4.1.5.*

5 Categoria homotopică a complexelor

5.1 Categorii homotopice care satisfac reprezentabilitatea Brown

Categoria $\mathcal{T}$ este numită *local bine–generată* dacă pentru orice mulţime $\mathcal{S}$ (care nu este o clasă proprie) de obiecte ale lui $\mathcal{T}$, categoria $\operatorname{Loc}(\mathcal{S})$ este bine–generată.

Teoremă 5.1.3. *Fie $\mathcal{T}$ o categorie triangulată local bine–generată. Atunci $\mathcal{T}$ satisface reprezentabilitatea Brown dacă şi numai dacă $\mathcal{T}$ este bine–generată. În particular, dacă R este un inel care nu este pur semisimplu, de exemplu $R = \mathbb{Z}$, atunci* $\mathbf{K}(\operatorname{Mod}(R))$ *nu satisface reprezentabilitatea Brown.*

5.2 Reprezentabilitatea Brown pentru duala unei categorii homotopice

Spunem că $\mathcal{A}$ are un *produs generator* dacă există un obiect $G \in \mathcal{A}$ astfel încât $\mathcal{A} = \operatorname{Prod}(G)$.

Teoremă 5.2.6. *Fie $\mathcal{A}$ o categorie additivă cu produse. Dacă $\mathbf{K}(\mathcal{A})^o$ satisface reprezentabilitatea Brown, atunci $\mathcal{A}$ are un produs generator. În particular $\mathbf{K}(\mathcal{A}b)^o$ nu satisface reprezentabilitatea Brown.*

Teoremă 5.2.10. *Fie $\mathcal{A}$ o categorie additivă cu produse şi cu idempotenţi scindabili, care are imagini sau nuclee. Atunci $\mathbf{K}(\mathcal{A})^o$ satisface reprezentabilitatea Brown dacă şi numai dacă $\mathcal{A}$ are un produs generator. În particular, dacă R este un inel, atunci $\mathbf{K}(\operatorname{Mod}(R))^o$ satisface reprezentabilitatea Brown dacă şi numai dacă* $\operatorname{Mod}(R)$ *are un produs generator.*

5.3 Functori fără adjuncţi

Teoremă 5.3.1. *Fie R un inel numărabil şi fie $\mathcal{D}$ clasa tuturor R-modulelor Mittag–Leffler plate, în sensul din [71]. Atunci $\mathbf{K}(\mathcal{D})$ este întotdeauna închisă la coproduse în $\mathbf{K}(\operatorname{Mod}(R))$, dar functorul incluziune $\mathbf{K}(\mathcal{D}) \to \mathbf{K}(\operatorname{Mod}(R))$ are un adjunct la drapta dacă şi numai dacă R este un inel perfect. În particular, un astfel de adjunct la dreapta nu există pentru $R = \mathbb{Z}$.*

6 Reprezentabilitatea Brown duală

6.1 Reprezentabilitatea Brown pentru duala unor categorii derivate

Pentru un complex $X^\bullet$ considerăm turnul invers

$$X^{\geq 0} \leftarrow X^{\geq -1} \leftarrow X^{\geq -2} \leftarrow \cdots.$$

obţinut din aşa numitele truncări "isteţe" ale lui $X^\bullet$.

Ca şi în [65], numim *completă la stânga* categoria $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ dacă are produse şi, cu notaţiile de mai sus, avem $X^\bullet \cong \underleftarrow{\mathrm{holim}}\, X^{\geq -n}$.

Teoremă 6.1.1. *Fie $\mathcal{A}$ o categorie abeliana completă cu un cogenerator injectiv şi fie $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ categoria ei derivată. Dacă $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ este completă la stânga, atunci $\mathbf{D}(\mathcal{A})(X, Y)$ este o mulţime pentru orice $X, Y \in \mathbf{D}(\mathcal{A})$ şi $\mathbf{D}(\mathcal{A})^o$ satisface reprezentabilitatea Brown.*

Corolar 6.1.2. *Fie $\mathcal{A}$ o categorie abeliana completă cu un cogenerator injectiv. Dacă $\mathcal{A}$ este AB4*-n, pentru un anumit $n \in \mathbb{N}$ şi $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ are produse, atunci $\mathbf{D}(\mathcal{A})(X, Y)$ este o mulţime pentru orice $X, Y \in \mathbf{D}(\mathcal{A})$ şi $\mathbf{D}(\mathcal{A})^o$ satisface reprezentabilitatea Brown.*

Corolar 6.1.4. *Fie $\mathcal{A}$ o categorie abeliana completă cu un cogenerator injectiv. Dacă $\mathcal{A}$ are dimensiunea globală finită şi $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ are produse, atunci $\mathbf{D}(\mathcal{A})(X, Y)$ este o mulţime pentru orice $X, Y \in \mathbf{D}(\mathcal{A})$ şi $\mathbf{D}(\mathcal{A})^o$ satisface reprezentabilitatea Brown.*

Corolar 6.1.5. *Fie $\mathcal{A}$ categoria fasciculelor quasi-coerente peste o schemă quasi-compactă şi separată. Atunci $\mathbf{D}(\mathcal{A})(X, Y)$ este o mulţime pentru orice $X, Y \in \mathbf{D}(\mathcal{A})$ şi $\mathbf{D}(\mathcal{A})^o$ satisface reprezentabilitatea Brown. În particular, concluzia este adevărată pentru categoria $\mathcal{A}$ a fasciculelor quasi-coerente peste $\mathbb{P}^d_R$, unde $\mathbb{P}^d_R$ este d-spaţiul proiectiv, $d \in \mathbb{N}^*$, peste un inel comutativ arbitar cu unitate R.*

6.3 Reprezentabilitatea Brown pentru duala categoriei homotopice de module proiective

Teoremă 6.3.2. *Dacă R este un inel cu mai multe obiecte, atunci $\mathbf{K}(\mathrm{Proj}(R))^o$ satisface reprezentabilitatea Brown.*

Corolar 6.3.4. *Dacă R este un inel, atunci duala categoriei homotopice a modulelor pur–proiective satisface reprezentabilitatea Brown.*

Teoremă 6.3.8. *Pentru o tolbă Q şi un inel R notăm cu $\mathrm{Mod}(R, Q)$ categoria reprezentarilor lui Q prin R-module şi cu $\mathrm{Proj}(R, Q)$ subcategoria obiectelor proiective din $\mathrm{Mod}(R, Q)$. Atunci $\mathbf{K}(\mathrm{Proj}(R, Q))^o$ satisface reprezentabilitatea Brown.*

Bibliografie

[1] J. Adámek and J. Rosický *Locally presentable and accessible categories*, Cambridge University Press, 1994.

[2] L. Alonso Tarrío, A. Jeremías López, M. J. Souto Salorio, *Localization in categories of complexes and unbounded resolutions*, Canad. J. Math., **52** (2) (2000), 225–247.

[3] G. Azumaya, A. Facchini, *Rings of pure global dimension zero and Mittag-Leffler modules*, J. Pure Appl. Algebra, 62(2):109–122, 1989.

[4] P. Balmer, M. Schlichting, *Idempotent completion of triangulated categories*, J. Algebra, **236**(2), 2001, 819–834.

[5] S. Bazzoni, J. Šťovíček. *Flat Mittag–Leffler modules over countable rings*, Proc. Amer. Math. Soc., **140** (2012), 1527–1533

[6] A. Beligiannis, *Relative homological algebra and purity in triangulated categories*, J. Algebra, **227** (2000), 268–361.

[7] A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne, *Faisceaux Pervers*, in *Analysis and topology on singular spaces*, Soc. Math. France, Paris, Asterisque, **100** (1982), 5–171.

[8] S. Breaz, Σ*–pure injectivity and Brown representability*, Proc. Amer. Math. Soc. **143** (2015), 2789–2794.

[9] S. Breaz, G. C. Modoi, *A reformulation of Brown representability theorem*, Mathematica(Cluj), **51**(2009), 129–133.

[10] S. Breaz, G. C. Modoi, *Ideal cotorsion theories in triangulated categories*, preprint, arXiv:1501.06810 [math.CT].

[11] S. Breaz, G. C. Modoi, *Equivalences induced by infinitely generated silting modules*, preprint, arXiv:1705.10981 [math.RT].

[12] S. Breaz, G. C. Modoi, *Derived equivalences induced by good silting complexes*, preprint, arXiv:1707.07353 [math.RT].

[13] S. Brenner, M. C. R. Butler, *Generalizations of the Bernstein-Gelfand-Ponomarev reflection functors*, in Representation Theory, II (Proc. Second Internat. Conf., Carleton Univ., Ottawa, Ont., 1979), volume 832 of Lecture Notes in Math., 103–169. Springer, Berlin, 1980.

[14] E. H. Brown, *Cohomology theories*, Annals Math., **75** (1962) 467–484.

[15] C. Casacuberta, J. Gutiérez, J. Rosický, *Are all localizing subcategories of stable homotopy category coreflective?*, Adv. Math., **252** (2014) 158–184.

[16] C. Casacuberta, A. Neeman. *Brown representability does not come for free* Math. Res. Lett., **16** (2009), 1–5.

[17] S. U. Chase, *Direct products of modules*, Trans. Amer. Math. Soc., **97** (1960), 457–473.

[18] X.W. Chen, *Homotopy equivalences induced by balanced pairs*, J. Algebra, **324** (2010), 2718–2731.

[19] J. D. Christensen, *Ideals in triangulated categories: phantoms, ghosts and skeleta*. Adv. Math. **136** (1998), 284–339.

[20] P. C. Eklof, A. H. Mekler, *Almost free modules*, volume 65 of North-Holland Mathematical Library. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, revised edition, 2002. Set-theoretic methods.

[21] J. Franke, *On the Brown representability theorem for triangulated categories*, Topology, **40** (2001), 667–680.

[22] P. Freyd, *Abelian Categories. An Introduction to the Theory of Functors*, Harper & Row, New York, 1964.

[23] X.H. Fu, P.A. Guil Asensio, I. Herzog, B. Torrecillas, *Ideal Approximation Theory*, Adv. Math. **244** (2013), 750–790.

[24] X.H. Fu, I. Herzog, *Powers of the Phantom Ideal*, Proc. London Math. Soc., **112** (2016), 714–752.

[25] L. Fuchs. *Infinite abelian groups. Vol. II.* Academic Press, New York, 1973. Pure and Applied Mathematics. Vol. 36-II.

[26] P. Gabriel, F. Ulmer, *Lokal präsentierbare Kategorien*, Springer Lecture Notes in Math., **221**, Berlin–Heidelberg, 1971.

[27] R. Göbel, J. Trlifaj, *Approximatins and Endomorphisms Algebras of Modules*, De Gruyter Expositions in Mathematics, **41**, Walter de Gruyter, 2006.

[28] A. Heller, *On the representability of homotopy functors*, J. London Math. Soc., **23**, (1981), 551–562.

[29] D. Herbera, J. Trlifaj. *Almost free modules and Mittag–Leffler conditions* Adv. Math., **229** (2012), 3436–3467.

[30] A. Hogadi, C. Xu, *Products, homotopy limits and applications*, preprint arXiv:0902.4016 [math CT].

[31] Hovey, M. (1999). *Model Categories*, AMS Mathematical Surveys and Monographs **63**, Providence, RI.

[32] M. Hovey, *Cotorsion pairs, model category structures, and representation theory*, Math. Z., **241** (2002), 553–592.

[33] M. Hovey, *Brown representability and the Eilenberg–Watts theorem in homotopical algebra* Proc. Am. Math. Soc., **143** (2015), 2269–2279.

[34] S. Iyengar, H. Krause, *Acyclicity versus total acyclicity for complexes over noetherian rings*, Doc. Math. **11** (2006), 207–240.

[35] B. Keller, *Derived categories and their uses*, Chapther of *Handbook of Algebra*, edited by M. Hazewinkel, Elsevier 1996.

[36] B. Keller, *Introduction to abelian and derived categories*, in *Representations of Reductive Groups*, edited by R. W. Carter and M. Geck, Cambridge University Press 1998, 41–62.

[37] B. Keller, *On the construction of triangle equivalences*, contribution to S. König, A. Zimmermann, *Derived equivalences of group rings*, Lecture notes in Mathematics 1685, Springer, Berlin, Heidelberg, 1998.

[38] B. Keller, P. Nicolás, *Weight structures and simple dg modules for positive dg algebras*, Int. Math. Res. Not., **5** (2013), 1028–1078.

[39] Krause, H. *Functors on locally finitely presented additive categories*. Colloq. Math. **75**(1998): 105–132.

[40] H. Krause, *Smashing subcategories and the telescope conjecture – an algebraic approach*, Invent. Math. **139**(2000), 99–133.

[41] H. Krause, *The spectrum of a module category*, Mem. Amer. Math. Soc. **149** (2001), x+125 pp.

[42] H. Krause, *On Neeman's well generated triangulated categories*, Documenta Math. **6**(2001), 121–126.

[43] H. Krause, *A Brown representability theorem via coherent functors*, Topology, **41**(2002), 853–561.

[44] H. Krause. *Localization theory for triangulated categories*, in *Triangulated categories*, volume 375 of London Math. Soc. Lecture Note Ser., pages 161–235. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010.

[45] H. Krause. *Approximations and adjoints in homotopy categories*, Math. Ann., **353** (2012), 765–781.

[46] S. Maclane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1971.

[47] D. Miličić, *Lectures on Derived Categories*, preprint available at author's homepage: `http://www.math.utah.edu/ milicic/`

[48] B. Mitchell, *Theory of Categories*, Academic Press, NY and London, 1965.

[49] G. C. Modoi, *On perfectly generating projective classes in triangulated categories*, Comm. Algebra, **38** (2010), 995–1011.

[50] G. C. Modoi, *A representability theorem for some huge abelian categories*, Homology Homotopy Appl., **14(2)** (2012), 23–36.

[51] G. C. Modoi, *The dual of Brown representability for homotopy categories of complexes*, J. Algebra, **392** (2013), 115–124.

[52] G. C. Modoi, *The dual of the homotopy category of projective modules satisfies Brown representability*, B. Lond. Math. Soc., 46 (2014), 765-770.

[53] G. C. Modoi, *Constructing cogenerators in triangulated categories and Brown representability*, J. Pure Appl. Algebra, 219 (2015), 3214-3224.

[54] G. C. Modoi, *The dual of Brown representability for some derived categories*, Arkiv for Mathematik, 54 (2016), 485-498.

[55] G. C. Modoi, *Reasonable triangulated categories have filtered enhancements*, preprint, arXiv:1711.06331 [math.CT].

[56] G. C. Modoi, J. Šťovíček, *Brown representability often fails for homotopy categories of complexes*, J. K-Theory, **9** (2012), 151–160.

[57] D. Murfet, *The Mock Homotopy Category of Projectives and Grothendieck Duality*, Ph.D. Thesis, Australian National University, Canberra, 2007.

[58] Y. Miyashita, *Tilting modules of finite projective dimension*, Math. Z., 193 (1986), 113–146.

[59] Neeman, A. *The Grothendieck duality theorem via Bousfield techniques and Brown representability*, J. Amer. Math. Soc. **9** (1996), 205–236.

[60] A. Neeman, *Triangulated Categories*, Annals of Mathematics Studies, **148**, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.

[61] A. Neeman, *Brown Representability follows from Rosický's theorem*, J. Topology, **2**(2009), 262–276.

[62] A. Neeman, *The homotopy category of flat modules, and Grothendieck duality*, Invent. Math., **174**, (2008), 255–308.

[63] A. Neeman, *Some adjoints in homotopy categories*, Ann. Math., **171** (2010), 2142–2155.

[64] A. Neeman, *Explicit cogenerators for the homotopy category of projective modules over a ring*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup., **44** (2011), 607–629.

[65] A. Neeman, *Non–Left–Complete Derived Categories*, Math Ress. Notes, **18** (2011), 827–832.

[66] P. Nicolás, M. Saorín, *Generalized tilting theory*, Appl. Categ. Struct. (2017), https://doi.org/10.1007/s10485-017-9495-x.

[67] Popescu, N., Popescu, L. (1979). *Theory of Categories*, Editura Academiei, Bucureşti and Sijthoff & Noordhoff International Publishers.

[68] M. Porta, *The Popescu–Gabriel theorem for triangulated categories*, Adv. Math., **225** (2010), 1669–1715.

[69] C. Psaroudakis, J. Vitória, *Realization functors in tilting theory*, Math. Z. (2017), https://doi.org/10.1007/s00209-017-1923-y.

[70] J. E. Roos, *Derived functors of inverse limits revisited*, J. London Math. Soc., **73** (2006), 65–83.

[71] M. Raynaud, L. Gruson, *Critères de platitude et de projectivité. Techniques de "platification" d'un module*, Invent. Math., **13**, (1971), 1–89.

[72] N. Spaltenstein, *Resolutions of unbounded complexes*, Compositio Math. **65** (1988), 121–154.

[73] B. Stenström, *Rings of Quotients*, Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, N.Y., 1975.

[74] J. Šťovíček. *Locally well generated homotopy categories of complexes*, Doc. Math., **15** (2010), 507–525.

[75] J. Šťovíček, *Derived equivalences induced by big cotilting modules*, Adv. Math., **263** (2014), 45–87,

[76] J. Trlifaj, *Brown representability test problems for locally Grothendieck categories*, Appl. Cat. Struct., **20** (2012), 97–102.

[77] R. Vakil, *Foundations of Algebraic Geometry*, `http://math.stanford.edu/~vakil/216blog/FOAGjun1113public.pdf`

[78] E. A. Walker. *The groups P_β*. In *Symposia Mathematica, Vol. XIII (Convegno di Gruppi Abeliani, INDAM, Rome, 1974)*, pages 245–255. Academic Press, London, 1974.

[79] C. Weibel, *An Introduction to Homological Algebra*, Cambridge Studies in Advanced Math. **38**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.