

UNIVERSITATEA BABEȘ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ

**ELEMENTE DE DINAMICĂ ȘI
GEOMETRIE PE SPAȚII VECTORIALE
POISSON**

REZUMATUL TEZEI DE DOCTORAT

Conducător științific:

Prof. univ. dr. Dorin ANDRICA

Doctorand:

ȘUȘOI Paul-Mihai

CLUJ- NAPOCA

2010

Cuprins

Introducere	1
1 Elemente de mecanică geometrică	6
1.1 Elemente de geometrie simplctică pe spațiul \mathbf{R}^n	6
1.2 Varietăți Poisson. Structuri Poisson pe \mathbf{R}^n	9
1.3 Sisteme mecanice Hamilton-Poisson pe \mathbf{R}^n	14
1.4 Exemple de sisteme Hamilton-Poisson	14
2 Proprietăți dinamice ale sistemelor Hamilton-Poisson pe \mathbf{R}^n	16
2.1 Studiul calitativ al sistemului dinamic asociat unui câmp de vectori	16
2.2 Dinamica sistemului Euler top general	21
2.2.1 Geometria Poisson a sistemului Euler top	21
2.2.2 Problema stabilității în dinamica Euler top	23
2.2.3 Integrarea numerică a sistemului Euler top	25
2.3 Sistemul Euler top metriplectic	26
3 Două sisteme dinamice clasice pe \mathbf{R}^6	30
3.1 Structura Lie-Poisson pe duala algebrei Lie $se(3)$	30
3.2 Studiul dinamicii Goryachev- Chaplygin top	30
3.3 Studiul dinamicii Kowalevski top	35
4 Sisteme dinamice cu control pe grupul Lie $SO(4)$	37
4.1 Sisteme cu control pe grupuri Lie de matrici	37
4.2 Sisteme controlabile pe grupul Lie $SO(4)$	41
4.2.1 O problemă de control optimal pe $SO(4)$	42
4.2.2 Problema stabilității pentru dinamica (4.2.5)	43
4.2.3 Formularea Lax și integrabilitate pentru dinamica (4.2.5)	44
4.2.4 Integrarea numerică a dinamicii (4.2.3)	45
Bibliografie	47

Introducere

Teoria sistemelor dinamice s-a dezvoltat într-un ritm rapid datorită succesului acesteia în modelarea matematică a unor fenomene și procese reale din fizică, chimie, biologie, economie și alte domenii ale științei [35](Marsden și Rațiu, 1994), [18](Hirsch, Smale și Devaney, 2003), [41](Petrera, Phadlery și Surris, 2009), [43](Putra, 1993), [2](Andrica și Cașu, 2008). Analiza proceselor modelate poate fi studiată folosind diferite metode geometrice, analitice și numerice. O clasă de sisteme dinamice este constituită din sistemele Hamilton-Poisson.

Pentru analiza proprietăților dinamice ale unui sistem Hamilton-Poisson se cercetează următoarele probleme:

- (1) existența unei structuri Poisson și a unor funcții Casimir;
- (2) problema stabilității stărilor staționare și existența orbitelor periodice;
- (3) determinarea unei formulări Lax și problema integrării numerice a sistemului dinamic, folosind algoritmi numerici.

O extensie a sistemelor dinamice de tipul Hamilton-Poisson este reprezentată de sistemele metriplectice, [27] (A. N. Kaufman, 1984), [40] (Ortega și Planas-Bielsa, 2004).

În cercetările întreprinse în ultimele două decenii se manifestă un interes deosebit în studiul sistemelor neliniare cu control pe grupuri Lie de matrici. Acestea apar în mod natural în diverse domenii, ca de exemplu: robotică, elasticitate, dinamica moleculară, aeronautică etc., [33](Leonard și Krishnaprasad, 1998), [28](Khalil, 2002).

Teoria grupurilor Lie finit dimensionale a oferit un cadru natural în care se pot explica și înțelege o serie de fenomene din mecanica geometrică, fizica teoretică și teoria controlului. În acest sens menționăm: grupul Lie $SO(3)$ și teoria rigidului liber; grupul Lie $SE(2, \mathbf{R})$ și dinamica laser-materie; grupurile Lie de matrici și teoria controlului etc. Tematica abordată în ultimul capitol se încadrează în această topică.

Teza de față își propune să prezinte aspecte geometrice și dinamice ale sistemelor dinamice pe \mathbf{R}^n și să rezolve unele probleme din domeniul mecanicii geometrice.

Lucrarea este structurată în patru capitole care asigură unitatea conținutului și relevanța tematicii cercetate. Lucrarea se bazează pe 53 referințe bibliografice.

Capitolul 1, intitulat ”*Elemente de mecanică geometrică*”, este structurat în pa-

tru paragrafe și are un caracter monografic. Obiectivul principal al acestui capitol este prezentarea într-o formă succintă a unor noțiuni și rezultate de bază referitoare la structuri symplectice, sisteme mecanice hamiltoniene, varietăți Poisson și sisteme mecanice Hamilton-Poisson.

În *Paragraful 1.1* sunt definite noțiuni din geometria symplectică și cea de sistem mecanic hamiltonian. Sunt prezentate rezultate fundamentale legate de acestea [teorema de structură a lui Darboux (Teorema 1.1.15), ecuațiile lui Hamilton (Teorema 1.1.19), principiul conservării energiei (Propoziția 1.1.21), teorema lui Liouville (Propoziția 1.1.22)].

Paragraful 1.2 conține noțiuni și teoreme de bază din geometria Poisson [Definițiile 1.2.1, 1.2.2, Propoziția 1.2.3, teorema de structură Darboux-Lie-Weinstein (Teorema 1.2.11), Teorema 1.2.20, Propozițiile 1.2.21–1.2.23]. Se demonstrează că o paranteză pe algebra $C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ care este \mathbf{R} -biliniară, antisimetrică și care satisface regula lui Leibniz determină o structură Poisson pe \mathbf{R}^n dacă și numai dacă identitatea lui Jacobi este verificată pentru funcțiile de coordonate (Propoziția 1.2.17). Secțiunea a a treia este dedicată prezentării structurilor Poisson pe duala unei algebre Lie finite dimensionale (Propozițiile 1.2.29, 1.2.34).

Paragraful 1.3 se ocupă cu sistemele mecanice Hamilton-Poisson pe \mathbf{R}^n . Se definește noțiunea de realizare Hamilton-Poisson a unui sistem de ecuații diferențiale pe \mathbf{R}^n și se prezintă câteva proprietăți importante ale acestor sisteme dinamice [conservarea energiei (Propoziția 1.3.2), fluxul unui sistem Hamilton-Poisson păstrează structura Poisson (Propoziția 1.3.3)].

În *Paragraful 1.4* se prezintă două exemple importante de sisteme Hamilton-Poisson pe \mathbf{R}^3 (rigidul liber și ecuațiile dinamicii unui vehicul subacvatic autonom).

Capitolul 2, intitulat *Proprietăți dinamice ale sistemelor Hamilton-Poisson pe \mathbf{R}^n* , este structurat în trei paragrafe și îmbină o prezentare cu caracter monografic cu rezultate originale ale autorului, care se regăsesc în ultimele două paragrafe.

Acest capitol este dedicat prezentării noțiunilor fundamentale precum și a metodelor de bază utilizate frecvent pentru studiul calitativ al dinamicii unui sistem Hamilton-Poisson pe \mathbf{R}^n . Ca exemplu ilustrativ se studiază sistemul dinamic Euler top general.

Paragraful 2.1 conține noțiuni de bază legate de sistemele Hamilton-Poisson din teoria sistemelor dinamice. Sunt prezentate apoi rezultatele fundamentale ale lui Lyapunov referitoare la stabilitatea neliniară precum și teoremele de caracterizare a naturii stabilității stărilor de echilibru ale unui sistem Hamilton-Poisson (Teoremele 2.1.3, 2.1.6, 2.1.9). Sunt puse în evidență două metode pentru studiul stabilității [metoda energie-Casimir (Teorema 2.1.12), metoda lui Arnold (Teorema 2.1.14)]. Se prezintă apoi formularea Lax. În final sunt date două metode de integrare numerică pentru aproximarea soluției unui sistem dinamic cu ajutorul unor integratori geometrici (integratorul Lie-Trotter și integratorul Kahan).

În *Paragraful 2.2* se realizează un studiu geometric și dinamic al sistemului Euler top în forma generală. Acest sistem este descris de o familie de ecuații diferențiale neliniare

pe \mathbf{R}^3 care depinde de un triplet de parametri reali. Sunt studiate proprietățile geometrice și dinamice ale sistemului Euler top [formularea Hamilton-Poisson (Propozițiile 2.2.3, 2.2.6), legătura cu dinamica pendulului (Propoziția 2.2.11)] și problema stabilității (Propozițiile 2.2.13, 2.2.14, 2.2.16–2.2.19, Corolarele 2.2.15, 2.2.20)].

Contribuțiile originale ale autorului sunt cuprinse în Secțiunea 2.2.3 și se referă la integrarea numerică a dinamicii Euler top, utilizând integratorul Lie-Trotter (**Propozițiile 2.2.21, 2.2.22, Corolarele 2.2.23–2.2.25**) și integratorul Kahan (**Propoziția 2.2.26, Observația 2.2.27**). Aceste rezultate au fost prezentate la **The 12th Symposium of Mathematics and its Applications, 5-7th November 2009, Timișoara** și publicate în lucrarea citată [50] (Șușoi, 2010).

În *Paragraful 2.3* se studiază proprietățile geometrice și dinamice ale sistemului Euler top metriplectic. Secțiunea 2.2.1 conține aspecte cu caracter monografic referitoare la structuri metriplectice. Conținutul ultimelor două secțiuni se axează pe rezultatele autorului cuprinse în lucrarea citată [49] (Șușoi și M. Ivan, 2009).

Contribuțiile originale se referă la construcția unei structuri metriplectice asociate sistemului Euler top (**Propoziția 2.3.4**) și la studiul stabilității spectrale pentru sistemul Euler top metriplectic (**Propozițiile 2.3.8, 2.3.10–2.3.12, Corolarul 2.3.13**). Aceste rezultate au fost prezentate la **The International Conference on Theory and Applications of Mathematics and Informatics (ICTAMI 2009), 3-6th September 2009, Alba-Iulia** [conferință organizată de Universitatea "1 decembrie 1918" din Alba-Iulia și Institutul de Matematică "Simion Stoilow" al Academiei Române].

Capitolul 3, intitulat "*Două sisteme dinamice clasice pe \mathbf{R}^6* ", este structurat în trei paragrafe. Rezultatele originale ale autorului sunt conținute în ultimele două paragrafe.

În acest capitol se stabilesc proprietăți geometrice și dinamice importante pentru două sisteme diferențiale remarcabile pe \mathbf{R}^6 și anume: *sistemul Goryachev-Chaplygin top* și *sistemul Kowalevski top*.

În *Paragraful 3.1* se prezintă structurile Lie-Poisson pe duala algebrei Lie $se(3, \mathbf{R})$.

În *Paragraful 3.2* prezentăm un studiu geometric și dinamic al sistemului Goryachev-Chaplygin top (3.2.1). Acest paragraf conține contribuțiile originale ale autorului și au fost publicate în lucrarea citată [5] (Aron, Puta și Șușoi, 2005). Mai precis, acestea se referă la: formularea Hamilton-Poisson a dinamicii (3.2.1) (**Propoziția 3.2.1**), formularea Lax (**Propoziția 3.2.6**), problema stabilității pentru G-C top (**Propozițiile 3.2.8–3.2.13**), existența soluțiilor periodice (**Propoziția 3.2.15**) și integrarea numerică a dinamicii (3.2.1) via integratorul Lie-Trotter (**Propozițiile 3.2.16, 3.2.17**).

În *Paragraful 3.3* se realizează un studiu geometric și dinamic al sistemului Kowalevski top (3.3.1). Conținutul acestui paragraf se axează pe rezultatele autorului cuprinse în lucrarea citată [6] (Aron, Puta, Șușoi et al., 2006). Aceste contribuții se referă la: formularea Hamilton-Poisson a dinamicii (3.3.1) (**Propoziția 3.3.1**), formularea Lax (**Propoziția 3.3.4, Corolarul 3.3.5**), problema stabilității pentru Kowalevski top (**Propozițiile 3.3.6–3.2.11**), existența soluțiilor periodice (**Propoziția 3.3.13**), integrarea numerică a dinamicii (3.3.1), utilizând integratorul Lie-Trotter (**Propozițiile**

3.3.14, 3.3.15) și integratorul Kahan (**Propozițiile 3.3.16, 3.3.17**).

Capitolul 4, intitulat "*Sisteme dinamice cu control pe grupul Lie $SO(4)$* ", este structurat în două paragrafe. Rezultatele originale ale autorului sunt conținute în Paragraful 4.2 și au fost publicate în lucrările [42](Pop, Puta și Șușoi, 2005) și [7](Aron, Pop, Puta și Șușoi, 2006).

În *Paragraful 4.1* se prezintă principalele definiții și proprietăți referitoare la sisteme cu control pe grupuri Lie de matrici (Teoremele 4.1.2, 4.1.5). Se dau două exemple de sisteme stâng invariante controlabile pe grupul Lie $SE(2, \mathbf{R})$ [resp. $SO(3)$] care descriu dinamica robotului Hilare, resp. dinamica unei nave spațiale. Pentru fiecare din aceste modele se studiază o problemă de control optimal. Pentru studiul proprietăților sistemelor dinamice (4.1.19) și (4.1.24) se utilizează rezultatele obținute în Capitolul 2 referitoare la sistemul Euler top. Pentru aceste sisteme dinamice se cercetează problema stabilității (**Propoziția 4.1.7**) [resp., **Propoziția 4.1.11**] și integrarea numerică via integratorul Lie-Trotter (**Propozițiile 4.1.8, 4.1.9**) [resp., **Propozițiile 4.1.12, 4.1.13**].

Paragraful 4.2 este dedicat sistemelor controlabile pe grupul Lie $SO(4)$. Rezultatele originale obținute se referă la: studiul unei probleme de control optimal, cu trei contro-uri pentru sistemul (4.2.4) (**Propoziția 4.2.3**), problema stabilității (**Propozițiile 4.2.5-4.2.12**), formularea Lax și complet integrabilitatea (**Propozițiile 4.2.14, 4.2.16** și **Corolarul 4.2.15**) și integrarea numerică [**integratorul Lie-Trotter dat prin sistemul de ecuații recurente (4.2.11)** și **Propoziția 4.2.17**].

Contribuțiile originale ale autorului au fost publicate în șase lucrări științifice citate în bibliografie. Patru lucrări au fost realizate împreună cu profesorul Mircea Puta și colaboratorii săi ([5], [6], [7], [42]) și o lucrare a fost scrisă în colaborare cu dr. Mihai Ivan ([49]).

Doresc să exprim recunoștința mea pentru primul meu conducător de doctorat, Profesor Mircea Puta, fiindcă fără ajutorul și sprijinul său, această teză nu ar fi fost scrisă.

Doresc, de asemenea, să aduc mulțumirile mele cele mai profunde Domnului profesor universitar doctor Dorin Andrica pentru că a acceptat să fie conducătorul meu de doctorat, după dispariția tragică a profesorului Mircea Puta. Domnia sa mi-a acordat un sprijin substanțial pentru a finaliza acest demers științific. Sugestiile și observațiile relevante făcute de domnia sa au contribuit la versiunea actuală a tezei.

În final, dar nu în cele din urmă, aș dori să exprim sincerele mele mulțumiri pentru personalul Catedrei de Geometrie de la Universitatea Babeș-Bolyai din Cluj-Napoca care mi-au dat sprijinul lor moral și încredere, ceea ce a fost esențial pentru mine.

Capitolul 1

Elemente de mecanică geometrică

În cadrul acestui rezumat, pentru definiții, propoziții, teoreme etc, vom păstra numerotarea utilizată în teza de doctorat.

De asemenea pentru a asigura coerența și unitatea conținutului vom reaminti unele noțiuni și rezultate de bază care sunt necesare în cele ce urmează.

Capitolul 1 este structurat pe patru paragrafe și are un caracter monografic. Obiectivul principal al acestui capitol este prezentarea într-o formă succintă a unor noțiuni și rezultate de bază referitoare la structuri simplectice, sisteme mecanice hamiltoniene, varietăți Poisson și sisteme mecanice Hamilton-Poisson.

1.1 Elemente de geometrie simplectică pe spațiul \mathbf{R}^n

Notățiile principale folosite în teză sunt:

M – varietate diferențială n -dimensională de clasă C^∞ ;

$\mathcal{X}(M)$ – algebra Lie reală a câmpurilor de vectori pe M ;

TM (resp. T^*M) – spațiul total al fibratului tangent (resp. cotangent) la M ;

$C^\infty(M, \mathbf{R})$ – algebra funcțiilor reale de clasă C^∞ definite pe M .

Noțiunile din teoria varietăților diferențiale și a structurilor geometrice asociate sunt cele din tratatele de geometrie diferențială, ca de exemplu [14](M. Craioveanu, 2008).

În acest paragraf vom prezenta noțiuni și rezultate de bază din teoria varietăților simplectice. Principalele obiective acoperite sunt: spațiu vectorial simplectic, aplicație simplectică, proprietatea de caracterizare a unei forme simplectice (Propoziția 1.1.6), structură simplectică, simplectomorfism, sistem mecanic hamiltonian, conservarea energiei pentru un sistem hamiltonian (Propoziția 1.1.21). Principalele surse bibliografice folosite sunt: [1] (Abraham și Marsden, 1979), [43] (Pută, 1993).

Fie M o varietate de dimensiune n și $A^2(M)$ spațiul vectorial real al 2–formelor diferențiale exterioare pe M . Un element $\omega \in A^2(M)$ se numește 2–formă pe M .

Definiția 1.1.8 (a) Se numește *structură simplectică* pe varietatea diferențială M , o 2–formă închisă și nedegenerată ω pe M .

(b) Perechea (M, ω) , unde ω este o structură simplectică pe M , se numește *varietate simplectică* iar ω se mai numește *formă simplectică* pe M . \square

Orice spațiu vectorial simplectic (V, ω) este o varietate simplectică.

Definiția 1.1.10 Fie varietățile simplectice (M_1, ω_1) și (M_2, ω_2) . O aplicație $\varphi \in C^\infty(M_1, M_2)$ se numește *simplectomorfism*, dacă $\varphi^*\omega_2 = \omega_1$. \square

O aplicație diferențiabilă $c : I \rightarrow M$ ($I \subset \mathbf{R}$ este interval deschis care conține 0) este o *curbă integrală* a unui câmp de vectori $X \in \mathcal{X}(M)$ cu condiția inițială x , dacă:

$$\frac{dc(t)}{dt} = X(c(t)) \quad \text{și} \quad c(0) = x.$$

O familie $\{\varphi_t\}_{t \in I}$, unde $\varphi_t : M \rightarrow M$ este o aplicație diferențiabilă cu proprietatea $\varphi_t(x) = c(t)$, se numește *flux* al câmpului de vectori X .

Fie Q o varietate diferențială n –dimensională și T^*Q varietatea sa cotangentă. Coordonatele locale (q^1, q^2, \dots, q^n) pe Q induc coordonatele locale $(q^1, q^2, \dots, q^n, p_1, p_2, \dots, p_n)$ pe T^*Q , numite *coordonate cotangente canonice*.

Definim pe T^*Q o 1–formă θ , numită *formă Liouville*, dată prin:

$$\theta = p_1 dq^1 + p_2 dq^2 + \dots + p_n dq^n. \quad (1.1.1)$$

Cu ajutorul formei Liouville θ , definim 2–forma ω pe T^*Q , dată prin:

$$\omega = d\theta = dp_1 \wedge dq^1 + dp_2 \wedge dq^2 + \dots + dp_n \wedge dq^n. \quad (1.1.2)$$

Propoziția 1.1.13 $(T^*Q, \omega = d\theta)$ este o varietate simplectică. \square

Forma simplectică $\omega = d\theta$ dată prin (1.1.2) se numește *forma simplectică canonică* sau *structura simplectică canonică* pe varietatea T^*Q .

Structura locală a unei varietăți simplectice este dată în teorema următoare.

Teorema 1.1.15 (Darboux). Pe orice varietate simplectică $2n$ –dimensională (M, ω) în vecinătatea oricărui $x \in M$ există coordonatele locale (q^1, q^2, \dots, q^n) în care ω are forma (1.1.2). Altfel spus, orice varietate simplectică este, local, de forma T^*Q . \square

Coordonatele locale (q^i, p_i) din (1.1.2) se numesc *coordonate simplectice* pe M .

Definiția 1.1.17 Fie (M, ω) o varietate simplectică ($\dim M = 2n$) și $H \in C^\infty(M, \mathbf{R})$. Tripletul (M, ω, H) se numește *sistem mecanic hamiltonian*. Câmpul de vectori $X_H \in \mathcal{X}(M)$ determinat prin condiția:

$$i_{X_H}\omega + dH = 0, \quad (1.1.3)$$

se numește *câmp de vectori hamiltonian* cu *funcția energie* sau *hamiltonianul* H . \square

Propoziția 1.1.18 Fie (M, ω) o varietate simplctică ($\dim M = 2n$), $H \in C^\infty(M, \mathbf{R})$ și $(q^1, q^2, \dots, q^n, p_1, p_2, \dots, p_n)$ coordonatele simplctice pe M . Câmpul de vectori hamiltonian X_H are următoarea expresie locală:

$$X_H = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right). \quad (1.1.4)$$

Dacă (M, ω, H) este un sistem mecanic hamiltonian, *dinamica* sa este descrisă de curbele integrale ale câmpului de vectori X_H .

În Teorema 1.1.19 sunt date *ecuațiile lui Hamilton* ale câmpului X_H .

Ca exemple ilustrative sunt determinate *ecuațiile lui Hamilton ale oscilatorului armonic 1-dimensional* ([Exemplul 1.1.20(i)] și *ecuațiile lui Hamilton ale pendulului matematic* ([Exemplul 1.1.20(ii)]).

În **teorema lui Liouville** se enunță proprietăți caracteristice ale unui sistem hamiltonian (M, ω, H) [dacă $\{\varphi_t\}$ este fluxul câmpului de vectori X_H , atunci φ_t este o aplicație simplctică; fluxul lui X_H conservă forma volum canonică] (Propoziția 1.1.22).

Teorema lui Jacobi ne dă o condiție necesară și suficientă astfel încât $f \in \mathcal{D}iff(M)$ să fie un simplectodifeomorfism al unei varietăți simplctice (M, ω) (Propoziția 1.1.23).

Definiția 1.1.24 Fie (M, ω) o varietate simplctică și $f, g \in C^\infty(M, \mathbf{R})$. *Paranteza Poisson* a funcțiilor f și g este funcția $\{f, g\}_\omega \in C^\infty(M, \mathbf{R})$, definită prin:

$$\{f, g\}_\omega = -\omega(X_f, X_g), \quad (1.1.5)$$

unde X_f , resp. X_g este câmpul de vectori hamiltonian cu funcția energie f , resp. g . \square

Propoziția 1.1.27 Fie (M, ω) o varietate simplctică ($\dim M = 2n$), $f, g \in C^\infty(M, \mathbf{R})$. Atunci în coordonatele simplctice $(q^1, q^2, \dots, q^n, p_1, p_2, \dots, p_n)$ pe M , *paranteza Poisson* $\{f, g\}_\omega$ are următoarea expresie:

$$\{f, g\}_\omega = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} \right). \quad (1.1.6)$$

Propoziția 1.1.30 Fie (M, ω) o varietate simplctică ($\dim M = 2n$). Aplicația $\{\cdot, \cdot\}_\omega : C^\infty(M, \mathbf{R}) \times C^\infty(M, \mathbf{R}) \rightarrow C^\infty(M, \mathbf{R})$:

- (a) este \mathbf{R} -biliniară și antisimetrică;
- (b) verifică identitatea lui Jacobi, adică:

$$\{\{f, g\}_\omega, h\}_\omega + \{\{g, h\}_\omega, f\}_\omega + \{\{h, f\}_\omega, g\}_\omega = 0, \quad (\forall) f, g, h \in C^\infty(M, \mathbf{R});$$

- (c) verifică identitatea lui Leibniz, adică:

$$\{fg, h\}_\omega = f\{g, h\}_\omega + g\{f, h\}_\omega, \quad (\forall) f, g, h \in C^\infty(M, \mathbf{R}). \quad \square$$

1.2 Varietăți Poisson. Structuri Poisson pe \mathbf{R}^n

Vom trece în revistă câteva noțiuni și rezultate de bază referitoare la geometria Poisson și sistemele Hamilton-Poisson. Conținutul acestui paragraf se bazează pe următoarele surse bibliografice: [1] (Abraham și Marsden, 1979), [53](Weinstein, 1983), [35] (Marsden și Rațiu, 1994), [2] (Andrica și Cașu, 2008), [19](Holm et al., 1985).

Definiția 1.2.1 (i) O structură Poisson sau croșet (paranteză) Poisson pe o varietate diferențială P este o aplicație $\{\cdot, \cdot\} : C^\infty(P, \mathbf{R}) \times C^\infty(P, \mathbf{R}) \longrightarrow C^\infty(P, \mathbf{R})$ care satisface următoarele proprietăți:

- (P1) $\{\cdot, \cdot\}$ este \mathbf{R} - biliniară;
- (P2) $\{\cdot, \cdot\}$ este antisimetrică;
- (P3) $\{\cdot, \cdot\}$ satisface regula lui Leibniz;
- (P4) $\{\cdot, \cdot\}$ satisface identitatea lui Jacobi.

(ii) Varietatea P înzestrată cu o structură Poisson $\{\cdot, \cdot\}$ pe $C^\infty(P, \mathbf{R})$ se numește *varietate Poisson*. O varietate Poisson este notată cu $(P, \{\cdot, \cdot\})$. \square

Observăm că un croșet Poisson pe varietatea P este un croșet Lie $\{\cdot, \cdot\}$ pe $C^\infty(P, \mathbf{R})$ (adică $(C^\infty(P, \mathbf{R}), \{\cdot, \cdot\})$ este o algebră Lie) care satisface identitatea lui Leibniz.

Definiția 1.2.2 Fie $(P_1, \{\cdot, \cdot\}_1)$ și $(P_2, \{\cdot, \cdot\}_2)$ două varietăți Poisson. O aplicație Poisson este o aplicație diferențiabilă $\varphi : P_1 \rightarrow P_2$ cu proprietatea că:

$$\varphi^* (\{f, g\}_2) = \{\varphi^* f, \varphi^* g\}_1, \quad (\forall) f, g \in C^\infty(P_2, \mathbf{R}).$$

Propoziția 1.2.3 Orice varietate simplectică este varietate Poisson. Mai precis, dacă (M, ω) este o varietate simplectică, atunci $(M, \{\cdot, \cdot\}_\omega)$ este o varietate Poisson, unde structura Poisson $\{\cdot, \cdot\}_\omega$ este dată prin relația (1.1.6).

Propoziția 1.2.4 Fie $(P, \{\cdot, \cdot\})$ o varietate Poisson. Dacă $H \in C^\infty(P, \mathbf{R})$, atunci există un unic câmp de vectori $X_H \in \mathcal{X}(P)$ astfel încât:

$$X_H(f) = \{f, H\}, \quad (\forall) f \in C^\infty(P, \mathbf{R}). \quad (1.2.1)$$

Câmpul de vectori X_H dat prin (1.2.1) se numește *câmp de vectori hamiltonian cu funcția energie H asociat varietății Poisson $(P, \{\cdot, \cdot\})$* .

Observația 1.2.7 Orice varietate simplectică (M, ω) este o varietate Poisson. Se pune întrebarea, când se poate defini o structură simplectică pe o varietate Poisson? Răspunsul a fost dat de Jost ([23], 1964) și este enunțat în propoziția următoare.

Propoziția 1.2.8 Dacă structura Poisson $\{\cdot, \cdot\}$ definită pe varietatea P este nede-generată, atunci structura simplectică ω definită pe P este dată prin:

$$\omega(X_f, X_g) = -\{f, g\}. \quad (1.2.2)$$

Structura locală a varietăților Poisson este mai complexă decât cea a varietăților simplectice. Mai precis are loc teorema următoare.

Teorema 1.2.10 (Kirilov). *Orice varietate Poisson este o reuniune netedă de varietăți simplectice (numite foi simplectice), nu neapărat de aceeași dimensiune.*

În final se prezintă **teorema Darboux-Lie-Weinstein** (Teorema 1.2.11).

Definiția 1.2.12 O funcție $C \in C^\infty(P, \mathbf{R})$ se numește *funcție Casimir* pentru configurația $(P, \{\cdot, \cdot\})$, dacă $\{C, f\} = 0, \quad (\forall) f \in C^\infty(P, \mathbf{R})$.

Structuri Poisson pe \mathbf{R}^n

Cea mai mare parte a tezei este dedicată sistemelor mecanice pe \mathbf{R}^n . Din acest motiv vom prezenta mai detaliat aspecte din teoria structurilor Poisson pe \mathbf{R}^n .

Vom nota funcțiile de coordonate pe \mathbf{R}^n cu (x^1, x^2, \dots, x^n) .

Propoziția 1.2.16 Fie $\{\cdot, \cdot\}$ o structură Poisson pe \mathbf{R}^n . Atunci:

$$\{f, g\} = \{x^i, x^j\} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j}, \quad (\forall) f, g \in C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}), \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (1.2.3)$$

Matricea Π matricea definită prin:

$$\Pi = (\{x^i, x^j\}), \quad i, j = \overline{1, n}, \quad (1.2.4)$$

se numește *matricea de structură* a varietății Poisson $(\mathbf{R}^n, \{\cdot, \cdot\})$.

Relația (1.2.3) se scrie în forma echivalentă:

$$\{f, g\} = (\nabla f)^T \cdot \Pi \cdot \nabla g, \quad (1.2.5)$$

unde $\nabla \varphi$ este gradientul funcției $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$.

Propoziția 1.2.17 Fie $\{\cdot, \cdot\}$ o lege de compoziție internă pe $C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ care satisface condițiile (P1) – (P3). Atunci ea satisface identitatea lui Jacobi dacă și numai dacă este satisfăcută de funcțiile de coordonate $x^i, i = \overline{1, n}$.

Observație. Conform Propoziției 1.2.16, orice structură Poisson pe \mathbf{R}^n determină o matrice de structură $\Pi = (\{x^i, x^j\})$. Ne punem problema următoare:

În ce condiții o matrice $\Pi = (\pi^{ij}(x))_{1 \leq i, j \leq n}$ ale cărei elemente sunt funcții este o matrice de structură pentru o structură Poisson $\{\cdot, \cdot\}$ pe \mathbf{R}^n ?

Răspunsul este dat în teorema următoare [39] (Olver, 1993).

Teorema 1.2.20 Fie dată matricea $\Pi = (\pi^{ij}(x))_{1 \leq i, j \leq n}$, unde $\pi^{ij}(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$. Atunci $\Pi(x)$ este o matrice de structură pentru un croșet Poisson dat prin relația (1.2.5), dacă și numai dacă sunt îndeplinite următoarele condiții:

- (i) Π este antisimetrică pentru orice $x \in \mathbf{R}^n$;
- (ii) $\pi^{ij}(x)$ verifică ecuațiile Jacobi:

$$\pi^{il} \frac{\partial \pi^{jk}}{\partial x^\ell} + \pi^{j\ell} \frac{\partial \pi^{ki}}{\partial x^\ell} + \pi^{k\ell} \frac{\partial \pi^{ij}}{\partial x^\ell} = 0, \quad i, j, k, \ell = \overline{1, n}. \quad (1.2.6)$$

Pentru $n = 3$, dacă alegem funcțiile $\pi^{12}(x), \pi^{23}(x)$ și $\pi^{13}(x)$ se observă ușor că:

ecuațiile Jacobi se reduc la o singură ecuație, și anume:

$$\pi^{12} \frac{\partial \pi^{31}}{\partial x^1} - \pi^{31} \frac{\partial \pi^{12}}{\partial x^1} + \pi^{23} \frac{\partial \pi^{12}}{\partial x^2} - \pi^{12} \frac{\partial \pi^{23}}{\partial x^2} + \pi^{31} \frac{\partial \pi^{23}}{\partial x^3} - \pi^{23} \frac{\partial \pi^{31}}{\partial x^3} = 0. \quad (1.2.7)$$

În Propozițiile 1.2.22 și 1.2.23 se dau **două metode generale pentru a construi structuri Poisson pe \mathbf{R}^3** .

Propoziția 1.2.22 Fie $A = (A^{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ o matrice antisimetrică. Definim matricea $\Pi = (\pi^{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$, unde

$$\pi^{ij} = A^{ij} x^k, \quad k \neq i \text{ și } k \neq j.$$

Atunci $\Pi(x) = (\pi^{ij}(x))$ este o matrice de structură pentru paranteza $\{\cdot, \cdot\}$ pe \mathbf{R}^3 .

Dacă în Propoziția 1.2.22, considerăm matricea antisimetrică

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbf{R},$$

obținem matricea de structură

$$\Pi_{(a,b,c)} = \begin{pmatrix} 0 & -cx^3 & bx^2 \\ cx^3 & 0 & -ax^1 \\ -bx^2 & ax^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbf{R}. \quad (1.2.8)$$

Dacă în relația (1.2.8) vom considera matricea $\Pi_{(a,b,c)}$ cu $abc \neq 0$, vom spune că aceasta generează o *structură Poisson $\{\cdot, \cdot\}$ pe \mathbf{R}^3 de tip $so(3)$* .

Dacă în relația (1.2.8) vom considera matricea Π de forma

$$\Pi_{(0,b,c)} = \begin{pmatrix} 0 & -cx^3 & bx^2 \\ cx^3 & 0 & 0 \\ -bx^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b, c \in \mathbf{R}, \quad bc \neq 0 \quad (1.2.9)$$

vom spune că aceasta generează o *structură Poisson $\{\cdot, \cdot\}$ pe \mathbf{R}^3 de tip $se(2)$* .

Propoziția 1.2.23 Fie $F \in C^\infty(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})$ o funcție dată.

(i) Operația algebrică $\{\cdot, \cdot\}_F : C^\infty(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}) \times C^\infty(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})$ dată prin:

$$\{f, g\}_F = -\nabla F \cdot (\nabla f \times \nabla g), \quad (\forall) f, g \in C^\infty(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}), \quad (1.2.10)$$

definește o structură Poisson pe \mathbf{R}^3 .

(ii) Funcția $F \in C^\infty(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})$ este un Casimir pentru configurația $(\mathbf{R}^3, \{f, g\}_F)$. \square

Relația (1.2.10) se scrie în forma echivalentă:

$$\{f, g\}_F = (\nabla f)^T \cdot \Pi_F \cdot \nabla g \quad \text{unde} \quad \Pi_F = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial F}{\partial x^3} & \frac{\partial F}{\partial x^2} \\ \frac{\partial F}{\partial x^3} & 0 & -\frac{\partial F}{\partial x^1} \\ -\frac{\partial F}{\partial x^2} & \frac{\partial F}{\partial x^1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.2.11)$$

Observația 1.2.26 *O funcție $C \in C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ este un Casimir al configurației $(\mathbf{R}^n, \{\cdot, \cdot\})$ dacă și numai dacă:*

$$\Pi \cdot \nabla C = 0.$$

Structuri Poisson pe duala unei algebre Lie

Fie \mathcal{G} algebra Lie a unui grup Lie finit dimensional G și \mathcal{G}^* spațiul dual al lui \mathcal{G} . Grupul Lie G acționează pe algebra Lie \mathcal{G} prin acțiunea $Ad : G \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$, numită *acțiune adjunctă* a lui G pe \mathcal{G} . Pentru $g \in G$, aplicația $Ad_g : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ este dată prin:

$$Ad_g(\xi) = T_e(R_{g^{-1}} \circ L_g)(\xi), \quad (\forall)\xi \in \mathcal{G}.$$

Grupul Lie G acționează pe \mathcal{G}^* prin acțiunea $Ad^* : G \times \mathcal{G}^* \rightarrow \mathcal{G}^*$, numită *acțiune coadjunctă* a lui G pe \mathcal{G}^* . Pentru $g \in G$, aplicația $Ad_g^* : \mathcal{G}^* \rightarrow \mathcal{G}^*$ este dată prin:

$$\langle Ad_g^* \mu, \xi \rangle = \langle \mu, Ad_g(\xi) \rangle, \quad (\forall)\mu \in \mathcal{G}^*, \xi \in \mathcal{G}.$$

Fie $\mu \in \mathcal{G}^*$. *Orbita coadjunctă* a lui μ este definită prin:

$$\mathcal{O}_\mu = \{Ad_g^* \mu \mid g \in G\}.$$

Generatorul infinitezimal $\xi_{\mathcal{G}^*}$ al acțiunii coadjuncte a lui G pe \mathcal{G}^* este dat prin:

$$\langle \xi_{\mathcal{G}^*}(\mu), \eta \rangle = \langle \mu, [\xi, \eta] \rangle, \quad (\forall)\mu \in \mathcal{G}^*, \xi, \eta \in \mathcal{G}.$$

Propoziția 1.2.28 (Kirilov-Kostant-Souriau). *Fie G un grup Lie și $\mathcal{O} \subset \mathcal{G}^*$ o orbită coadjunctă. Atunci \mathcal{O} este o varietate simplctică. Altfel spus, există o unică formă simplctică $\omega_{\mathcal{O}}$ pe \mathcal{O} astfel încât*

$$\omega_{\mathcal{O}}(\xi_{\mathcal{G}^*}, \eta_{\mathcal{G}^*}) = - \langle \mu, [\xi, \eta] \rangle, \quad (\forall)\mu \in \mathcal{O}, \xi, \eta \in \mathcal{G}. \quad (1.2.12)$$

Definim un croșet pe algebra $C^\infty(\mathcal{G}^*, \mathbf{R})$ prin:

$$\{f, g\}_{LP}^+ = \langle \theta, [df(\theta), dg(\theta)] \rangle, \quad \forall f, g \in C^\infty(\mathcal{G}^*, \mathbf{R}), \theta \in \mathcal{G}^*. \quad (1.2.13)$$

Propoziția 1.2.29 (Lie-Poisson) *Spațiul dual \mathcal{G}^* al algebrei Lie \mathcal{G} înzestrat cu croșetul $\{f, g\}_{LP}^+$ dat prin (1.2.13) are o structură de varietate Poisson (necanonice), numită **structura plus Lie-Poisson** pe \mathcal{G}^* .*

Analog se definește **structura minus Lie-Poisson** pe \mathcal{G}^* .

Corolarul 1.2.30 *Există două structuri Poisson necanonice pe \mathcal{G}^* , numite **structurile plus-minus Lie-Poisson**, notate cu $\{\cdot, \cdot\}_\pm$. În consecință, $(\mathcal{G}^*, \{\cdot, \cdot\}_\pm)$ sunt varietăți Poisson.*

În propoziția următoare se stabilește o legătură între structurile Lie-Poisson pe duala unei algebre Lie și forma simplctică Kirilov-Kostant-Souriau.

Propoziția 1.2.31 Fie G un grup Lie și $\mathcal{O} \subset \mathcal{G}^*$ o orbită coadjunctă. Pentru orice $f, g \in C^\infty(\mathcal{G}^*, \mathbf{R})$ și $\mu \in \mathcal{O}$, avem:

$$\{f, g\}_+(\mu) = \{f|_{\mathcal{O}}, g|_{\mathcal{O}}\}_{\omega_{\mathcal{O}}}. \quad (1.2.14)$$

Observația 1.2.32 Foile simplectice ale lui \mathcal{G}^* sunt exact orbitele sale coadjuncte.

Propoziția 1.2.33 O funcție $f \in C^\infty(\mathcal{G}^*, \mathbf{R})$ este un Casimir al configurației $(\mathcal{G}^*, \{\cdot, \cdot\}_\pm)$ dacă și numai dacă este constantă pe orice orbită coadjunctă.

Propoziția 1.2.34 Fie \mathcal{G} o algebră Lie de dimensiune n cu constantele de structură c_{ij}^k , $i, j, k = \overline{1, n}$. Atunci structurile Poisson $\{\cdot, \cdot\}_\pm$ pe \mathcal{G}^* sunt date prin:

$$\{f, g\}_\pm(m) = \pm c_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial m_i} \frac{\partial g}{\partial m_j} m_k. \quad (1.2.15)$$

Acest paragraf se încheie cu prezentarea structurilor plus-minus Lie-Poisson pe duala uneia din următoarele algebre Lie clasice de dimensiune 3, și anume: algebra Lie (\mathbf{R}^3, \times) , algebra Lie $so(3)$ și algebra Lie $se(2, \mathbf{R})$. Mai precis:

- Structurile plus-minus Lie-Poisson pe duala algebrei Lie (\mathbf{R}^3, \times) sunt generate de matricele:

$$\Pi_- = \begin{pmatrix} 0 & -m_3 & m_2 \\ m_3 & 0 & -m_1 \\ -m_2 & m_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad \Pi_+ = \begin{pmatrix} 0 & m_3 & -m_2 \\ -m_3 & 0 & m_1 \\ m_2 & -m_1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (1.2.16)$$

- Structurile plus-minus Lie-Poisson pe duala $(so(3))^*$ a algebrei Lie $so(3)$ sunt generate de matricele Π_- respectiv Π_+ date în relația (1.2.16), unde

$$so(3) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -a & b \\ a & 0 & -c \\ -b & c & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbf{R} \right\};$$

- Structurile plus-minus Lie-Poisson pe duala $(se(2, \mathbf{R}))^*$ a algebrei Lie

$$se(2, \mathbf{R}) = \left\{ X(a, v_1, v_2) = \begin{pmatrix} 0 & -a & v_1 \\ a & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, v_1, v_2 \in \mathbf{R} \right\}.$$

sunt generate de matricele $\Pi_{e2,-}$ respectiv $\Pi_{e2,+}$, unde

$$\Pi_{e2,-} = \begin{pmatrix} 0 & -m_3 & m_2 \\ m_3 & 0 & 0 \\ -m_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad \Pi_{e2,+} = \begin{pmatrix} 0 & m_3 & -m_2 \\ -m_3 & 0 & 0 \\ m_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.3 Sisteme mecanice Hamilton-Poisson pe \mathbf{R}^n

Definiția 1.3.1 Un sistem Hamilton-Poisson este un triplet $(P, \{\cdot, \cdot\}, H)$ unde $\{\cdot, \cdot\}$ este o structură Poisson pe P și $H \in C^\infty(P, \mathbf{R})$ este hamiltonianul sau energia sistemului.

Fie X_H câmpul de vectori hamiltonian cu funcția de energie H , adică:

$$X_H(f) = \{f, H\}, \quad (\forall) f \in C^\infty(P, \mathbf{R}).$$

Dinamica sistemului Hamilton-Poisson $(P, \{\cdot, \cdot\}, H)$ este descrisă de sistemul:

$$\frac{dx^i(t)}{dt} = X_H(x^i(t)), \quad t \in \mathbf{R} \quad \text{sau echivalent} \quad \dot{x}^i = \{x^i, H\}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.3.1)$$

Aplicând (1.2.5), sistemul (1.3.1) se poate scrie în forma echivalentă

$$\dot{X} = \Pi \cdot \nabla H, \quad (1.3.2)$$

unde $\dot{X} = (\dot{x}^1 \quad \dot{x}^2 \quad \dots \quad \dot{x}^n)^T$, iar $\Pi = (\{x^i, x^j\})$ este matricea asociată.

Fie $(P, \{\cdot, \cdot\}, H)$ un sistem Hamilton-Poisson și $\{\varphi_t\}$ fluxul câmpului de vectori hamiltonian X_H . Atunci pentru orice $f \in C^\infty(P, \mathbf{R})$ și orice $t \in \mathbf{R}$, avem:

- $H \circ \varphi_t = H$ (conservarea energiei);
- $\frac{d}{dt}(f \circ \varphi_t) = \{f, H\} \circ \varphi_t = \{f \circ \varphi_t, H\}$;
- $\{\varphi_t\}$ conservă structura Poisson $\{\cdot, \cdot\}$, adică $\varphi_t^* \{f, g\} = \{f \circ \varphi_t, g \circ \varphi_t\}$ (Propozițiile 1.3.2 și 1.3.3)

Spunem că $f \in C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ este o integrală primă sau constantă a mișcării pentru sistemul (1.3.1), dacă derivata sa de-a lungul traiectoriilor sistemului este nulă.

Propoziția 1.3.5 Fie $(\mathbf{R}^n, \{\cdot, \cdot\}, H)$ un sistem Hamilton-Poisson. Atunci $f \in C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ este o integrală primă a sistemului (1.3.1) dacă și numai dacă $\{f, H\} = 0$.

Propoziția 1.3.6 Fie $(\mathbf{R}^n, \{\cdot, \cdot\}, H)$ un sistem Hamilton-Poisson și $C \in C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ un Casimir. Atunci C și H sunt integrale prime pentru (1.3.2).

Are loc propoziția: orice sistem hamiltonian pe \mathbf{R}^{2n} este un sistem Hamilton-Poisson.

Definiția 1.3.9 Dacă un sistem de ecuații diferențiale de forma:

$$\dot{x}^i = f_i(x^1, x^2, \dots, x^n), \quad f_i \in C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}), \quad i = \overline{1, n} \quad (1.3.3)$$

se poate scrie în forma (1.3.1), vom spune că $(\mathbf{R}^n, \{\cdot, \cdot\}, H)$ este o realizare Hamilton-Poisson pentru (1.3.3); notată și cu (\mathbf{R}^n, Π, H) , unde Π este matricea de structură.

1.4 Exemple de sisteme Hamilton-Poisson

- Rigidul liber ca sistem Hamilton-Poisson

În procesele mecanice, un rol important îl joacă corpul rigid liber, [35] (Marsden și Rațiu, 1994).

Ecuatiile lui Euler care descriu dinamica corpului rigid liber sunt:

$$\dot{m}_1 = \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_2} \right) m_2 m_3, \quad \dot{m}_2 = \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_3} \right) m_1 m_3, \quad \dot{m}_3 = \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1} \right) m_1 m_2, \quad (1.4.1)$$

unde $m = (m_1, m_2, m_3) \in C^\infty(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})$ reprezintă vectorul viteză unghiulară, iar I_1, I_2, I_3 sunt componentele tensorului de inerție a rigidului. Vom presupune că $I_1 > I_2 > I_3 > 0$.

Propoziția 1.4.1 [19] (Holm et al., 1985). *Sistemul dinamic (1.4.1) are realizarea Hamilton-Poisson $(\mathbf{R}^3, \{\cdot, \cdot\}_{RB}, H_{RB})$ cu funcția Casimir C_{RB} , unde $\{\cdot, \cdot\}_{RB}$ este structura Poisson definită prin (1.2.10), iar $H_{RB}, C_{RB} \in C^\infty(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})$ sunt date prin:*

$$H_{RB}(m) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{I_1} m_1^2 + \frac{1}{I_2} m_2^2 + \frac{1}{I_3} m_3^2 \right) \quad \text{și} \quad C_{RB}(m) = \frac{1}{2} (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2). \quad (1.4.2)$$

Structura Poisson $\{\cdot, \cdot\}_{RB}$ este generată de matricea

$$\Pi_{RB} = \begin{pmatrix} 0 & -m_3 & m_2 \\ m_3 & 0 & -m_1 \\ -m_2 & m_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.4.3)$$

și este de fapt structura minus Lie-Poisson pe duala $(so(3))^* \cong \mathbf{R}^3$ a algebrei Lie $so(3)$.

• **Ecuatiile mișcării unui vehicul subacvatic autonom**

Ne referim acum la sistemul de ecuații care modelează dinamica unui vehicul subacvatic autonom, [20] (Holmes et al., 1998).

Mișcările unui vehicul subacvatic autonom în subspațiul

$\mathcal{S} \subset \mathbf{R}^6$ definit prin $\pi_2 = 0, \pi_3 = 0, p_1 = 0$ sunt descrise de sistemul de ecuații:

$$\dot{\pi}_1 = \left(\frac{1}{m_3} - \frac{1}{m_2} \right) p_2 p_3, \quad \dot{p}_2 = \frac{1}{I_1} p_3 \pi_1, \quad \dot{p}_3 = -\frac{1}{I_1} p_2 \pi_1. \quad (1.4.4)$$

Propoziția 1.4.4 [46], (Pută et al., 2008). *Tripletul $(\mathbf{R}^3, \Pi_{vs}, H_{vs})$ este o realizare Hamilton-Poisson a dinamicii (1.4.4) cu funcția Casimir $C_{vs} \in C^\infty(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})$, unde*

$$\Pi_{vs} = \begin{pmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & 0 \\ -p_2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$H_{vs}(\pi_1, p_2, p_3) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{I_1} \pi_1^2 + \frac{1}{m_2} p_2^2 + \frac{1}{m_3} p_3^2 \right) \quad \text{și} \quad C_{vs}(\pi_1, p_2, p_3) = \frac{1}{2} (p_2^2 + p_3^2). \quad (1.4.5)$$

Structura Poisson $\{\cdot, \cdot\}_{vs}$ generată de matricea Π_{vs} este de fapt structura minus Lie-Poisson pe duala $(se(2, \mathbf{R}))^* \cong \mathbf{R}^3$ a algebrei Lie $se(2, \mathbf{R})$.

Observație. În Capitolul 2, paragraful 2.2 vor fi date alte realizări Hamilton-Poisson ale sistemelor dinamice (1.4.1) și (1.4.4).

Capitolul 2

Proprietăți dinamice ale sistemelor Hamilton-Poisson pe \mathbf{R}^n

Acest capitol este dedicat prezentării noțiunilor fundamentale precum și a metodelor de bază utilizate frecvent pentru studiul calitativ al dinamicii unui sistem Hamilton-Poisson pe \mathbf{R}^n . Ca exemplu ilustrativ prezentăm sistemul dinamic Euler top general.

Capitolul este structurat pe trei paragrafe și îmbină o prezentare cu caracter monografic cu rezultate originale ale autorului, care se regăsesc în ultimele două paragrafe.

2.1 Studiul calitativ al sistemului dinamic asociat unui câmp de vectori

Acest paragraf cuprinde noțiuni de bază legate de sisteme Hamilton-Poisson. Obiectivele principale abordate sunt: stare de echilibru neliniar stabilă, funcție Lyapunov, formulare Lax, teoremele lui Lyapunov, metode pentru determinarea naturii stabilității neliniare (Teoremele 2.1.12, 2.1.14), problema existenței orbitelor periodice (Teorema 2.1.15) și problema integrării numerice utilizând integratori geometrici. Principalele surse bibliografice folosite sunt: [1] (Abraham și Marsden, 1979), [19] (Holm, Marsden, Rațiu și Weinstein, 1985), [43] (Putra, 1993), [35] (Marsden și Rațiu, 1994), [18] (Hirsch, Smale și Devaney, 2004), [2] (Andrica și Cașu, 2008).

Fie sistemul de ecuații diferențiale asociat câmpului de vectori $X \in \mathcal{X}(\mathbf{R}^n)$:

$$\dot{x} = X(x), \quad x \in \mathbf{R}^n. \quad (2.1.1)$$

Sistemul (2.1.1) se poate scrie în forma echivalentă:

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.1.2)$$

unde $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ și $X(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ cu $f_i \in C^\infty(D, \mathbf{R})$, $D \subseteq \mathbf{R}^n$.

Un punct $x_e \in D \subseteq \mathbf{R}^n$ se numește *stare de echilibru* a sistemului (2.1.1), dacă:

$$X(x_e) = 0, \quad \text{echivalent} \quad f_i(x_e) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.1.3)$$

Definiția 2.1.1 (i) O stare de echilibru x_e se numește *neliniar stabilă* sau *Lyapunov stabilă*, dacă pentru orice vecinătate U a lui x_e din \mathbf{R}^n există o vecinătate V a lui x_e cu $V \subset U$ astfel încât orice traiectorie $x(t)$ cu condiția inițială în V este inclusă în U , sau echivalent, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$ astfel încât:

$$\text{pentru } \|x(0) - x_e\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|x(t) - x_e\| < \varepsilon, \quad (\forall) t > 0.$$

(ii) x_e se numește *asimptotic stabilă* dacă vecinătatea V poate fi aleasă astfel încât este îndeplinită condiția suplimentară $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_e$.

(iii) x_e se numește *instabilă*, dacă x_e nu este neliniar stabilă. \square

Definiția 2.1.5 Fie $D \subseteq \mathbf{R}^n$ o submulțime deschisă și $L : U \rightarrow \mathbf{R}$, o funcție definită pe o vecinătate $U \subset D$ a lui $x_e \in D$. Spunem că L este o *funcție Lyapunov* pentru sistemul (2.1.1), dacă sunt verificate următoarele condiții:

(i) L și derivatele sale parțiale sunt continue;

(ii) L este pozitiv definită (resp. negativ definită), adică:

$$L(x_e) = 0 \quad \text{și} \quad L(x) > 0 \quad (\text{resp. } L(x) < 0), \quad (\forall) x \in U \setminus \{x_e\};$$

(iii) Derivata lui L de-a lungul traiectoriei sistemului (2.1.1) este negativ semi-definită (resp. pozitiv semidefinită), adică:

$$\dot{L}(x) \leq 0 \quad (\text{resp. } \dot{L}(x) \geq 0), \quad (\forall) x \in U.$$

Teorema 2.1.6 [34](**Lyapunov**) Fie $x_e \in D$ o stare de echilibru pentru (2.1.1).

(i) Dacă există o funcție Lyapunov L definită pe o vecinătate U a lui $x_e \in D$, atunci x_e este neliniar stabilă;

(ii) Dacă există o funcție Lyapunov $L \in C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ astfel încât

$$\dot{L}(x) < 0 \quad (\text{resp. } \dot{L}(x) > 0) \quad (\forall) x \in \mathbf{R}^n, \quad x \neq x_e,$$

atunci x_e este asimptotic stabilă.

Funcția L care îndeplinește condițiile din Definiția 2.1.5 se mai numește *funcție Lyapunov asociată stării de echilibru* x_e .

Se numește *liniarizat* sistemul dinamic (2.1.1) în starea de echilibru x_e , sistemul de ecuații diferențiale următor:

$$\dot{X} = A(x_e)X, \quad \text{unde}$$

$$A(x_e) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_e) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_e) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_e) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_e) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x_e) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_e) \end{pmatrix}. \quad (2.1.4)$$

Teorema 2.1.9 (Lyapunov) Starea de echilibru x_e a sistemului (2.1.1) este:

(i) asimptotic stabilă (neliniar stabilă), dacă $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$, pentru orice valoare proprie a matricei $A(x_e)$, adică toate valorile proprii au părțile reale strict negative.

(ii) instabilă, dacă $\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$, pentru cel puțin o valoare proprie a matricei $A(x_e)$, adică are o valoare proprie cu partea reală strict pozitivă.

Prezentăm mai jos două metode practice pentru determinarea naturii stabilității neliniare a unui sistem care admite mai multe integrale prime.

Teorema 2.1.12 [19] (Metoda energie-Casimir) Fie $(\mathbf{R}^n, \{\cdot, \cdot\}, H)$ un sistem Hamilton-Poisson, x_e o stare de echilibru a acestui sistem și \mathcal{C} o familie de integrale prime. Dacă există $C \in \mathcal{C}$ astfel încât sunt îndeplinite următoarele condiții:

(i) $D(H + C)(x_e) = 0$;

(ii) $D^2(H + C)(x_e)$ este pozitiv (resp. negativ) definită,

atunci x_e este neliniar stabilă.

Teorema 2.1.14 [3] (Metoda lui Arnold) Fie $C_1, \dots, C_k \in C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ integrale prime pentru sistemul dinamic (2.1.1) și x_e un punct de echilibru al acestui sistem. Fie funcțiile $F_i \in C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{k-1}, \mathbf{R})$ date prin:

$$F_i(x, \lambda_1, \dots, \hat{\lambda}_i, \dots, \lambda_k) = C_i(x) - \lambda_1 C_1(x) - \dots - \lambda_i \hat{C}_i(x) - \dots - \lambda_k C_k(x), \quad i = \overline{1, k},$$

unde \hat{C}_i înseamnă că termenul C_i este omis.

Dacă există constantele $\lambda_1^*, \dots, \hat{\lambda}_i^*, \dots, \lambda_k^* \in \mathbf{R}$ astfel încât:

(i) $\nabla_x F_i(x_e, \lambda_1^*, \dots, \hat{\lambda}_i^*, \dots, \lambda_k^*) = 0$, pentru orice $i = 1, \dots, k$;

(ii) $\nabla_{xx}^2 F_i(x_e, \lambda_1^*, \dots, \hat{\lambda}_i^*, \dots, \lambda_k^*)|_{W \times W}$ este pozitiv sau negativ definită pe $W \times W$, unde

$$W = \bigcap_{j=1, j \neq i}^k \operatorname{Ker} dC_j(x_e),$$

atunci x_e este neliniar stabil.

În anumite ipoteze, existența orbitelor periodice pentru un sistem de ecuații diferențiale poate fi stabilită cu ajutorul teoremei lui Moser, [36] (Moser, 1976).

Teorema 2.1.15 (J. Moser) Fie sistemul de ecuații diferențiale

$$\dot{x} = f(x), \quad \text{unde } x \in \mathbf{R}^n \text{ și } f \in C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n). \quad (2.1.5)$$

Dacă x_e este un punct de echilibru pentru sistemul (2.1.5) astfel încât 0 nu este valoare proprie pentru matricea liniarizatului sistemului (2.1.4) în x_e și dacă există

$K \in C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ astfel încât:

- (i) K este integrală primă; (ii) $K(x_e) = 0$;
 (iii) $dK(x_e) = 0$; (iv) $d^2K(x_e)$ este pozitiv definită,

atunci pentru orice ε suficient de mic, suprafața integrală

$$K(x) = \varepsilon^2$$

conține cel puțin o soluție periodică a cărei perioadă este apropiată de perioada soluției sistemului liniar asociat în x_e .

Formulare Lax și integrabilitate

O metodă eficientă pentru studiul sistemelor dinamice integrabile este ”formularea Lax”. Legătura dintre formularea Lax și integrabilitatea unui sistem hamiltonian este dată de faptul că formularea Lax furnizează integrale prime ale dinamicii sistemului.

Definiția 2.1.16 Spunem că sistemul dinamic (2.1.1) admite o *formulare Lax* sau *reprezentare Lax*, dacă există o pereche de matrici (L, B) , unde $L = L(t)$ și $B = B(t)$ sunt matrici de tip $n \times n$ ale căror componente sunt funcții de clasă C^1 astfel încât

$$\dot{L} = [L, B] = LB - BL, \quad \text{unde} \quad \dot{L} = \frac{dL}{dt}. \quad (2.1.6)$$

Teorema 2.1.17 (Teorema lui Flaschka). *Fluxul ecuației $\dot{L} = [L, B]$ este izospectral, adică valorile proprii ale matricei $L(t)$ sunt independente de t .*

Dacă sistemul (2.1.5) are formularea Lax (2.1.6), atunci valorile proprii ale matricei $L(t)$ sunt constante ale mișcării (Observațiile 2.1.18, 2.1.19).

Uneori, ecuațiile de mișcare ale unor sisteme dinamice nu pot fi integrate cu ajutorul funcțiilor elementare. Soluțiile lor pot fi exprimate cu ajutorul funcțiilor eliptice ([31]).

Metode numerice pentru aproximarea soluției unui sistem dinamic

Integratorii geometrici sunt metode de integrare numerică pentru simularea pe computer a proceselor dinamice descrise de ecuații diferențiale. Integratorii geometrici conservă proprietăți ale sistemului dat (energia, structura symplectică, volumul etc.).

Fie (\mathbf{R}^n, Π, H) un sistem Hamilton-Poisson a cărui dinamică este descrisă de sistemul de ecuații diferențiale:

$$\dot{x} = \Pi(x) \cdot \nabla H(x), \quad x \in \mathbf{R}^n. \quad (2.1.7)$$

Definiția 2.1.20 Se numește *integrator (geometric) pe \mathbf{R}^n* , o familie de aplicații netede $\varphi_t : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, care depinde diferențiabil de $t \in \mathbf{R}$; φ_t se numește:

(i) *integrator Poisson* dacă are loc relația:

$$(D\varphi_t(x))^T \cdot \Pi(x) \cdot D\varphi_t(x) = \Pi(\varphi_t(x)), \quad (\forall) x \in \mathbf{R}^n;$$

(ii) *integrator-energie* dacă conservă energia H a sistemului (2.1.7), adică:

$$H(\varphi_t(x)) = H(x);$$

(iii) *integrator Casimir* dacă conservă un Casimir $C \in C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$, adică:

$$C(\varphi_t(x)) = C(x);$$

(iv) dacă $n = 2m$ și ω este o formă simplctică pe \mathbf{R}^{2m} , atunci integratorul $\{\varphi_t\}$ se numește *integrator simplctic*, dacă:

$$\varphi_t^* \omega = \omega, \quad (\forall) t \in \mathbf{R}, \quad \text{sau echivalent}$$

$$(D\varphi_t(x))^T \cdot \Pi_{can} \cdot D\varphi_t(x) = \Pi_{can}, \quad \text{unde} \quad \Pi_{can} = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Pentru un integrator dat vom folosi notația

$$x^{k+1} = \varphi_t(x^k), \quad \text{unde} \quad x^k(t) = x(kt), \quad k \in \mathbf{N}.$$

Prezentăm acum doi integratori geometrici care vor fi utilizați în această lucrare.

Integratorul Lie-Trotter. Fie (\mathbf{R}^n, Π, H) un sistem Hamilton-Poisson. Integratorul Lie-Trotter ([51]) se aplică în cazul în care H poate fi scris sub forma:

$$H = H_1 + H_2,$$

astfel încât dinamica generată de H_1 și H_2 poate fi explicit integrată.

Fie $\exp(tX_{H_1})$ (resp. $\exp(tX_{H_2})$) curba integrală asociată câmpului de vectori X_{H_1} (resp. X_{H_2}). Atunci integratorul Lie-Trotter ([17]) este dat prin formula:

$$\varphi_t(x) = \exp(tX_{H_2})\exp(tX_{H_1})(x) = \exp(tX_H)(x) + \mathcal{O}(t^2). \quad (2.1.8)$$

Propoziția 2.1.21 ([45]) *Integratorul Lie-Trotter (2.1.8) are următoarele proprietăți:*

(i) φ_t este un integrator Poisson;

(ii) restricția la foliația simplctică a spațiului vectorial Poisson (\mathbf{R}^n, Π) definește un integrator simplctic.

Integratorul Kahan. Fie sistemul de ecuații diferențiale:

$$\dot{x} = X(x), \quad x(0) = x_0, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad (2.1.9)$$

cu proprietatea că X este cel mult pătratic în x , adică:

$$X(x) = A(x, x) + Bx + b,$$

$A(\cdot, \cdot)$ este un tensor simetric, B o matrice, iar b un vector constant.

Integratorul Kahan ([26]) pentru (2.1.9) se definește prin:

$$\frac{x^{k+1} - x^k}{h} = A(x^{k+1}, x^k) + B \frac{x^{k+1} + x^k}{2} + b, \quad h \in \mathbf{R}_+. \quad (2.1.10)$$

2.2 Dinamica sistemului Euler top general

În acest paragraf sunt studiate proprietățile geometrice și dinamice ale sistemului Euler top, problema stabilității, legătura dintre dinamica Euler top și dinamica pendulului și problema integrării numerice. Contribuțiile originale sunt cuprinse în Secțiunea 2.2.3 și au fost publicate în lucrarea citată [50] (Șușoi, 2010).

Sistemul dinamic Euler top în forma generală este descris de o familie de ecuații diferențiale pe \mathbf{R}^3 care depinde de un triplet de parametri reali. Un reprezentant remarcabil este corpul rigid liber [35]. Pentru diferite valori date parametrilor se obțin sisteme dinamice, ca de exemplu: sistemul Lagrange [48](Takhtajan, 1994), ecuațiile dinamicii unui vehicul subacvatic [20], sistemul Rabinovich [12](Chiș și Puta, 2008) etc.

2.2.1 Geometria Poisson a sistemului Euler top

Sistemul Euler top general sau sistemul dinamic Euler top în forma generală este descris de următorul set de ecuații diferențiale pe \mathbf{R}^3 ([41]):

$$\frac{dx_1}{dt} = \alpha_1 x_2(t)x_3(t), \quad \frac{dx_2}{dt} = \alpha_2 x_1(t)x_3(t), \quad \frac{dx_3}{dt} = \alpha_3 x_1(t)x_2(t), \quad (2.2.1)$$

unde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbf{R}$ sunt parametri astfel încât $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \neq 0$ și t este timpul.

Observația 2.2.1 Pentru $\alpha_1 = \frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_2}$, $\alpha_2 = \frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_3}$, $\alpha_3 = \frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1}$ [respectiv, $\alpha_1 = \frac{1}{m_3} - \frac{1}{m_2}$, $\alpha_2 = \frac{1}{I_1}$, $\alpha_3 = -\frac{1}{I_1}$], sistemul (2.2.1) se reduce la ecuațiile corpului rigid liber (1.4.1)[respectiv, ecuațiile (1.4.4) ale mișcării unui vehicul subacvatic]. \square

Dacă în (2.2.1) se înlocuiesc parametrii α_i cu valorile corespunzătoare obținem:

$$\dot{x}_1 = x_2 x_3, \quad \dot{x}_2 = -x_3 x_1, \quad \dot{x}_3 = -k^2 x_1 x_2, \quad \text{cu } 0 < k^2 < 1. \quad (2.2.2)$$

(*ecuațiile fluxului gradient Tzitzeica-Lorentz* [15]);

$$\dot{x}_1 = x_2 x_3, \quad \dot{x}_2 = -x_1 x_3, \quad \dot{x}_3 = x_1 x_2 \quad (\textit{sistemul Rabinovich}); \quad (2.2.3)$$

$$\dot{x}_1 = x_2 x_3, \quad \dot{x}_2 = x_1 x_3, \quad \dot{x}_3 = x_1 x_2 \quad (\textit{sistemul Lagrange}). \quad (2.2.4)$$

Notăm vectorul parametrilor care intervin în sistemul (2.2.1) cu $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Considerăm funcțiile $H^\alpha, C^\alpha \in C^\infty(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})$ date prin:

$$H^\alpha(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}(\alpha_2 x_1^2 - \alpha_1 x_2^2) \quad \text{și} \quad C^\alpha(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_2} x_2^2 - x_3^2\right). \quad (2.2.5)$$

Propoziția 2.2.2 *Funcțiile H^α și C^α date prin (2.2.5), sunt constante ale mișcării (integrale prime) pentru sistemul dinamic (2.2.1).*

Propoziția 2.2.3 O realizare Hamilton-Poisson a sistemului Euler top (2.2.1) este $(\mathbf{R}^3, P^\alpha, H^\alpha)$, cu funcția Casimir C^α , unde H^α, C^α sunt date prin (2.2.5), iar P^α este:

$$P^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & -\frac{\alpha_3}{\alpha_2}x_2 \\ x_3 & 0 & 0 \\ \frac{\alpha_3}{\alpha_2}x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2.6)$$

Geometria Poisson a sistemului (2.2.1) este generată de o matrice de tip $se(2)$.

Observația 2.2.5 Deoarece H^α și C^α sunt integrale prime, rezultă că: *trajectoriile din spațiul fazelor sistemului Euler top general se află la intersecția suprafețelor*

$$\frac{1}{2}(\alpha_2 x_1^2 - \alpha_1 x_2^2) = constant \quad \text{și} \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_2}x_2^2 - x_3^2\right) = constant. \quad \square$$

Definim funcțiile $C_{ab}^\alpha, H_{cd}^\alpha \in C^\infty(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})$ date prin:

$$C_{ab}^\alpha = aC^\alpha + bH^\alpha, \quad H_{cd}^\alpha = cC^\alpha + dH^\alpha, \quad a, b, c, d \in \mathbf{R} \quad \text{adică} \quad (2.2.7)$$

$$\begin{cases} C_{ab}^\alpha(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} \left(b\alpha_2 x_1^2 + \left(a\frac{\alpha_3}{\alpha_2} - b\alpha_1 \right) x_2^2 - ax_3^2 \right) \\ H_{cd}^\alpha(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} \left(d\alpha_2 x_1^2 + \left(c\frac{\alpha_3}{\alpha_2} - d\alpha_1 \right) x_2^2 - cx_3^2 \right) \end{cases} \quad (2.2.8)$$

Propoziția 2.2.6 Sistemul dinamic Euler top (2.2.1) are o infinitate de realizări Hamilton-Poisson. Mai precis, $(\mathbf{R}^3, \{\cdot, \cdot\}_{ab}^\alpha, H_{cd}^\alpha)$, unde:

$$\{f, g\}_{ab}^\alpha = -\nabla C_{ab}^\alpha \cdot (\nabla f \times \nabla g), \quad (\forall) f, g \in C^\infty(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}) \quad (2.2.9)$$

și $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ astfel încât $ad - bc = 1$, este o realizare Hamilton-Poisson.

Structura Poisson dată prin (2.2.9) este generată de matricea

$$P_{ab}^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & ax_3 & \left(a\frac{\alpha_3}{\alpha_2} - b\alpha_1 \right) x_2 \\ -ax_3 & 0 & -b\alpha_2 x_1 \\ -\left(a\frac{\alpha_3}{\alpha_2} - b\alpha_1 \right) x_2 & b\alpha_2 x_1 & 0 \end{pmatrix},$$

iar C_{ab}^α este un Casimir pentru configurația $(\mathbf{R}^3, \{\cdot, \cdot\}_{ab}^\alpha)$.

Observația 2.2.8 Propoziția 2.2.6 ne asigură că ecuațiile (2.2.1) sunt invariante, dacă H^α și C^α sunt înlocuite cu combinații liniare cu coeficienți modulo $SL(2, \mathbf{R})$. În consecință, traiectoriile mișcării sistemului Euler top rămân neschimbate. \square

Dacă în Propoziția 2.2.3 se înlocuiesc α_i cu valorile corespunzătoare vom obține realizări Hamilton-Poisson pentru sistemele (1.4.1), (1.4.4), (2.2.2), (2.2.3) și (2.2.4) (Corolarul 2.2.9).

Observația 2.2.10 Ecuațiile Euler ale rigidului liber (1.4.1) au două realizări Hamilton-Poisson și anume: una de tip $so(3)$ și alta de tip $se(2)$.

Sistemele (2.2.2) – (2.2.4) au realizări Hamilton-Poisson de tip $se(2)$. \square

Pentru anumite restricții impuse asupra parametrilor α_i , mișcarea sistemului Euler top se reduce la mișcarea pe suprafața descrisă de legea de conservare:

$$x_1^2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} x_2^2 = 2H, \quad \text{unde } H = \text{constant}. \quad (2.2.10)$$

Mai precis: dacă $\alpha_1 \alpha_2 < 0$, atunci dinamica sistemului Euler top (2.2.1) poate fi redusă la dinamica pendulului (Propoziția 2.2.11)

Soluțiile sistemului Euler top restricționate la suprafața (2.2.10) sunt:

$$x_1(t) = \sqrt{2H} \cdot \cos \frac{\theta(t)}{2}, \quad x_2(t) = \sqrt{2H} \sqrt{-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \cdot \sin \frac{\theta(t)}{2}, \quad x_3(t) = \frac{1}{2\alpha_2} \sqrt{-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \cdot \dot{\theta}(t),$$

unde θ este soluția ecuației pendulului:

$$\ddot{\theta}(t) = 2H\alpha_2\alpha_3 \cdot \sin \theta(t).$$

Deoarece ecuația pendulului se poate integra prin funcții eliptice ([31]), rezultă că soluțiile sistemului Euler top restricționate la suprafața (2.2.11) se exprimă cu ajutorul funcțiilor eliptice (un rezultat analog se obține în cazul $\alpha_2\alpha_3 < 0$).

2.2.2 Problema stabilității în dinamica Euler top

Stările de echilibru ale sistemului Euler top (2.2.1) sunt

$e_0 = (0, 0, 0)$, $e_1^m = (m, 0, 0)$, $e_2^m = (0, m, 0)$ și $e_3^m = (0, 0, m)$ pentru orice $m \in \mathbf{R}^*$.

În Propoziția 2.2.14 se stabilește natura stabilității spectrale a stărilor de echilibru pentru sistemul Euler top. Se obțin următoarele rezultate:

- e_1^m , $m \in \mathbf{R}^*$ sunt spectral stabile dacă $\alpha_2\alpha_3 < 0$ și instabile dacă $\alpha_2\alpha_3 > 0$;
- e_2^m , $m \in \mathbf{R}^*$ sunt spectral stabile dacă $\alpha_1\alpha_3 < 0$ și instabile dacă $\alpha_1\alpha_3 > 0$;
- e_3^m , $m \in \mathbf{R}^*$ sunt spectral stabile dacă $\alpha_1\alpha_2 < 0$ și instabile dacă $\alpha_1\alpha_2 > 0$;
- e_0 este spectral stabilă.

Într-adevăr, matricea liniarizatului sistemului (2.2.1) este

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 x_3 & \alpha_1 x_2 \\ \alpha_2 x_3 & 0 & \alpha_2 x_1 \\ \alpha_3 x_2 & \alpha_3 x_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Polinomul caracteristic al matricei $A(e_1^m)$ este $p_{A(e_1^m)}(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 - \alpha_2\alpha_3 m^2)$ care are rădăcinile $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm m\sqrt{\alpha_2\alpha_3}$.

Avem $\lambda_1 = 0$ și $\lambda_{2,3} = \pm m\sqrt{\alpha_2\alpha_3}$, dacă $\alpha_2\alpha_3 > 0$ și $\lambda_{2,3} = \pm im\sqrt{-\alpha_2\alpha_3}$, dacă $\alpha_2\alpha_3 < 0$. Atunci, conform Teoremei 2.1.9 (Lyapunov) rezultă că e_1^m este spectral stabil pentru $\alpha_2\alpha_3 < 0$ și instabil pentru $\alpha_2\alpha_3 > 0$.

Se înlocuiesc în Propoziția 2.2.2 parametrii α_i și se obține stabilitatea spectrală a stărilor de echilibru pentru sistemul Lagrange etc. (Corolarul 2.2.15).

Propoziția 2.2.16 Dacă $\alpha_1\alpha_2 < 0$ (resp. $\alpha_1\alpha_3 < 0$; resp. $\alpha_2\alpha_3 < 0$), atunci starea de echilibru e_0 a sistemului Euler top (2.1.1) este neliniar stabilă.

Pentru demonstrație se arată că L^α este o funcție Lyapunov, unde

$$L^\alpha(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}(\alpha_2x_1^2 - \alpha_1x_2^2).$$

În propozițiile următoare se studiază stabilitatea neliniară a punctelor de echilibru e_1^m (dacă $\alpha_2\alpha_3 < 0$), e_2^m (dacă $\alpha_1\alpha_3 < 0$) și e_3^m (dacă $\alpha_1\alpha_2 < 0$), unde $m \in \mathbf{R}^*$.

Propoziția 2.2.17 Dacă $\alpha_1\alpha_2 < 0$, atunci e_3^m , $m \in \mathbf{R}^*$, este neliniar stabil.

Demonstrație. Fie funcția $F_\lambda^\alpha \in C^\infty(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})$, $\lambda \in \mathbf{R}$, dată prin:

$$F_\lambda^\alpha(x_1, x_2, x_3) = H^\alpha(x_1, x_2, x_3) - \lambda C^\alpha(x_1, x_2, x_3), \quad \text{adică}$$

$$F_\lambda^\alpha(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}(\alpha_2x_1^2 - \alpha_1x_2^2) - \frac{\lambda}{2}\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_2}x_2^2 - x_3^2\right).$$

Atunci rezultă că:

(i) $\nabla F_\lambda^\alpha(e_3^m) = 0$ dacă și numai dacă $\lambda = 0$;

(ii) $W := \ker dC^\alpha(e_3^m) = \text{span}_{\mathbf{R}}((1, 0, 0)^T, (0, 1, 0)^T)$;

(iii) Pentru orice $v \in W$, i.e. $v = (a, b, 0)^T$, $a, b \in \mathbf{R}$, rezultă:

$$v^T \cdot \nabla^2 F_0^\alpha(e_3^m) \cdot v = \alpha_2a^2 - \alpha_1b^2$$

și astfel $\nabla^2 F_0^\alpha(e_3^m)|_{W \times W}$ este pozitiv definită dacă $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 > 0$ și negativ definită dacă $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 < 0$.

Conform metodei lui Arnold (T. 2.1.14), conchidem că e_3^m , este neliniar stabil. \square

În **Propozițiile 2.2.18, 2.2.19** se demonstrează că:

– dacă $\alpha_1\alpha_3 < 0$ (resp., $\alpha_2\alpha_3 < 0$), atunci e_2^m , $m \in \mathbf{R}^*$ (resp., e_1^m , $m \in \mathbf{R}^*$), este neliniar stabil.

Ca o consecință a propozițiilor precedente se obține stabilitatea neliniară a stărilor de echilibru pentru sistemele (1.4.1), (1.4.4), (2.2.1)-(2.2.3) (Corolarul 2.2.20).

2.2.3 Integrarea numerică a sistemului Euler top

Vom discuta integrarea numerică a dinamicii Euler top (2.2.1), folosind integratorul Lie-Trotter [51] și integratorul Kahan [26]. Rezultatele cuprinse în această secțiune au fost publicate în lucrarea [50] (Șușoi, 2010).

Câmpul de vectori X_{H^α} asociat hamiltonianului H^α al dinamicii (2.2.1) se scrie:

$$X_{H^\alpha} = X_{H_1^\alpha} + X_{H_2^\alpha}, \quad \text{unde}$$

$$H_1^\alpha(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}\alpha_2 x_1^2, \quad H_2^\alpha(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{2}\alpha_1 x_2^2.$$

Curbele integrale corespunzătoare sunt, respectiv, date de:

$$X(t) = A_i \cdot X(0), \quad i = 1, 2,$$

unde $X(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T$ și A_i este matricea operatorului $\exp(tX_{H_i^\alpha})$, $i = 1, 2$.

Determinăm matricea A_1 a operatorului $\exp(tX_{H_1^\alpha})$. Avem

$$\dot{X} = P^\alpha \cdot \nabla H_1^\alpha = AX \quad \text{unde} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 a \\ 0 & \alpha_3 a & 0 \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad a = x_1(0).$$

Polinomul caracteristic al matricei At este $p_{At}(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 - \alpha_2\alpha_3 a^2 t^2)$. Dacă $\alpha_2\alpha_3 < 0$, atunci rădăcinile polinomului $p_{At}(\lambda)$ sunt $\lambda_1 = 0$ și $\lambda_{2,3} = \pm iat\sqrt{-\alpha_2\alpha_3} = \pm ia\gamma t$, unde $\gamma = \sqrt{-\alpha_2\alpha_3}$. Avem

$$\exp(At) = I_3 + \frac{\sin \gamma at}{\gamma a} \cdot A + \frac{1 - \cos \gamma at}{\gamma^2 a^2} \cdot A^2 = A_1, \quad \text{unde}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(a\gamma t) & \frac{\alpha_2}{\gamma} \sin(a\gamma t) \\ 0 & \frac{\alpha_3}{\gamma} \sin(a\gamma t) & \cos a(\gamma t) \end{pmatrix}, \quad a = x_1(0).$$

În același mod se determină matricea A_2 a operatorului $\exp(tX_{H_2^\alpha})$ și avem:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b\alpha_1 t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = x_2(0).$$

Atunci via [51], integratorul Lie-Trotter este dat prin:

$$X(n+1) = A_1 A_2 X(n). \quad (2.2.11)$$

Propoziția 2.2.21 Dacă $\alpha_2\alpha_3 < 0$ și $\gamma = \sqrt{-\alpha_2\alpha_3}$, atunci integratorul Lie-Trotter al sistemului Euler top (2.2.1) este dat prin:

$$\begin{cases} x_1(n+1) = x_1(n) + t\alpha_1 x_2(0) \cdot x_3(n) \\ x_2(n+1) = \cos(t\gamma x_1(0)) \cdot x_2(n) + \frac{\alpha_2}{\gamma} \sin(t\gamma x_1(0)) \cdot x_3(n) \\ x_3(n+1) = \frac{\alpha_3}{\gamma} \sin(t\gamma x_1(0)) \cdot x_2(n) + \cos(t\gamma x_1(0)) \cdot x_3(n) \end{cases} \quad (2.2.12)$$

Propoziția 2.2.22 Integratorul Lie-Trotter (2.2.12) are următoarele proprietăți:

- (i) este un integrator Poisson;
- (ii) este un integrator Casimir;
- (iii) nu este un integrator-energie.

Aplicând Propoziția 2.2.21 se obține succesiv integratorul Lie-Trotter pentru sistemele (1.4.4), (2.2.2) și (2.2.3) (Corolarele 2.2.23-2.2.25).

Propoziția 2.2.26 Pentru sistemul Euler top (2.2.1), integratorul Kahan este dat de sistemul de ecuații recurente:

$$\begin{cases} x_1^{k+1} - x_1^k = \frac{h\alpha_1}{2}(x_2^{k+1}x_3^k + x_3^{k+1}x_2^k), \\ x_2^{k+1} - x_2^k = \frac{h\alpha_2}{2}(x_1^{k+1}x_3^k + x_3^{k+1}x_1^k), \\ x_3^{k+1} - x_3^k = \frac{h\alpha_3}{2}(x_2^{k+1}x_1^k + x_1^{k+1}x_2^k), \end{cases} \quad \text{unde } x^k = x_0 + k \cdot h. \quad (2.2.13)$$

Observația 2.2.27 Înlocuind în (2.2.13) parametri α_i cu valorile corespunzătoare se obține integratorul Kahan pentru fiecare din sistemele (1.4.1), (1.4.4), (2.2.2) – (2.2.4).

2.3 Sistemul Euler top metriplectic

În acest paragraf se studiază proprietățile geometrice și dinamice ale sistemului Euler top metriplectic. Conținutul ultimelor două secțiuni se axează pe rezultatele autorului cuprinse în lucrarea citată [49] (Șușoi și M. Ivan, 2009).

În Secțiunea 2.3.1 se prezintă noțiuni și rezultate referitoare la sisteme metriplectice [40] (Ortega și Plannas-Bielsa, 2004), [22] (Gh. Ivan și Opriș, 2006). În Secțiunea 2.3.2 se construiește structura metriplectică asociată sistemului Euler top general. Secțiunea 2.3.3 este dedicată studiului stabilității spectrale pentru sistemul Euler top metriplectic.

Prezentăm mai întâi **construcția sistemului metriplectic asociat unui sistem Hamilton-Poisson** (Secțiunea 2.3.1).

Un *croșet Leibniz* pe o varietate diferențială M de dimensiune n , este o aplicație biliniară $[\cdot, \cdot] : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ care satisface *regulile lui Leibniz*:

$$[fg, h] = [f, h]g + f[g, h] \quad \text{și} \quad [f, gh] = [f, g]h + g[f, h], \quad f, g, h \in C^\infty(M).$$

O *varietate Leibniz* este o pereche $(M, [\cdot, \cdot])$, unde $[\cdot, \cdot]$ este un croșet Leibniz.

Fie P și \mathbf{g} două câmpuri de tensori 2-contravarianți pe M . Definim aplicația $[\cdot, (\cdot, \cdot)] : C^\infty(M) \times (C^\infty(M) \times C^\infty(M)) \rightarrow C^\infty(M)$ dată prin:

$$[f, (h_1, h_2)] = P(df, dh_1) + \mathbf{g}(df, dh_2), \quad (\forall) f, h_1, h_2 \in C^\infty(M). \quad (2.3.1)$$

Se demonstrează că aplicația $[[\cdot, \cdot]] : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ dată prin:

$$[[f, h]] = [f, (h, h)], \quad (\forall) f, h \in C^\infty(M), \quad (2.3.2)$$

este un croșet Leibniz și $(M, P, \mathbf{g}, [[\cdot, \cdot]])$ este o varietate Leibniz.

O varietate Leibniz $(M, P, \mathbf{g}, [[\cdot, \cdot]])$ astfel încât P este un tensor antisimetric și \mathbf{g} este un tensor simetric este numită *varietate metriplectică*.

Fie $(M, P, \mathbf{g}, [[\cdot, \cdot]])$ o varietate metriplectică. În lucrarea [22] s-a demonstrat că, dacă există funcțiile $h_1, h_2 \in C^\infty(M)$ astfel încât $P(df, dh_2) = 0$ și $\mathbf{g}(df, dh_1) = 0$ pentru orice $f \in C^\infty(M)$, atunci croșetul $[[\cdot, \cdot]]$ dat prin (2.3.2) satisface relația:

$$[[f, h_1 + h_2]] = [f, (h_1, h_2)], \quad (\forall) f \in C^\infty(M). \quad (2.3.3)$$

În aceste ipoteze, câmpul de vectori $X_{h_1 h_2}$ dat prin:

$$X_{h_1 h_2}(f) = [[f, h_1 + h_2]] \quad (\forall) f \in C^\infty(M), \quad (2.3.4)$$

este numit *câmpul Leibniz* asociat perechii (h_1, h_2) pe M .

Aplicând relațiile (2.3.1)-(2.3.3), rezultă că $X_{h_1 h_2}$ este dat prin:

$$X_{h_1 h_2}(f) = P(df, dh_1) + \mathbf{g}(df, dh_2), \quad (\forall) f \in C^\infty(M). \quad (2.3.5)$$

În coordonatele locale $(x^i), i = \overline{1, n}$ pe M , sistemul următor:

$$\dot{x}^i = X_{h_1 h_2}(x^i) = P^{ij} \frac{\partial h_1}{\partial x^j} + G^{ij} \frac{\partial h_2}{\partial x^j}, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad (2.3.6)$$

cu $P^{ij} = P(dx^i, dx^j)$ și $G^{ij} = \mathbf{g}(dx^i, dx^j)$, este numit *sistem metriplectic* pe M asociat câmpului $X_{h_1 h_2}$ cu croșetul $[[\cdot, \cdot]]$.

Prezentăm o metodă pentru a obține sisteme metriplectice care constă în a adăuga un termen de disipație la un sistem Hamilton-Poisson [10] (Birtea, Puta et al., 2007).

Fie $\{\cdot, \cdot\}$ o structură Poisson pe \mathbf{R}^n generată de matricea antisimetrică $P = (P^{ij})$, o funcție $H \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ și $C_1, \dots, C_k \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ un sistem complet de funcții Casimir funcțional independente. Fie G o funcție diferențiabilă definită pe \mathbf{R}^n cu valori în spațiul liniar al matricelor simetrice de tipul $n \times n$.

Definiția 2.3.1 ([10]) Un *sistem metriplectic* pe \mathbf{R}^n este un sistem de forma:

$$\dot{x}(t) = P(x(t)) \cdot \nabla H(x(t)) + G(x(t)) \cdot \nabla \varphi(C_1, \dots, C_k)(x(t)), \quad (2.3.7)$$

unde $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^k)$ astfel încât următoarele condiții sunt îndeplinite:

$$(i) \quad P(x) \cdot \nabla C_i(x) = 0, \quad i = \overline{1, k}, \quad (ii) \quad G(x) \cdot \nabla H(x) = 0;$$

$$(iii) \quad (\nabla \tilde{C}(x))^T \cdot G(x) \cdot \nabla \tilde{C}(x) \leq 0, \quad \text{unde } \tilde{C} = \varphi(C_1, \dots, C_k). \quad \square$$

Sistemul metriplectic (2.3.7), notat cu $(\mathbf{R}^n, P, H, G, \tilde{C})$, se interpretează ca o "perturbare" a sistemului Poisson

$$\dot{x}(t) = P(x(t)) \cdot \nabla H(x(t))$$

cu termenul de disipație $G(x) \cdot \nabla \varphi(C_1, \dots, C_k)(x)$. Se spune că *sistemul metriplectic (2.3.7) este asociat sistemului Hamilton-Poisson* (\mathbf{R}^n, P, H) .

Dacă (\mathbf{R}^n, P, H) este un sistem Hamilton-Poisson, atunci determinăm tensorul simetric \mathbf{g} pe \mathbf{R}^n , generat de matricea $G = (G^{ij})$, unde:

$$G^{ii}(x) = - \sum_{k=1, k \neq i}^n \left(\frac{\partial h_1}{\partial x^k} \right)^2 \quad \text{și} \quad G^{ij}(x) = \frac{\partial h_1}{\partial x^i} \frac{\partial h_1}{\partial x^j}, \quad \text{pentru } i \neq j. \quad (2.3.8)$$

Definiția 2.3.3 Un sistem diferențial pe \mathbf{R}^n de forma:

$$\dot{x}^i = \varphi^i(x^1, x^2, \dots, x^n), \quad \text{unde } \varphi^i \in C^\infty(\mathbf{R}^n), \quad i = \overline{1, n} \quad (2.3.9)$$

are o *realizare metriplectică pe \mathbf{R}^n* , dacă există o structură metriplectică $(\mathbf{R}^n, P, H, G, \tilde{C})$ astfel încât (2.3.9) se poate scrie sub forma (2.3.7).

Ca exemplu ilustrativ se construiește **sistemul metriplectic asociat sistemului Euler top** (2.2.1) (Secțiunea 2.3.2). Pentru aceasta utilizăm realizarea Hamilton-Poisson $(\mathbf{R}^3, P^\alpha, H^\alpha)$ dată în Propoziția 2.2.3.

Aplicăm acum formulele (2.3.8) pentru funcția $h_1 = H^\alpha \in C^\infty(\mathbf{R}^3)$ dată prin (2.2.5).

Tensorul simetric \mathbf{g} este generat de matricea $G^\alpha = (G_\alpha^{ij})$, unde

$$G^\alpha = \begin{pmatrix} -\alpha_1^2 x_2^2 & -\alpha_1 \alpha_2 x_1 x_2 & 0 \\ -\alpha_1 \alpha_2 x_1 x_2 & -\alpha_2^2 x_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_2^2 x_1^2 - \alpha_1^2 x_2^2 \end{pmatrix}. \quad (2.3.10)$$

Considerăm funcțiile $H = H^\alpha$ și $C = C^\alpha$ date prin relațiile (2.2.5), tensorul antisimetric $P = P^\alpha$ dat prin (2.2.6) și tensorul simetric \mathbf{g} dat prin (2.3.10).

Pentru funcția $\tilde{C}^\alpha = \beta C^\alpha$ cu $\beta \in \mathbf{R}$, sistemul dinamic (2.3.7) se scrie:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= \alpha_1 x_2 (x_3 - \beta \alpha_3 x_1 x_2) \\ \dot{x}_2 &= \alpha_2 x_1 (x_3 - \beta \alpha_3 x_1 x_2) \\ \dot{x}_3 &= \alpha_3 x_1 x_2 + \beta x_3 (\alpha_2^2 x_1^2 + \alpha_1^2 x_2^2) \end{cases} \quad (2.3.11)$$

Propoziția 2.3.4 ($\mathbf{R}^3, P^\alpha, H^\alpha, G^\alpha, \tilde{C}^\alpha$) este o realizare metriplectică pentru (2.3.11).

Sistemul (2.3.11) este numit *sistem Euler top metriplectic*.

Dacă $\beta = 0$, sistemul (2.3.11) se reduce la sistemul Hamilton-Poisson (2.2.1).

Propoziția 2.3.6 Funcția H^α dată prin (2.2.5) este o constantă a mișcării sistemului metriplectic (2.3.11).

Pentru $\beta \neq 0$, $\tilde{C}^\alpha = \beta C^\alpha$ nu este o constantă a mișcării pentru (2.3.11).

Dacă în (2.3.11) considerăm $\alpha = (1, 1, 1)$, vom obține *sistemul Lagrange metriplectic*:

$$\dot{x}_1 = x_2 x_3 - \beta x_1 x_2^2, \quad \dot{x}_2 = x_1 x_3 - \beta x_1^2 x_2, \quad \dot{x}_3 = x_1 x_2 + \beta x_3 (x_1^2 + x_2^2). \quad (2.3.12)$$

În final ne ocupăm de **studiul stabilității spectrale pentru dinamica** (2.3.11) (Secțiunea 2.3.3).

Sistemul Euler top (2.2.1) și *sistemul Euler top metriplectic* (2.3.11) au aceleași stări de echilibru.

Propoziția 2.3.10 (i) Pentru $\beta \neq 0$, stările de echilibru e_1^m , $m \in \mathbf{R}^*$, ale sistemului metriplectic (2.3.11), au următoarea comportare:

(1) dacă $\beta \alpha_2 (\alpha_2 - \alpha_3) \leq 0$, atunci e_1^m este spectral stabil;

(2) dacă $\beta \alpha_2 (\alpha_2 - \alpha_3) > 0$, atunci e_1^m este instabil.

(ii) Pentru $\beta = 0$, starea de echilibru e_1^m , $m \in \mathbf{R}^*$, a sistemului Euler top (2.2.1), este spectral stabilă, dacă $\alpha_2 \alpha_3 < 0$ și instabilă, dacă $\alpha_2 \alpha_3 > 0$.

Propoziția 2.3.11 (i) Pentru orice $\beta \neq 0$, stările de echilibru e_2^m , $m \in \mathbf{R}^*$, ale sistemului metriplectic (2.3.11), au următoarea comportare:

(1) dacă $\beta \alpha_1 (\alpha_1 - \alpha_3) \leq 0$, atunci e_2^m este spectral stabil;

(2) dacă $\beta \alpha_1 (\alpha_1 - \alpha_3) > 0$, atunci e_2^m este instabil.

(ii) Pentru $\beta = 0$, starea de echilibru e_2^m , $m \in \mathbf{R}^*$, a sistemului Euler top (2.2.1), este spectral stabilă, dacă $\alpha_1 \alpha_3 < 0$ și instabilă, dacă $\alpha_1 \alpha_3 > 0$.

Propoziția 2.3.12 (i) Pentru orice $\beta \in \mathbf{R}^*$ și $m \in \mathbf{R}$, starea de echilibru e_3^m , a sistemului (2.3.11) este spectral stabilă, dacă $\alpha_1 \alpha_2 < 0$ și instabilă, dacă $\alpha_1 \alpha_2 > 0$.

(ii) Pentru orice $\beta \in \mathbf{R}$, starea de echilibru $e_0 = (0, 0, 0)$ este spectral stabilă.

Corolarul 2.3.13 (i) Dacă $\beta \neq 0$ și $m \in \mathbf{R}^*$, atunci e_0, e_1^m, e_2^m ale sistemului Lagrange metriplectic (2.3.13), sunt spectral stabile și e_3^m , $m \in \mathbf{R}^*$ sunt instabile.

(ii) Pentru $\beta = 0$, stările de echilibru e_1^m, e_2^m, e_3^m pentru $m \in \mathbf{R}^*$ ale sistemului Lagrange (2.2.4) sunt instabile și e_0 este spectral stabilă.

Capitolul 3

Două sisteme dinamice clasice pe \mathbf{R}^6

În acest capitol se stabilesc proprietăți geometrice și dinamice importante pentru două sisteme diferențiale remarcabile pe \mathbf{R}^6 și anume: *sistemul Goryachev-Chaplygin top* și *sistemul Kowalevski top*. Capitolul este structurat în trei paragrafe. Rezultatele originale ale autorului sunt conținute în ultimele două paragrafe.

3.1 Structura Lie-Poisson pe duala algebrei Lie $se(3)$

Fie $SE(3, \mathbf{R}) = SO(3) \times \mathbf{R}^3$ – grupul euclidian special de ordinul 3. Acesta este un grup Lie cu algebra Lie $se(3, \mathbf{R})$ care se identifică cu $so(3) \times \mathbf{R}^3$, [2](Andrica și Cașu, 2008). Avem:

$$se(3, \mathbf{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{x} & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \hat{x} \in so(3), y \in \mathbf{R}^3 \right\}, \quad \hat{x} = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.1.1)$$

Structurile plus-minus Lie-Poisson pe duala $(se(3, \mathbf{R}))^*$ a algebrei Lie $se(3, \mathbf{R})$ sunt generate de matricele $\Pi_{e3,-}$, respectiv $\Pi_{e3,+}$ (**Propoziția 3.1.3**).

3.2 Studiul dinamicii Goryachev- Chaplygin top

În paragraful 3.2 se determină o realizare Hamilton-Poisson a dinamicii Goryachev-Chaplygin top (3.2.1) și se studiază reprezentarea Lax, problema stabilității, existența soluțiilor periodice și integrarea numerică. Acest paragraf conține contribuțiile originale ale autorului și au fost publicate în lucrarea citată [5] (Aron, Puta și Șușoi, 2005).

Sistemul Goryachev- Chaplygin top (sau, prescurtat, G-C top) a fost introdus de Goryachev în anul 1900 ([16]) și a fost integrat prin funcții hipereliptice de Chaplygin în anul 1948 ([11]). G-C top este un corp rigid care se rotește în jurul unui punct fix pentru

care momentele principale de inerție I_1, I_2, I_3 satisfac condițiile $I_1 = I_2 = 4I_3 = I$, iar centrul de greutate se găsește în planul ecuatorial al corpului. Vom considera $I = 1$.

Variabilele dinamicii G-C top sunt componentele m_1, m_2, m_3 ale momentului unghiular și componentele $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ale vectorului de poziție al centrului de greutate într-un reper relativ la axele principale ale corpului.

Dinamica topului Goryachev-Chaplygin este descrisă de sistemul de ecuații diferențiale:

$$\begin{cases} \dot{m}_1 = 3m_2m_3, & \dot{m}_2 = -3m_1m_3 - 2\gamma_3, & \dot{m}_3 = 2\gamma_2, \\ \dot{\gamma}_1 = 4\gamma_2m_3 - \gamma_3m_2, & \dot{\gamma}_2 = \gamma_3m_1 - 4\gamma_1m_3, & \dot{\gamma}_3 = \gamma_1m_2 - \gamma_2m_1. \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Propoziția 3.2.1 *O realizare Hamilton-Poisson a dinamicii G-C top (3.2.1) este (\mathbf{R}^6, Π, H) , unde*

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & -m_3 & m_2 & 0 & -\gamma_3 & \gamma_2 \\ m_3 & 0 & -m_1 & \gamma_3 & 0 & -\gamma_1 \\ -m_2 & m_1 & 0 & -\gamma_2 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & -\gamma_3 & \gamma_2 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_3 & 0 & -\gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma_2 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.2.2)$$

$$H(m_1, m_2, m_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \frac{1}{2}(m_1^2 + m_2^2 + 4m_3^2) - 2\gamma_1 \quad (3.2.3)$$

Structura Poisson generată de matricea Π pe spațiul \mathbf{R}^6 este de fapt structura minus Lie-Poisson pe $(se(3, \mathbf{R}))^* \cong \mathbf{R}^6$ generată de matricea $\Pi_{e3,-}$.

Propoziția 3.2.3 *Casimirii $C_1, C_2 \in C^\infty(\mathbf{R}^6, \mathbf{R})$ ai configurației (\mathbf{R}^6, Π) sunt:*

$$C_1(m, \gamma) = m_1\gamma_1 + m_2\gamma_2 + m_3\gamma_3, \quad C_2(m, \gamma) = \frac{1}{2}(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2).$$

Funcțiile $H, C_1, C_2 \in C^\infty(\mathbf{R}^6, \mathbf{R})$ sunt integrale prime pentru (3.2.1).

Observația 3.2.5 *Pe orbita coadjunctă $(\mathcal{O}_{0,1}, \omega_{\mathcal{O}_{0,1}})$, unde*

$$\mathcal{O}_{0,1} = \{(m, \gamma) \in \mathbf{R}^6 \mid \begin{cases} m_1\gamma_1 + m_2\gamma_2 + m_3\gamma_3 = 0 \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 2 \end{cases}\}$$

$$\omega_{\mathcal{O}_{0,1}} = \frac{1}{2\gamma_3}(dm_2 \wedge d\gamma_1 - dm_1 \wedge d\gamma_2) + \frac{m_3}{2\gamma_3^2}d\gamma_1 \wedge d\gamma_2,$$

sistemul (3.2.1) mai are o integrală primă, și anume:

$$K(m, \gamma) = m_3(m_1^2 + m_2^2) + 2m_1\gamma_3. \quad (3.2.4)$$

În plus, sistemul hamiltonian $(\mathcal{O}_{0,1}, \omega_{\mathcal{O}_{0,1}}, H)$ este complet integrabil cu ambele integrale prime independente în involuție H și K .

Sistemul G-C top și formularea Lax

Propoziția 3.2.6 *Dinamica G-C top (3.2.1) are o formulare Lax, adică:*

$$\dot{L} = [L, B], \quad \text{unde}$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & m_2 - im_1 & m_1 + im_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m_2 + im_1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m_1 - im_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -im_3 & m_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & im_3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_3 & \gamma_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_3 & 0 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_1 & -\gamma_2 & 0 \end{pmatrix}$$

și

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2i\gamma_3 & 2\gamma_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2i\gamma_3 & 0 & 3m_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\gamma_3 & -3m_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\gamma_2 & 2i\gamma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\gamma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2i\gamma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4m_3 & -m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4m_3 & 0 & -m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_1 & m_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corolarul 3.2.7 *Fluxul dinamicii G-C top (3.2.1) este izospectral.*

Stabilitate și soluții periodice pentru dinamica (3.2.1)

Propoziția 3.2.8 *Dinamica G-C top are următoarele stări de echilibru:*

$$e_{12} = (M, N, 0, 0, 0, 0), \quad e_{14} = (M, 0, 0, N, 0, 0), \quad e_{1346} = \left(M, 0, N, -\frac{3M^2}{8}, 0, -\frac{3MN}{2}\right),$$

pentru orice $M, N \in \mathbf{R}$.

În Propozițiile 3.2.9 - 3.2.11 se studiază stabilitatea spectrală a stărilor de echilibru ale sistemului dinamic (3.2.1). Aceste stări au următoarea comportare:

- e_{1346} sunt spectral stabile dacă $M^2 < 2N^2$, și instabile dacă $M^2 \geq 2N^2$;
- e_{14} sunt spectral stabile dacă $N > 0$, și instabile dacă $N \leq 0$;

– $e_{12}, M, N \in \mathbf{R}$ sunt spectral stabile.

Stabilitatea neliniară a stărilor e_{14} și e_{1346} este analizată în propozițiile următoare:

Propoziția 3.2.12 e_{14} pentru $M, N \in \mathbf{R}, N > 0$, sunt neliniar stabile.

Propoziția 3.2.13 e_{1346} sunt neliniar stabile, dacă $M, N \in \mathbf{R}, M^2 < 2N^2, M < 0$.

Observația 3.2.14 Rămâne o problemă deschisă, studiul stabilității neliniare a stărilor $e_{12}, M, N \in \mathbf{R}$ și a stărilor $e_{1346}, M, N \in \mathbf{R}, M^2 < 2N^2, M \geq 0$.

Sistemul (3.2.1) redus la orbita coadjunctă $\mathcal{O}_{M,N}$, unde

$$\mathcal{O}_{M,N} = \{(m, \gamma) \in \mathbf{R}^6 \mid \left\{ \begin{array}{l} m_1\gamma_1 + m_2\gamma_2 + m_3\gamma_3 = MN \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = N^2 \end{array} \right\}\}$$

generează un sistem hamiltonian clasic. Atunci are loc propoziția următoare.

Propoziția 3.2.15 Pe vecinătatea stării $e_{14}, M, N \in \mathbf{R}, N > 0$, sistemul redus are, pentru fiecare valoare suficient de mică a energiei reduse, cel puțin două soluții periodice.

Integrarea numerică a dinamicii (3.2.1)

În această secțiune vom discuta integrarea numerică a dinamicii G-C top (3.2.1), folosind integratorul Lie-Trotter ([51]).

Câmpul de vectori X_H asociat hamiltonianului H al dinamicii (3.2.1) se scrie:

$$X_H = X_{H_1} + X_{H_2} + X_{H_3} + X_{H_4}, \quad \text{unde}$$

$$H_1(m, \gamma) = \frac{1}{2}m_1^2, \quad H_2(m, \gamma) = \frac{1}{2}m_2^2, \quad H_3(m, \gamma) = 2m_3^2, \quad H_4(m, \gamma) = -2\gamma_1.$$

Curbele integrale corespunzătoare sunt, respectiv, date prin:

$$\begin{pmatrix} m_1(t) \\ m_2(t) \\ m_3(t) \\ \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \\ \gamma_3(t) \end{pmatrix} = A_i \cdot \begin{pmatrix} m_1(0) \\ m_2(0) \\ m_3(0) \\ \gamma_1(0) \\ \gamma_2(0) \\ \gamma_3(0) \end{pmatrix},$$

unde A_i este matricea operatorului $\exp(tX_{H_i})$, pentru $i = \overline{1,4}$.

Determinăm matricea A_i a operatorului $\exp(tX_{H_i})$ pentru $i = \overline{1,4}$ și obținem:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos m_1(0)t & \sin m_1(0)t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin m_1(0)t & \cos m_1(0)t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos m_1(0)t & \sin m_1(0)t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin m_1(0)t & \cos m_1(0)t \end{pmatrix}, \quad (3.2.5)$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \cos m_2(0)t & 0 & -\sin m_2(0)t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin m_2(0)t & 0 & \cos m_2(0)t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos m_2(0)t & 0 & -\sin m_2(0)t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin m_2(0)t & 0 & \cos m_2(0)t \end{pmatrix}, \quad (3.2.6)$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} \cos 4m_3(0)t & \sin 4m_3(0)t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin 4m_3(0)t & \cos 4m_3(0)t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos 4m_3(0)t & \sin 4m_3(0)t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin 4m_3(0)t & \cos 4m_3(0)t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.2.7)$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2t \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.2.8)$$

Atunci via [51], integratorul Lie-Trotter este dat prin:

$$\begin{pmatrix} m_1^{n+1} \\ m_2^{n+1} \\ m_3^{n+1} \\ \gamma_1^{n+1} \\ \gamma_2^{n+1} \\ \gamma_3^{n+1} \end{pmatrix} = A_1 A_2 A_3 A_4 \begin{pmatrix} m_1^n \\ m_2^n \\ m_3^n \\ \gamma_1^n \\ \gamma_2^n \\ \gamma_3^n \end{pmatrix}, \quad (3.2.9)$$

unde $A_i, i = \overline{1,4}$ sunt date prin relațiile (3.2.5) - (3.2.8).

Propoziția 3.2.16 Integratorul Lie-Trotter (3.2.9) are următoarele proprietăți:

- (i) este un integrator Poisson și păstrează Casimirii C_1, C_2 ai configurației (\mathbf{R}^6, Π) .
- (ii) nu este un integrator-energie, adică nu conservă hamiltonianul H .

Propoziția 3.2.17 Restricțiile integratorului Lie-Trotter la orbitele coadjuncte:

$m_1\gamma_1 + m_2\gamma_2 + m_3\gamma_3 = \text{constant}$ și $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = \text{constant}$
generează un integrator symplectic.

3.3 Studiul dinamicii Kowalevski top

În acest paragraf se realizează un studiu geometric și dinamic al sistemului Kowalevski top (3.3.1). Conținutul acestui paragraf se axează pe rezultatele autorului cuprinse în lucrarea citată [6] (Aron, Puta, Șușoi et al., 2006).

Kowalevski top [30] (Kowalevski, 1989) este un corp rigid care se rotește în jurul unui punct fix pentru care momentele principale de inerție I_1, I_2, I_3 satisfac condițiile $I_1 = I_2 = 2I_3 = I$. Vom considera $I = 1$.

Dinamica topului Kowalevski este descrisă de sistemul de ecuații diferențiale următor:

$$\begin{cases} \dot{m}_1 = m_2 m_3, & \dot{m}_2 = -m_1 m_3 - \frac{1}{2} \gamma_3, & \dot{m}_3 = \frac{1}{2} \gamma_2, \\ \dot{\gamma}_1 = 2\gamma_2 m_3 - \gamma_3 m_2, & \dot{\gamma}_2 = \gamma_3 m_1 - 2\gamma_1 m_3, & \dot{\gamma}_3 = \gamma_1 m_2 - \gamma_2 m_1. \end{cases} \quad (3.3.1)$$

Propoziția 3.3.1 *Dinamica Kowalevski top are realizarea Hamilton-Poisson (\mathbf{R}^6, Π, H), unde*

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & -m_3 & m_2 & 0 & -\gamma_3 & \gamma_2 \\ m_3 & 0 & -m_1 & \gamma_3 & 0 & -\gamma_1 \\ -m_2 & m_1 & 0 & -\gamma_2 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & -\gamma_3 & \gamma_2 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_3 & 0 & -\gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma_2 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.3.2)$$

$$H(m_1, m_2, m_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \frac{1}{2}(m_1^2 + m_2^2 + 2m_3^2 - \gamma_1) \quad (3.3.3)$$

Propoziția 3.3.2 *Casimirii $C_1, C_2 \in C^\infty(\mathbf{R}^6, \mathbf{R})$ ale configurației (\mathbf{R}^6, Π) sunt:*

$$C_1(m, \gamma) = m_1 \gamma_1 + m_2 \gamma_2 + m_3 \gamma_3, \quad C_2(m, \gamma) = \frac{1}{2}(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2). \quad \square$$

Se demonstrează că:

- $H, C_1, C_2 \in C^\infty(\mathbf{R}^6, \mathbf{R})$ sunt integrale prime pentru (3.3.1) (Propoziția 3.3.3);
- dinamica Kowalevski top (3.3.1) are o formulare Lax și fluxul dinamicii Kowalevski este izospectral (Propoziția 3.3.4, Corolarul 3.3.5).

Problema stabilității și existența soluțiilor periodice. Dinamica Kowalevski top are următoarele stări de echilibru:

$$e_{12} = (M, N, 0, 0, 0, 0), \quad e_{14} = (M, 0, 0, N, 0, 0), \quad e_{1346} = (M, 0, N, M^2, 0, -2MN),$$

pentru orice $M, N \in \mathbf{R}$ (Propoziția 3.3.6).

În Propozițiile 3.3.7 – 3.3.11 se studiază problema stabilității și obținem că:

- $e_{12}, M, N \in \mathbf{R}$ sunt spectral stabile;
- e_{1346} sunt neliniar stabile dacă $M^2 < 2N^2, M < 0$ și instabile dacă $M^2 \geq 2N^2$;
- e_{14} sunt neliniar stabile dacă $M, N \in \mathbf{R}, N > 0$, și instabile dacă $N \leq 0$.

Observația 3.3.12 Rămâne o problemă deschisă, studiul stabilității neliniare a stărilor e_{12} , $M, N \in \mathbf{R}$ și e_{1346} , $M, N \in \mathbf{R}$, $M^2 < 2N^2$, $M \geq 0$. \square

Sistemul (3.3.1) redus la orbita coadjunctă $\mathcal{O}_{M,N}$, unde

$$\mathcal{O}_{M,N} = \{(m, \gamma) \in \mathbf{R}^6 \mid \left\{ \begin{array}{l} m_1\gamma_1 + m_2\gamma_2 + m_3\gamma_3 = MN \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = N^2 \end{array} \right\}\}$$

generează un sistem hamiltonian clasic. Atunci are loc propoziția următoare.

Propoziția 3.3.13 *Pe vecinătatea stării e_{14} , $M, N \in \mathbf{R}$, $N > 0$, sistemul redus are, pentru fiecare valoare suficient de mică a energiei reduse, cel puțin două soluții periodice.*

Integrarea numerică a dinamicii (3.3.1) se realizează prin două metode.

Integratorul Lie-Trotter al dinamicii (3.3.1) este dat în relațiile (3.3.13), iar proprietățile lui sunt stabilite în Propozițiile 3.3.14 și 3.3.15.

Propoziția 3.3.16 *Pentru sistemul Kowalevski top (3.3.1), integratorul Kahan este dat de sistemul de ecuații recurente:*

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1^{k+1} - m_1^k = \frac{h}{2}(m_2^{k+1}m_3^k + m_3^{k+1}m_2^k) \\ m_2^{k+1} - m_2^k = -\frac{h}{2}(m_1^{k+1}m_3^k + m_3^{k+1}m_1^k) - \frac{h}{4}(\gamma_3^{k+1} - \gamma_3^k) \\ m_3^{k+1} - m_3^k = \frac{h}{4}(\gamma_2^{k+1} - \gamma_2^k) \\ \gamma_1^{k+1} - \gamma_1^k = h(\gamma_2^{k+1}m_3^k + m_3^{k+1}\gamma_2^k) - \frac{h}{2}(\gamma_3^{k+1}m_2^k + m_2^{k+1}\gamma_3^k) \\ \gamma_2^{k+1} - \gamma_2^k = \frac{h}{2}(\gamma_3^{k+1}m_1^k + m_1^{k+1}\gamma_3^k) - h(\gamma_1^{k+1}m_3^k + m_3^{k+1}\gamma_1^k) \\ \gamma_3^{k+1} - \gamma_3^k = \frac{h}{2}(\gamma_1^{k+1}m_2^k + m_2^{k+1}\gamma_1^k) - h(\gamma_2^{k+1}m_1^k + m_1^{k+1}\gamma_2^k) \end{array} \right. \quad (3.3.4)$$

unde $m_i^k = m_i^0 + k \cdot h$, $\gamma_i^k = \gamma_i^0 + k \cdot h$, $i = 1, 2, 3$.

Se demonstrează prin calcul sau, eventual, folosind software-ul MATHEMATICA, că: *integratorul Kahan nu păstrează structura Poisson și nici Casimirii C_1, C_2 și nu este un integrator-energie* (Propoziția 3.3.17).

Observație Se poate constata ușor prin simulare numerică că integratorul Lie-Trotter și integratorul Kahan nu aproximează decât porțiuni "mici" ale dinamicii Kowalevski top. Este o problemă deschisă pentru a argumenta acest comportament.

Capitolul 4

Sisteme dinamice cu control pe grupul Lie $SO(4)$

Capitolul 4 este structurat în două paragrafe. Rezultatele originale sunt conținute în paragraful 4.2.

4.1 Sisteme cu control pe grupuri Lie de matrici

În acest paragraf se prezintă definiții și proprietăți referitoare la sisteme cu control pe grupuri Lie. Se analizează o problemă de control optimal pentru dinamica robotului Hilare resp. dinamica unei nave spațiale.

Sursele bibliografice folosite sunt: [25](Jurdjevic și Sussmann, 1972), [29](Khrisnaprasad, 1993), [32](Leonard, 1994), [47](Struemper, 1997), [28](Khalil, 2002).

Prezentăm câteva elemente de control optimal pe grupuri Lie de matrici.

Fie G un grup Lie de matrici n -dimensional și \mathfrak{g} algebra Lie a lui G . Un câmp de vectori stâng invariant pe G are forma XA , cu $X \in G$ și $A \in \mathfrak{g}$. Fie $\mathcal{B} = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ o bază de matrici constante în algebra Lie \mathfrak{g} .

Un sistem stâng invariant cu control fără termen liber pe G , se scrie sub forma:

$$\dot{X}(t) = X(t)U(t) = X(t) \sum_{i=1}^m u_i(t)A_i, \quad m \leq n, \quad (4.1.1)$$

unde $X(t)$ este o curbă în G , $U(t)$ este o curbă în \mathfrak{g} și $\{A_1, A_2, \dots, A_m\} \subseteq \mathcal{B}$. O alegere a mulțimii $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ se numește *autoritate de control* a sistemului (4.1.1).

Observație. Stâng invarianța ne indică faptul că, dacă cunoaștem soluția $X_{I_n}(t)$ a sistemului (4.1.1) cu proprietatea că $X(0) = I_n$, atunci orice soluție $X(t)$ a sistemului (4.1.1) cu condiția inițială X_0 este de forma $X(t) = X_0 \cdot X_{I_n}(t)$. \square

Pentru sistemul (4.1.1), notăm cu \mathcal{U} mulțimea controlurilor admisibile, adică mulțimea funcțiilor local mărginite și măsurabile definite pe $[0, \infty]$ cu valori în \mathbf{R}^m .

Definiția 4.1.1 Sistemul stâng invariant(4.1.1) se numește *controlabil*, dacă pentru orice $X_0, X_f \in G$ există $t > 0$ și un control admisibil

$$u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \in \mathcal{U}, \quad t \in [0, t_f],$$

astfel încât soluția $X(t)$ a sistemului (4.1.1) satisface condițiile:

$$X(0) = X_0 \quad \text{și} \quad X(t) = X_f. \quad (4.1.2)$$

Problema controlabilității unui sistem de forma (4.1.1) se reduce la studiul proprietăților algebrice ale algebrei Lie \mathfrak{g} și a proprietăților topologice ale varietății G , [25](Jurdjevic și Sussmann, 1972).

Fie \mathcal{C} mulțimea parantezelor Lie generate de $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ și definită prin:

$$\mathcal{C} = \{\eta \mid \eta = [\eta_{k+1}, [\eta_k, [\dots, [\eta_2, \eta_1] \dots]]], \quad \eta_i \in \{A_1, A_2, \dots, A_m\}, \quad i = \overline{1, k+1}.$$

Teorema 4.1.2.([25]) (**Teorema Jurdjevic-Sussmann**). *Fie S un sistem stâng invariant fără termen liber de forma (4.1.1) pe un grup Lie conex G . Atunci S este controlabil dacă și numai dacă $\text{span } \mathcal{C} = \mathfrak{g}$.*

Pentru un sistem controlabil se pune problema găsirii controlurilor optime.

Să se determine controlurile $u_i(t), i = \overline{1, m}$ care duc sistemul (4.1.1) din poziția inițială $X(0) = X_0$ la momentul $t = 0$ în poziția finală $X(t_f) = X_f$ la momentul $t = t_f$ și minimizează (realizează minimul) funcția de cost:

$$J(u_1, u_2, \dots, u_m) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \left[\sum_{i=1}^m c_i u_i^2(t) \right] dt, \quad c_i > 0, i = \overline{1, m}. \quad (4.1.3)$$

Teorema 1.1.5 ([29]) (**Teorema Krishnaprasad**) *Fie sistemul stâng invariant controlabil pe grupul Lie G dat prin (4.1.1) cu restricțiile (4.1.2). Controlurile $u_i, i = \overline{1, m}$ care minimizează funcția de cost J definită prin (4.1.3) sunt date de relațiile:*

$$u_i = \frac{1}{c_i} P_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (4.1.4)$$

unde $P_i, i = \overline{1, m}$ sunt soluțiile ecuațiilor lui Hamilton reduse pe $(\mathfrak{g}^*, \{\cdot, \cdot\}_-)$, adică:

$$\dot{P}_i = \{P_i, H_{opt}\}_-, \quad i = \overline{1, m}, \quad (4.1.5)$$

unde H_{opt} este hamiltonianul redus (sau optimal) dat prin:

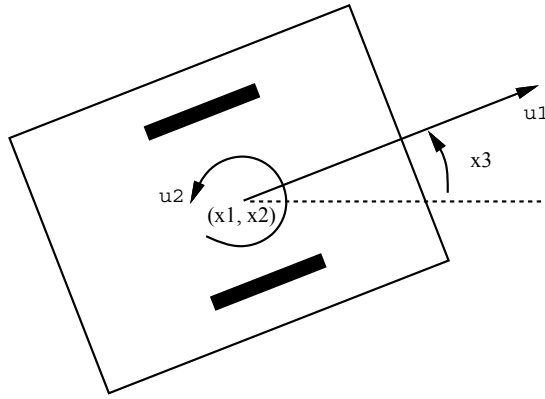
$$H_{opt}(P_1, P_2, \dots, P_m) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \frac{1}{c_i} P_i^2. \quad (4.1.6)$$

- **Robotul Hilare ca un sistem cu control pe $SE(2, \mathbf{R})$**

Spațiul configurațiilor este $\mathbf{R}^2 \times S^1$, iar dinamica lui este descrisă de sistemul de ecuații diferențiale ([52]):

$$\dot{x}_1 = u_1 \cos x_3, \quad \dot{x}_2 = u_1 \sin x_3, \quad \dot{x}_3 = u_2, \quad (4.1.7)$$

unde (x_1, x_2) reprezintă poziția lui în plan, iar x_3 este orientarea sa, vezi figura:



O bază în algebra Lie $se(2, \mathbf{R})$ a grupului Lie $SE(2, \mathbf{R})$ este $\{E_1, E_2, E_3\}$, vezi Paragraful 1.2. Alegem autoritatea de control $\{A_1, A_2\}$, unde $A_1 = E_2$, $A_2 = E_1$.

Prin calcul direct se arată că sistemul (4.1.7) se poate scrie sub forma echivalentă:

$$\dot{X} = X(A_1 u_1 + A_2 u_2), \quad \text{unde} \quad X = \begin{pmatrix} \cos x_3 & -\sin x_3 & x_1 \\ \sin x_3 & \cos x_3 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.1.8)$$

Sistemul (4.1.8) este un sistem controlabil pe $SE(2, \mathbf{R})$ cu autoritatea de control $\{A_1, A_2\}$.

Considerăm funcția de cost J , dată prin:

$$J(u_1, u_2) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [c_1 u_1^2(t) + c_2 u_2^2(t)] dt, \quad c_1 > 0, c_2 > 0. \quad (4.1.9)$$

Propoziția 4.1.6 Controlurile care minimizează funcția de cost J dată prin (4.1.9) și duc sistemul (4.1.8) din poziția $X(0) = X_0$ la $t = 0$ în poziția $X(t_f) = X_f$ la $t = t_f$ sunt date $u_1 = \frac{P_1}{c_1}$, $u_2 = \frac{P_2}{c_2}$ unde P_i , $i = \overline{1, 3}$ sunt soluțiile sistemului:

$$\dot{P}_1 = -\frac{1}{c_2} P_2 P_3, \quad \dot{P}_2 = \frac{1}{c_1} P_1 P_3, \quad \dot{P}_3 = -\frac{1}{c_1} P_1 P_2. \quad (4.1.10)$$

Sistemul (4.1.10) este un sistem Euler top (**se aplică rezultatele din Cap. 2**).

Sistemul (4.1.10) are realizarea Hamilton-Poisson $(\mathbf{R}^3, H_{rh}, P_{rh})$ (v. Propoziția 2.2.3), unde:

$$P_{rh} = \begin{pmatrix} 0 & -P_3 & P_2 \\ P_3 & 0 & 0 \\ -P_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad H_{rh}(P_1, P_2, P_3) = \frac{1}{2} \left(\frac{P_1^2}{c_1} + \frac{P_2^2}{c_2} \right).$$

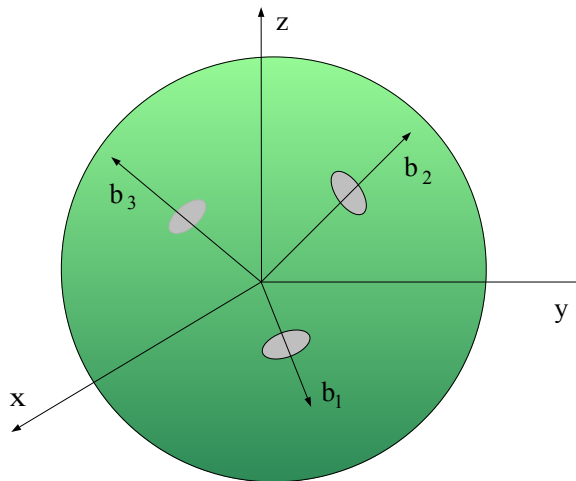
Propoziția 4.1.7 *Stările de echilibru $e_0 = (0, 0, 0)$, $e_1^m = (m, 0, 0)$, $e_3^m = (0, 0, m)$ pentru $m \in \mathbf{R}^*$ sunt neliniar stabile iar e_2^m , $m \in \mathbf{R}^*$ sunt instabile.*

Propoziția 4.1.8 *Integratorul Lie-Trotter al sistemului (4.1.10) este dat prin:*

$$\begin{cases} x_1(n+1) = x_1(n) - \frac{t}{c_2} x_2(0) \cdot x_3(n) \\ x_2(n+1) = \cos\left(\frac{t}{c_1} x_1(0)\right) \cdot x_2(n) + \sin\left(\frac{t}{c_1} x_1(0)\right) \cdot x_3(n) \\ x_3(n+1) = -\sin\left(\frac{t}{c_1} x_1(0)\right) \cdot x_2(n) + \cos\left(\frac{t}{c_1} x_1(0)\right) \cdot x_3(n) \end{cases} \quad (4.1.11)$$

- **Dinamica unei nave spațiale ca un sistem cu control pe $SO(3)$**

Considerăm o navă spațială care se mișcă liber în spațiul \mathbf{R}^3 , [44] (Pută, 1997). Fie (b_1, b_2, b_3) un reper ortonormal fixat al corpului și $(r_1, r_2, r_3) = (x, y, z)$ un reper inerțial astfel încât acestea au aceeași origine, vezi figura:



Definim o matrice $X(t) \in SO(3)$ astfel încât

$$r_i = X(t) \cdot b_i, \quad i = \overline{1, 3},$$

adică $X(t)$ descrie poziția navei la momentul t .

Fie e_i , $i = \overline{1, 3}$ baza canonică a lui \mathbf{R}^3 și definim $E_i = \Phi(e_i)$, $i = \overline{1, 3}$, unde Φ este izomorfismul între algebrele Lie (\mathbf{R}^3, \times) și $(so(3), [\cdot, \cdot])$. Atunci $X(t)$ satisface ecuația:

$$\dot{X} = X \cdot \hat{\omega}, \quad \hat{\omega} = \sum_{i=1}^3 \omega_i(t) E_i, \quad (4.1.12)$$

unde $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ este viteza unghiulară a navei în sistemul de coordonate fixat.

Dacă considerăm componentele vitezei unghiulare ω ca funcții de control, adică $u_i = \omega_i$, $i = \overline{1, 3}$, atunci sistemul (4.1.12) devine:

$$\dot{X} = X \cdot \left(\sum_{i=1}^3 u_i(t) E_i \right). \quad (4.1.13)$$

Vom considera cazul în care numai două componente al vitezei unghiulare pot fi controlate. De exemplu, pentru axele b_1 și b_2 , $X(t) \in SO(3)$ verifică sistemul:

$$\dot{X} = X(A_1 u_1 + A_2 u_2), \quad \text{unde } A_1 = E_1, A_2 = E_2. \quad (4.1.14)$$

Sistemul (4.1.14) este un sistem stâng invariant controlabil pe $SO(3)$ cu autoritatea de control $\{A_1, A_2\}$.

Pentru sistemul controlabil (4.1.14), considerăm funcția de cost J , dată prin (4.1.9).

Propoziția 4.1.10 *Controlurile care minimizează funcția de cost J dată prin (4.1.9) și duc sistemul (4.1.14) din starea $X(0) = X_0$ la $t = 0$ în starea $X(t_f) = X_f$ la $t = t_f$ sunt date $u_1 = \frac{P_1}{c_1}$, $u_2 = \frac{P_2}{c_2}$, unde P_i , $i = \overline{1, 3}$ sunt soluțiile sistemului:*

$$\dot{P}_1 = -\frac{1}{c_2} P_2 P_3, \quad \dot{P}_2 = \frac{1}{c_1} P_1 P_3, \quad \dot{P}_3 = \left(\frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_1} \right) P_1 P_2. \quad (4.1.15)$$

Sistemul (4.1.15) este un sistem Euler top și are realizarea Hamilton-Poisson $(\mathbf{R}^3, H_{ns}, P_{ns})$, unde:

$$P_{ns} = \begin{pmatrix} 0 & -P_3 & \frac{c_2 - c_1}{c_2} P_2 \\ P_3 & 0 & 0 \\ \frac{c_1 - c_2}{c_2} P_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad H_{ns}(P_1, P_2, P_3) = \frac{1}{2} \left(\frac{P_1^2}{c_1} + \frac{P_2^2}{c_2} \right).$$

Propoziția 4.1.11 Stările de echilibru $e_0 = (0, 0, 0)$, $e_1^m = (m, 0, 0)$, $e_2^m = (0, m, 0)$ și $e_3^m = (0, 0, m)$ pentru $m \in \mathbf{R}^*$, ale sistemului (4.1.15), au următoarea comportare:

- (i) stările de echilibru e_0 , e_3^m sunt neliniar stabile.
- (ii) dacă $c_1 < c_2$ (resp. $c_1 > c_2$), atunci e_1^m (resp. e_2^m) sunt neliniar stabile (instabile), iar e_2^m (resp. e_1^m) sunt instabile.

Propoziția 4.1.12 Dacă $c_1 < c_2$ și $\delta = \sqrt{\frac{c_2 - c_1}{c_2}}$, atunci integratorul Lie-Trotter al sistemului (4.1.15) este dat prin:

$$\begin{cases} x_1(n+1) = x_1(n) - \frac{t}{c_2} x_2(0) \cdot x_3(n) \\ x_2(n+1) = \cos\left(\frac{\delta}{c_1} t x_1(0)\right) \cdot x_2(n) + \frac{1}{\delta} \sin\left(\frac{\delta}{c_1} t x_1(0)\right) \cdot x_3(n) \\ x_3(n+1) = -\delta \sin\left(\frac{\delta}{c_1} t x_1(0)\right) \cdot x_2(n) + \cos\left(\frac{\delta}{c_1} t x_1(0)\right) \cdot x_3(n). \end{cases} \quad (4.1.16)$$

4.2 Sisteme controlabile pe grupul Lie $SO(4)$

Contribuțiile originale obținute în această direcție au fost publicate în lucrările [42](Pop, Puta și Șușoi, 2005) și [7](Pută, Șușoi et al., 2006).

Fie $SO(4)$ mulțimea matricelor $A \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbf{R})$ astfel încât $A^T \cdot A = I_4$ și $\det(A) = 1$. $SO(4)$ este un grup Lie 6-dimensional cu algebra Lie $so(4)$ dată prin:

$$so(4) = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_1 & 0 & a_4 & a_5 \\ -a_2 & -a_4 & 0 & a_6 \\ -a_3 & -a_5 & -a_6 & 0 \end{array} \right) \mid a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \in \mathbf{R} \right\}$$

Fie $\{A_i \mid i = \overline{1, 6}\}$ baza standard a algebrei Lie $so(4)$.

Un sistem cu control, fără termen liber, stâng invariant pe grupul Lie $SO(4)$ cu mai puține controluri decât numărul variabilelor de stare se poate scrie în forma următoare:

$$\dot{X} = X \left(\sum_{i=1}^m A_i u_i \right), \quad (4.2.1)$$

unde $X \in SO(4)$, iar $u_i, i = \overline{1, m}$ sunt controluri cu $m < 6$.

Propoziția 4.2.1 Există 37 sisteme controlabile, fără termen liber, stâng invariante pe $SO(4)$ cu mai puține controluri decât 6.

În cele ce urmează vom studia următorul sistem stâng invariant cu trei controluri fără termen liber pe $SO(4)$:

$$\dot{X} = X (A_1 u_1 + A_2 u_2 + A_3 u_3) \quad (4.2.2)$$

Propoziția 4.2.2 *Sistemul (4.2.2) este controlabil.*

Observație. Un alt sistem stâng invariant controlabil pe grupul Lie $SO(4)$ cu autoritatea de control $\{A_2, A_3, A_4\}$ a fost studiat în lucrarea [8](Aron et al., 2009).

4.2.1 O problemă de control optimal pe $SO(4)$

Fie J funcția de cost dată prin:

$$J(u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [c_1 u_1^2(t) + c_2 u_2^2(t) + c_3 u_3^2(t)] dt, \quad c_1 > 0, c_2 > 0, c_3 > 0.$$

Propoziția 4.2.3 *Controlurile care minimizează funcția de cost J și transportă sistemul (4.2.2) din starea $X = X_0$ la momentul $t = 0$ în starea $X = X_f$ la momentul $t = t_f$ sunt date prin $u_1 = \frac{1}{c_1} P_1$, $u_2 = \frac{1}{c_2} P_2$, $u_3 = \frac{1}{c_3} P_3$, unde P_i , $i = \overline{1, 6}$ sunt soluțiile sistemului de ecuații diferențiale:*

$$\begin{cases} \dot{P}_1 = \frac{P_2 P_4}{c_2} + \frac{P_3 P_5}{c_3}, & \dot{P}_2 = -\frac{P_1 P_4}{c_1} + \frac{P_3 P_6}{c_3}, & \dot{P}_3 = -\frac{P_1 P_5}{c_1} - \frac{P_2 P_6}{c_2} \\ \dot{P}_4 = \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2}\right) P_1 P_2, & \dot{P}_5 = \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_3}\right) P_1 P_3, & \dot{P}_6 = \left(\frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_3}\right) P_2 P_3 \end{cases} \quad (4.2.3)$$

Aplicând teorema lui Krishnaprasad [29], rezultă că hamiltonianul optimal este:

$$H_{opt}(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6) = \frac{1}{2} \left(\frac{P_1^2}{c_1} + \frac{P_2^2}{c_2} + \frac{P_3^2}{c_3} \right). \quad (4.2.4)$$

Structura minus Lie-Poisson pe $(so(4))^* \simeq \mathbf{R}^6$ este generată de matricea:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & P_4 & P_5 & -P_2 & -P_3 & 0 \\ -P_4 & 0 & P_6 & P_1 & 0 & -P_3 \\ -P_5 & -P_6 & 0 & 0 & P_1 & P_2 \\ P_2 & -P_1 & 0 & 0 & P_6 & -P_5 \\ P_3 & 0 & -P_1 & -P_6 & 0 & P_4 \\ 0 & P_3 & -P_2 & P_5 & -P_4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Propoziția 4.2.4 C_1 și C_2 sunt Casimiri pentru $((so(4))^*, \Pi) \simeq (\mathbf{R}^6, \Pi)$, unde:

$$C_1(P) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 P_i^2, \quad C_2(P) = P_1 P_6 - P_2 P_5 + P_3 P_4.$$

4.2.2 Problema stabilității pentru dinamica (4.2.5)

Dacă presupunem că $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $c_3 = k$, $k > 0$, atunci sistemul (4.2.4) devine:

$$\begin{cases} \dot{P}_1 = P_2P_4 + \frac{1}{k}P_3P_5, & \dot{P}_2 = -P_1P_4 + \frac{1}{k}P_3P_6, & \dot{P}_3 = -P_1P_5 - P_2P_6 \\ \dot{P}_4 = 0, & \dot{P}_5 = \left(1 - \frac{1}{k}\right)P_1P_3, & \dot{P}_6 = \left(1 - \frac{1}{k}\right)P_2P_3 \end{cases} \quad (4.2.5)$$

Propoziția 4.2.5 *Dinamica (4.2.5) are următoarele stări de echilibru:*

$$e_{12}^{MN} = (M, N, 0, 0, 0, 0), \quad e_{25}^{MN} = (0, M, 0, 0, N, 0), \quad e_{34}^{MN} = (0, 0, M, N, 0, 0),$$

$$e_{16}^{MN} = (M, 0, 0, 0, 0, N), \quad e_{345}^{MNP} = (0, 0, M, N, P, 0), \quad M, N, P \in \mathbf{R};$$

$$e_{1256}^{QMNP} = (Q, M, 0, 0, N, P), \quad \text{unde } Q = -\frac{MP}{N} \text{ cu } M, P \in \mathbf{R} \text{ și } N \in \mathbf{R}^*. \quad \square$$

Propoziția 4.2.6 [42](Pop, Puta și Șușoi, 2006) *Stările de echilibru e_{345}^{MNP} , $M^2 + bN^2 + bP^2 \neq 0$, unde $b = \frac{1}{k}$ sunt spectral stabile.*

În Propozițiile 4.2.7-4.2.10 [[7](Aron, Pop, Puta și Șușoi, 2006)] se studiază stabilitatea spectrală pentru sistemul (4.2.5) și se obțin următoarele rezultate:

- (1)(i) *dacă $(1 - k)M^2 < N^2$, atunci e_{16}^{MN} este spectral stabil;*
(ii) *dacă $(1 - k)M^2 > N^2$, atunci e_{16}^{MN} este instabil.*
- (2)(i) *dacă $(1 - k)(M^2 + N^2) < 0$, atunci e_{12}^{MN} este spectral stabil;*
(ii) *dacă $(1 - k)(M^2 + N^2) > 0$, atunci e_{12}^{MN} este instabil.*
- (3) *e_{1256}^{QMNP} este spectral stabil.*
- (4)(i) *dacă $(1 - k)M^2 < N^2$, atunci e_{25}^{MN} este spectral stabil;*
(ii) *dacă $(1 - k)M^2 > N^2$, atunci e_{25}^{MN} este instabil.*

Propoziția 4.2.11 [42] *e_{34}^{MN} , $M, N \in \mathbf{R}^*$ are următoarea comportare:*

- (i) *dacă $k \in (0, 1]$, atunci e_{34}^{MN} este spectral stabil.*
- (ii) *dacă $k \in (1, \infty)$, $a = \frac{2}{k}\sqrt{k-1}$, $b = \frac{\sqrt{2}}{k}\sqrt{k-1}$, atunci e_{34}^{MN} este spectral stabil pentru $\frac{N}{M} \in (-\infty, -a] \cup \{\pm b\} \cup [a, \infty)$ și instabil pentru $\frac{N}{M} \in (-a, -b) \cup (-b, b) \cup (b, a)$.*

Propoziția 4.2.12 [7] *Dacă $\begin{cases} (-1 + k)M^2 \neq N^2 \\ (-1 + k)(M^2 - N^2) > 0 \end{cases}$, atunci e_{1256}^{QMNP} pentru $Q = -\frac{MP}{N}$ with $M, P \in \mathbf{R}$ and $N \in \mathbf{R}^*$, este nelinear stabil.*

4.2.3 Formulare Lax și integrabilitate pentru dinamica (4.2.5)

Propoziția 4.2.14 [7] *Dinamica (4.2.5) are o formulare Lax, adică:*

$$\dot{L} = [L, B], \quad \text{unde}$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \ell_{12} & \ell_{13} & 0 & 0 & 0 \\ -\ell_{12} & 0 & \ell_{23} & 0 & 0 & 0 \\ -\ell_{13} & -\ell_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ell_{45} & \ell_{46} \\ 0 & 0 & 0 & -\ell_{45} & 0 & \ell_{56} \\ 0 & 0 & 0 & -\ell_{46} & -\ell_{56} & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & 0 & 0 & 0 \\ -b_{12} & 0 & b_{23} & 0 & 0 & 0 \\ -b_{13} & -b_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{45} & b_{46} \\ 0 & 0 & 0 & -b_{45} & 0 & b_{56} \\ 0 & 0 & 0 & -b_{46} & -b_{56} & 0 \end{pmatrix},$$

și

$$\begin{aligned} \ell_{12} &= 2P_1\sqrt{3} - 2P_2 + P_5 + P_6\sqrt{3}, & b_{12} &= P_1\sqrt{3} - P_2; \\ \ell_{13} &= -4P_3 - 2P_4, & b_{13} &= -2P_3 - P_4; \\ \ell_{23} &= 2P_1 + 2P_2\sqrt{3} - P_5\sqrt{3} + P_6, & b_{23} &= P_1 + P_2\sqrt{3}; \\ \ell_{45} &= -P_2 - P_5, & b_{45} &= -P_2; \\ \ell_{46} &= P_3 - P_4, & b_{46} &= P_3 - P_4; \\ \ell_{56} &= P_1 - P_6, & b_{56} &= P_1. \end{aligned}$$

Corolarul 4.2.15 *Fluxul dinamicii (4.2.5) este izospectral.*

Considerăm acum orbita coadjunctă $\mathcal{O}_{M,N}$ pentru configurația Poisson $((so(4))^* \cong (\mathbf{R}^6, \Pi)$ înzestrată cu structura simplctică Kirilov-Kostant-Souriau ω_{MN} , unde

$$\mathcal{O}_{M,N} = \{P \in \mathbf{R}^6 \mid \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^6 P_i^2 = M \\ P_1P_6 - P_2P_5 + P_3P_4 = N \end{array} \right\}.$$

Atunci $(\mathcal{O}_{M,N}, \omega_{MN}, H|_{\mathcal{O}_{M,N}})$ este un sistem Hamilton 4-dimensional complet integrabil ([7], Propoziția 4.2.16), unde

$$H|_{\mathcal{O}_{M,N}}(P) = \frac{1}{2} \left(P_1^2 + P_2^2 + \frac{1}{k} P_3^2 \right).$$

4.2.4 Integrarea numerică a dinamicii (4.2.3)

Rezultatele din această secțiune au fost publicate în [42] (Pop, Puta și Șușoi, 2006).

Câmpul de vectori $X_{H_{opt}}$ asociat hamiltonianului H_{opt} al dinamicii (4.2.3) se scrie:

$$X_{H_{opt}} = X_{H_1} + X_{H_2} + X_{H_3}, \quad \text{unde}$$

$$H_1(P) = \frac{1}{2c_1}P_1^2, \quad H_2(P) = \frac{1}{2c_2}P_2^2, \quad H_3(P) = \frac{1}{2c_3}P_3^2.$$

Integratorul Lie-Trotter al dinamicii (4.2.3) este dat de sistemul de ecuații recurente:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_1^{n+1} = P_1^n \cos a_2 t \cos a_3 t + P_4^n \sin a_2 t + P_5^n \cos a_2 t \sin a_3 t \\ P_2^{n+1} = P_1^n \cos a_3 t \sin a_1 t \sin a_2 t + P_2^n \cos a_1 t \cos a_3 t - P_4^n \cos a_2 t \sin a_1 t + \\ \quad + P_5^n \sin a_1 t \sin a_2 t \sin a_3 t + P_6^n \cos a_1 t \sin a_3 t \\ P_3^{n+1} = P_1^n \sin a_1 t \sin a_3 t + P_2^n \cos a_1 t \sin a_2 t \sin a_3 t + P_3^n \cos a_1 t \cos a_2 t - \\ \quad - P_5^n \cos a_3 t \sin a_1 t - P_6^n \cos a_1 t \cos a_3 t \sin a_2 t \\ P_4^{n+1} = -P_1^n \cos a_1 t \cos a_3 t \sin a_2 t + P_2^n \cos a_3 t \sin a_1 t + P_4^n \cos a_1 t \cos a_2 t - \\ \quad - P_5^n \cos a_1 t \sin a_2 t \sin a_3 t + P_6^n \sin a_1 t \sin a_3 t \\ P_5^{n+1} = -P_1^n \cos a_1 t \sin a_3 t + P_2^n \sin a_1 t \sin a_2 t \sin a_3 t + P_3^n \cos a_2 t \sin a_1 t + \\ \quad + P_5^n \cos a_1 t \cos a_3 t - P_6^n \cos a_3 t \sin a_1 t \sin a_2 t \\ P_6^{n+1} = -P_2^n \cos a_2 t \sin a_3 t + P_3^n \sin a_2 t + P_6^n \cos a_2 t \cos a_3 t \end{array} \right. \quad (4.2.6)$$

$$\text{unde } a_1 = \frac{P_1(0)}{c_1}, \quad a_2 = \frac{P_2(0)}{c_2}, \quad a_3 = \frac{P_3(0)}{c_3}.$$

Se demonstrează propoziția următoare.

Propoziția 4.2.17 *Integratorul Lie-Trotter (4.2.6) are următoarele proprietăți:*

- (i) *este un integrator Poisson, i.e. păstrează structura Poisson generată de Π .*
- (ii) *restricțiunile integratorului Lie-Trotter (4.2.11) la orbitele coadjuante:*

$$\sum_{i=1}^6 P_i^2 = \text{constant}, \quad P_1 P_6 - P_2 P_5 + P_3 P_4 = \text{constant}$$

generează un integrator symplectic.

- (iii) *nu este un integrator-energie, adică nu conservă hamiltonianul H_{opt} .*

Bibliografie

- [1] R. Abraham and J.E. Marsden, *Foundations of Mechanics*. Second edition. Addison-Wesley, 1979.
- [2] D. Andrica and I. N. Cașu, *Grupuri Lie, Aplicația Exponențială și Mecanică Geometrică*, Presa Universitară Clujeană, 2008.
- [3] V. Arnold, *Conditions for nonlinear stability of stationary plane curvilinear flows of an ideal fluid*, Doklady, **162**(1965), no. 5, 773-777.
- [4] V. Arnold, V.V. Kozlov and A. I. Neishtadt, *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics*, in Dyn. Systems III, ed. V.I. Arnold, Springer-Verlag, 1988.
- [5] A. Aron, M. Puta and P. Șușoi, *Stability, periodic solutions and numerical integration in the Goryachev-Chaplygin top dynamics*, Analele Universității de Vest, Timișoara, Seria Matematică-Informatică, **43**,(2005)(2), 17-27.
- [6] A. Aron, P. Birtea, M. Puta P. Șușoi and R. Tudoran, *Stability, periodic solutions and numerical integration in the Kowalevski top dynamics*, Int. Journal of Geometric Methods in Modern Physics, **3**,(2006)(7), 1323-1330 (*revistă ISI*).
- [7] A. Aron, C. Pop, M. Puta and P. Șușoi, *Some remarks on a nonlinear control system on $SO(4)$* , Buletinul Științific al Universității ” Politehnica” din Timișoara, Tom **51**(65),2 (2006), 57-62.
- [8] A. Aron, C. Pop and C. Petrișor, *Some remarks on the study of a class of optimal controls problems on the matrix Lie group $SO(4)$* , Proceed. Int. Conf. on Theory and Appl. of Math. and Informatics, ICTAMI 2009, Alba Iulia, 2009, 51-61.
- [9] M. Audin, *Spinning Tops*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 1996.
- [10] P. Birtea, M. Boleanțu, M. Puta and R. M. Tudoran, *Asymptotic stability for a class of metriplectic systems*, J. Math. Phys., **48** (2007), no. 8, 082703, 7pp.

- [11] S.A. Chaplygin, *A new case of rotation of a rigid body, supported at one point*, Collected works, **I**, (1948), 118-124.
- [12] O. T. Chiş and M. Puta, *The dynamics of Rabinovich system*, Differential Geometry-Dynamical Systems, no. 10, Geometry Balkan Press (2008), 91-98.
- [13] W. L. Chow, *Über systeme von linearen partiellen differentialgleichungen erster ordnung*, Math. Ann. 117 (1939), 98 - 105.
- [14] M. Craioveanu, *Introducere în Geometria Diferenţială*. Editura Universităţii de Vest, Timişoara, 2008.
- [15] M. Crăsmăreanu, *Quadratic homogeneous OCE systems of Jordan-rigid body type*, Balkan J. Geometry and Its Appl., **7**(2002),no.2, 29-42.
- [16] D. Goryachev, *On the motion of a rigid material body about a fixed point in the case $A = B = 4C$* , Mat. Sb., **21** (3), (1900).
- [17] E. Hairer, C. Lubich and G. Wanner, *Geometric Numerical Integration*, Springer-Verlag, 2006(ed. a 2-a).
- [18] M. Hirsch, S. Smale and R. L. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems and an Introduction to Chaos*. Elsevier, Academic Press, 2004.
- [19] D. Holm, J. Marsden, T. Raţiu and A. Weinstein, *Nonlinear stability of fluid and plasma equilibria*, Phys. Reports, **123**(1985), 1–116.
- [20] P. Holmes, J. Jenkins and N.E. Leonard, *Dynamics of the Kirchhoff equation I: Coincident centers of gravity and buoyancy*, Physica D.**118**(1998), 311-342.
- [21] Gh. Ivan, *Geometrical and dynamical properties of general Euler top system*, 2010, to appear.
- [22] Gh. Ivan and D. Oprea, *Dynamical systems on Leibniz algebroids*, Differential Geometry-Dynamical Systems, no. 8, Geometry Balkan Press (2006), 127-137.
- [23] A. Jost, *Poisson brackets*, Rev. Mod. Phys., **36** (1964), 572–579.
- [24] V. J. Jurdjević, *Geometric Control Theory*, Cambridge Univ. Press, 1996.
- [25] V. J. Jurdjević and H. J. Sussmann, *Control systems on Lie groups*, Journal of Differential Equations, **12** (1972), 313–329.
- [26] W. Kahan, *Unconventional numerical methods for trajectory calculations*, Unpublished Lecture Notes, 1993.

- [27] A. N. Kaufman, *Dissipative Hamiltonian systems: A unifying principle*, Phys. Lett. A, **8** (1984), 419-422.
- [28] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Macmillan Publishing, New York, 1992 (second edition 1996; third edition, 2002).
- [29] P. S. Krishnaprasad, *Optimal control and Poisson reduction*, Technical Report 93-87, Institute for System Research, University of Maryland, 1993.
- [30] S. Kowalevski, *Sur le problème de la rotation d'un corps solide autoour d'un point fixe*, Acta Math., **12** (1889), 177-232.
- [31] D. F. Lawden, *Elliptic Functions and Applications*, Applied Mathematical Sciences, vol. **80**, Springer-Verlag, 1989.
- [32] N. E. Leonard, *Averaging and motion control systems on Lie groups*, Ph. D. Thesis, University of Maryland, College Park, 1994.
- [33] N. E. Leonard and P. S. Krishnaprasad, *Motion control of drift-free, left-invariant systems on Lie groups*, European Series on Applied and Industrial Mathematics; Control, Optimization and Calculus of Variations, **3** (1998), 1-22.
- [34] A. M. Lyapunov, *Problème générale de la stabilité de mouvement*, Ann. Fac. Sci. Toulouse, **9** (1907), 203-474 (Translation of a paper published in Comm. Soc. Math. Kharkow, 1893, reprinted in Ann. Math. Studies, **17**, Princeton, 1949) .
- [35] J.E. Marsden and T.S. Ratiu, *An Introduction to Mechanics and Symmetry*. Applied Mathematics, **17**, Springer-Verlag, 1994.
- [36] J. Moser, *Periodic orbits near an equilibrium and a theorem by Alan Weinstein*, Comm. in Pure and Appl. Math., **29** (1976), 727-747.
- [37] I. Moş, *An Introduction to Geometric Mechanics*, Presa Universitară Clujeană, Cluj Napoca, 2005.
- [38] R. Murray and S. S. Sastry, *Nonholonomic motion planning. Steering using sinusoids*, IEEE Trans. Automatic Control, **38** (1998), 700-716.
- [39] P.J. Olver, *Applications of Lie Groups to Defferential Equations*, Springer, 1993.
- [40] J. P. Ortega and V. Planas-Bielsa, *Dynamics on Leibniz manifolds*, Journal of Geometry and Physics, **52** (2004), Issue 1, 1-27.
- [41] M. Petrera, A. Pfadlery and Y.B. Suris, *On integrability of Hirota-Kimura type discretizations. Experimental study of the discrete Clebsch system*, Exp. Math. **18**, 2009, no.2, 223-247.

- [42] C. Pop, M. Puta and P. Şuşoi, *Drift-free left invariant control system on $SO(4)$ with fewer controls than state variables*, Modern Trends in Geometry and Topology, Deva, 5–11 September 2005. Eds. D. Andrica, P. A. Blaga and S. Moroianu, Cluj University Press, 2006, 353–361.
- [43] M. Puta, *Hamiltonian Mechanical Systems and Geometric Quantization*, Mathematics and Its Applications, **260**, Springer–Verlag, 1993.
- [44] M. Puta, *Stability and control in spacecraft dynamics*, Journal of Lie Theory, **7** (1997), 269–278.
- [45] M. Puta, *Lie-Trotter formula and Poisson dynamics*, Int. Jour. of Bifurcation and Chaos, **9**(1999), no. 3, 555–559.
- [46] M. Puta, Şt. Nicoară and I. Ioja, *Planar motion of an autonomous underwater vehicle*, Tensor, N. S., **69**(2008), 88–96.
- [47] H. K. Struemper, *Motion control for nonholonomic systems on matrix Lie groups*, Ph. D. Thesis, University of Maryland, College Park, 1997.
- [48] L. Takhtajan, *On foundation of the generalized Nambu mechanics*, Comm. Math. Phys., **100**(1994), 295–315.
- [49] P. M. Şuşoi and Mihai Ivan, *Metriplectic structure associated to Euler top equation*, Proceedings of the International Conf. on Theory and Appl. of Math. and Informatics, ICTAMI 2009, Alba Iulia, 2009, 405–416. ISSN 1582-5329.
- [50] P. M. Şuşoi, *Numerical integration of the Euler top system*, Proceedings of the 12th Symposium of Math. and its Appl. ” Politehnica” University of Timișoara, November, 5 – 7, 2009. Editura Politehnica, 2010, 273–278. ISSN 1224-6069.
- [51] H. F. Trotter, *On the product of semigroups of operators*, Proc. Amer. Math. Soc., **10**(1959), 545–551.
- [52] G. Walsh, D. Tilbury, S. Sastry, R. Murray and J. P. Laumond, *Stabilization of trajectories for systems with nonholonomic constraints*, IEEE Transactions on Automatic Control, **39** (1994), no.1, 216–222.
- [53] A. Weinstein, *The local structure of Poisson manifolds*, Journal of Diff. Geometry, **18** (1983), 523–557.