



FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI,
CLUJ-NAPOCA, ROMANIA

SOBOLU RODICA CRISTINA

OPERATORI LINIARI ŞI ANALIZĂ WAVELETS CU APLICAȚII

REZUMATUL TEZEI DE DOCTORAT

Conducător științific:
Prof. Univ. Dr. OCTAVIAN AGRATINI

CLUJ-NAPOCA, 2011

Cuprins

Introducere	4
1 Elemente de statistică și de analiză wavelets	8
1.1 Preliminarii	8
1.1.1 Notatii și spații de funcții utilizate	8
1.2 Modelul matematic al regresiei	8
1.2.1 Modelul liniar. Criterii de performanță	9
1.2.2 Estimatori ai criteriilor de performanță	10
1.3 Convergența statistică	10
1.3.1 Operatori liniari și pozitivi	11
1.3.2 Metode de sumare	12
1.3.3 Noțiuni de bază ale convergenței statistice	13
1.3.4 Teoreme de aproximare de tip Bohman-Korovkin	13
1.4 Studiul convergenței statistice a unor clase de operatori	14
1.5 Introducere în analiza wavelets	17
1.5.1 Sistemul Haar	17
1.5.2 Analiză de rezoluție multiplă	17
1.5.3 Funcția wavelet mamă	19
1.5.4 Descompunere și reconstrucție wavelet	19
1.5.5 Transformarea wavelet directă și inversă	19
2 Regresia neparametrică	20
2.1 Estimarea unui semnal perturbat de zgomot	20
2.1.1 Analiza pragurilor	21
2.1.2 Metode de selecție a pragului	22
2.1.3 Estimatori wavelets de cele mai mici pătrate penalizate	23
2.2 Un studiu comparativ a două metode de înlăturare a zgomotului	24
2.3 Analiza unor metode de reconstrucție bazate pe tehnica wavelets	26

2.4	Aplicație	28
2.5	Implementarea algoritmului corespunzător Transformării wavelet rapide de tip Daubechies folosind VBA în Microsoft Excel	30
3	Estimatori de tip wavelets	32
3.1	Rezultate preliminare	32
3.2	Un model abstract de înlăturare a zgomotului	32
3.2.1	Tehnica <i>Soft Thresholding</i> și reconstrucția optimală	33
3.3	Tehnica <i>Soft thresholding</i> și estimarea statistică	34
3.3.1	Eroarea medie pătratică aproape optimală	34
3.3.2	Contractia aproape minimală	34
3.4	Transformări wavelets de interpolare	35
3.4.1	Metoda transformărilor empirice	35
3.4.2	Date de selecție, interpolare și netezire	35
3.5	Scheme de subdiviziune	36
3.5.1	Transformări neliniare bazate pe scheme de diviziune	36
3.5.2	O schemă nouă în studiu	36
	Bibliografie	39

Cuvinte cheie

Operatori liniari și pozitivi, convergența A-statistică, teoreme de aproximare de tip Korovkin, analiză wavelets, semnal, zgomot alb, regresia neparametrică, estimatori de tip wavelets neliniari, analiza pragurilor, schemă de subdiviziune, operator de subdiviziune.

Introducere

Deși apărută destul de recent în matematica aplicată, analiza wavelets are un impact remarcabil fiind utilizată într-o multitudine de situații. Definită în sens larg, noțiunea de wavelets (small waves) înseamnă o funcție de tip undă, construită astfel încât să posede anumite proprietăți. Pornind de la o funcție de bază numită wavelet mamă, se generează o întreagă mulțime de wavelets-uri utile în descrierea unor clase extinse de funcții. Analiza wavelets reprezintă de fapt o rafinare a analizei Fourier care descrie un semnal (o funcție) cu ajutorul componentelor de tip frecvență. Dacă semnalul analizat prezintă schimbări rapide în timp, analiza Fourier este inefficientă în surprinderea detaliilor, fiind necesară analiza semnalului cu o fereastră flexibilă timp-frecvență care să se îngusteze pentru frecvențe înalte și să se lărgască pentru frecvențe joase. Acest studiu îl va face cu succes analiza wavelets, localizarea timp-frecvență fiind cel mai important avantaj pe care îl au wavelets-urile comparativ cu alte metode. De exemplu, în statistica matematică, estimarea funcțiilor în contextul regresiei prin metodele standard: aproximarea prin nuclee, metoda seriilor ortogonale, metoda funcțiilor spline de netezire, necesită anumite cerințe legate de netezimea funcției care va fi estimată. Cu ajutorul analizei wavelets, aceste cerințe sunt reduse considerabil deoarece wavelets-urile posedă proprietatea de adaptabilitate spațială, ceea ce permite o estimare eficientă a funcțiilor discontinue, a funcțiilor cu discontinuități ale derivatelor sau a funcțiilor cu variații rapide, bruște.

Wavelets-urile se află în strânsă legătură cu analiza multirezoluție. Astfel, semnalele pot fi examinate la diferite nivele de rezoluție folosind tehnica zoom-in și zoom-out.

Wavelets-urile prezintă un puternic caracter interdisciplinar. Mulți dintre fondatorii acestui concept aparțin unor domenii diferite de interes. Astfel Y. Meyer, J. Morlet și A. Grossmann au studiat analiza wavelets respectiv în contextul matematicii, al geofizicii și al fizicii teoretice.

Lucrarea de față a prezintă avantajele analizei wavelets în contextul statisticii matematice, această abordare fiind susținută de următoarele proprietăți remarcabile

ale wavelets-urilor: o bună localizare în domeniul timp-frecvență, algoritmi rapizi în sensul că un număr mare de date poate fi reprezentat cu ajutorul unui număr redus de coeficienți wavelets precum și simplitatea formei acestora. De asemenea, teza include construcția unor clase de operatori liniari și pozitivi și studiază proprietățile de aproximare statistică ale acestora.

Teza este structurată în trei capitole: *Elemente de statistică și analiză wavelets*, *Regresia neparametrică* și *Estimatori de tip wavelet*, situându-se la granița mai multor domenii de cercetare, cum ar fi: analiza numerică, statistica, analiza funcțională, modelarea matematică, algebra liniară, unitatea realizându-se prin intermediul funcțiilor wavelets ca instrument al regresiei neparametrice.

Primul capitol prezintă câteva aspecte generale legate de modelul matematic al regresiei, de conceptul de convergență statistică și de noțiunea de analiză wavelets, fiind structurat în cinci paragrafe.

Primul paragraf al acestui capitol cuprinde noțiunile de bază și spațiile de funcții care vor fi folosite pe parcursul întregii lucrări precum și rezultate importante care se presupun a fi cunoscute.

Al doilea paragraf prezintă modelul matematic al regresiei în contextul regresiei parametrice. Aici se descrie, de asemenea, modelul liniar al regresiei precum și evaluarea estimatorilor unui model liniar. Estimatorii sunt evaluați din punct de vedere statistic atât prin prisma studierii calităților acestora, cât și prin prisma inferențelor care se pot realiza asupra lor, în ipoteza că erorile sunt normale, de medie zero, independente și identic distribuite.

Următoarele două paragrafe introduc noțiunea de operator liniar și pozitiv prezentată în contextul aproximării funcțiilor, noțiunea de matrice de sumabilitate, conceptul de convergență statistică și teoreme de aproximare de tipul Bohman-Korovkin în spațiul $C[a, b]$. Scopul acestora este de a construi diferite clase de operatori liniari și pozitivi, de tip discret sau integral și de a studia proprietățile lor de aproximare statistică.

Ultimul paragraf al acestui capitol este dedicat în întregime introducerii conceptului de analiză wavelets. Aici sunt descrise elementele esențiale legate de noțiunea de wavelets: baze wavelets ortonormate, analiză de rezoluție multiplă, descompunerea și reconstrucția wavelet, transformarea wavelet directă și inversă.

Al doilea capitol tratează modelul regresiei utilizând tehnici ale regresiei neparametrice bazate pe funcții wavelets. Capitolul este împărțit în cinci paragrafe, ultimele patru având caracter aplicativ. Regresia neparametrică bazată pe metode wavelets constituie o arie semnificativă a statisticii moderne fiind tratată în monografiile remarcabile: Härdle (1992), Green și Silverman (1993), Wand și Jones (1994), Donoho și

Johnstone (1994), Fan (1996), Bowman și Azzalini (1997), Eubank (1999), Wasserman (2005), Antoniadis (2007).

Primul paragraf descrie modelul matematic al unui semnal perturbat de zgomot și introduce câteva metode de eliminare a zgomotului prin intermediul estimatorilor wavelets neliniari. Aceste metode se bazează pe tehnica *thresholding* (analiza pragurilor) și pe *metoda celor mai mici pătrate penalizate*.

Paragraful *Un studiu comparativ a două metode de înlăturare a zgomotului* prezintă o analiză comparativă axată pe două metode wavelets de înlăturare a zgomotului: metoda *Minimax* și metoda *VisuShrink*. Metodele se aplică asupra unui semnal reprezentat de umiditatea relativă și se evaluează riscul în fiecare caz considerat.

În cadrul paragrafului *Analiza unor metode de reconstrucție bazate pe tehnica wavelets* se estimează o funcție discontinuă, afectată de zgomot alb considerat la nivele $SNR = 4$ și $SNR = 10$ aplicând *metoda celor mai mici pătrate penalizate*, *metoda validării încrucișate* și metoda *SureShrink*. De asemenea, se efectuează o analiză comparativă în scopul evaluării erorii comise în cazul fiecărei reconstrucții.

În paragraful *Aplicație* se prelucrează trei semnale reprezentate respectiv de: ritmul respirator, ritmul cardiac și nivelul enzimelor antioxidante din sânge prin intermediul a două *transformări wavelet rapide de tip Haar*. Semnalele analizate au fost înregistrate în cadrul unui lot format din opt bovine expuse radiației solare calorice. Algoritmii corespunzători transformărilor wavelet utilizate au fost implementați în Microsoft Excel folosind macrouri VBA.

În cadrul ultimului paragraf din acest capitol se implementează algoritmul corespunzător *Transformării wavelet rapide de tip Daubechies* în Microsoft Excel folosind macrouri scrise în VBA, iar apoi, cu ajutorul acestora, se procesează un semnal real reprezentat de temperatura atmosferică.

Ultimul capitol prezintă mai detaliat estimatorii de tip wavelets. Cu scopul de a sublinia modul în care funcțiile wavelets intervin ca estimatori în regresia neparametrică vom considera următoarele spații de funcții: $L^2(\mathbb{R})$, *Hölder* C^δ , $0 < \delta \leq 1$, spațiul *Sobolev*, dar și spațiul *Besov* și *Triebel*. Acestea din urmă modelează noțiunea de ”grade diferite de netezime” în locații diferite mai eficient decât clasele de funcții netede, având o importanță statistică ridicată. Estimatorii wavelets neliniari studiază regresia neparametrică din punct de vedere *minimax* având un caracter asimptotic optimal, în timp ce estimatorii liniari clasici sunt suboptimali în cazul estimărilor din spațiile particulare *Besov* sau *Triebel*. Acest capitol este structurat în cinci paragrafe. Primele trei paragrafe cuprind o abordare mai generală a termenului *denoising* considerând aspectele: netezimea și adaptabilitatea estimatorului

reconstruit cu tehnica *soft thresholding*.

Cel de-al patrulea paragraf descrie un anumit tip de transformări wavelets ce caracterizează netezimea din diferite spații de funcții.

Ultimul paragraf al capitolului prezintă un tip de transformări wavelets neliniare bazate pe scheme de subdiviziune. Aceste transformări sunt în strânsă legătură cu construcția funcțiilor wavelets prin intermediul analizei de rezoluție multiplă. În cadrul acestui paragraf se construiește și o nouă schemă de subdiviziune care generează mulțimea polinoamelor quadratice.

Capitolul 1

Elemente de statistică și de analiză wavelets

1.1 Preliminarii

Scopul acestei secțiuni este de a colecta informații despre spațiile de funcții utilizate pe parcursul tezei.

1.1.1 Notății și spații de funcții utilizate

Această subsecțiune prezintă noțiunile, notațiile și rezultatele cunoscute ce se folosesc în lucrarea de față astfel încât să se realizeze o tratare unitară a tuturor subiectelor ce constituie subiectul tezei.

1.2 Modelul matematic al regresiei

Analiza regresională își are originile în diverse probleme practice care apar atunci când dorim să înțelegem aspectul cauză-efect în studiul unor fenomene. Presupunem că fiecare element al unei populații statistice posedă o caracteristică numerică X și o altă Y . Pentru a stabili modul în care valorile lui X afectează realizările variabilei Y , este necesară studierea posibilei corelații existente între cele două variabile.

Vom considera, așa cum se întâmplă în practică, mai multe variabile cauză (variabile exogene, predictorii, regresori), X_1, X_2, \dots, X_p , pentru variabila efect, Y (variabilă endogenă). Modelul matematic al regresiei se va scrie atunci sub forma

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_p) + \varepsilon,$$

unde ε reprezintă o variabilă aleatoare, care este de dorit să satisfacă următoarele proprietăți relativ la medie și varianță: $E(\varepsilon) = 0$ și $Var(\varepsilon)$ mică.

1.2.1 Modelul liniar. Criterii de performanță

Definiția 1.2.1 Se numește model regresional liniar între variabila Y și variabilele X_1, X_2, \dots, X_p , modelul

$$Y = \sum_{k=1}^p \alpha_k X_k + \varepsilon. \quad (1.2.1)$$

Problema regresiei liniare constă în studiul comportării variabilei Y în raport cu factorii X_1, X_2, \dots, X_p , în ipoteza (1.2.1).

În această lucrare vom considera modelul observațional, $y_i = f(x_i) + \varepsilon_i$, $i = \overline{1, n}$, unde, (x_i, y_i) , $i = \overline{1, n}$, sunt datele de selecție, $n = 2^J$, J întreg pozitiv, $x_i = \frac{i}{n}$ sunt puncte echidistante, $f(x_i)$ sunt valorile unei funcții necunoscute f , iar $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)^T$ este eroarea sau zgomotul alb. Presupunem că erorile sunt normale, identic distribuite, de medie nulă și independente. În contextul teoriei semnalelor, $f(x_i)$ va fi semnalul considerat iar y_i va reprezenta semnalul perturbat de zgomot. Cu ajutorul tehnicii regresiei vom estima funcția f . Estimatorul lui f se va nota cu \hat{f} .

Dintre criteriile de performanță cel mai des utilizate, vom aminti aici cele bazate pe pierdere (loss), risc și riscul previziunii.

Definiția 1.2.2 Pierderea (loss) în estimarea lui f este pătratul distanței euclidiene între f și \hat{f} înmulțit cu factorul n^{-1} ,

$$L(\hat{f}, f)_{l^2(\mathbb{Z})} = n^{-1} \left\| \hat{f} - f \right\|_{l^2(\mathbb{Z})}^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^n \left(\hat{f}(x_i) - f(x_i) \right)^2. \quad (1.2.2)$$

$$L(\hat{f}, f)_{L^2(\mathbb{R})} = \left\| \hat{f} - f \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\hat{f}(x) - f(x) \right)^2 dt. \quad (1.2.3)$$

Definiția 1.2.3 Se numește risc, valoarea medie a pierderii

$$R(\hat{f}, f) = E \left(L(\hat{f}, f) \right). \quad (1.2.4)$$

Definiția 1.2.4 Se numește risc de previziune sau eroarea medie pătratică a previziunii,

$$P(\hat{f}, f) = n^{-1} \sum_{i=1}^n E \left(y_i^* - f(x_i) \right)^2, \quad (1.2.5)$$

unde $y^* = (y_1^*, \dots, y_n^*)$ sunt n observații noi, pe care intenționăm să le facem, de forma $y^* = f + \varepsilon^*$, iar ε^* este vectorul aleator al erorilor necorelate, de medie zero și varianță comună σ^2 , care sunt de asemenea, necorelate cu erorile din ε .

1.2.2 Estimatori ai criteriilor de performanță

Definiția 1.2.5 Un estimator \hat{f} al funcției f se numește nedepășat dacă

$$E(\hat{f}) = f.$$

Definiția 1.2.6 Se numește funcție de validare încrucișată CV a estimatorului \hat{f} , funcția

$$CV(f) = n^{-1} \sum_{i=1}^n E \left(y_i - \hat{f}_i(x_i) \right)^2, \quad (1.2.6)$$

unde \hat{f}_i este estimatorul eșantionului de ordin i , $i = \overline{1, n}$, obținut eliminând punctul (x_i, y_i) din cadrul selecției.

Definiția 1.2.7 Un estimator \hat{f} este consistent dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \hat{f}_n - f \right| < \varepsilon \right) = 1, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad (1.2.7)$$

unde notația \hat{f}_n arată că estimatorul depinde de volumul selecției, n .

Definiția 1.2.8 Un estimator \hat{f}' este minimax în raport cu riscul $R(\hat{f}, f)$ dacă atinge cel mai mic risc maxim dintre toți estimatorii, adică

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} R(\hat{f}', f) = \inf_{\hat{f}} \sup_{f \in \mathcal{F}} R(\hat{f}, f), \quad \forall f \in \mathcal{F}, \quad (1.2.8)$$

unde \mathcal{F} reprezintă o anumită clasă de funcții. Riscul minimax se notează $R(n, \mathcal{F})$.

1.3 Convergența statistică

Conceptul de convergență statistică a fost introdus în strânsă legătură cu problema sumării seriilor. Ideea de bază a convergenței statistice a unui șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este că majoritatea elementelor sale converg. În același timp, se știe că șirurile de valori numerice provenite din viața reală, cum ar fi măsurătorile și calculele, nu permit testarea convergenței clasice în sens strict matematic. Din această cauză, înlocuirea conceptului de convergență clasică cu cel de convergență statistică prezintă avantaje

în ceea ce privește modelarea și tehnica de prelucrare a semnalelor în diferite spații de funcții.

Termenul de convergență statistică își are originile în prima ediție a monografiei lui Zygmund [117]. Formal, conceptul a fost introdus independent de Steinhaus [111] și Fast [49], iar mai târziu reintrodus de Schönberg [98]. De-a lungul anilor, conceptul de convergență statistică a fost inclus și aplicat în diverse arii de cercetare, cum ar fi: teoria măsurii [82, 83], teoria numerelor [25], teoria aproximării [45], teoria seriilor Fourier [117], teoria spațiilor Banach [24]. De asemenea, această teorie a fost investigată din punct de vedere al spațiilor de șiruri și pusă în legătură cu teoria sumabilității [55].

În ceea ce privește șirurile de operatori liniari și pozitivi, primele cercetări ale convergenței statistice au fost efectuate în 2002 de către matematicienii A.D. Gadjiev și C. Orhan [57]. În anii următori acest domeniu de cercetare a fost îmbunătățit considerabil, dovedindu-se a fi foarte fertil. Urmând această direcție de cercetare, scopul nostru este de a obține diferite clase de operatori liniari pozitivi, de tip discret sau integral și de a studia proprietățile lor de aproximare statistică. Se știe că orice șir convergent este și statistic convergent, dar reciproc nu este adevărat. Din acest motiv, scopul este să construim șiruri de operatori care aproximează funcțiile în sens statistic, dar nu în sens clasic.

1.3.1 Operatori liniari și pozitivi

Fie X o mulțime nevidă. Considerăm spațiul

$$B(X) := \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ mărginită}\}$$

înzestrat cu norma

$$\|f\| := \sup_{x \in X} |f(x)|, \quad f \in B(X),$$

numită norma uniformă sau sup-norma.

Mulțimea $B(X)$ este un subspațiu liniar al spațiului \mathbb{R}^X .

Dacă X este un spațiu topologic, considerăm spațiul

$$C(X) := \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continuă pe } X\}.$$

Fie $C_B(X) := C(X) \cap B(X)$.

Dacă X este un spațiu topologic, atunci spațiile $B(X)$ și $C_B(X)$ înzestrate cu sup-norma definită anterior sunt spații Banach.

Dacă X este un spațiu topologic compact, atunci $C(X) = C_B(X)$.

Definiția 1.3.1 Fie X, Y două spații vectoriale de funcții cu valori reale. O aplicație $L : X \rightarrow Y$ se numește operator liniar dacă și numai dacă

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g), \quad \forall f, g \in X, \quad \text{și } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Operatorul L se numește pozitiv dacă și numai dacă $\forall f \in X, f \geq 0$ rezultă $Lf \geq 0$.

Observația 1.3.2 Mulțimea $\mathcal{L} := \{L : X \rightarrow Y \mid L \text{ este operator liniar}\}$ formează un spațiu liniar real.

Propoziția 1.3.3 Fie $L : X \rightarrow Y$ un operator liniar și pozitiv.

- (i) dacă $f, g \in X$ astfel încât $f \leq g$ atunci $Lf \leq Lg$;
- (ii) $\forall f \in X$ are loc $|Lf| \leq L|f|$.

Următorul rezultat furnizează o condiție necesară și suficientă pentru convergența unui șir de operatori liniari și pozitivi spre operatorul identitate în spațiul $C([a, b])$, fiind stabilit și demonstrat, în mod independent, de trei matematicieni, în trei ani consecutivi: T. Popoviciu [94] în 1951, H. Bohman [18] în 1952 și P.P. Korovkin [71] în 1953. Acest rezultat clasic din teoria aproximării este cunoscut sub numele de teorema lui Bohman-Korovkin deoarece contribuția lui T. Popoviciu din lucrarea [94] a rămas necunoscută o perioadă îndelungată.

Teorema 1.3.4 Fie $n \in \mathbb{N}$ și $L_n : C([a, b]) \rightarrow C([a, b])$ un șir de operatori liniari și pozitivi. Presupunem că șirul $(L_n e_j)_{n \geq 1}$ converge uniform spre e_j pentru $j \in \{0, 1, 2\}$, unde $e_0 = 1$, $e_1(x) = x$, $e_2(x) = x^2$, $x \in [a, b]$. Atunci șirul $(L_n f)_{n \geq 1}$ converge uniform spre f pe intervalul $[a, b]$, $\forall f \in C([a, b])$.

1.3.2 Metode de sumare

Definiția 1.3.5 Fie $A = (a_{j,n})_{j,n \in \mathbb{N}}$ o matrice cu elemente reale. Șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este A -sumabil spre valoarea $s \in \mathbb{R}$ dacă

$$1^0 \quad \forall j \in \mathbb{N}, \text{ seria } \sum_{n=1}^{\infty} a_{j,n} x_n \text{ converge; fie } s_j \text{ limita sa;}$$

$$2^0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_j = s.$$

Definiția 1.3.6 O matrice A de sumabilitate este regulată dacă orice șir convergent este A -sumabil spre limita sa.

1.3.3 Noțiuni de bază ale convergenței statistice

Definiția 1.3.7 Spunem că șirul $x := (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este statistic convergent spre limita L dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$,

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : |x_n - L| \geq \varepsilon\}) = 0,$$

unde

$$\delta(S) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \chi_S(k),$$

este densitatea mulțimii $S \subseteq \mathbb{N}$, iar χ_S este funcția caracteristică asociată mulțimii S .

Această limită se notează $st - \lim_n x_n = L$ ([57]).

Observația 1.3.8 Orice șir convergent este statistic convergent. Reciproca nu este adevărată, ceea ce este ilustrat prin exemplul următor.

Exemplul 1.3.9 Considerăm șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

$$x_n = \begin{cases} i, & \text{pentru } i = n^3, \ n = 1, 2, 3 \dots \\ \frac{1}{i^2 + 1}, & \text{în rest.} \end{cases}$$

Șirul (x_n) este divergent, dar $st - \lim_n x_n = 0$ deoarece $\delta(S) = 0$, unde $S = \{n^3, \ n = 1, 2, 3, \dots\}$.

Definiția 1.3.10 Fie $A = (a_{j,n})_{j,n \in \mathbb{N}}$ o matrice de sumabilitate, regulată, nenegativă. Spunem că șirul de numere reale $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este A -statistic convergent spre limita L dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{n: |x_n - L| \geq \varepsilon} a_{j,n} = 0.$$

Această limită se notează $st_A - \lim_n x_n = L$ ([45]).

1.3.4 Teoreme de aproximare de tip Bohman-Korovkin

În acest paragraf enunțăm două teoreme de aproximare statistică de tipul Bohman-Korovkin demonstrate în 2005 de A.D. Gadjiev și C. Orhan [57].

1.4 Studiul convergenței statistice a unor clase de operatori

Considerăm următorul șir de operatori liniari și pozitivi definit în [93]

$$(T_n f)(x) = \frac{u_n}{F_n(x, t)} \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v}{a_n(v)}\right) C_v^{(n)}(t) x^v, \quad f \in C[0, b], \quad (1.4.1)$$

unde $u_n \geq 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și

$$st_A - \lim_n u_n = 1, \quad (1.4.2)$$

$x \in [0, b]$, $t \in (-\infty, 0]$ și $\{F_n(x, t)\}$ este o mulțime de funcții generatoare pentru șirul de funcții $\{C_v^{(n)}(t)\}_{v \in \mathbb{N}_0}$, de forma,

$$F_n(x, t) = \sum_{v=0}^{\infty} C_v^{(n)}(t) x^v, \quad (1.4.3)$$

și $C_v^{(n)}(t) \geq 0$ pentru $t \in (-\infty, 0]$.

Presupunem, de asemenea, că sunt îndeplinite următoarele condiții

$$(i) F_{n+1}(x, t) = p(x) F_n(x, t), \quad p(x) < M < \infty, \quad x \in (0, 1), \quad (1.4.4)$$

(ii) $B t C_{v-1}^{(n+1)}(t) = a_n(v) C_{v-1}^{(n)}(t) - v C_v^{(n)}(t)$, $B \in [0, a]$, $C_v^{(n)}(t) = 0$ pentru $v \in \mathbb{Z}^- := \{\dots, -3, -2, -1\}$,

$$(iii) \max\{v, n\} \leq a_n(v) \leq a_n(v+1).$$

Pe baza relației (1.4.3) deducem

$$(T_n e_0)(x) = u_n \text{ cu } e_0(y) = 1. \quad (1.4.5)$$

Vom studia convergența A-statistică a șirului de operatori liniari și pozitivi definit prin relația (1.4.1). Rezultatele obținute au fost publicate în lucrarea R. Sobolu [100].

Teorema 1.4.1 (R. Sobolu, [100]) *Fie $A = (a_{j,n})_{j,n \in \mathbb{N}}$ o matrice de sumabilitate, regulată, nenegativă. Atunci are loc relația*

$$st_A - \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n e_1 - e_1\|_{C[0,b]} = 0, \quad (1.4.6)$$

unde operatorul T_n este definit în relația (1.4.1).

Teorema 1.4.2 (R. Sobolu, [100]) Fie $A = (a_{j,n})_{j,n \in \mathbb{N}}$ o matrice de sumabilitate, regulară, nenegativă. Atunci are loc relația

$$st_A - \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n e_2 - e_2\|_{C[0,b]} = 0, \quad (1.4.7)$$

unde operatorul T_n este definit în relația (1.4.1).

Aplicînd Teorema 1.4.1 și Teorema 1.4.2 deducem pentru șirul de operatori liniari și pozitivi $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit prin relația (1.4.1) următoarea teoremă de aproximare A -statistică.

Teorema 1.4.3 (R. Sobolu, [100]) Fie $A = (a_{j,n})_{j,n \in \mathbb{N}}$ o matrice de sumabilitate, regulară, nenegativă. Atunci pentru orice funcție $f \in C[0, b]$ avem

$$st_A - \lim_n \|T_n f - f\|_{C[0,b]} = 0. \quad (1.4.8)$$

În continuare se prezintă o generalizare de tip integral a operatorului definit prin relația (1.4.1). Relativ la acest tip de operator, vom enunța și vom demonstra o teoremă de aproximare A -statistică. Rezultatele obținute sunt menționate în lucrarea R. Sobolu [101].

Introducem șirul de operatori liniari și pozitivi, $(T_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ astfel

$$(T_n^* f)(x) = \frac{u_n}{F_n(x, t)} \sum_{v=0}^{\infty} C_v^{(n)}(t) x^v \int_v^{v+c_{n,v}} f\left(\frac{\xi}{a_n(v)}\right) d\xi, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.4.9)$$

unde f este o funcție integrabilă pe intervalul $(0, 1)$ iar $(c_{n,v})_{n,v \in \mathbb{N}}$ este un șir care satisface condițiile

$$0 < c_{n,v} \leq 1 \quad (1.4.10)$$

pentru orice $n, v \in \mathbb{N}$.

De asemenea, are loc $u_n \geq 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și relația

$$st_A - \lim_n u_n = 1. \quad (1.4.11)$$

$\{F_n(x, t)\}$ este o mulțime de funcții generatoare pentru șirul de funcții $\{C_v^{(n)}(t)\}_{v \in \mathbb{N}_0}$, de forma

$$F_n(x, t) = \sum_{v=0}^{\infty} C_v^{(n)}(t) x^v, \quad (1.4.12)$$

$C_v^{(n)}(t) \geq 0$ pentru $t \in (-\infty, 0]$.

Presupunem că ne încadrăm în condițiile

$$(i) F_{n+1}(x, t) = p(x)F_n(x, t), \quad p(x) < M < \infty, \quad x \in (0, 1), \quad (1.4.13)$$

(ii) $BtC_{v-1}^{(n+1)}(t) = a_n(v)C_{v-1}^{(n)}(t) - vC_v^{(n)}(t)$, $B \in [0, a]$, $C_v^{(n)}(t) = 0$ pentru $v \in \mathbb{Z}^- := \{\dots, -3, -2, -1\}$,

$$(iii) \max\{v, n\} \leq a_n(v) \leq a_n(v+1).$$

Teorema 1.4.4 (R. Sobolu, [101]) *Fie $(T_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ șirul de operatori liniari și pozitivi definit în relația (1.4.9). Atunci, pentru fiecare $x \in [0, b]$, $t \in (-\infty, 0]$ și $n \in \mathbb{N}$ avem*

$$\|T_n^*e_1 - e_1\|_{C[0,b]} \leq \frac{u_n}{2n} + abM|t|\frac{u_n}{n} + b|u_n - 1|,$$

unde M este stabilit în (1.4.13).

Teorema 1.4.5 (R. Sobolu, [101]) *Pentru fiecare $x \in [0, b]$, $t \in (-\infty, 0]$ și $n \in \mathbb{N}$ avem*

$$\|T_n^*e_2 - e_2\|_{C[0,b]} \leq \frac{u_n}{3n^2} + abM|t|\frac{u_n}{n^2} + \frac{u_n}{n}b(abM|t| + aM|t| + 2) + b^2|u_n - 1|,$$

unde șirul $(T_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ și M sunt definite în Teorema 1.4.4.

Teorema 1.4.6 (R. Sobolu, [101]) *Fie $A = (a_{j,n})_{j,n \in \mathbb{N}}$ o matrice de sumabilitate regulată, nenegativă. Atunci avem*

$$st_A - \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n^*e_1 - e_1\|_{C[0,b]} = 0,$$

unde operatorul T_n^* este definit prin relația (1.4.9).

Teorema 1.4.7 (R. Sobolu, [101]) *Fie $A = (a_{j,n})_{j,n \in \mathbb{N}}$ o matrice de sumabilitate regulată, nenegativă. Atunci avem*

$$st_A - \lim_n \|T_n^*e_2 - e_2\|_{C[0,b]} = 0,$$

unde operatorul T_n^* este definit prin relația (1.4.9).

În continuare vom enunța și vom demonstra o teoremă de aproximare de tip Korovkin pentru șirul de operatori $(T_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ definit în relația (1.4.9), cu ajutorul conceptului de convergență A -statistică.

Teorema 1.4.8 (R. Sobolu, [101]) *Fie $A = (a_{j,n})_{j,n \in \mathbb{N}}$ o matrice de sumabilitate regulară, nenegativă. Atunci, pentru orice $f \in C[0, b]$, avem*

$$st_A - \lim_n \|T_n^* f - f\|_{C[0,b]} = 0.$$

1.5 Introducere în analiza wavelets

Analiza wavelets descompune un semnal (un sunet, un cutremur seismic, vocea umană, trepidațiile unui motor, date financiare, etc...) în componente de tipul small waves, de durată variabilă, numite wavelets. Wavelets-urile permit analiza locală a unui semnal cu ajutorul unor regiuni (ferestre de dimensiune variabilă) de tipul timp-frecvență. Ferestrele pot analiza intervale mai mari de timp de unde se pot extrage informații exacte de frecvență joasă cu caracteristici grosiere, care variază lent, sau intervale de durată mai scurtă de unde obținem informații de frecvență înaltă cu detalii care se schimbă foarte rapid.

Cuvântul wavelets este folosit în matematică pentru a descrie o categorie de baze ortonormate din spațiul $L^2(\mathbb{R})$, cu proprietăți de aproximare remarcabile. Bazele ortonormate din analiza Fourier sunt alcătuite din unde de tip sinusoidă, iar scopul teoriei wavelets este de a construi baze ortonormate compuse din unde wavelets.

1.5.1 Sistemul Haar

Această subsecțiune prezintă cel mai simplu exemplu de funcție wavelet ortogonală, *funcția lui Haar*.

1.5.2 Analiză de rezoluție multiplă

Analiza de rezoluție multiplă constituie nucleul analizei wavelets. Aceasta presupune descompunerea unui semnal în subsemnale la diferite nivele de rezoluție.

În prezentarea acestei secțiuni au fost folosite monografiile [6, pag. 65-76] și [29, I. Daubechies, pages 129-156].

Analiza wavelets se bazează pe descompunerea unei aproximante, constantă pe porțiuni, a unei funcții $f \in L^2(\mathbb{R})$ într-o aproximată grosieră și o funcție de detaliere. La fiecare nivel j , aproximanta f_j a funcției date f , $f \in L^2(\mathbb{R})$, se poate scrie ca o sumă dintre o aproximantă grosieră f_{j-1} situată la următorul nivel de aproximare și funcția de detaliere, g_{j-1} , adică $f_j = f_{j-1} + g_{j-1}$. Fiecare funcție de detaliere se poate scrie ca o combinație liniară a funcțiilor wavelet mamă $\psi_{j,k}$, $\psi_{j,k}(x) =$

$2^{j/2}\psi(2^j x - k)$, $x \in \mathbb{R}$, unde $j \in \mathbb{Z}$, reprezintă *indicele de dilatare*, iar $k \in \mathbb{Z}$, reprezintă *indicele de translație*. Când indicele j ia valori tot mai mari, aproximantele corespunzătoare devin tot mai fine. Pentru fiecare nivel de rezoluție j avem un spațiu de funcții de bază, $(\psi_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}$. Prin urmare, vom lucra cu mai multe spații la diferite rezoluții, aceasta însemnând *multirezoluție*. Conceptul de analiză multirezoluție este în strânsă legătură cu studiul semnalelor f la diferite nivele de rezoluție, fiecare dintre ele fiind o versiune mai fină a lui f .

Definim un șir $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ de subspații ale lui $L^2(\mathbb{R})$ prin

$$V_j = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : f \text{ este constantă pe intervalele } [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}], j \in \mathbb{Z}\}.$$

Acest șir de subspații posedă următoarele proprietăți:

$$(P_1) \dots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots;$$

$$(P_2) \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = 0, \quad \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R});$$

$$(P_3) f \in V_j \text{ dacă și numai dacă } f(2 \cdot) \in V_{j+1}, \text{ unde } j \in \mathbb{Z};$$

$$(P_4) f \in V_0 \text{ implică } f(\cdot - k) \in V_0, \text{ oricare ar fi } k \in \mathbb{Z};$$

(P₅) Există o funcție $\varphi \in V_0$ astfel încât mulțimea $\varphi_{0,k} = \{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ să constituie o bază ortonormată pentru V_0 .

De aici deducem că, dacă spațiul central V_0 este generat de o singură funcție $\varphi \in V_0$, $V_0 = \overline{sp\{\varphi_{0,k} : k \in \mathbb{Z}\}}$, atunci fiecare subspațiu V_j este generat de aceeași funcție φ , $V_j = \overline{sp\{\varphi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}}$, $j \in \mathbb{Z}$.

Funcția φ care îndeplinește condiția (P₅) se numește *funcție de scară* sau *wavelet tată*.

Situându-ne în V_0 , putem avea acces la orice spațiu V_j urcând ($j > 0$) sau coborând ($j < 0$) cu ajutorul scării φ . Pe fiecare nivel V_j , elementele acestuia pot fi evaluate prin intermediul șirului $(\varphi_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}$ generat de φ și definit astfel

$$\varphi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\varphi(2^j x - k), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (j, k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}. \quad (1.5.1)$$

Definiția 1.5.1 *Un șir de subspații închise V_j , $j \in \mathbb{Z}$, ale lui $L^2(\mathbb{R})$ care satisfac proprietățile (P₁), (P₂), (P₃), (P₄), (P₅) formează o analiză de rezoluție multiplă (MRA) a spațiului $L^2(\mathbb{R})$ generată de funcția φ .*

1.5.3 Funcția wavelet mamă

Fie $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ o analiză de rezoluție multiplă a spațiului $L^2(\mathbb{R})$. Deoarece $V_j \subset V_{j+1}$, vom defini complementul ortogonal al lui V_j în V_{j+1} , deci

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (1.5.2)$$

Definim

$$\psi_{j,k} = 2^{j/2} \psi(2^j x - k), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (j, k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}. \quad (1.5.3)$$

Așa cum funcția *wavelet tată* φ generează baze ortonormate în subspațiile V_j , $j \in \mathbb{Z}$ și funcția *wavelet mamă* ψ generează baze ortonormate în W_j , $j \in \mathbb{Z}$.

1.5.4 Descompunere și reconstrucție wavelet

Orice semnal $f \in L^2(\mathbb{R})$ se descompune în mod unic sub forma

$$f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (f, \psi_{j,k}) \psi_{j,k}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.5.4)$$

unde $(f, \psi_{j,k}) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \psi_{j,k}(x) dx$.

1.5.5 Transformarea wavelet directă și inversă

Fie $f \in L^2(\mathbb{R})$ și $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ o analiză de rezoluție multiplă a spațiului $L^2(\mathbb{R})$ generată de funcția φ , iar ψ funcția *wavelet mamă* ce generează baze ortonormate în subspațiile W_j , unde $j \in \mathbb{Z}$. Deoarece $(\varphi_{J,k})_{k \in \mathbb{Z}}$ formează o bază ortonormată pentru V_J , proiecția ortogonală f_J a funcției f pe V_J se exprimă prin $f_J(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{J,k} \varphi_{J,k}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, unde $\alpha_{J,k} = (f, \varphi_{J,k})$. Deoarece $V_j \oplus W_j = V_{j+1}$ avem $V_j = \bigoplus_{j' < j} W_{j'}$, deci pornind de la nivelul J și continuând procesul de descompunere până la un anumit nivel j' , are loc relația

$$f_J(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{j',k} \varphi_{j',k}(x) + \sum_{j=j'}^{J-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} w_{j,k} \psi_{j,k}(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.5.5)$$

Coeficienții $(\alpha_{j',k})_{k \in \mathbb{Z}}$ se numesc *coeficienții de aproximare*, iar coeficienții $(w_{j,k})_{(j,k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$ se numesc *coeficienții wavelets*.

Capitolul 2

Regresia neparametrică

Regresia neparametrică va aproxima o funcție de regresie fără a impune o formă analitică particulară asupra acesteia. Se va presupune că funcția f aparține unei anumite clase de funcții și că are anumite proprietăți, cum ar fi netezimea.

2.1 Estimarea unui semnal perturbat de zgomot

Problema estimării unui semnal perturbat de zgomot constituie o problemă standard în statistică și în teoria semnalelor. Termenul zgomot (*noise*) se referă la orice schimbare nedorită care alterează valorile semnalului original. Modelul semnalului perturbat de zgomot se scrie sub forma: *semnal perturbat = semnal original + zgomot*.

Considerăm modelul de regresie simplă, $Y = f(X) + \varepsilon$, respectiv modelul observațional corespunzător

$$y_i = f(x_i) + \sigma \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.1.1)$$

cu $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)^T$, unde ε_i sunt variabile aleatoare, independente, distribuite după legea normală $N(0, 1)$, iar σ este nivelul de zgomot care poate fi cunoscut sau necunoscut. Presupunem, fără a pierde din generalitate că punctele x_i sunt puncte echidistante în intervalul $[0, 1]$, de forma $\frac{i}{n}$, unde $n = 2^J$ este volumul selecției, J întreg pozitiv.

Scopul urmărit este să construim funcția f pornind de la datele perturbate de zgomot, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ fără a presupune o formă parametrică particulară pentru f .

Algoritmul regresiei neparametrice bazat pe transformări wavelets constă în etapele:

1. Calculul transformării wavelet a semnalului original perturbat de zgomot.
2. Modificarea coeficienților wavelet perturbați de zgomot în conformitate cu anumite reguli.

3. Calculul transformării wavelet inverse folosind coeficienții modificați.

Etapa a doua a acestui algoritm presupune două tipuri de tehnici: liniare și neliniare. Deși simple și ieftin de implementat, metodele liniare nu sunt modelate pentru a trata funcțiile cu grad scăzut de netezime. Pentru asemenea clase de funcții sunt eficiente tehnicile neliniare de tip prag (*thresholding*) sau tehnicile neliniare de contracție (*shrinkage*). Prima abordare matematică riguroasă a acestor tehnici aparține lui Donoho și colaboratorilor săi (1994, 1995, 1998, [35], [36], [37]). Aceștia au analizat metodele de tip *thresholding* și *shrinkage* în contextul estimării *minimax* și au arătat că aceste metode generează estimări asimptotic optimale pentru datele perturbate de zgomot, care depășesc ca și performanță orice estimator liniar.

Matematic, coeficienții wavelets sunt estimați cu ajutorul unor reguli de tip *thresholding* (prag), care modifică valorile w la valorile \hat{w} , prin înlăturarea coeficienților $w_{j,k}$ cu valoare absolută mică, considerați a reprezenta zgomotul respectiv prin păstrarea coeficienților $w_{j,k}$ cu valoare absolută mare, aceștia fiind utilizați pentru reconstrucția estimatorului \hat{f} . Valoarea care stabilește coeficienții cu valoare absolută mare se numește prag (*threshold*). Alegerea valorii de prag reprezintă o problemă fundamentală. Donoho și Johnstone [36], [37], [38], Nason și Silverman [85], [86] au stabilit o multitudine de metode de tip prag. Acestea se divid în două categorii principale: metode de tip prag globale care se aplică tuturor coeficienților wavelets empirici și metode de tip prag care depind de nivelul de rezoluție. A doua categorie propune pentru fiecare nivel de rezoluție j valoarea de prag corespunzătoare λ_j .

2.1.1 Analiza pragurilor

Fie w coeficienții wavelets corespunzători valorii de prag λ . Atunci funcția *hard thresholding* se definește astfel

$$\eta_{hard}(w; \lambda) = wI(|w| > \lambda), \quad (2.1.2)$$

iar funcția *soft thresholding* se exprimă prin relația

$$\eta_{soft}(w; \lambda) = \text{sign}(w)(|w| - \lambda)I(|w| > \lambda) \quad (2.1.3)$$

$$= \begin{cases} w + \lambda & , \quad w < -\lambda, \\ 0 & , \quad |w| \leq \lambda, \\ w - \lambda & , \quad w > \lambda. \end{cases}$$

Tehnica *firm thresholding* se bazează pe o funcție continuă de forma

$$\eta_F(w; \lambda_1, \lambda_2) = \begin{cases} 0 & , \quad |w| < \lambda_1, \\ \text{sign}(w) \frac{\lambda_2(|w| - \lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1} & , \quad \lambda_1 < w \leq \lambda_2, \\ w & , \quad |w| > \lambda_2. \end{cases}$$

Tehnica *SCAD thresholding* include o funcție segmentar liniară de forma

$$\eta_{SCAD}(w; \lambda) = \begin{cases} \text{sign}(w) \max(0, |w| - \lambda) & , \quad |w| < 2\lambda, \\ \frac{(a-1)w - a\lambda \text{sign}(w)}{a-2} & , \quad 2\lambda < w \leq a\lambda, \\ w & , \quad |w| > a\lambda. \end{cases}$$

2.1.2 Metode de selecție a pragului

Donoho și Johnstone au stabilit în [36] pragul *universal*. Acesta constituie un prag global, iar valoarea sa este stabilită la

$$\lambda = \hat{\sigma} \sqrt{2 \log n},$$

unde n este volumul selecției, iar $\hat{\sigma}$ este un estimator al nivelului de zgomot σ . Determinarea valorii estimatorului $\hat{\sigma}$ se bazează pe coeficienții wavelets empirici corespunzători nivelului de rezoluție $J - 1$ deoarece aceștia înglobează cea mai mare parte a zgomotului. Cazul particular $\lambda = \sqrt{2 \log n}$ corespunde procedurii *VisuShrink*.

Pragul *minimax* reprezintă o altă metodă globală stabilită de Donoho în [36]. Considerând modelul observațional

$$w_i = \theta_i + \varepsilon z_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.1.4)$$

unde $z_i \sim N(0, 1)$, $\varepsilon > 0$, iar $w = (w_i)$, $i = 1, \dots, n$, reprezintă șirul observațiilor. Se urmărește estimarea riscului

$$R(\hat{\theta}, \theta) = E \left\| \hat{\theta} - \theta \right\|_{l^2(\mathbb{Z})}^2. \quad (2.1.5)$$

Fie $\eta_S(w, \lambda)$ funcția *soft thresholding* definită în (2.1.3). Presupunem că avem o

singură observație $y \sim N(0, 1)$, $\varepsilon > 0$. Definim funcția

$$\rho_S(\lambda, \mu) = E \{ \eta_S(y, \mu) - \mu \}^2 \quad (2.1.6)$$

și expresiile de tipul *minimax*

$$\Lambda_n^* \equiv \inf_{\lambda} \sup_{\mu} \frac{\rho_S(\lambda, \mu)}{n^{-1} + \min(\mu^2, 1)}, \quad (2.1.7)$$

λ_n^* fiind cea mai mare valoare a lui λ din expresia de mai sus.

Teorema 2.1.1 *Presupunem că ne încadrăm în modelele (2.1.4) și (2.1.5). Pragul minimax λ_n^* definit prin relațiile (2.1.7) generează estimatorul*

$$\hat{\theta}^* = \eta_S(w_i, \lambda_n^* \varepsilon), \quad i = 1, \dots, n,$$

care satisface relația

$$E \left\| \hat{\theta}^* - \theta \right\|_{l^2}^2 \leq \Lambda_n^* \left\{ \varepsilon^2 + \sum_{i=1}^n \min(\theta_i^2, \varepsilon^2) \right\},$$

pentru orice $\theta \in \mathbb{R}^n$, unde

$$\Lambda_n^* \leq 2 \log n + 1 \quad \text{și} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_n^* = 2 \log n,$$

$$\lambda_n^* \leq \sqrt{2 \log n} \quad \text{și} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^* = \sqrt{2 \log n}.$$

Comparativ cu pragul *universal*, pragul *minimax* este mai conservator și mai potrivit în cazul în care detaliile funcției f sunt răspândite în zona afectată de zgomot.

Tehnica *SureShrink* alege valoarea de prag λ_j corespunzătoare fiecărui nivel de rezoluție j prin minimizarea erorii aleatoare (Stein Unbiased Error) [36], [38].

2.1.3 Estimatori wavelets de cele mai mici pătrate penalizate

Când estimăm un semnal perturbat de zgomot prin metode wavelets, problema clasică a netezirii datelor poate fi formulată în domeniul wavelet prin aflarea mini-

mului θ a funcției de penalitate $l(\theta)$ definită astfel

$$l(\theta) = \|Wy - \theta\|_n^2 + 2\lambda \sum_{i>i_0} p(|\theta_i|), \quad (2.1.8)$$

unde θ este vectorul coeficienților wavelets ai funcției de regresie necunoscută f , iar p este o funcție de penalitate dată. Valoarea i_0 reprezintă un număr întreg dat, corespunzător coeficienților wavelets penalizați situați deasupra unui nivel de rezoluție j_0 dat.

Performanța estimatorului wavelet rezultat depinde de funcția de penalitate și de parametrul de netezire λ .

2.2 Un studiu comparativ a două metode de înlăturare a zgomotului

În acest paragraf vom analiza un semnal perturbat de zgomot alb utilizând tehnica *Minimax* și tehnica *VisuShrink*. Semnalul este reprezentat de umiditatea relativă și are lungimea $n = 256$. Datele au fost obținute de la stația meteorologică Adcon Telemetry a Facultății de Horticultură din cadrul USAMV Cluj-Napoca și au fost prelucrate cu mediul *Matlab* folosind toolbox-ul *WaveLab850*. Rezultatele acestui studiu au fost publicate în lucrarea Sobolu R. [108].

Pentru a compara eficiența celor două tehnici aplicate am calculat în ambele situații riscul, urmărind ca acesta să aibă cea mai mică valoare posibilă.

În prelucrarea semnalului cu ajutorul celor două tehnici am parcurs etapele:

1. Aplicarea unei transformări wavelet de tip *Daubechies*, $N = 8$, semnalului inițial.
2. Dintre coeficienții wavelets perturbați de zgomot obținuți în etapa precedentă au fost selectați aceia care depășesc valoarea de prag λ_n^* respectiv aceia care depășesc pragul $\lambda^V = \sqrt{2 \log n}$.
3. Pornind de la coeficienții wavelets determinați în etapa a doua s-a reconstruit semnalul inițial cu ajutorul transformării wavelet inverse.

Pragul ales	Riscul
Pragul λ_n^*	0.0119
Pragul $\lambda^V = \sqrt{2 \log n}$	0.0040

Pragul λ^V furnizează și o calitate vizuală mai bună a semnalului reconstruit decât procedura bazată pe tehnica *Minimax* (vezi Figura 2.3 și Figura 2.4).

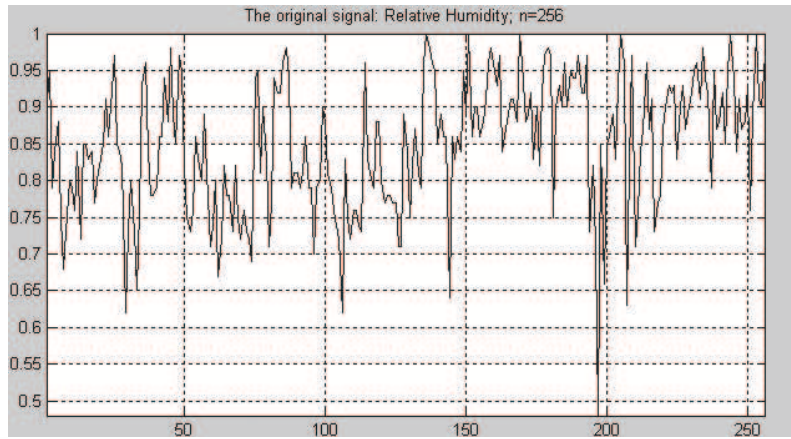


Figura 2.1: Semnalul original

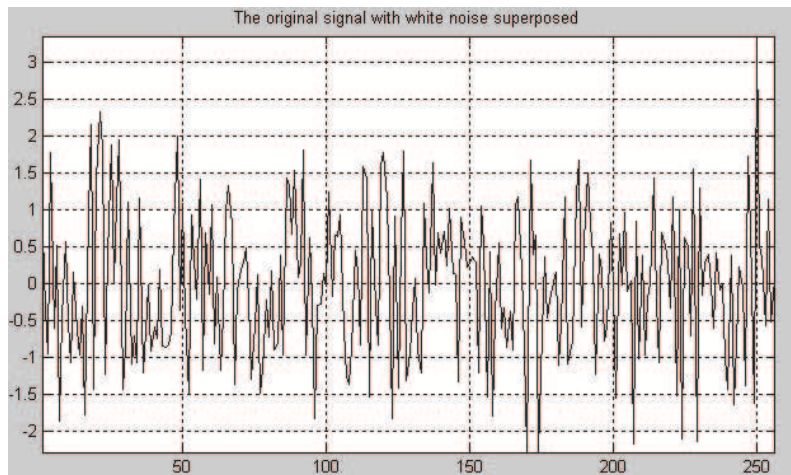


Figura 2.2: Semnalul perturbat de zgomot alb

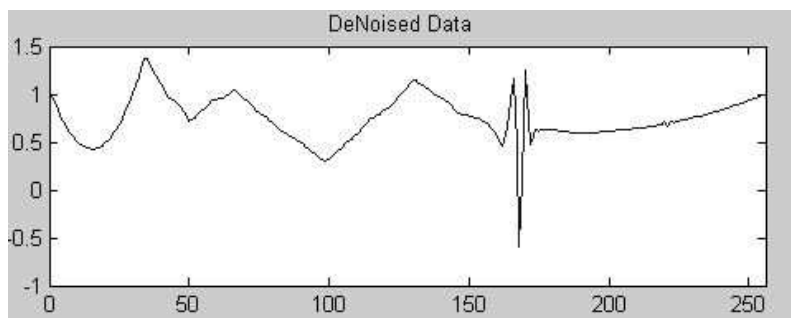


Figura 2.3: Semnalul reconstruit cu tehnica *Minimax*

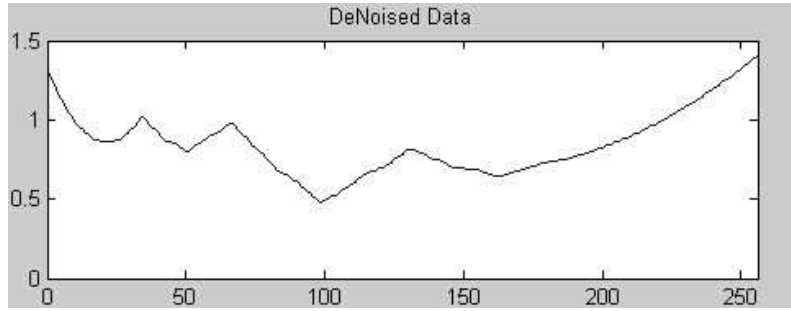


Figura 2.4: Semnalul reconstruit cu tehnica *VisuShrink*

2.3 Analiza unor metode de reconstrucție bazate pe tehnica wavelets

În această secțiune vom ilustra performanța următoarelor metode de înlăturare a zgomotului: *metoda celor mai mici pătrate penalizate*, *metoda validării încrucișate* (variantele hard și soft) și *metoda SureShrink*, prin intermediul unei mulțimi de date simulate constituită din funcția test

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x + \exp(-39(x - 0.5)^2) - I(x \geq 0.5).$$

Această funcție prezintă o discontinuitate în punctul $x = 0.5$. Semnalul a fost perturbat de zgomot Gaussian, considerându-se două nivele de zgomot, corespunzătoare valorii $SNR = 4$ respectiv $SNR = 10$. Pentru fiecare simulare s-a utilizat o selecție de 512 valori din intervalul $[0, 1]$, astfel încât datele perturbate de zgomot se pot reprezenta sub forma

$$y_i = f(t_i) + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, 512,$$

unde $t_i = \frac{i}{512}$, iar ε_i sunt erorile distribuite după legea normală $N(0, 1)$.

Procesările au fost efectuate cu ajutorul unor funcții implementate în mediul *Matlab*.

Figura 2.5 arată performanța tehnicilor aplicate. Tabelul următor afișează eroarea medie pătratică evaluată pentru fiecare metodă și pentru setarea SNR corespunzătoare.

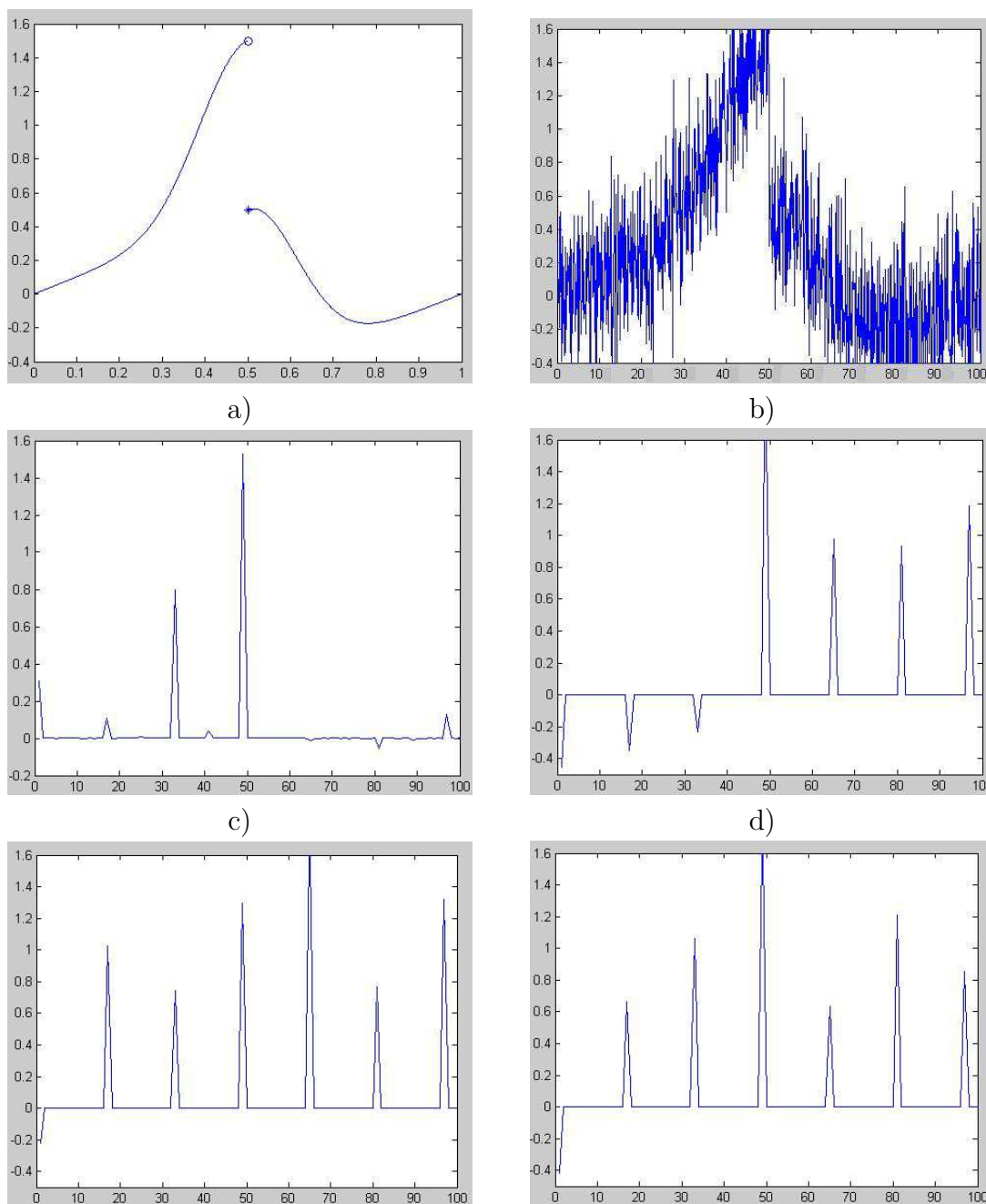


Figura 2.5: Metode de tip *thresholding* aplicate funcției $f(x) = x + \exp(-39(x - 0.5)^2) - I(x \geq 0.5)$ perturbată de zgomot alb

- a) Funcția inițială
- b) Funcția perturbată de zgomot alb, $SNR = 4$
- c) Reconstrucție bazată pe *metoda celor mai mici pătrate penalizate*
- d) Reconstrucție prin *metoda validării încrucișate (hard)*
- e) Reconstrucție prin *metoda validării încrucișate (soft)*
- f) Reconstrucție prin *metoda SureShrink (soft)*.

Metoda	$SNR = 4$	$SNR = 10$
Metoda celor mai mici pătrate penalizate	0.9512	0.9049
Metoda validării încrucișate (hard thresholding)	0.9200	0.8900
Metoda validării încrucișate (soft thresholding)	0.9306	0.8955
Metoda SureShrink (soft thresholding)	0.9562	0.8855

2.4 Aplicație

Acest paragraf include rezultate practice proprii publicate în lucrările Sobolu R. [104], Sobolu R. [105], Sobolu R. [110]. Vom prezenta un studiu în cadrul căruia analizăm variația ritmului respirator, a ritmului cardiac și nivelul enzimelor care caracterizează sistemele antioxidante ale organismului (SOD, catalaza și peroxidaza) în cadrul unui lot format din 8 bovine expuse radiației solare calorice. Studiul se realizează comparativ pe lotul expus radiației solare calorice respectiv pe același lot menținut la adăpost, în perioada mai-octombrie, 2006.

Datele înregistrate (semnalele) au fost procesate cu ajutorul unor transformări de tip wavelet: Transformarea wavelet rapidă Haar de tipul I (*The Ordered Fast Haar Wavelet Transform* - OFHWT) și Transformarea wavelet rapidă Haar de tipul II (*The In Place Fast Haar Wavelet Transform* - PFHWT) [89]. Algoritmii corespunzători acestor tipuri de transformări au fost implementați în Microsoft Excel cu ajutorul macrourilor scrise în VBA.

Pentru analiza semnalului reprezentat de ritmul respirator dispunem de $32 = 2^5$ valori numerice. Aceste date inițiale sunt incluse în șirul $s(5 - 0)$ iar rezultatele obținute în urma procesării semnalului cu ajutorul transformării wavelet rapide Haar de tipul II, adică coeficienții wavelets se afișează în cadrul șirului $s(5 - 5)$ din Figura 2.6.

Figura 2.6 a) afișează coeficienții wavelets obținuți în cazul menținerii lotului analizat sub acțiunea radiației solare. Primul coeficient, 49.776 reprezintă valoarea medie a ritmului respirator pe întreaga perioadă considerată. Al doilea coeficient, -5.969 arată variația globală a ritmului respirator în perioada mai-octombrie, adică o creștere cu $(-5.969) * (-2) = 11.938 \approx 12$ bătăi/minut din luna mai în luna octombrie. Următorii doi coeficienți, -11.021 și 10.416 exprimă o creștere medie cu aproximativ $(-11.021) * (-2) = 22.042 \approx 22$ bătăi/minut din luna mai în luna iulie (prima jumătate a perioadei considerate) respectiv o scădere medie cu aproximativ $10.416 * (-2) = -20.832 \approx 21$ bătăi/minut din luna august în luna octombrie (a doua jumătate a perioadei considerate).

În concluzie, procesarea semnalului asociat ritmului respirator cu transformarea

wavelet rapidă Haar de tipul II în lucrarea Sobolu R. [105] pune în evidență, în cadrul lotului expus radiației solare, o creștere a ritmului respirator cu 22 bătăi/minut în perioada mai-iulie, respectiv o scădere a ritmului respirator cu aproximativ 21 bătăi/minut în perioada august-octombrie.

În mod analog se analizează coeficienții wavelets rezultați la procesarea semnalului reprezentat de ritmul respirator în cazul menținerii lotului de bovine în adăpost și se constată că nu există variații semnificative ale ritmului respirator în această situație.

n	5				
s(5-0)	s(5-1)	s(5-2)	s(5-3)	s(5-4)	s(5-5)
31.660	30.995	32.078	32.786	43.807	49.776
30.330	33.160	33.495	54.828	55.745	-5.969
29.660	34.660	53.328	66.161	-11.021	-11.021
36.660	32.330	56.328	45.329	10.416	10.416
35.660	54.160	66.413	-0.709	-0.709	-0.709
33.660	52.495	65.910	-1.500	-1.500	-1.500
33.330	59.660	45.245	0.251	0.251	0.251
31.330	52.995	45.413	-0.084	-0.084	-0.084
58.660	66.330	-1.083	-1.083	-1.083	-1.083
49.660	66.495	1.165	1.165	1.165	1.165
46.660	66.660	0.833	0.833	0.833	0.833
58.330	65.160	3.333	3.333	3.333	3.333
63.660	43.995	-0.083	-0.083	-0.083	-0.083
55.660	46.495	0.750	0.750	0.750	0.750
50.660	46.330	-1.250	-1.250	-1.250	-1.250
55.330	44.495	0.918	0.918	0.918	0.918
72.000	0.665	0.665	0.665	0.665	0.665
60.660	-3.500	-3.500	-3.500	-3.500	-3.500
64.660	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
68.330	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
70.660	4.500	4.500	4.500	4.500	4.500
62.660	-5.835	-5.835	-5.835	-5.835	-5.835
60.660	4.000	4.000	4.000	4.000	4.000
69.660	-2.335	-2.335	-2.335	-2.335	-2.335
45.330	5.670	5.670	5.670	5.670	5.670
42.660	-1.835	-1.835	-1.835	-1.835	-1.835
44.330	4.000	4.000	4.000	4.000	4.000
48.660	-4.500	-4.500	-4.500	-4.500	-4.500
50.330	1.335	1.335	1.335	1.335	1.335
42.330	-2.165	-2.165	-2.165	-2.165	-2.165
40.660	4.000	4.000	4.000	4.000	4.000
48.330	-3.835	-3.835	-3.835	-3.835	-3.835

a)

n	5				
s(5-0)	s(5-1)	s(5-2)	s(5-3)	s(5-4)	s(5-5)
28.660	27.495	26.995	26.495	29.641	30.662
26.330	26.495	25.995	32.788	31.683	-1.021
27.660	25.995	32.495	34.536	-3.146	-3.146
25.330	25.995	33.080	28.829	2.854	2.854
26.330	33.495	36.078	0.500	0.500	0.500
25.660	31.495	32.995	-0.293	-0.293	-0.293
26.330	30.665	29.498	1.541	1.541	1.541
25.660	35.495	28.160	0.669	0.669	0.669
36.330	38.495	0.500	0.500	0.500	0.500
30.660	33.660	0.000	0.000	0.000	0.000
32.660	32.495	1.000	1.000	1.000	1.000
30.330	33.495	-2.415	-2.415	-2.415	-2.415
31.330	29.830	2.418	2.418	2.418	2.418
30.000	29.165	-0.500	-0.500	-0.500	-0.500
31.660	28.660	0.333	0.333	0.333	0.333
39.330	27.660	0.500	0.500	0.500	0.500
42.330	1.165	1.165	1.165	1.165	1.165
34.660	1.165	1.165	1.165	1.165	1.165
35.660	0.335	0.335	0.335	0.335	0.335
31.660	0.335	0.335	0.335	0.335	0.335
33.660	2.835	2.835	2.835	2.835	2.835
31.330	1.165	1.165	1.165	1.165	1.165
35.330	0.665	0.665	0.665	0.665	0.665
31.660	-3.835	-3.835	-3.835	-3.835	-3.835
30.330	3.835	3.835	3.835	3.835	3.835
29.330	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000
30.000	1.165	1.165	1.165	1.165	1.165
28.330	1.835	1.835	1.835	1.835	1.835
28.660	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500
28.660	0.835	0.835	0.835	0.835	0.835
26.660	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
28.660	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000

b)

Figura 2.6:

- a) Coeficienții wavelets obținuți aplicând Transformarea wavelet rapidă Haar de tipul II ritmului respirator în cazul menținerii lotului sub acțiunea radiației solare
- b) Coeficienții wavelets obținuți aplicând Transformarea wavelet rapidă Haar de tipul II ritmului respirator în cazul menținerii lotului în adăpost

Folosind metode similare s-au efectuat studii comparative ale semnalelor

reprezentate de ritmul cardiac și de nivelul enzimelor antioxidante din sânge în cazul expunerii lotului de bovine la radiații solare calorice și în cazul menținerii acestuia în adăpost. În zilele recoltării valorilor ce caracterizează parametrii ce vor fi analizați: ritmul cardiac, respirația și nivelul enzimelor s-au înregistrat și principalii indicatori meteorologici ce influențează acest studiu: temperatura aerului, umiditatea relativă, intensitatea radiației solare și s-a determinat indicele temperatură-umiditate, ITU.

Rezultatele procesărilor arată că, în zilele călduroase de vară, când indicele temperatură-umiditate depășește valoarea superioară de prag 72 apare o creștere semnificativă a principalilor indici fiziologici, în special a ritmului respirator și cardiac, urmată de modificări la nivel sanguin și tisular, ceea ce demonstrează că stresul caloric indus de radiațiile solare calorice determină transformări profunde ale stării de sănătate la vacile de lapte. Aceste modificări se reflectă atât în scăderea producției de lapte cât și în modificarea calitativă a acesteia (scăderea proteinelor și a lactozei).

Concluziile studiilor efectuate scot în evidență modificările semnificative ce apar la vacile de lapte expuse acțiunii directe a radiațiilor solare calorice pe timpul verii, iar din punct de vedere practic stabilesc măsurile ce trebuie luate în scopul prevenirii efectelor nocive ale acestor radiații în vederea asigurării bunăstării taurinelor.

2.5 Implementarea algoritmului corespunzător Transformării wavelet rapide de tip Daubechies folosind VBA în Microsoft Excel

Această aplicație descrie implementarea algoritmului corespunzător Transformării wavelet rapide de tip Daubechies în mediul VBA din cadrul Microsoft Excel folosind macrouri precum și prelucrarea unui semnal cu ajutorul macroului scris în VBA. Rezultatele aferente acestei aplicații sunt publicate în lucrarea Sobolu R. [106].

Algoritmul corespunzător transformării wavelet a fost implementat în Microsoft Excel folosind macrouri scrise în VBA. Cu ajutorul macroului s-a procesat un semnal reprezentat de valorile temperaturii înregistrate în perioada februarie 2008 - martie 2008 la stația meteorologică a USAMV Cluj-Napoca. Sirul s conține datele inițiale, iar șirurile $a-Step0$, respectiv $c-Step0$, $c-Step1$, $c-Step2$, $c-Step3$, $c-Step4$ afișează rezultatele, adică coeficienții wavelets de tip Daubechies, Figura 2.7.

În cele ce urmează descriem semnificația practică a coeficienților wavelets obținuți. Coeficientul $a - Step0 = a_0^{(n-5)} = 7.993^0C$ reprezintă temperatura medie pe întreaga perioadă considerată.

Coeficientul $c - Step0 = c_0^{(n-5)} = 1.105$ semnifică o creștere a temperaturii cu $1.105 \cdot 2 = 2.210^0C$ din februarie în martie.

Coeficientul $c - Step1 = c_0^{(n-4)} = 1.214$ corespunde unei schimbări cu $1.214 \cdot 2 = 2.428^0C$, adică o creștere cu aproximativ 2.428^0C din prima decadă a lunii februarie până în a doua decadă a lunii februarie. Coeficientul $c_1^{(n-4)} = -1.045$ arată o scădere a temperaturii cu aproximativ $(-1.045) \cdot 2 = -2.09^0C$ din prima decadă a lunii martie spre a doua decadă lunii martie.

Fiecare din următorii patru coeficienți, $0.538, -0.057, -3.546, -2.874$ semnifică variații ale temperaturii la fiecare două săptămâni. Astfel, -0.057 arată o scădere a temperaturii cu aproximativ $(-0.057) \cdot 2 = -0.114^0C$ din a treia săptămână lunii februarie în a patra săptămână a lunii februarie.

Următorii opt coeficienți, $-1.201, -1.598, -1.455, -2.400, -2.043, 0.751, 1.359, 3.205$ exprimă variații săptămânale ale temperaturii. De exemplu, coeficientul 0.751 semnifică o creștere a temperaturii cu $0.751 \cdot 2 = 1.502^0C$ pe parcursul celei de-a doua săptămâni a lunii martie.

n	4																
h	0.683	1.183	0.317	-0.183													
s	7.730	8.770	6.800	3.850	-0.330	3.750	8.770	10.170	11.200	7.750	8.360	12.670	10.000	7.000	10.270	11.130	...
a	9.491	7.880	5.380	-1.823	1.913	8.258	9.793	12.463	7.527	6.782	13.647	11.098	5.803	9.955	11.130	11.445	...
a-Step4	8.922	0.306	5.949	11.288	7.730	11.234	8.587	11.848	7.533	12.276	7.626	11.474	6.176	1.130	8.041	7.770	
a-Step3	3.138	8.906	9.562	10.011	9.993	10.267	3.341	8.728									
a-Step2	6.939	9.831	9.216	5.986													
a-Step1	9.098	6.888															
a-Step0	7.993																
c-Step4	1.688	-1.892	0.053	-0.736	2.519	-2.975	0.566	1.935	-1.513	-0.222	1.386	1.731	-3.848	0.202	0.056	1.051	
c-Step3	-1.201	-1.598	-1.455	-2.400	-2.043	0.751	1.359	3.205									
c-Step2	0.538	-0.057	-3.546	-2.874													
c-Step1	1.214	-1.045															
c-Step0	1.105																

Figura 2.7: Coeficienții wavelets ai transformării de tip Daubechies

Capitolul 3

Estimatori de tip wavelets

3.1 Rezultate preliminare

Estimatorii wavelets neliniari studiază regresia neparametrică din punct de vedere *minimax* utilizând clase de funcții neconsiderate în studiul estimatorilor liniari: spații *Hölder* sau *Sobolev*, dar și spații de funcții neregulate sau cu variație mărginită. Matematic, aceste clase de funcții pot fi sintetizate în termeni de spații *Besov* sau spații *Triebel*. Meyer [80] a dezvoltat ideea de analiză de rezoluție multiplă și aplicarea ei în studiul unor spații de funcții și al unor operatori de tip integral. Cercetările lui I. Daubechies [30], Mallat [78] și monografia lui Frazier, Jawerth și Weiss [50], [51] furnizează o conexiune între bazele wavelet ortonormate și estimarea de tipul *minimax* în spațiile *Besov*.

3.2 Un model abstract de înlăturare a zgomotului

Conceptul *denoising* are drept scop optimizarea erorii medii pătratice

$$n^{-1}E \left\| \hat{f} - f \right\|_{l^2}^2 = n^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} E \left(\hat{f} \left(\frac{i}{n} \right) - f \left(\frac{i}{n} \right) \right)^2 \quad (3.2.1)$$

cu respectarea condiției că estimatorul \hat{f} al funcției f este, cu probabilitate suficient de mare, cel puțin la fel de neted ca și funcția f . Această cerință păstrează un echilibru între eroarea de măsurare și varianță, menținând aceste valori în jurul aceleiași magnitudini. Estimatorii optimali din punct de vedere al erorii medii pătratice prezintă structuri oscilatorii, afectate intens de zgomot. Metodele de reconstrucție sunt gândite astfel încât să elimine aceste oscilații false, cerând, în același timp ca

estimatorul reconstruit să nu oscileze semnificativ mai mult decât funcția f .

În acest scop, Donoho și Johnstone [36] au propus o procedură de tip *thresholding*, (prag) pentru reconstrucția funcției f . Această procedură consideră aspectele:

1.[*Netezimea*] Estimatorul \hat{f}_n^* este cel puțin la fel de neted ca și funcția f , cu o probabilitate suficient de mare, netezimea măsurându-se într-o varietate largă de spații de funcții.

2.[*Adaptabilitatea*] Estimatorul \hat{f}_n^* deține eroarea medie pătratică de tipul *minimax* într-o varietate mare de clase de funcții unde estimatorii liniari tradiționali nu ating această rată.

Teoria statistică se axează pe următorul model abstract de eliminare a zgomotului

$$y_I = \theta_I + \varepsilon \cdot z_I, \quad I \in \mathcal{I}_n, \quad (3.2.2)$$

unde $z_i \sim N(0, 1)$ reprezintă zgomotul alb, ε este nivelul de zgomot iar \mathcal{I} este o mulțime de indici, $|\mathcal{I}_n| = n$.

3.2.1 Tehnica *Soft Thresholding* și reconstrucția optimală

Considerăm un model, în care zgomotul are caracter deterministic, sub forma

$$y_I = \theta_I + \delta \cdot u_I, \quad I \in \mathcal{I}, \text{ iar } \mathcal{I} \text{ este o mulțime de indici.} \quad (3.2.3)$$

În acest caz $\delta > 0$ reprezintă un nivel cunoscut de zgomot, iar (u_I) este un termen perturbat de zgomot care satisface $|u_I| \leq 1, \forall I \in \mathcal{I}$. Presupunem că zgomotul este minimal și generează cele mai mici oscilații posibile. Vom evalua performanța

$$E_\delta(\hat{\theta}, \theta) = \sup_{|u_I| \leq 1} \left\| \hat{\theta}(y) - \theta \right\|_{l^2}^2. \quad (3.2.4)$$

Se urmărește ca eroarea din formula (3.2.4) să fie cât mai mică posibil și să se îndeplinească condiția de contracție uniformă

$$\left| \hat{\theta}_I \right| \leq |\theta_I|, \quad I \in \mathcal{I}. \quad (3.2.5)$$

Se consideră o formulă de reconstrucție bazată pe tehnica neliniară *soft thresholding*

$$\eta_\lambda(y) = \text{sgn}(y)(|y| - t)_+. \quad (3.2.6)$$

Se alege pragul $\lambda = \delta$ și se definește estimatorul

$$\hat{\theta}^{(\delta)} = \eta_\lambda(y_I), \quad I \in \mathcal{I}. \quad (3.2.7)$$

Teorema 3.2.1 ([35, Theorem 3.1]) *Estimatorul de tip soft thresholding satisface condiția de contracție (3.2.5).*

3.3 Tehnica *Soft thresholding* și estimarea statistică

Fie (z_I) zgomotul alb, i.i.d., corespunzător modelului abstract (3.2.2). Atunci

$$\pi_n \equiv P \left\{ \| (z_I) \|_{l^\infty} \leq \sqrt{2 \log n} \right\} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.3.1)$$

Relația de mai sus ne motivează să privim modelul (3.2.2) drept o instanță a modelului deterministic (3.2.3), cu nivelul de zgomot $\delta_n = \sqrt{2 \log n} \cdot \varepsilon$.

3.3.1 Eroarea medie pătratică aproape optimală

Teorema de mărginire de mai jos pune în evidență faptul că estimarea statistică la același nivel de zgomot ε nu este mai eficientă decât reconstrucția optimală la nivelul de zgomot δ_n .

Teorema 3.3.1 ([35, Theorem 4.2]) *Fie Θ solid și ortosimetric. Atunci estimatorul $\hat{\theta}^{(n)}$ este aproape minimax și satisface relația*

$$M_n \left(\hat{\theta}^{(n)}, \theta \right) \leq n(2 \log(n) + 1)(\varepsilon^2 + 2.22 M_n^*(\Theta)), \quad \theta \in \Theta, \quad (3.3.2)$$

adică $\hat{\theta}^{(n)}$ este uniform în factorul $4.44 \log(n)$ din cadrul abordării minimax, pentru orice solid ortosimetric.

3.3.2 Contractia aproape minimală

Fie Y o variabilă aleatoare cu distribuția normală $N(\mu, 1)$. Considerăm U_α clasa funcționalelor neliniare, monotone și impare, $u(y)$ care satisfac proprietatea de contracție probabilistică, cu probabilitatea cel puțin $1 - \alpha$.

$$P \{ |u(Y)| \leq |\mu| \geq 1 - \alpha \}, \quad \forall \mu \in \mathbb{R}.$$

Funcția *soft thresholding* $\eta_{\lambda(\alpha)}$ aparține acestei clase, valoarea de prag fiind $\lambda(\alpha) = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$, unde $\Phi(y)$ este distribuția normală standard. Vectorul estimat $\hat{\theta} = (u(y_I))_I$, $u \in U_\alpha$, satisface condiția

$$P\left\{|\hat{\theta}_I| \leq |\theta_I|, \forall I \in \mathcal{I}_n\right\} \geq 1 - (1 - \alpha)^n.$$

3.4 Transformări wavelets de interpolare

În această secțiune vom descrie un anumit tip de transformări wavelets ce caracterizează netezimea din diferite spații de funcții, iar apoi, cu ajutorul lor vom reinterpretă transformările wavelets empirice aplicând algoritmul piramidal de filtrare a unei selecții constituită din funcții.

3.4.1 Metoda transformărilor empirice

Coefficienții wavelets empirici care provin exclusiv din aplicarea operatorilor de filtrare, reprezintă, într-adevăr primii n coeficienți teoretici ai unei transformări din spațiul funcțiilor continue. Această interpretare ne arată, că, în cazul coeficienților wavelets empirici ai unei funcții suficient de netede, aceștia se supun aceluiași tip de estimare ca și coeficienții wavelets ai transformărilor ortogonale teoretice. De asemenea, procedeul de contracție, *shrinking*, spre zero al coeficienților wavelets empirici acționează ca un operator de netezire într-o mare varietate de clase de netezime, iar un procedeu de selecție urmat de o interpolare corespunzătoare a valorilor de selecție are aceeași calitate de operator de netezire. Prin urmare, coeficienții wavelets teoretici sunt în strânsă legătură cu coeficienții wavelets empirici. Acest fapt prezintă o importanță deosebită în studiul unor metode neliniare de netezire, în studiul tehnicii de înlăturare a zgomotului aplicată unor tipuri diferite de date de selecție.

3.4.2 Date de selecție, interpolare și netezire

Presupunem că avem datele de selecție $(2^{-j_1} f(k/2^{j_1}))_{k \in \mathbb{Z}}$. Doar cu ajutorul acestor date vom obține coeficienții wavelets de interpolare ai funcției f la toate nivelele, inclusiv $j_1 - 1$.

Dacă funcția wavelet de interpolare este o funcție spline fundamentală, atunci se generează o interpolare de tip spline, iar dacă funcția wavelet de interpolare este o funcție fundamentală Deslauriers-Dubuc, atunci se obține o interpolare de tipul

3.5 Scheme de subdiviziune

În sens larg, subdiviziunea este o metodă de prelucrare a datelor disponibile la o scară grosieră prin generarea recursivă a acestor date, mai netezite, la rezoluții tot mai fine. Această metodă este utilă în generarea curbelor și suprafețelor, dar este și în strânsă legătură cu construcția funcțiilor wavelets prin intermediul analizei de rezoluție multiplă.

3.5.1 Transformări neliniare bazate pe scheme de diviziune

Schemele uniforme de subdiviziune sunt definite drept operatori ce acționează pe axa numerelor întregi, multidimensională. În anumite condiții, o schema uniformă de subdiviziune, definește o funcție rafinabilă, care poate fi exprimată ca o sumă de dilatări și translații ale ei însăși. O asemenea schemă constă în aplicarea repetată a unui operator de rafinare unei mulțimi date de puncte de control, $P^0 = \{P_0, P_1, P_3 \dots\}$. Fie S acest operator. Punctele de control determină forma curbei limită. Fiecare punct de control al curbei este calculat considerând o sumă ponderată a unui anumit număr de puncte de control, în conformitate cu anumite reguli de diviziune. Mulțimea ponderilor constituie masca schemei de subdiviziune. Punctele de control la nivelul k se calculează cu ajutorul regulii de subdiviziune,

$$P_i^k = (SP^{k-1})_i = (S^k P^0)_i = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{i-2j}^{(k)} P_j^{k-1}, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Mulțimea coeficienților $a^{(k)} = \{a_i^{(k)} \mid i \in \mathbb{Z}\}$ se numește masca schemei de diviziune la nivelul k . Presupunem că masca schemei este întotdeauna de suport finit, deci mulțimea $\{i \in \mathbb{Z} : a_i^{(k)} \neq 0\}$, este finită pentru fiecare $k = 1, 2, \dots$. Punctele de control situate la anumite nivele de rafinare converg spre curba limită. Dacă regula de rafinare este aceeași pentru toate nivelele, atunci schema este staționară.

3.5.2 O schemă nouă în studiu

Vom construi o nouă schemă de subdiviziune prezentată în lucrarea Sobolu R. [109]. Schema s-a obținut prin combinarea schemei ternare interpolatoare descrisă în [63], cazul $b = \frac{2}{9}$, cu schema lui Chaikin [68], [69].

Scopul nostru este de a defini operatorul $S : l(\mathbb{Z}) \rightarrow l(\mathbb{Z})$ care generează mulțimea tuturor polinoamelor quadratice, $\pi_2(\mathbb{R})$.

Conform rezultatelor stabilite de Levin în [74], este suficient să arătăm că pentru operatorul $Q : \pi_2(\mathbb{R}) \rightarrow l(\mathbb{Z})$, avem $SQ = Q\sigma$, și apoi să determinăm operatorul S corespunzător.

Considerăm $Q : \pi_2(\mathbb{R}) \rightarrow l(\mathbb{Z})$, $\forall f \in \pi_2(\mathbb{R})$, $\forall i \in \mathbb{Z}$, astfel,

$$Qf(i) = \begin{cases} f(i), & i \leq 0, \\ f\left(i - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{8}f''\left(i - \frac{1}{2}\right), & i > 0, \end{cases} \quad (3.5.1)$$

și apoi rezolvăm ecuația $SQ = Q\sigma$.

Pentru $P \in l(\mathbb{Z})$ dat, definim operatorul de subdiviziune conform schemei lui Chaikin, adică

$$(SP)_{2i} = \frac{P_i + 3P_{i-1}}{4} \quad \text{și} \quad (SP)_{2i+1} = \frac{3P_i + P_{i-1}}{4}, \quad \text{pentru } i = 2, 3, 4, \dots, \quad (3.5.2)$$

și conform schemei ternare interpolatoare descrisă prin relația

$$(SP)_j^{i+1} = \sum_k a_{3k-j} p_k^i, \quad \text{pentru } i = 0, -2, -3, -4, \dots, \quad (3.5.3)$$

unde $a = (a_j)$ este masca schemei iar $P^i = (p_j^i)$ este mulțimea punctelor punctelor de control după pasul i al subdiviziunii.

Avem $SQf(i) = Q\sigma f(i)$, $\forall f \in \pi_2(\mathbb{R})$, $i \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$. Este necesar să definim $SP(-1)$, $SP(1)$, pentru un P arbitrar, astfel încât S să satisfacă relația $SQ = Q\sigma$ pentru $f \in \pi_2(\mathbb{R})$. Deci vom căuta operatorul S care să satisfacă condițiile

$$\begin{aligned} SP(-1) &= a_0P(-2) + a_1P(-1) + a_2P(0), \\ SP(1) &= b_0P(-1) + b_1P(0) + b_2P(1). \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

Parametrii a_0, a_1, a_2 se calculează conform relației $SQf(-1) = Q\sigma f(-1)$, $\forall f \in \pi_2(\mathbb{R})$. Fie $f(x) = x^k$, $k \in \{0, 1, 2\}$. Rezultă sistemul

$$\begin{aligned} SQ1 = Q1 &\implies a_0 + a_1 + a_2 = 1, \\ SQx = \frac{1}{2}Qx &\implies -2a_0 - a_1 = \frac{1}{2}, \\ SQx^2 = \frac{1}{4}Qx^2 &\implies 4a_0 + a_1 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Similar, din condiția $SQf(1) = Q\sigma f(1)$ pentru orice $f \in \pi_2(\mathbb{R})$, obținem

$$\begin{aligned} SQ1 = Q1 &\implies b_0 + b_1 + b_2 = 1, \\ SQx = \frac{1}{2}Qx &\implies -b_0 + \frac{1}{2}b_2 = \frac{1}{4}, \\ SQx^2 = \frac{1}{4}Qx^2 &\implies b_0 + b_2 = 0. \end{aligned}$$

Sistemele de ecuații descrise anterior au soluția unică,

$$a = \left(\frac{3}{8}, -\frac{5}{4}, \frac{15}{8} \right) \quad \text{și} \quad b = \left(-\frac{1}{6}, 1, \frac{1}{6} \right).$$

Regulile stabilite în relațiile (3.5.1) și (3.5.4) definesc noua schemă S .

Operatorul de subdiviziune de subdiviziune Q definit anterior poate fi extins la un operator local și mărginit definit pe $C(\mathbb{R})$ cu valori în $l(\mathbb{Z}^s)$ astfel

$$Q : C(\mathbb{R}) \rightarrow l(\mathbb{Z}), \quad \forall f \in C(\mathbb{R}), \quad \forall i \in \mathbb{Z},$$

$$Qf(i) = \begin{cases} f(i), & i \leq 0, \\ f(i) - \frac{f(i+1) - f(i)}{2}, & i > 0. \end{cases} \quad (3.5.5)$$

Exemple numerice

Vom testa această nouă schemă prin intermediul funcțiilor $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) = \frac{x}{x^2+1}$, măsurând eroarea $\|\sigma^{-n}S^\infty Q\sigma^n f(x) - f(x)\|_\infty$.

Erorile maximale obținute sunt evidențiate în continuare

n	eroarea maximală pentru f_1	eroarea maximală pentru f_2
0	0.47	0.05
1	0.38	$0.19996 \cdot 10^{-7}$
2	0.09	$0.799679 \cdot 10^{-8}$

Bibliografie

- [1] Abramovich, F. Benjamini, Y., *Thresholding of wavelet coefficients as multiple hypotheses testing procedure*, SpringerVerlag, New York, 1995.
- [2] Abramovich, F. Benjamini, Y., *Adaptive thresholding of wavelet coefficients*, Computational Statistics & Data Analysis, **22** (1996), 351-361
- [3] Abramovich, F., Silverman, B. W., *Wavelet thresholding via Bayesian approach*, J. Roy. Statist. Soc. B., **60** (1998), 725-749.
- [4] Agratini, O., *Aproximare prin operatori liniari*, Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 2000.
- [5] Agratini, O., *Korovkin type error estimates for Meyer-König and Zeller operators*, Mathematical Inequalities & Applications, **1** (2001), 119-126.
- [6] Agratini, O., Chiorean, I., Coman, Ghe., Trîmbițaș, R., *Analiză numerică și teoria aproximării*, Vol.3, Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 2002.
- [7] Agratini, O., Blaga, P., Coman, Ghe., *Lectures on wavelets, numerical methods and statistics*, Casa Cărții de Știință, Cluj-Napoca, 2005.
- [8] Agratini, O., *On statistical approximation in spaces of continuous functions*, Positivity, **13** (2009), 735-743.
- [9] Altomare, F., Campiti, M., *Korovkin-Type approximations theory and its applications*, de Gruyter Series Studies in Mathematics, Vol. 17, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1994.
- [10] Amato, U., Vuza, D., *Wavelet approximation of a function from samples affected by noise*, Rev. Roumaine Math. Pure Appl., **42** (1997), 81-493.
- [11] Antoniadis, A., *Smoothing noisy data with tapered coiflets series*, Scand. J. Statist., **23** (1996), 313-330.
- [12] Antoniadis, A., *Wavelet in statistics: a review*, J. Ital. Statist. Soc. **6** (1997), 1-34.
- [13] Antoniadis, A., *Wavelet methods in statistics: Some recent developments and their applications*, Statistics Surveys, **1** (2007), 16-55.
- [14] Antoniadis, A., Fan, J., *Regularization of wavelets approximations*, J. Ammer. Statist. Assoc., **96** (2001), 939-967.
- [15] Battle, G., *Cardinal spline interpolation and the block-spin construction of wavelets*, Wavelets-A Tutorial in Theory and Applications, C. Chui (ed.), Academic Press, San Diego, California, 1992, 73-93.
- [16] Beylkin, G., Coifman, R., Rokhlin, V., *Fast wavelets transforms and numerical algorithms*, Comm. Pure and Appl. Math. **44** (1991), 141-183.
- [17] Bergh, J., Ekstedt, F., Lindberg, M., *Wavelets*, Studentlitteratur, Lund, 1999.
- [18] Bohman, H., *On approximation of continuous and of analytic functions*, Ark. Mat., **2** (1952), 43-56.
- [19] Clausel, M., Nicolay, S., *Wavelets techniques for pointwise anti-Hölderian irregularity*, Preprint, (2009).
- [20] Clausel, M., Nicolay, S., *A wavelet characterization for the upper global Hölder index*,

- Preprint, (2010).
- [21] Cohen, A., Daubechies, I., Jawerth, B., Vial, P., *Multiresolution analysis, wavelets and fast algorithms on the interval*, Comput. Rend. Acad. Sci. Paris, **316** (1992), 417-421.
 - [22] Cohen, A., *Wavelet Methods in Numerical Analysis. In PG Ciarlet, JL Lions (eds.) Handbook of Numerical Analysis, Vol. VII*, Amsterdam: Elsevier Science, 2000.
 - [23] Coifman, R.R., Wickerhauser, M.V., *Entropy based algorithms for best basis selection*, IEEE Trans Inform Theory **38** (1992), 713-718.
 - [24] Connor, J., Ganichev, M., Kadets, V., *A characterization of Banach spaces with separable duals via weak statistical convergence*, J. Math. Anal. Appl. **244** (2000), 251-261.
 - [25] Connor, J., Swardson, M.A., *Strong integral summability and the Stone-Chech compactification of the half-line*, Pacific J. Math. **157** (1993), 201-224.
 - [26] Chui, C.K., Wang, J., *A cardinal spline approach to wavelets*, Proc. Amer. Math. Soc. **113** (1991), 785-793.
 - [27] Chui, C.K., Wang, J., *On compactly supported spline wavelets and a duality principle*, Transactions of the American Mathematical Society, **330** (1992), 903-915.
 - [28] Chui, C.K., *An Introduction to Wavelets*, Academic Press, Inc., 1999.
 - [29] Daubechies, I., *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM, Philadelphia, 1992.
 - [30] Daubechies, I., *Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets*, SIAM J. Math., Anal., **24** (1993), 499-519.
 - [31] Daubechies, I., Lagaris, J., *Two scale difference equations. II Local Regularity, infinite products of matrices and fractals*, SIAM J. Math. Anal., **22** (1991), 1388-1410.
 - [32] Deslauriers, G., Dubuc, S., *Interpolation dyadique*, Fractals, Dimensions non-entieres et applications, Masson, Paris, 1987.
 - [33] Deslauriers, G., Dubuc, S., *Symmetric iterative interpolation processes*, Constructive Approximation **5** (1989), 49-68.
 - [34] Doğru, O., Duman, O., Orhan, C., *Statistical approximation by generalized Meyer-König and Zeller operators*, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica, **40** (2003), 359-371.
 - [35] Donoho, D.L., *Denoising by soft thresholding*, IEEE Transactions on Information Theory, **41** (1995), 613-627.
 - [36] Donoho, D.L., Johnstone, I.M., *Ideal spatial adaption by wavelet shrinkage*, Biometrika **81** (1994), 425-455.
 - [37] Donoho, D.L., Johnstone, I.M., *Minimax estimation via wavelet shrinkage*, Ann. Statist., **26** (1998), 879-921.
 - [38] Donoho, D.L., Johnstone, I.M., *Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage*, J. Amer. Statist. Assoc., **90** (1995), 1200-1224.
 - [39] Donoho, D.L., *Interpolating wavelet transforms*, Tehnical Report, October, 1992, 1-54.
 - [40] Donoho, D.L., *Interpolating wavelet transforms*, Appl. Computat. Harmonic Anal., **1** (1994), 5-59.
 - [41] Donoho, D.L., *Asymptotic minimaxity of wavelet estimators with sampled data*, Statistica Sinica, **9** (1999), 1-32.
 - [42] Donoho, D.L., Yu., T.P-Y., *Nonlinear pyramid transforms based on median-interpolation*, Siam J. Math. Anal., **5** (2000), 1030-1061.
 - [43] Dubuc, S., *Interpolation through an itrative scheme*, J. Math. Anal. and Appl., **114** (1986), 185-204.
 - [44] Duman, O., *Statistical approximation for periodic functions*, Demonstratio Mathematica, **4** (2003), 873-898.

- [45] Duman, O., Khan, M.K., Orhan, C., *A-statistical convergence of approximating operators*, Math. Inequal. Appl., **6** (2003), 689-699.
- [46] Duman, O., *μ -Statistically convergent function sequences*, Czechoslovak Mathematical Journal, **54** (129)(2004), 413-422.
- [47] Duman, O., Orhan, C., *Statistical approximation by positive linear operators*, Studia Math., **161** (2004), 187-197.
- [48] Eubank, R. L., *Nonparametric regression and spline smoothing-second edition*, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, 1999.
- [49] Fast, H., *Sur la convergence statistique*, Colloq. Math., **2** (1951) 241-244.
- [50] Frazier, M., Jawerth, B., *Decomposition of Besov spaces*, Indiana Univ. Math. J., **2** (1985), 777-799.
- [51] Frazier, M., Jawerth, B., *A discrete transform and decomposition of distribution spaces*, Journal of Functional Analysis, **93** (1990), 34-170.
- [52] Frazier, M., Jawerth, B., Weiss, G., *Littlewood-Paley Theory and the study of function spaces*, NSF-CBMS Regional Conf. Ser in Mathematics, **79**, 1991.
- [53] Fridy, J.A., *On statistical convergence*, Analysis, **5** (1985), 301-313.
- [54] Fridy, J.A., Miller, H. I., *A matrix characterization of statistical convergence*, Analysis, **11** (1991), 59-66.
- [55] Fridy, J.A., *Lacunary statistical summability*, J. Math. Anal. Appl., **173** (1993), 497-504.
- [56] Fridy, J.A., Orhan, C., *Statistical limit superior and limit inferior*, Proceedings of the American Mathematical Society, **12** (1997), 3625-3631.
- [57] Gadjiev, A.D., Orhan, C., *Some approximation theorems via statistical convergence*, Rocky Mountain J. Math., **32** (2002), 129-138.
- [58] Gao, H.Y., Bruce, A., *Waveshrink with firm shrinkage*, Statist. Sinica, **7** (1997), 855-874.
- [59] Gao, H.Y., *Wavelet shrinkage denoising using the non-negative garrot*, J. Comput. Graph. Statist., **7** (1998), 469-488.
- [60] Gori, L., *Multiresolution analyses originated from nonstationary subdivision schemes*, Journal of Computational and Applied Mathematics, **221** (2008), 406-415.
- [61] Hardle, W., Kerkyacharian, G., Picard, D., Tsibakov, A., *Wavelets, Approximation and Statistical Approximation*, Seminaire Paris-Berlin, Berlin, 1997.
- [62] Hassan, M.F., *Further analysis of ternary and 3-point univariate subdivision schemes*, University of Cambridge Computer Laboratory Technical Report, **599** (2004), 3-9.
- [63] Hassan, M.F., Dodgson, D.A., *Ternary and three-point univariate subdivision schemes*, University of Cambridge Computer Laboratory Technical Report, **520** (2002), 199-208.
- [64] Hassan, M.F., Ivriissimitzis, I.P., Dodgson, N.A., Sabin, M.A., *An interpolating 4-point C^2 ternary stationary subdivision*, Computer Aided Geometric Design, **19** (2002), 1-18.
- [65] Jaffard, S., *Estimation Hölderiennes ponctuelle des fonctions au moyen des coefficients d'ondelettes*, Comptes Rendus Acad. Sciences Paris, **308** (1989), 79-81.
- [66] Jaffard, S., *Wavelets methods for pointwise regularity and local oscillations of functions*, Memoirs of the American Mathematical Society, **123** (1996), 550-587.
- [67] Jaffard, S., Nicolay, S., *A sufficient condition for a function to be strongly Hölderian*, Preprint, 2008.
- [68] Jena, M.K., Shunmugaraj, P., Das, P.C., *A non-stationary subdivision scheme for curve interpolation*, Anziam J., **44** (2003), 216-235.
- [69] Joy, K.J., *Chaikin's Algorithms for Curves*, On-Line Geometric Modeling Notes,

- Computer Science Department, University of California, 1999, 1-7.
- [70] Kolk, E., *Matrix summability of statistically convergent sequences*, Analysis, **13** (1993), 77-83.
 - [71] Korovkin, P.P., *On convergence of linear positive operators in the space of continuous function*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, **90** (1953), 53-63.
 - [72] Korovkin, P.P., *Linear Operators and Approximation Theory*, India, Delhi, 1960.
 - [73] Lemarié, P.G., Meyer, Y., *Ondelettes et bases Hilbertiennes*, Revista Mathematica Ibero-Americana, **2** (1986), 1-18.
 - [74] Levin, A., *Polynomial generation and quasi-interpolation in stationary non uniform subdivision*, Computed Aided Geometric Design, **20** (2003), 41-60.
 - [75] Levin, A., *Combined Subdivision Schemes*, PhD Thesis, Tel Aviv University, 2000 (<http://www.math.tau.ac.il/~levin/adi/phd/phd.html>).
 - [76] Lupaş, A., *Some properties of the linear positive operators*, Mathematica, **32**, (1967), 77-83.
 - [77] Mallat, S.G., *A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, **11** (1989), 674-693.
 - [78] Mallat, S.G., *Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$* , Transactions of the American Mathematical Society, **315**, (1989), 1-34.
 - [79] Mallat, S.G., *A Wavelet Tour of Signal Processing*, 2nd ed. London: Academic Press, 1999.
 - [80] Meyer, Y., *Wavelets: Algorithms and Applications*, SIAM, Philadelphia, 1993.
 - [81] Mera, N., *Metode numerice în statistică bazate pe funcții spline*, Teză de doctorat, Cluj
 - [82] Miller, H.I., *A measure theoretical subsequence characterization of statistical convergence*, Trans. Amer. Math. Soc., **347** (1995), 1811-1819.
 - [83] Miller, H.I., Orhan, C., *On almost convergent and statistically convergent subsequences*, Acta. Math. Hungar., **93** (2001), 135-151.
 - [84] Mustafa, G., *Estimating error bounds for ternary subdivision curves*, Journal of Computational Mathematics, **4** (2007), 473-484.
 - [85] Nason, G.P., *Wavelet shrinkage using cross-validation*, J. Roy. Statist. Soc. B, **58** (1996), 463-479.
 - [86] Nason, G.P., Silverman, B.W., *The discret wavelet transform in S* , J. Comput., Graph., Statist., **3** (1994), 163-191.
 - [87] Nason, G.P., *Wavelet methods in statistics with \mathbb{R}* , Springer, 2008.
 - [88] Neunzert, H., Siddiqi, A.H., *Topics in industrial mathematics Case studies and mathematical methods*, Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 2000.
 - [89] Nievergelt, Y., *Wavelets made easy*, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 1999.
 - [90] Ogden, R.T., Parzen, E., *Change-point approach to data analytic wavelet thresholding*, Statistics and Computing, **6** (1996), 93-99.
 - [91] Ogden, R.T., Parzen, E., *Data depending wavelet thresholding in nonparametric regression with change-point applications*, Computational Statistics and Data Analysis, **22** (1996), 53-70.
 - [92] Ogden, R.T., *Essential wavelets for statistical applications and data analysis*, Birkhauser, Boston, 1997.
 - [93] Özarslan M.A., Duman, O., Dođru, O., *Rates of A-statistical convergence of approximating operators*, Calcolo **42** (2005), 93-104.
 - [94] Popoviciu, T., *Asupra demonstrației teoremei lui Weierstrass cu ajutorul polinoamelor de interpolare*, Lucrările Ses. Gen. St. Acad. Române din 1950, 1-4 (1950), translated into English by D. Kacsó, *On the proof Weierstrass' theorem using in-*

- terpolation polynomials*, East J. Approx., **4** (1998), 107-110.
- [95] Rioul, O., *Simple regulariry criteria for subdivision schemes*, Siam J. Math. Anal., **6** (1992), 1544-1576.
- [96] Roşca, D., *Introducere în analiza wavelet*, Editura Mediamira, Cluj-Napoca, 2010.
- [97] Saito, N., Beyklin, G., *Multiresolution representation using the autocorrelation functions of compactly supported wavelets*, IEEE Trans. Signal Proc., **41** (1993), 3584-3590.
- [98] Schöenberg, I.J., *The integrability of certain functions and related summability methods*, Amer. Math. Monthly, **66** (1959), 361-375.
- [99] Schöenberg, I.J., *Cardinal interpolation and spline functions. Iterpolation of data of power growth*, Journ. Approx. Theory, **6** (1972), 404-420.
- [100] **Sobolu, R.**, *Statistical approximation by positive linear operators involving a certain class of generating functions*, In: Proceedings of the International Conference on Numerical Analysis and Approximation Theory NAAT2006, Cluj-Napoca, Romania, July 4-8, 2006, (Eds. Octavian Agratini, Petru Blaga), pp. 387-391, Casa Cărţii de Ştiinţă, 2006: MR2281998 (2007j:41019).
- [101] **Sobolu, R.**, *Statistical approximation by an integral type generalization of positive linear operators involving a certain class generating functions*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Mathematica, **52** (2007), 157-165: MR2368066 (2009a:41044).
- [102] **Sobolu, R.**, Micula, S., *Statistical processing of experimental data using MAPLE10*, Bulletin of University of Agricultural Sciences and Veterinary Medicine - Horticulture, **64** (1-2) (2007), 581-587.
- [103] **Sobolu, R.**, Pop, I., Pusta, D., *Computational molecular biology and wavelets*, Bulletin of University of Agricultural Sciences and Veterinary Medicine Horticulture, **64** (1-2) (2007), 816.
- [104] **Sobolu, R.**, Pusta, D., Micula, S., *Adapted Wavelets to Statistical Determinations of Tachycardia in Cows under Heat Stress Caused by Solar Radiation*, In: Proceedings of the 43-rd Croatian and 3-rd International Symposium Agriculture, Opatija, Croatia, February 18-21, 2008, (Ed. Milan Pospšil), pp. 809-813, Published by University of Zagreb, Faculty of Agriculture, 2008.
- [105] Pusta, D., **Sobolu, R.**, Morar, R., *Determinations of the respiratory rate in cows exposed to solar radiation and their processing by wavelet transforms*, In: Proceedings of the 43-rd Croatian and 3-rd International Symposium Agriculture, Opatija, Croatia, February 18-21, 2008, (Ed. Milan Pospšil), pp. 775-779, Published by University of Zagreb, Faculty of Agriculture, 2008.
- [106] **Sobolu, R.**, Pusta, D., Micula, S., Stanca, L., *Approximation of samples with Daubechies Wavelets*, Bulletin of University of Agricultural Sciences and Veterinary Medicine - Horticulture, **65** (2) (2008), 608-613.
- [107] **Sobolu, R.**, Pop, I., Micula, M., *Distribution fitting in Statistica application*, Bulletin of University of Agricultural Sciences and Veterinary Medicine - Horticulture, **65** (2) (2008), 673.
- [108] **Sobolu, R.**, Pusta, D., *Wavelet Methods in Nonparametric Regression Based on Experimental Data*, Bulletin of University of Agricultural Sciences and Veterinary Medicine Horticulture, **66** (2) (2009), 718-725.
- [109] **Sobolu, R.**, *On a Stationary Non-uniform Subdivision Scheme*, Automation Computers Applied Mathematics, **18** (2009), 187-197: MR2640342 (2011c:65027).
- [110] Pusta, D., **Sobolu, R.**, Pasca, I., *Variations of the antioxidants systems in blood of dairy cows exposed to solar radiation and the processing of the data using wavelets transforms*, In: Proceedings of the 19th International Congress of the Hungarian Association for Buiatrics, Debrecen, Hungary, October 14-17, 2009, (Eds. Szenci Otto,

Brydl Endre, Jurkovich Viktor), pp. 102-107, Published by Dr. BATA Biotechnológiai Zrt., 2009.

- [111] Steinhaus, H., *Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique*, Colloq. Math., **2** (1951), 73-74.
- [112] Triebel, H., *Theory of function spaces*, Birkhauser Verlag: Basel, 1983.
- [113] Wahba, G., Craven, P., *Smoothing noisy data with spline functions: estimating the correct degree of smoothing by the method of generalized cross-validation*, Numer. Math., **31** (1979), 377-403.
- [114] Wahba, G., Golub, G., Heath, M., *Generalized cross-validation as a method for choosing a good ridge parameter*, Technometrics, **21** (1979), 215-223.
- [115] Walker, D.F., *An Introduction to Wavelet Analysis*, Boca Raton, London, New York: Chapman & Hall/CRC, 1999.
- [116] Walnut, D.F., *An Introduction to Wavelet Analysis*, Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser, 2002.
- [117] Zygmund, A., *Trigonometric series*, Cambridge University Press, Cambridge, 1979.