

WEST UNIVERSITY OF TIMIȘOARA  
FACULTY OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

ON THE ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF  
DYNAMICAL SYSTEMS AND  
APPLICATIONS

**Habilitation Thesis**

Author: BOGDAN SASU

Timișoara, 2013

## Table of contents

<b>Abstract</b> .....	3
<b>Rezumat</b> .....	6
<b>Chapter 1 - The asymptotic behavior of nonautonomous discrete dynamical systems and applications to evolution families</b>	
1.1 Scientific context and key achievements .....	9
1.2 Discrete dynamical systems on the half-line .....	15
1.3 Stability of nonautonomous discrete dynamical systems .....	21
1.4 Ordinary dichotomy of nonautonomous discrete dynamical systems ...	33
1.5 The admissibility of the pair $(\ell^p(\mathbb{N}, X), \ell_0^q(\mathbb{N}, X))$ .....	45
1.6 The admissibility of the pair $(\ell^\infty(\mathbb{N}, X), \ell_0^q(\mathbb{N}, X))$ .....	53
1.7 Exponential dichotomy and input-output methods with abstract sequence spaces .....	60
1.8 Applications to nonautonomous systems on the half-line .....	74
<b>Chapter 2 - The asymptotic behavior of variational discrete dynamical systems and applications to skew-product flows</b>	
2.1 Scientific context and key achievements .....	82
2.2 Variational discrete dynamical systems over flows .....	85
2.3 Stability of variational discrete dynamical systems .....	88
2.4 Expansiveness of variational discrete dynamical systems .....	98
2.5 Uniform dichotomy of variational discrete dynamical systems .....	110
2.6 Exponential dichotomy of variational discrete dynamical systems ....	121
2.7 Robustness of the exponential dichotomy of variational discrete dynamical systems .....	138
2.8 Applications to skew-product flows .....	143

**Chapter 3 - Integral criteria for the asymptotic behavior of skew-product flows**

3.1 Scientific context and key achievements ..... 151  
3.2 Integral admissibility for dichotomy of skew-product flows ..... 153  
3.3 Rolewicz type techniques for dichotomy of skew-product flows ..... 162  
3.4 Integral criteria for trichotomy of skew-product flows ..... 170

**Appendix**

A.1 Banach sequence spaces on the half-line ..... 181  
A.2 Banach sequence spaces on the whole line ..... 187

**Further developments** ..... 190

**References** ..... 195

## Abstract

The aim of this work is to present a unified study concerning the asymptotic behavior of dynamical systems in infinite-dimensional spaces, based on some of the most relevant results of the author published in the past ten years. We present original resolutions to several classes of open problems in this framework, using arguments of the asymptotic theory of evolution equations, functional analysis and control theory. The thesis is organized into three main parts: the first part is focused on the case of nonautonomous discrete systems on the half-line, the second part is concerned with variational discrete dynamical systems over flows and the third part is devoted to integral techniques in the study of the asymptotic behavior of skew-product flows.

In the first chapter we consider the nonautonomous discrete systems of the form

$$(A) \quad x(n+1) = A(n)x(n), \quad n \in \mathbb{N}$$

where each  $A(n)$  is a bounded linear operator on a Banach space  $X$ . Having as starting point a conjecture formulated by Aulbach and Minh, we shall expose a systematic investigation concerning the admissibility methods for nonautonomous discrete systems. In section 1.2 we introduce the basic notions and we establish several technical properties. In section 1.3, we present criteria for the stability properties in terms of the solvability of an associated input-output system between two abstract sequence spaces. We analyze the axiomatic structures of the input spaces and of the output spaces which can be considered in the study of the stability of nonautonomous discrete systems and we present a complete diagram of the classes of sequence spaces that can be used in this approach.

Next we introduce a discrete admissibility concept and we prove in several stages that this admissibility can be used to provide a complete study concerning the dichotomic properties of dynamical systems on the half-line. In section 1.4 we prove that the admissibility of a pair of sequence spaces which are invariant under translations, implies the existence of the projections family and of the ordinary dichotomy. In sections 1.5 and 1.6, the study focuses on the admissibility with  $\ell^p$ -spaces. We obtain necessary and sufficient conditions for exponential dichotomy which generalize all the previous approaches in the literature. In section 1.7 we present answers to the most difficult problem concerning the admissibility concepts which can assure the existence of the exponential dichotomy. We prove that by imposing some sharper (but also minimal) conditions on the underlying

sequence spaces, the admissibility becomes a sufficient (and respectively a necessary) condition for exponential dichotomy. We show that our approach is the most general in this topic and that the method is applicable to any nonautonomous discrete system on the half-line.

In section 1.8, we present an important application to the case of general nonautonomous systems modeled by evolution families. We present a constructive method which shows how one can recover the dichotomic behavior of an evolution family based only on the discrete-time behavior, starting with the properties on stable and unstable subspaces and ending with the existence of the dichotomy projections. Finally, we obtain a complete description of the exponential dichotomy of evolution families on the half-line in terms of discrete admissibility.

In the second chapter we consider the variational discrete dynamical systems of the form

$$(\tilde{A}) \quad x(\theta)(n+1) = A(\sigma(\theta, n))x(\theta)(n), \quad (\theta, n) \in \Theta \times \mathbb{N}$$

where  $\sigma$  is a discrete flow on a metric space  $\Theta$  and  $\{A(\theta)\}_{\theta \in \Theta}$  is a family of bounded linear operators. Our aim is to present answers to several interesting problems concerning the asymptotic properties of discrete dynamical systems over discrete flows. In sections 2.3 and 2.4, we obtain characterizations for stability and expansiveness, using Perron techniques with sequence spaces over  $\mathbb{N}$ . We present two completely distinct methods: a specific technique for stability and a global approach for expansiveness, pointing out the most important technical aspects in each case. Moreover we clarify all hypotheses in examples and applications.

In sections 2.5 and 2.6 our study focuses on the detection of the dichotomic behavior. We introduce a natural admissibility concept with sequence spaces over  $\mathbb{Z}$ , which is optimal in the variational case. We present an extensive and detailed study in two main stages: the existence of the uniform dichotomy and the analysis of the admissibility concepts which can imply the existence of the exponential dichotomy. We obtain a complete classification of the classes of admissible spaces and motivate the key hypotheses. We present various characterizations for uniform exponential dichotomy, which generalize the previous results in the literature (among we mention the remarkable results of Chow and Leiva) and also extend the applicability area.

In section 2.7 we present an important application concerning the robustness of the exponential dichotomy in the presence of perturbations. We deduce an estimation of the size of the largest perturbation which preserves the exponential dichotomy, by using input-output techniques. In section 2.8 we present a unified study for the properties of stability, expansiveness and dichotomy of skew-product flows, using various discrete admissibility concepts. Our approach provides a general overview on the discrete input-output methods that can be considered in the asymptotic theory of dynamical systems.

In Chapter 3 we expose several integral methods for the study of the asymptotic behavior of skew-product flows. In section 3.2 we deduce characterizations for the exponential dichotomy of skew-product flows in terms of the solvability of an integral equation on  $L^p$ -spaces and we discuss the extension of the method by using integral equations on abstract function spaces. In section 3.3 we propose a nonlinear approach to the study of the exponential dichotomy and we present a Rolewicz type method. As a consequence we deduce a Datko-type characterization for exponential dichotomy of skew-product flows. In section 3.4 we study the most complex case and we present one of the newest approaches concerning the existence of the exponential trichotomy. We show that the fundamental subspaces (stable, unstable and neutral) play a crucial role in determining the structure of the trichotomy projections and their uniqueness. After that, we deduce integral criteria for exponential trichotomy of skew-product flows. Throughout this chapter we present applications of the preceding results and we point out their importance in the asymptotic theory of dynamical systems.

## Rezumat

Scopul acestei teze este de a prezenta un studiu unitar al comportărilor asimptotice ale sistemelor dinamice în spații infinite-dimensionale, bazat pe unele dintre cele mai relevante rezultate ale autorului publicate în ultimii zece ani. Vom prezenta răspunsuri originale la câteva clase de probleme deschise în acest domeniu, utilizând tehnici din teoria asimptotică a sistemelor dinamice, analiza funcțională și teoria controlului. Teza este organizată în trei capitole: primul capitol tratează cazul sistemelor discrete neautonome pe semiaxă, în al doilea capitol se studiază sistemele dinamice discrete variaționale peste fluxuri, iar al treilea capitol prezintă tehnici integrale în studiul comportărilor asimptotice ale cocicliilor peste fluxuri.

În primul capitol se consideră sisteme discrete neautonome de forma

$$(A) \quad x(n+1) = A(n)x(n), \quad n \in \mathbb{N}$$

unde  $A(n)$  este un operator liniar și mărginit pe un spațiu Banach  $X$ . Pornind de la conjectura formulată de Aulbach și Minh, vom prezenta un studiu sistematic privind metodele de admisibilitate pentru sisteme neautonome pe semiaxă. În secțiunea 1.2 se introduc noțiunile de bază și se stabilesc câteva proprietăți tehnice. În secțiunea 1.3 prezentăm criterii pentru proprietățile de stabilitate în termeni de solvabilitate a unui sistem intrare-ieșire între două spații abstracte de șiruri. Analizăm structurile axiomatice ale spațiilor de intrare și de ieșire care pot fi considerate în studiul stabilității sistemelor discrete neautonome și prezentăm o diagramă completă a claselor de spații de șiruri care pot fi utilizate în această metodă.

În continuare, introducem un concept de admisibilitate și demonstrăm în câteva etape că acesta poate fi utilizat pentru a obține un studiu complet privind proprietățile de dichotomie ale sistemelor dinamice pe semiaxă. În secțiunea 1.4 demonstrăm că admisibilitatea unei perechi de spații de șiruri invariante la translații, implică existența familiei de proiectori și a dichotomiei ordinare. În secțiunile 1.5 și 1.6 studiul este concentrat pe admisibilitatea cu spații  $\ell^p$ . Obținem condiții necesare și suficiente pentru dichotomia exponențială care generalizează toate abordările precedente din literatură. În secțiunea 1.7 prezentăm răspunsuri pentru cea mai dificilă problemă, privind conceptele de admisibilitate care pot asigura existența dichotomiei exponențiale. Demonstrăm că prin impunerea unor condiții mai stricte (dar minimale) asupra spațiilor considerate, admisibilitatea devine o condiție suficientă (și respectiv necesară) pentru dichotomia exponențială. Arătăm că abordarea propusă este cea mai generală în această

topică și că metoda este aplicabilă pentru orice sistem discret neautonom pe semiaxă.

În secțiunea 1.8 expunem o aplicație importantă pentru cazul general al sistemelor neautonome modelate de familii de evoluție. Prezentăm o metodă constructivă care arată cum se poate recupera comportarea dichotomică a unei familii de evoluție utilizând exclusiv comportarea discretă, de la proprietățile pe subspațiile stabile și instabile și până la existența proiectoarelor de dichotomie. În final, obținem o descriere completă a dichotomiei exponențiale a familiilor de evoluție pe semiaxă în limbaj de admisibilitate discretă.

În al doilea capitol considerăm sisteme discrete variaționale de forma

$$(\tilde{A}) \quad x(\theta)(n+1) = A(\sigma(\theta, n))x(\theta)(n), \quad (\theta, n) \in \Theta \times \mathbb{N}$$

unde  $\sigma$  este un flux discret pe un spațiu metric  $\Theta$  și  $\{A(\theta)\}_{\theta \in \Theta}$  o familie de operatori liniari și mărginiți. Scopul nostru este de a prezenta răspunsuri pentru o serie de probleme interesante privind proprietățile asimptotice ale sistemelor dinamice peste fluxuri discrete. În secțiunile 2.3 și 2.4 obținem caracterizări pentru stabilitate și expansivitate, utilizând tehnici Perron cu spații de șiruri peste  $\mathbb{N}$ . Prezentăm două metode distincte: o tehnică specifică pentru stabilitate și o abordare globală pentru expansivitate, evidențiind cele mai importante aspecte în fiecare caz.

În secțiunile 2.5 și 2.6 studiul nostru se concentrează pe detectarea comportării dichotomice. Introducem un concept natural de admisibilitate cu spații de șiruri peste  $\mathbb{Z}$  care este optim în cazul variațional. Prezentăm un studiu detaliat și extensiv în două etape: existența dichotomiei uniforme și analiza conceptelor de admisibilitate care pot implica existența dichotomiei exponențiale uniforme. Obținem o clasificare completă a claselor de spații admisibile și motivăm ipotezele. Prezentăm diverse caracterizări ale dichotomiei exponențiale uniforme, care generalizează rezultate anterioare din literatură (printre care menționăm rezultatele remarcabile ale lui Chow și Leiva) și extind aria de aplicabilitate.

În secțiunea 2.7 prezentăm o aplicație importantă privind robustețea dichotomiei exponențiale în prezența perturbărilor. Deducem o estimare a celei mai mari perturbări care păstrează proprietatea de dichotomie exponențială, utilizând tehnici de tip intrare-ieșire. În secțiunea 2.8 prezentăm un studiu unitar al proprietăților de stabilitate, expansivitate și dichotomie a cocicilor peste fluxuri, utilizând diverse concepte de admisibilitate. Abordarea propusă asigură o viziune de ansamblu asupra metodelor discrete de tip intrare-ieșire care pot fi considerate în teoria asimptotică a sistemelor dinamice.

În Capitolul 3 expunem câteva metode integrale pentru studiul comportărilor asimptotice ale cocicilor peste fluxuri. În secțiunea 3.2 deducem caracterizări pentru dichotomia exponențială a cocicilor prin intermediul solvabilității unei



ecuații integrale pe spații  $L^p$  și discutăm extinderea metodei la ecuații integrale pe spații abstracte. În secțiunea 3.3 propunem o abordare neliniară a dichotomiei exponențiale și prezentăm o metodă de tip Rolewicz. Ca și consecință deducem o caracterizare de tip Datko pentru dichotomia cocicililor. În secțiunea 3.4 studiem cel mai complex caz și prezentăm una dintre cele mai noi abordări privind existența trichotomiei exponențiale. Arătăm că subspațiile fundamentale (stabile, instabile, neutre) au un rol crucial în determinarea structurii proiectoarelor de trichotomie și a unicității acestora. Apoi, deducem criterii integrale pentru trichotomia exponențială a cocicililor peste fluxuri. Pe tot parcursul acestui capitol prezentăm aplicații ale rezultatelor expuse anterior și ilustrăm importanța acestora în teoria asimptotică a sistemelor dinamice.