

UNIVERSITATEA DIN ORADEA
DEPARTAMENTUL DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ

REZUMATUL TEZEI DE ABILITARE

CU TITLUL:

**CONTRIBUȚII LA DEZVOLTAREA
TEORIEI SUBORDONĂRILOR
ȘI SUPERORDONĂRILOR DIFERENȚIALE**

PREZENTATĂ DE CĂTRE

CONF. UNIV. DR. **GEORGIA IRINA OROS**

28 IANUARIE 2014

Rezumat

Această teză, alcătuită din 8 capitole, o introducere și o bibliografie, se bazează pe 45 lucrări selectate ale autoarei (scrise singură sau în colaborare) împreună cu rezultatele selectate din două monografii de cercetare ale autoarei [GIO1], [GIO2] (toate menționate în bibliografie).

Analiza complexă este una dintre ramurile clasice ale matematicii, ce își are rădăcinile în secolul al XIX-lea, unele chiar înainte, nume importante care au contribuit la dezvoltarea acestui domeniu fiind Euler, Gauss, Cauchy, Riemann, Weierstrass. Ea se ocupă îndeosebi de studiu funcțiilor complexe analitice care sunt împărțite în două mari clase: funcții olomorfe și funcții meromorfe, dar și de studiul funcțiilor neanalitice.

Analiza complexă este una dintre disciplinele la care școala românească de matematică a adus importante contribuții, prin D. Pompeiu, Gh. Călugăreanu, P.T. Mocanu, și totodată ea este o ramură a matematicii cu largi aplicații în diferite domenii ale științei și tehnicii. O direcție importantă a analizei complexe este teoria geometrică a funcțiilor analitice. Interpretarea geometrică a unor proprietăți matematice exprimate pur analitic și pe de altă parte exprimarea în limbaj analitic a unor proprietăți geometrice constituie unul din obiectivele majore ale teoriei geometrice a funcțiilor analitice. Teoria geometrică a funcțiilor a început să se dezvolte ca o ramură aparte a analizei complexe la începutul secolului al XX-lea când au apărut primele lucrări importante în acest domeniu, datorate lui P. Koebe [Koe], I.W. Alexander [Alx], L. Bieberbach [Bie]. În 1916, matematicianul L. Bieberbach a enunțat celebra conjectură care îi poartă numele și care nu a putut fi demonstrată până în 1984, când a fost demonstrată surprinzător de Louis de Branges într-un moment când anumiți experți încercau mai degrabă să demonstreze că nu este adevărată. Conjectura lui Bieberbach a impulsivat cercetările în acest domeniu timp de aproape un secol.

Una din direcțiile urmărite a fost aceea a introducerii unor clase de funcții univalente, cum ar fi de exemplu funcțiile stelate, funcțiile convexe, funcțiile Mocanu (α -convexe) pentru care conjectura lui Bieberbach să poată fi verificată.

În mod natural se pune problema de a vedea ce alte condiții se pot adăuga condiției $f'(z) \neq 0, \forall z \in D$ (care asigură univalența locală) care să asigure univalența globală a funcției f în domeniul D . Este de dorit să se obțină condiții necesare și suficiente de univalență. În cazul când D este un disc, astfel de condiții au fost obținute pentru prima oară în anul 1931 de Gh. Călugăreanu, în [Cal] care a pus bazele unei școli de teoria funcțiilor univalente la Universitatea Babeș-Bolyai din Cluj-Napoca, condusă apoi de Acad. P.T. Mocanu.

Condițiile necesare și suficiente de univalență sunt date de obicei sub forma unor inegalități diferențiale și fiecare condiție suficientă de univalență definește o anumită clasă de funcții univalente. Au apărut și luat amploare noi metode de cercetare în domeniul analizei complexe dintre care menționăm metoda parametrică a lui Loewner, metoda reprezentărilor integrale, metoda subordonărilor diferențiale (cunoscută și ca metoda funcțiilor admisibile) și metoda superordonărilor diferențiale.

Metoda subordonărilor diferențiale a fost elaborată de S.S. Miller și P.T. Mocanu în [Mi-Mo1] și [Mi-Mo2]. Aplicarea acestei metode permite obținerea unor rezultate deosebit de importante în domeniul teoriei geometrice a funcțiilor complexe precum și demonstrarea pe o cale simplă a unor rezultate clasice din acest domeniu. Multe extinderi sau generalizări ale acestor rezultate clasice au putut fi introduse tot datorită acestei teorii.

Metoda superordonărilor diferențiale a fost introdusă ca o metodă duală a metodei subordonărilor diferențiale de S.S. Miller și P.T. Mocanu în [Mi-Mo9].

Activitatea științifică, începută cu teza de doctorat "Studiul unor clase de funcții univalente", susținută la Universitatea Babeș-Bolyai Cluj-Napoca, Facultatea de Matematică și Informatică, 2006, conducător științific prof. univ. dr. Grigore Șt. Sălăgean, se desfășoară în domeniul Teoriei Geometrice a Funcțiilor Analitice (Funcții Univalente) și a funcțiilor neanalitice și se referă în special la următoarele teme:

1. Studiul unor clase de funcții univalente obținute cu ajutorul unor operatori diferențiali și studierea în aceste clase a unor subordonări și superordonări diferențiale.
2. Introducerea unor clase de funcții univalente care extind clasa funcțiilor Mocanu (α -convexe).
3. Studiul unor noi operatori diferențiali și cu ajutorul lor a noi clase de funcții univalente.
4. Studiul unor noi operatori integrali pe clase de funcții univalente.
5. Elaborarea teoriei noțiunii de tare subordonare diferențială ca o extindere a noțiunii de subordonare diferențială.

6. Elaborarea teoriei noțiunii de tare superordonare diferențială ca o problemă duală a noțiunii de tare subordonare diferențială.

7. Obținerea unor criterii suficiente de univalență folosind tare subordonările diferențiale liniare.

8. Obținerea unor criterii suficiente de univalență folosind tare subordonările diferențiale neliniare.

9. Extinderea metodei subordonărilor diferențiale (metoda funcțiilor admisibile) la funcțiile complexe neanalitice de clasă C^1 și C^2 .

10. Extinderea metodei superordonărilor diferențiale la clasa funcțiilor complexe neanalitice de clasă C^1 și C^2 .

Principalele contribuții referitoare la cele 10 teme conținute în teza de abilitare sunt:

În primul capitol, "Second order differential subordinations", în paragrafele 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5 sunt prezentate noțiunile fundamentale legate de metoda subordonărilor diferențiale sau metoda funcțiilor admisibile, noțiuni care pot fi găsite în monografia [Mi-Mo8] sau în articolele menționate în această teză.

Metoda subordonărilor diferențiale poate fi formulată pe scurt, astfel:

Considerăm Ω și Δ două submulțimi ale lui \mathbb{C} . Fie p o funcție analitică în discul unitate U , cu $p(0) = a$ și fie $\psi(r, s, t; z) : \mathbb{C}^3 \times U \rightarrow \mathbb{C}$. Se pune problema studierii unor implicații de forma:

$$(1.1.1) \quad \psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) \subset \Omega \Rightarrow p(U) \subset \Delta.$$

Dacă Ω și Δ sunt domenii simplu conexe din \mathbb{C} , diferite de \mathbb{C} , și $a \in \Delta$, atunci există transformările conforme $q : U \rightarrow \Delta$, $q(U) = \Delta$, $q(0) = a$ și $h : U \rightarrow \Omega$, $h(U) = \Omega$, $h(0) = \psi(a, 0, 0; 0)$ și dacă ψ este olomorvă în U , atunci (1.1.1) poate fi scrisă

$$(1.1.2) \quad \psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) \prec h(z) \Rightarrow p(z) \prec q(z).$$

În paragraful 1.6 sunt prezentate noțiunile legate de subordonările diferențiale de tip Briot-Bouquet precum și teoremele cele mai importante necesare în dezvoltarea subordonărilor diferențiale de tip Briot-Bouquet.

În paragraful 1.7 apare prima contribuție personală legată de studiul unor clase de funcții univalente obținute cu ajutorul operatorului $D_\lambda^n f$ introdus în [AI-O]. Folosind acest operator diferențial se definește clasa de funcții univalente $R^n(\lambda, \alpha)$.

Definiția 1.7.1. [AI-O] Pentru $0 \leq \alpha < 1$, $\lambda \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, vom nota cu $R^n(\lambda, \alpha)$ clasa funcțiilor $f \in A$ care satisfac inegalitatea

$$\operatorname{Re} [D_\lambda^{n+1} f(z)]' > \alpha, \quad z \in U,$$

unde

$$D_\lambda^{n+1} f(z) = (1 - \lambda) D_\lambda^n f(z) + \lambda z [D_\lambda^n f(z)]', \quad z \in U$$

$D_\lambda^{n+1} f$ se numește operatorul diferențial Sălăgean,

$$D_\lambda^n f(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty} j^n a_j z^j, \quad z \in U.$$

Rezultatul principal obținut în lucrarea [GIO-GhO2] este:

Teorema 1.7.1. [GIO-GhO2] Fie

$$h(z) = \frac{1 + (2\alpha - 1)z}{1 + z}, \quad z \in U,$$

o funcție convexă în U , cu $h(0) = 1$, $0 \leq \alpha < 1$.

Dacă $\lambda > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $f \in A$, satisface subordonarea diferențială

$$D_\lambda^{n+1} f(z) \prec h(z), \quad z \in U,$$

atunci

$$[D_\lambda^n f(z)]' \prec q(z) = 2\alpha - 1 + \frac{2(1 - \alpha)}{\lambda} \cdot \frac{1}{z^{\frac{1}{\lambda}} \sigma \left(\frac{1}{\lambda} \right)}$$

unde

$$(1.7.1) \quad \sigma(x) = \int_0^z \frac{t^{x-1}}{1+t} dt, \quad z \in U.$$

Funcția q este convexă și cea mai bună dominantă a subordonării diferențiale.

Din această teoremă se poate obține cu ușurință proprietatea de incluziune:

Corolar 1.7.1. [GIO-GhO2] Avem

$$R^{n+1}(\alpha, \lambda) \subset R^{n+1}(\delta, \lambda)$$

unde

$$\delta = \delta(\lambda, \alpha) = 2\alpha - 1 + 2(1 - \alpha) \frac{1}{\lambda} \sigma \left(\frac{1}{\lambda} \right),$$

unde σ este dat de (1.7.1).

Folosind același operator diferențial definim clasa de funcții univalente notată cu $S_\lambda(\alpha, \beta, n)$.

Definiția 1.7.2. [GIO-GhO3] Dacă $\alpha \geq 0$, $0 \leq \beta < 1$, $\lambda > 0$, și $n \in \mathbb{N} = \mathbb{N}^* \cup \{0\}$, notăm cu $S_\lambda(\alpha, \beta, n)$ clasa funcțiilor $f \in A$ care satisfac inegalitatea

$$\operatorname{Re} \left[\frac{\alpha}{\lambda} \cdot \frac{D_\lambda^{n+2} f(z)}{f(z)} + \frac{D_\lambda^{n+1} f(z)}{f(z)} \left(1 - \frac{\alpha(1-\lambda)}{\lambda} - \alpha \cdot \frac{zf'(z)}{f(z)} \right) \right] > \beta.$$

Observația 1.7.1. a) Dacă $\alpha = 0$, $n = 0$, $\beta = 0$ și $\lambda = 1$, atunci obținem

$$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} > 0, \quad z \in U,$$

clasa funcțiilor stelate.

b) Pentru $\alpha = 0$, $n = 0$, $0 \leq \beta < 1$ și $\lambda \neq 1$ obținem

$$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} > \beta, \quad z \in U,$$

clasa funcțiilor stelarate de ordinul β .

c) Pentru $\lambda = 1$, $\alpha \geq 0$, $0 \leq \beta < 1$, $n \in \mathbb{N}^* \cup \{0\}$, obținem

$$\operatorname{Re} \left[\alpha \frac{D^{n+2} f(z)}{f(z)} + \frac{D^{n+1} f(z)}{f(z)} \left(1 - \alpha \frac{zf'(z)}{f(z)} \right) \right] > \beta, \quad z \in U,$$

clasa $S(\alpha, \beta, n)$ studiată în [GIO3].

În această clasă sunt studiate mai multe subordonări diferențiale interesante și se obține proprietatea:

Corolarul 1.7.2. [GIO-GhO3] *Avem*

$$S_\lambda(\alpha, \beta, n) \subset S_\lambda(\alpha, \delta, n)$$

unde

$$\delta = 2\beta - 1 + \frac{2(1-\beta)}{\alpha} \sigma \left(\frac{1}{\alpha} \right),$$

$$\sigma \left(\frac{1}{\alpha} \right) = \int_0^z \frac{t^{\frac{1}{\alpha}} - 1}{1+t} dt, \quad z \in U.$$

Definiția 1.7.3. [GIO-GhO4] Dacă $0 \leq \alpha < 1$, $\lambda \geq 0$, $n, m \in \mathbb{N}^* \cup \{0\}$, notăm cu $R_n^m(\lambda, \alpha)$ clasa funcțiilor $f \in A_n$ care satisface inegalitatea

$$\operatorname{Re} [D_\lambda^m f(z)]' > \alpha, \quad z \in U,$$

unde

$$D_\lambda^m f(z) = (1-\lambda) D_\lambda^m f(z) + \lambda z [D_\lambda^m f(z)]', \quad z \in U.$$

Observația 1.7.2. Această clasă de funcții univalente generalizează clasele de funcții studiate:

a) Pentru $0 \leq \alpha < 1$, $\lambda \geq 0$, $n = 1$, $m \in \mathbb{N}^* \cup \{0\}$, obținem clasa

$$\operatorname{Re} [D^m f(z)]' > \alpha,$$

studiată în [AL-O].

b) Pentru $0 \leq \alpha < 1$, $n = 1$, $m = 1$, obținem

$$\operatorname{Re} [f'(z) + \lambda z f''(z)] > \alpha, \quad z \in U,$$

clasa studiată de Ponnusamy în [Pon].

c) Pentru $\alpha = 0$, $n = 1$, $m = 0$, $\lambda = 0$, obținem

$$\operatorname{Re} f'(z) > 0, \quad z \in U,$$

care este un criteriu de univalență.

Rezultatul important legat de această clasă este:

Teorema 1.7.2. [GIO-GhO4] *Clasa $R_n^m(\lambda, \alpha)$ este convexă.*

În această clasă s-au studiat interesante subordonări diferențiale, după cum urmează:

Teorema 1.7.3. [GIO-GhO4] Fie $n, m \in \mathbb{N}$, $\lambda \geq 0$, $c \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} c > 0$ și ω un număr real dat de

$$\omega = \frac{n^2 + |c + 2|^2 - |n^2 - 2c - 4|}{4n\operatorname{Re}(c + 2)}.$$

Fie h o funcție analitică în U cu $h(0) = 1$ și care satisface inegalitatea

$$\operatorname{Re} \frac{zh''(z)}{h'(z)} + 1 \geq \omega.$$

Dacă $f \in S_{\lambda}^m(\lambda, \alpha)$ și

$$F(z) = I_c(f) = \frac{c+2}{z^{c+1}} \int_0^z t^c f(t) dt, \operatorname{Re} c > 0, \quad (1.7.3)$$

atunci

$$[D_{\lambda}^m f(z)]' \prec h(z), \quad z \in U,$$

implică

$$[D_{\lambda}^m F(z)]' \prec q(z), \quad z \in U,$$

unde q este soluția ecuației diferențiale

$$q(z) + \frac{n}{c+2} zq'(z) = h(z), \quad h(0) = 1$$

dată de

$$q(z) = \frac{c+2}{nz^{(c+2)/n}} \int_0^z t^{\frac{c+2}{n}-1} h(t) dt.$$

Mai mult, rezultatul este cel mai bun.

Dacă înlocuim în teoremă

$$h(z) = \frac{1 + (2\alpha - 1)z}{1 + z}$$

obținem următorul rezultat (interesant).

Corolarul 1.7.3. [GIO-GhO4] Dacă $\alpha < 1$, $n, m \in \mathbb{N}$, $\lambda \geq 0$, $\operatorname{Re} c > 0$ și operatorul integral I_c dat de (1.7.3), atunci $I_c[S_n^m(\lambda, \alpha)] \subset S_n^m(\lambda, \delta)$, unde

$$\delta = \min_{|z|=1} \operatorname{Re} q(z) = \delta(c, n, \alpha)$$

și

$$q(z) = \frac{c+1}{nz^{(n+2)/n}} \int_0^z t^{\frac{c+2}{n}-1} \cdot \frac{1 + (2\alpha - 1)t}{1 + t} dt$$

iar rezultatul este cel mai bun, și

$$\delta = 2\alpha - 1 + \frac{(c+2)(2-2\alpha)}{n} \cdot \sigma\left(\frac{c+2}{n}\right), \quad \text{unde } \sigma(x) = \int_0^z \frac{t^{x-1}}{1+t} dt.$$

În lucrarea [Tă-GIO-Șe] s-a definit clasa $S_n(\beta)$:

Definiția 1.7.4. [Tă-GIO-Șe] Dacă $0 \leq \beta < 1$ și $n \in \mathbb{N}$, vom nota cu $S_n(\beta)$ clasa funcțiilor $f \in A$ care satisfac inegalitatea

$$\operatorname{Re}(S^n f(z)) > \beta, \quad z \in U,$$

unde $S^n f(z)$ este operatorul diferențial al lui Sălăgean.

Pentru această clasă s-au demonstrat:

Teorema 1.7.3. [Tă-GIO-Șe] Clasa de funcții $S_n(\beta)$ este o clasă de funcții convexe.

Teorema 1.7.4. [Tă-GIO-Șe] Fie q o funcție convexă în U cu $q(0) = 1$, și fie

$$h(z) = q(z) + \frac{1}{c+1} zq'(z), \quad z \in U,$$

unde $c \in \mathbb{C}$, cu $\operatorname{Re} c > -2$.

Dacă $f \in S_n(\beta)$ și $F = I_c(f)$, unde

$$F(z) = I_c(f) = \frac{c+2}{z^{c+1}} \int_0^z t^c f(t) dt, \quad \operatorname{Re} c > -2$$

atunci $[S^n f(z)]' \prec h(z)$, $z \in U$, implică

$$[S^n F(z)]' \prec q(z), \quad z \in U$$

și q este cea mai bună dominantă.

În paragraful 1.8 se prezintă operatorul diferențial D_λ^α obținut ca o combinație convexă a operatorilor diferențiali Sălăgean și Ruscheweyh.

Definiția 1.8.1. [GIO-GhO5] Fie $\alpha \geq 0$, $\lambda \geq 0$. Notăm cu $D_\lambda^\alpha : A \rightarrow A$,

$$D_\lambda^\alpha f(z) = (1 - \lambda)S^\alpha f(z) + \lambda R^\alpha f(z), \quad z \in U,$$

unde prin S^α și R^α am notat operatorul diferențial Sălăgean și Ruscheweyh.

Observația 1.8.1. a) Pentru $\lambda = 0$, $D_0^\alpha f(z) = S^\alpha f(z)$, operatorul Sălăgean.

b) Pentru $\lambda = 1$, $D_1^\alpha f(z) = R^\alpha f(z)$, $z \in U$, operatorul Ruscheweyh.

c) Pentru $\alpha = 0$, $D_\lambda^0 f(z) = (1 - \lambda)S^0 f(z) + \lambda R^0 f(z) = (1 - \lambda)f(z) + \lambda f(z) = f(z)$.

d) Pentru $\alpha = 1$, $D_\lambda^1 f(z) = (1 - \lambda)S' f(z) + \lambda R' f(z) = (1 - \lambda)zf'(z) + \lambda zf'(z) = zf'(z) = R^1 f(z) = S^1 f(z)$, $z \in U$.

Rezultatul important din această lucrare este:

Teorema 1.8.1. [GIO-GhO5] Fie $h(z) = \frac{1 + (2\alpha - 1)z}{1 + z}$ o funcție convexă în U , cu $h(0) = 1$, $0 \leq \beta < 1$.

Presupunem că $\alpha \geq 0$, $\lambda \geq 0$ și $f \in A$ satisface subordonarea diferențială

$$[D_\lambda^{\alpha+1} f(z)]' + \frac{\lambda \alpha z [R^\alpha f(z)]''}{\alpha + 1} \prec h(z),$$

atunci

$$[D_\lambda^\alpha f(z)]' \prec q(z), \quad z \in U,$$

unde $q(z) = 2\beta - 1 + 2(1 - \beta) \cdot \frac{\ln(1 + z)}{z}$, $z \in U$. Funcția q este convexă și cea mai bună dominantă.

Folosind acest operator diferențial s-a definit clasa $\Sigma(\alpha, \lambda, n + 1)$.

Definiția 1.8.2. [GIO-Că-GhO] Dacă $0 \leq \alpha < 1$, $\lambda \geq 0$ și $n \in \mathbb{N}$, notăm clasa $\Sigma(\alpha, \lambda, n + 1)$ clasa funcțiilor $f \in \Sigma$ care satisfac relația

$$\operatorname{Re} \left\{ [D_\lambda^{n+1} g(z)]' + \frac{\lambda z n [R^n g(z)]''}{n + 1} \right\} > \alpha,$$

unde

$$f(z) = \frac{1}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

$$g(z) = z^2 f(z) = z + a_0 z^2 + a_1 z^3 + \dots, \quad z \in U.$$

Pentru această clasă de funcții s-a demonstrat proprietatea:

Teorema 1.8.1. [GIO-Ca-GhO] Dacă $0 \leq \alpha < 1$, $\lambda \geq 0$ și $n \in \mathbb{N}$, atunci

$$\Sigma(\alpha, \lambda, n + 1) \subset \Sigma(\delta, \lambda, n + 1),$$

unde $\delta = \delta(\alpha) = 2\alpha - 1 + 2(1 - \alpha) \ln 2$.

În lucrare sunt studiate interesante subordonări diferențiale.

În paragraful 1.9 se prezintă rezultate obținute folosind operatorul diferențial

$$D^{n+p-1} f(z) = z^p + \sum_{k=m+p}^{\infty} \frac{(n+k-2)!}{(n-1)!(k-1)!} a_k z^k,$$

cu proprietatea

$$(n+p)D^{n+p} f(z) = z[D^{n+p-1} f(z)]' + nD^{n+p-1} f(z), \quad z \in U,$$

pentru funcții din clasa $A_m(p)$. $A_m(p)$ este clasa funcțiilor de forma

$$f(z) = z^p + \sum_{k=m+p}^{\infty} a_k z^k, \quad p, m \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Acest operator îl vom numi operatorul lui Ruscheweyh de ordinul $(n + p - 1)$. Folosind acest operator s-au studiat subordonări interesante în lucrarea [GIO-GhO-Ow].

Rezultatul principal din această lucrare este:

Teorema 1.9.1. [GIO-GhO-Ow] Fie q o funcție convexă în U și fie funcția h dată de

$$h(z) = q(z) + \frac{m}{p} z q'(z), \quad z \in U,$$

cu $h(0) = 1$, $m \in \mathbb{N}$, $p \in \{1, 2, \dots\}$. Dacă $f \in A_m(p)$ și satisface subordonarea diferențială

$$\frac{1}{p} \frac{[D^{n+p-1}f(z)]'}{z^{p-1}} \prec h(z),$$

atunci

$$\frac{D^{n+p-1}f(z)}{z^p} \prec q(z), \quad z \in U,$$

și rezultatul este cel mai bun.

În paragraful 1.10 sunt prezentate rezultate obținute folosind operatorul Dziok-Srivastava dat de:

$$(1.10.1) \quad H_m^l(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_{n-1} \dots (\alpha_l)_{n-1}}{(\beta_1)_{n-1} \dots (\beta_m)_{n-1}} \cdot a_n \frac{z^n}{(n-1)!}$$

unde $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, \dots, l$, $\beta_j \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$, $j = 1, 2, \dots, m$, $f \in A$.

Pentru simplificarea scrierii, vom nota

$$(1.10.2) \quad H_m^l[\alpha_1]f(z) = H_m^l(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)f(z).$$

Pentru acest operator avem proprietatea

$$(1.10.3) \quad \alpha_1 H_m^l[\alpha_1 + 1]f(z) = z\{H_m^l[\alpha_1]f(z)\}' + (\alpha_1 - 1)H_m^l[\alpha_1]f(z), \quad z \in U.$$

Rezultatul principal din această lucrare este dat de următoarea teoremă care ne dă un criteriu de univalență exprimat cu ajutorul operatorului diferențial Dziok-Srivastava pentru funcțiile $f \in A$.

Teorema 1.10.1. [GIO10] Fie $l, m \in \{0, 1, 2, \dots\}$, $l \leq m + 1$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, \dots, l$, $\beta_j \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$, $j = 1, 2, \dots, m$ și $H_m^l[\alpha_1]f(z)$ operatorul diferențial Dziok-Srivastava dat de (1.10.1).

Dacă $f \in A$, $\alpha_1 \geq 0$ și $\frac{H_m^l[\alpha_1]f(z)}{z} \neq 0$, în U și verifică subordonarea diferențială

$$\frac{z\{H_m^l[\alpha_1 + 1]f(z)\}'}{H_m^l[\alpha_1 + 1]f(z)} + (1 - \alpha_1) \frac{H_m^l[\alpha_1 + 1]f(z)}{H_m^l[\alpha_1]f(z)} + \alpha_1 - 1 \prec h(z),$$

unde

$$h(z) = \frac{1+z}{1-z} + \frac{2z}{(1-z)[1+\gamma+(1-\gamma)z]}, \quad 0 \leq \gamma < 1, \quad z \in U,$$

atunci

$$\frac{H_m^l[\alpha_1 + 1]f(z)}{H_m^l[\alpha_1]f(z)} \prec \frac{1+z}{1-z}, \quad z \in U$$

și rezultatul este cel mai bun.

Observația 1.10.1. Pentru $m = 0$, $l = 1$, $\alpha_1 = 1$, $H_0^1[z]f(z) = f(z)$, $H_1^1[z]f(z) = zf'(z)$, subordonarea

$$\frac{H_m^l[\alpha_1 + 1]f(z)}{H_m^l[\alpha_1]f(z)} \prec \frac{1+z}{1-z}$$

este echivalentă cu $\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} > 0$, adică $f \in S^*$.

În lucrarea [GIO-Gh07], folosind același operator s-a obținut subordonarea diferențială

$$(1 - \lambda) \frac{H_m^l[\alpha_1 + 1]f(z)}{H_m^l[\alpha_1]f(z)} + \lambda \frac{[H_m^l[\alpha_1 + 1]f(z)]'}{[H_m^l[\alpha_1]f(z)]'} \prec \frac{1-z}{1+z}$$

care este echivalentă cu condiția

$$\operatorname{Re} \left[(1 - \lambda) \frac{zf'(z)}{f(z)} + \lambda \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) \right] > 0,$$

condiția ca funcția $f \in A$ să aparțină clasei M_λ (clasa funcțiilor Mocanu).

În paragraful 1.11 este prezentat studiul unor subordonări diferențiale în semiplanul drept, folosind inegalitățile diferențiale

$$\operatorname{Re} [A(z)zp'(z) + B(z)p^2(z) + C(z)p(z) + D(z)] > 0$$

și

$$\operatorname{Re} [A(z)p^2(z) - B(z)(zp'(z))^2 + C(z)zp'(z) + D(z)] > 0.$$

Observația 1.11.1. Rezultatele obținute în Teoremele 1.11.1 și 1.11.2 ne oferă posibilitatea de a obține condiții suficiente de univalență, stelaritate, convexitate, alfa-convexitate (funcții Mocanu), aproape convexe, dacă

$$p(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)}, \quad p(z) = \frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1, \quad p(z) = (1 - \alpha) \frac{zf'(z)}{f(z)} + \alpha \left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1 \right), \quad p(z) = f'(z), \quad z \in U.$$

În capitolul al doilea, ”Second-order differential superordination”, în paragrafele 2.1, 2.2, 2.3 sunt prezentate noțiunile de bază ale metodei superordonărilor introdusă de S.S. Miller și P.T. Mocanu în [Mi-Mo9].

Această metodă poate fi prezentată pe scurt astfel:

Fie Ω și Δ două submulțimi ale lui \mathbb{C} , fie p o funcție analitică în discul unitate U și fie $\varphi(r, s, t; z) : \mathbb{C}^3 \theta U \rightarrow \mathbb{C}$.

Se pune problema studierii unor implicații de forma:

$$(2.1.1) \quad \Omega \subset \{\varphi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) : z \in U\} \Rightarrow \Delta \subset p(U).$$

Dacă Ω și Δ sunt domenii simplu conexe din \mathbb{C} , diferite de \mathbb{C} , atunci există transformările conforme $q : U \rightarrow \Delta$, $q(U) = \Delta$, $q(0) = p(0)$ și $h : U \rightarrow \Omega$, $h(U) = \Omega$, $h(0) = \psi(p(0), 0, 0; 0)$. Dacă în plus funcțiile p și $\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z)$ sunt univalente în U , atunci implicația (2.1.1) poate fi reformulată

$$(2.1.2) \quad h(z) \prec \varphi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) \Rightarrow q(z) \prec p(z).$$

În paragraful 2.4 sunt prezentate contribuțiile personale legate de temele amintite folosind operatorul diferențial Dziok-Srivastava.

În [GIO6] se definesc superordonările diferențiale de ordinul întâi și sunt obținute mai multe rezultate legate de superordonări diferențiale de ordinul întâi. Iată un astfel de rezultat:

Teorema 2.4.1. [GIO6] Fie $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\Omega \neq \mathbb{C}$, $q \in \mathcal{H}[a, n]$, $\alpha_1 > 0$ și fie $\varphi \in \Phi_n[\Omega, q]$. Dacă $\frac{H_m^l[\alpha_1]f(z)}{z} \in Q(1)$ și $\psi \left(\frac{H[\alpha_1]f(z)}{z}, \frac{H_m^l[\alpha_1 + 1]f(z)}{z}; z \right)$ este univalentă în U , atunci

$$\Omega \subset \left\{ \varphi \left(\frac{H_m^l[\alpha_1]f(z)}{z}, \frac{H_m^l[\alpha_1 + 1]f(z)}{z} \right) \right\}$$

implică

$$q(z) \prec \frac{H_m^l[\alpha_1]f(z)}{z}, \quad z \in U,$$

unde $H_m^l[\alpha_1]f(z)$ este dat de (1.10.2).

În lucrarea [GIO10], folosind același operator diferențial se obțin superordonări diferențiale:

Teorema 2.4.2. [GIO10] Fie $l, m \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, $l \leq m + 1$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, \dots, l$, $\beta_j \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$, $j = 1, 2, \dots, m$ și $H_m^l[\alpha_1]f(z)$ operatorul liniar Dziok-Srivastava.

Dacă $p \in \mathcal{H}[1, 1] \cap \mathbb{Q}$, $p(U) \subset D$ și

$$\frac{z\{H_m^l[\alpha_1 + 1]f(z)\}'}{H_m^l[\alpha_1 + 1]f(z)} + (1 - \alpha_1) \frac{H_m^l[\alpha_1 + 1]f(z)}{H_m^l[\alpha_1]f(z)} + \alpha_1 - 1$$

este univalentă în U , atunci

$$1 + z + \frac{z}{1 + \gamma + z} \prec \frac{z\{H_m^l[\alpha_1 + 1]f(z)\}'}{H_m^l[\alpha_1]f(z)} + (1 - \alpha_1) \frac{H_m^l[\alpha_1 + 1]f(z)}{H_m^l[\alpha_1]f(z)} + \alpha_1 - 1$$

implică

$$1 + z \prec \frac{H_m^l[\alpha_1 + 1]f(z)}{H_m^l[\alpha_1]f(z)}, \quad z \in U, \quad \gamma \geq 0$$

și $q(z) = 1 + z$ este cea mai bună subordonantă.

În paragraful 2.5 sunt prezentate superordonări diferențiale obținute folosind operatorul integral

$$(2.5.1) \quad I(f)(z) = F(z) = \left[\frac{\beta + \gamma}{z^\gamma} \int_0^z f^\beta(t) t^{\gamma-1} dt \right]^{\frac{1}{\gamma}},$$

și publicate în articolul [GhO-GIO2], obținându-se un rezultat de tip sandwich:

$$1 + Rz \prec \frac{zF'(z)}{F(z)} \prec 1 + z, \quad R \in (0, 1], \quad z \in U.$$

Rezultatul principal este dat de teorema:

Teorema 2.5.1. [GIO5] Fie $R \in [0, 1]$ și h o funcție convexă, cu $h(0) = 1$, definită astfel

$$h(z) = 1 + Rz + \frac{zR}{2 + Rz}, \quad z \in U.$$

Dacă $f \in A$ și $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ este univalentă, $\frac{zF'(z)}{F(z)} \in \mathcal{H}[1, 1] \cap Q$, $h(z) \prec \frac{zf'(z)}{f(z)}$, atunci

$$q(z) = 1 + Rz \prec \frac{zF'(z)}{F(z)}, \quad z \in U,$$

unde F este dat de (2.5.1).

Funcția q este cea mai bună subordonantă.

În paragraful 2.6 sunt prezentate subordonări diferențiale obținute folosind operatorul diferențial Ruscheweyh.

Teorema 2.6.1. [GhO-GIO6] Fie $h(z) = \frac{1 + (2\alpha - 1)z}{1 + z}$, o funcție convexă în U , cu $h(0) = 1$. Fie $f \in A_n$ și presupunem că $[D^{m+1}f(z)]'$ este univalentă în U și $[D^m f(z)]' \in \mathcal{H}[1, 1] \cap Q$. Dacă

$$h(z) \prec [D^{m+1}f(z)]',$$

atunci

$$q(z) \prec [D^m f(z)]', \quad z \in U,$$

unde

$$q(z) = \frac{m+1}{nz^{\frac{m+1}{n}}} \int_0^z \frac{1 + (2\alpha - 1)t}{1+t} t^{\frac{m+1}{n}-1} dt.$$

Funcția q este convexă și este cea mai bună subordonantă.

În capitolul 3, "The univalent differential and integral operators" sunt cuprinse contribuțiile personale legate de tema 5.

În paragraful 3.1 se prezintă operatorul integral $I(f_1, f_2, \dots, f_n)$.

Definiția 3.1.1. [GIO7] Fie $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, cu $\operatorname{Re} \alpha > 0$, $A^m = A \times A \times \dots \times A$. Vom nota cu $I : A^m \rightarrow A$, operatorul integral

$$(3.1.1) \quad \begin{aligned} I(f_1, f_2, \dots, f_m)(z) &= F(z) \\ &= \left[\alpha \int_0^z t^{\alpha-1} \left(\frac{R^n f_1(t)}{t} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{R^n f_2(t)}{t} \right)^{\alpha_2} \dots \left(\frac{R^n f_m(t)}{t} \right)^{\alpha_m} dt \right]^{\frac{1}{\alpha}}, \end{aligned}$$

unde $f_i \in A$, $i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$, și R^n este operatorul diferențial Ruscheweyh.

Acest operator generalizează alți operatori integrali cum ar fi

$$I(z) = \int_0^z \frac{f(t)}{t} dt,$$

numit operatorul lui Alexander [Alx],

$$I(z) = \int_0^z \left[\frac{f(t)}{t} \right]^\beta dt$$

operatorul Miller-Mocanu-Reade, [Mi-Mo-Re],

$$I(z) = \int_0^z [f'(t)]^\beta dt,$$

studiat în [Pa-Pe],

$$I(z) = \int_0^z \left[\frac{f_1(t)}{t} \right]^{\alpha_1} \dots \left[\frac{f_m(t)}{t} \right]^{\alpha_m} dt$$

studiat în [Br-Br],

$$I(f_1, f_2, \dots, f_m)(z) = \int_0^z \left(\frac{R^n f_1(t)}{t} \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{R^n f_m(t)}{t} \right)^{\alpha_m} dt,$$

studiat în [GIO-GhO6],

$$G_\alpha(z) = \left[\alpha \int_0^z t^{\alpha-1} \left(\frac{g(t)}{t} \right) dt \right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

studiat în [Pes1], [Pes2],

$$F_\alpha(z) = \left[\alpha \int_0^z t^{\alpha-1} f'(t) dt \right]^{\frac{1}{\alpha}},$$

studiat în [Pes2], [Pes4].

În lucrarea [GIO7] sunt studiate condițiile necesare și suficiente pentru ca operatorul $I(f_1, f_2, \dots, f_m)(z)$ să fie univalent.

Teorema 3.1.1. [GIO7] Fie $\alpha \in \mathbb{C}$, cu $\operatorname{Re} \alpha > 0$, $f_i \in A$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, cu $|\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_m| \leq 1$.
Dacă

$$\left| \frac{z[R^n f_i(z)]'}{R^n f_i(z)} - 1 \right| \leq 1, \quad z \in U, \quad i \in \{1, 2, \dots, m\},$$

atunci $F(z)$ dat de (3.1.1) aparține clasei S .

Condiții suficiente de univalență pentru acest operator au fost obținute și în [GIO8], [GIO9].

Teorema 3.1.2. [GIO9] Fie $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mu \geq 0$, α și c numere complexe cu $\operatorname{Re} \alpha > 0$, $|c| \leq 1$, $c \neq -1$ și $f_i \in A$, $a_k \in \mathbb{C}$, $k \in \{1, 2, \dots, m\}$. Dacă

$$i) |\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_m| \leq (1 - |c|) \frac{|\alpha|}{1 + \mu(1 + |\alpha|)};$$

$$ii) |R^n f_k(z)| \leq 1;$$

$$iii) \left| \frac{1 - |z|^{2\alpha}}{\alpha} \left[\frac{z^2 (R^n f_k(z))'}{(R^n f_k(z))^2} - 1 \right] \right| \leq 1, \quad z \in U, \quad k \in \{1, 2, \dots, m\},$$

unde R^n este operatorul Ruscheweyh, atunci funcția F dată de (3.1.1) aparține clasei S .

Lucrarea [GIO9] a fost publicată în revista ISI Journal of Mathematical Inequalities (2009).

În lucrarea [Șe-GIO] s-au determinat condițiile de univalență a operatorului integral

$$G_{\alpha, M}(z) = \left[\frac{\alpha}{M} \int_0^z t^{\frac{\alpha}{M}-1} \left[\frac{g(t)}{t} \right]^{\frac{\alpha-1}{M^2}} dt \right]^{\frac{M}{\alpha}} \quad (3.1.2)$$

folosind criteriile lui Ahlfors, Becker și Pascu.

Teorema 3.1.3. [Șe-GIO] Fie $M \geq 1$, α un număr complex cu $\operatorname{Re} \alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ și c un număr complex $|c| \leq 1$, $c \neq -1$. Fie funcția $g \in A$, satisfăcând condițiile

$$\left| \frac{g(z)}{z} \right| \leq 3M - 2, \quad \left| \frac{z^2 g'(z)}{g^2(z)} - 1 \right| \leq \frac{1}{3M - 2}, \quad z \in U \quad \text{și} \quad |c| + \frac{3|\alpha - 1|}{|\alpha|} \leq 1,$$

atunci operatorul integral dat de (3.1.2) aparține clasei S .

Observația 3.1.1. Acest operator generalizează alți operatori cunoscuți studiați în [Pas1], [Pas2], [Pes1], [Pes2].

În paragraful 3.2 sunt prezentați operatorii diferențiali $I_p(\beta, m, n; \lambda, l)$ și clasa funcțiilor univalente notate $S_p^\alpha(\beta, m, n; \lambda, l)$.

Definiția 3.2.1. [GIO23] Pentru $l, \lambda, \beta \in \mathbb{R}$, $l \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\lambda \geq 0$, $n, p \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ și $f \in A(p, n)$ definim operatorul

$$(3.2.1) \quad I_p(\beta, m, n; \lambda, l)f(z) = z^p + \sum_{k=p+n}^{\infty} \left[\frac{(1-\lambda)(p-k) + l + \frac{(m+k-1)!}{m!(k-1)!}}{p+l-k+(m+k-1)!} \right]^\beta \frac{(m+k-1)!}{m!k!} a_k z^k, \quad z \in U.$$

$A(p, n)$ este clasa funcțiilor de forma

$$f(z) = z^p + \sum_{k=p+n}^{\infty} a_k z^k, \quad z \in U.$$

Acest operator generalizează un mare număr de operatori diferențiali cunoscuți.

Definiția 3.2.2. [GIO23] Fie $0 \leq \alpha < 1$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $p, n \in \mathbb{N}$, $l, \lambda, \beta \in \mathbb{R}$, $l \geq 0$, $\lambda \geq 0$, $\beta \geq 0$. Funcția $f \in A(p, n)$ aparține clasei $S_p^\alpha(\beta, m, n; \lambda, l)$ dacă este satisfăcută condiția

$$(3.2.2) \quad \operatorname{Re} I_p'(\beta, m, n; \lambda, l)f(z) > \alpha, \quad z \in U,$$

unde $I_p(\beta, m, n; \lambda, l)f(z)$ este operatorul dat de (3.2.1).

În Teorema 3.2.1 [GIO23] am arătat că $S_1^\alpha(\beta + 1, m, n; \lambda, l) \subset S_1^\alpha(\delta, m, n; \lambda, l)$, unde

$$\delta = \delta(\alpha, m, n, l, k, \lambda) = 2\alpha - 1 + 2(1 - \alpha) \frac{E(m, l, k)}{\lambda n} \sigma \left[\frac{E(m, l, k)}{\lambda n} \right],$$

$$\sigma \left[\frac{E(m, l, k)}{\lambda n} \right] = \int_0^z t^{\frac{E(m, l, k)}{\lambda n} - 1} \frac{1}{1+t} dt, \quad z \in U$$

și

$$(3.2.3) \quad E(m, l, k) = 1 + l - k + \frac{(m+k-1)!}{m!(k-1)!}.$$

Definiția 2.3.3. [GIO23] Fie $0 \leq \alpha < 1$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $p, n \in \mathbb{N}$, $l, \lambda, \beta \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 1$, $\beta \geq 0$, $f \in A(p, n)$. Notăm cu $L : A(p, n) \rightarrow A(p, n)$ operatorul integral

$$(3.2.4) \quad L(f) = F(z) = \frac{p + E(m, l, k)}{\lambda z^{\frac{p(1-\lambda) + E(m, l, k) - 1}{\lambda}}} \int_0^z f(t) t^{\frac{p(1-\lambda) + E(m, l, k) - 1}{\lambda}} dt$$

unde $E(m, l, k)$ este dat de (3.2.3).

Observația 3.2.1. Acest operator generalizează operatorii cunoscuți,

$$F(z) = \int_0^z \frac{f(t)}{t} dt \text{ operatorul Alexander,}$$

$$F(z) = \frac{2}{z} \int_0^z f(t) dt \text{ operatorul Libera,}$$

$$F(z) = \frac{l+1}{z^l} \int_0^z f(t) t^{l-1} dt \text{ operatorul lui Bernardi.}$$

Folosind operatorul integral (3.2.4) am demonstrat următoarea teoremă.

Teorema 3.2.1. [GIO23] Fie $0 \leq \alpha < 1$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $p = 1$, $n \in \mathbb{N}$, $l, k, \beta \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 1$, $\beta \geq 0$ și $f \in A_n$. Atunci f aparține clasei $S_1^\alpha(\beta, m, n; \lambda, l)$ dacă și numai dacă F dată de (3.2.4) aparține clasei $S_1^\alpha(\beta + 1, m, n; \lambda, l)$.

În paragraful 3.3 am studiat stelaritatea operatorului Bernardi.

În lucrările [Le-Mi-Zl] și [Pas2] s-a arătat că:

i) $L_\gamma[S^*] \subset S^*$, (ii) $L_\gamma[K] \subset K$, (iii) $L_\gamma[C] \subset C$,

unde S^* este clasa funcțiilor stelate, K clasa funcțiilor complexe, C clasa funcțiilor aproape convexe, iar

$$(3.3.1) \quad L_\gamma[f](z) = F(z) = \frac{\gamma+1}{z^\gamma} \int_0^z f(t) t^{\gamma-1} dt$$

este operatorul Bernardi.

În lucrarea [GIO14] am extins această proprietate pentru funcțiile stelate de ordin negativ:

$$S \left(-\frac{1}{2\gamma} \right) = \left\{ f \in A, \frac{f(z)}{z} \neq 0, \operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} > -\frac{1}{2\gamma}, \gamma \geq 1 \right\}.$$

Teorema 3.2.2. [GIO14] Fie $f \in A$, $\frac{f(z)}{z} \neq 0$, $z \in U$, $\gamma \geq 1$. Dacă

$$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} > -\frac{1}{2\gamma}$$

atunci $F \in S^*$, unde F este dată de (3.3.1).

În lucrarea [GIO13], am arătat că dacă $f \in K \left(-\frac{1}{2\gamma} \right)$, $\gamma \geq 1$, atunci F dată de (3.3.1) este conexă.

Teorema 3.2.3. [GIO13] Fie $f \in A$, $\gamma \geq 1$. Dacă

$$\operatorname{Re} \left[\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1 \right] \geq -\frac{1}{2\gamma},$$

atunci F dată de (3.3.1) este convexă.

În paragraful 3.4 sunt prezentate condițiile în care imaginea unei funcții f convexă prin operatorul integral

$$(3.4.1) \quad I(f) = F(z) = \frac{1}{[g(z)]^c} \int_0^z f(w) g(w)^{c-1} g'(w) dw$$

este o funcție convexă, unde $c \in \mathbb{C}$ cu $\operatorname{Re} c > 0$.

Teorema 3.4.1. [GIO-GhO8] Fie $f, g \in \mathcal{H}(U)$ și fie operatorul

$$(3.4.1) \quad I(f) = F(z) = \frac{1}{[g(z)]^c} \int_0^z f(w)g(w)^{c-1}g'(w)dw.$$

Dacă sunt satisfăcute:

$$(i) \operatorname{Re} \frac{czg'(z)}{g(z)} > 0, \quad z \in U, \quad \operatorname{Re} c > 0,$$

$$(ii) \operatorname{Re} \left(\frac{zg''(z)}{g'(z)} + 1 \right) > \operatorname{Re} \frac{(c+1)zg'(z)}{g(z)}, \quad z \in U,$$

$$(iii) I(C) \subset C$$

atunci $I(K) \subset K$.

În paragraful 3.5 sunt prezentate condițiile necesare ca imaginea funcției $f \in A$, prin operatorul integral

$$(3.5.1) \quad I(f)(z) = F(z) = \frac{2}{z} \int_0^z f(t)dt$$

să fie o funcție convexă.

Teorema 3.5.2. [GhO-GIO5] Fie $M \in [0, M_0]$, unde $M_0 = 0,41284489$ este rădăcina ecuației

$$7M^8 + 14M^7 + 48M^6 + 30M^5 + 67M^4 + 18M^3 + 18M^2 + 2M - 8 = 0.$$

Dacă $f \in A$ și satisface inegalitatea

$$\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right| < M$$

atunci $\operatorname{Re} \frac{zF'(z)}{F'(z)} + 1 > 0$, unde F este dată de (3.5.1).

În paragraful 3.6 sunt prezentate condițiile ca imaginea unei funcții $f \in \mathcal{H}[1, 1]$, prin operatorul Bernardi să fie o funcție convexă.

Teorema 3.6.1. [GIO21] Fie $f \in \mathcal{H}[1, 1]$, $\gamma \geq 1$ și

$$(3.6.1) \quad L_\gamma[f](z) = F(z) = \frac{\gamma}{z^\gamma} \int_0^z f(t)t^{\gamma-1}dt, \quad z \in U.$$

Dacă

$$\operatorname{Re} \left[\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1 \right] > -\frac{1}{2\gamma}, \quad z \in U,$$

atunci F dată de (3.6.1) este convexă.

În Capitolul 4, "Classes of univalent functions which extend the class of Mocanu functions", se arată mai multe clase de funcții care extind clasa

$$M_\alpha = \left\{ f \in A, \operatorname{Re} \left[(1-\alpha) \frac{zf'(z)}{f(z)} + \alpha \left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1 \right) \right] > 0, \quad z \in U \right\},$$

numită clasa funcțiilor Mocanu sau clasa funcțiilor α -convexe.

Este cunoscută teorema de dualitate pentru această clasă:

Teorema 4.4.1. [Mo-Bu-Să] Dacă $\alpha \geq 0$ atunci $f \in M_\alpha \Leftrightarrow F \in S^*$, unde

$$(4.1.1) \quad F(z) = f(z) \left[\frac{zf'(z)}{f(z)} \right]^\alpha.$$

În lucrarea [GhO-GIO3] am definit clasa de funcții $M_{\alpha,\beta}$.

Definiția 4.1.1. [GhO-GIO3] Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ și $f \in A$ cu $\frac{f(z)f'(z)}{z} \neq 0$, $z \in U$. Vom spune că $f \in A$ aparține clasei $M_{\alpha,\beta}$ dacă funcția $F : U \rightarrow \mathbb{C}$, definită de

$$(4.1.2) \quad F(z) = z \left[\frac{f(z)}{z} \right]^\beta \left[\frac{zf'(z)}{f(z)} \right]^\alpha$$

este stelată în U .

Observația 4.1.1. a) Dacă $\beta = 1$, $\alpha \geq 0$, $F(z) = f(z) \left[\frac{zf'(z)}{f(z)} \right]^\alpha$ și $M_{\alpha,1} = M_\alpha$.

b) Dacă $\alpha = \beta = 1$, atunci $F(z) = zf'(z)$, $M_{1,1} = K$.

Rezultatele importante pentru această clasă sunt:

Teorema 4.1.1. [GhO-GIO3] Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ și $\beta \geq 1$, atunci $M_{\alpha,\beta} \subset S^*$.

Teorema 4.1.2. [GhO-GIO3] Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 1$ și $\lambda \in (0, \lambda_1)$, unde

$$(4.1.3) \quad \lambda_1 = \frac{2\beta - \alpha - 2 + \sqrt{(2\beta - \alpha - 2)^2 + 8\alpha\beta}}{4\beta}, \quad \lambda_1 \in (0, 1).$$

Dacă $f \in M_{\alpha,\beta}$, atunci $f \in S^*(\lambda)$.

În lucrarea [GhO-GIO4] am studiat subordonări diferențiale de ordinul întâi obținând cea mai bună dominantă pentru o funcție $f \in M_{\alpha,\beta}$.

Teorema 4.1.3. [GhO-GIO4] Fie $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\beta \geq 1$, $\lambda \in (0, \lambda_1)$, unde λ_1 este dat de (4.1.3). Dacă $f \in M_{\alpha,\beta}$ atunci

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec (1 - \lambda)q(z) + \lambda$$

unde q este dat de

$$q(z) = \left[\frac{\beta(1 - \lambda)}{\alpha} (1 - z)^{\frac{2}{\alpha}} \int_0^1 \frac{t^{\frac{\beta}{\alpha} - 1}}{(1 - tz)^{\frac{2}{\alpha}}} dt \right]^{-1} - \frac{\lambda}{1 - \lambda}.$$

Funcția q este cea mai bună dominantă.

În lucrarea [GIO11] am definit clasa $M_{\alpha,\beta}^n(\delta)$. Rezultate importante sunt:

Teorema 4.1.4. [GIO11] Fie $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R}$, $1 - \beta \leq \delta < 1$. Atunci $M_{\alpha,\beta}^n(\delta) \subset S^*$.

Teorema 4.1.5. [GIO11] Fie $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R}$ reale, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $0 \leq \delta < 1$, n un număr întreg pozitiv și fie $\lambda \in (0, \lambda_1)$, unde

$$(4.1.4) \quad \lambda_1 = 2\delta + 2\beta - 2 - \alpha n + \sqrt{(2\delta + 2\beta - 2 - \alpha n)^2 + 8\alpha\beta n}, \quad \lambda_1 \in (0, 1).$$

Dacă $f \in M_{\alpha,\beta}^n(\delta)$ atunci $f \in S^*(\lambda)$.

În lucrarea [GIO12] am studiat diferite subordonări diferențiale pentru funcțiile din clasa $M_{\alpha,\beta}^n(\delta)$, obținând cea mai bună dominantă în

Teorema 4.1.6. [GIO12] Fie n un număr întreg, $\alpha, \beta, \delta, \lambda$ numere reale $\alpha > 0$, $\beta \geq 1$, $0 \leq \delta < 1$, $\lambda \in (0, \lambda_1)$, unde λ_1 este dat de (4.1.4). Dacă $f \in M_{\alpha,\beta}^n(\delta)$, atunci

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec (1 - \lambda)q(z) + 1$$

unde q este dat de

$$q(z) = \left[\frac{\beta(1 - \lambda)}{\alpha} (1 - z)^{\frac{2}{\alpha n}} \int_0^1 \frac{t^{\frac{\beta+\delta}{\alpha n} - 1} \alpha n}{(1 - tz)^{\frac{2}{\alpha n}}} dt \right]^{-1} - \frac{\lambda}{1 - \lambda}.$$

Funcția q este cea mai bună dominantă.

În Capitolul 5, "Strong differential subordinations", se definește noțiunea de tare subordonare diferențială, noțiune introdusă în [An-Ro] de J.A. Antonino și S. Romaguera, concept aplicat în mod special la subordonările de tip Briot-Bouquet.

Definiția 5.1.1. [Ant], [An-Ro] Fie $H(z, \xi)$ analitică în $U \times \overline{U}$ și $f(z)$ o funcție analitică și univalentă în U . Funcția $H(z, \xi)$ este tare subordonată funcției $f(z)$ și scriem $H(z, \xi) \prec\prec f(z)$, dacă pentru orice $\xi \in \overline{U}$, funcția $H(z, \xi)$ de variabilă z este subordonată funcției $f(z)$.

Observația 5.1.1. a) Deoarece funcția f este analitică și univalentă, Definiția 5.1.1 este echivalentă cu $H(0, \xi) = f(0)$ și $\mathcal{H}(U \times \overline{U}) \subset f(U)$.

b) Dacă $H(z, \xi) \equiv H(z)$, atunci tare subordonarea diferențială devine subordonare diferențială.

În lucrarea [GIO-GhO9] am dezvoltat teoria generală a tare subordonărilor diferențiale care poate fi formulată astfel:

Fie $\Omega, \Delta \subset \mathbb{C}$, fie funcția $p \in \mathcal{H}(U)$, cu $p(0) = a$, $a \in \mathbb{C}$ și $\psi : \mathbb{C}^3 \times \overline{U} \rightarrow \mathbb{C}$. Se pune problema studierii unor implicații de forma

$$(5.1.1) \quad \{\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z, \xi) \mid z \in U, \xi \in \overline{U}\} \subset \Omega \Rightarrow p(U) \subset \Delta.$$

Dacă mulțimile Ω și Δ sunt domenii simplu conexe, atunci (5.1.1) se poate formula în termenii subordonării

$$(5.1.2) \quad \psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z, \xi) \prec\prec h(U) \Rightarrow p(z) \prec q(z),$$

unde $h(U) = \Omega$, $q(U) = \Delta$, h și q fiind transformări conforme.

Sunt prezentate adaptate acestei noțiuni: definiția clasei de funcții admisibile $\Psi_n[\Omega, q]$, lemele fundamentale precum și teoremele necesare dezvoltării tare subordonărilor diferențiale.

În paragraful 5.2 se definește noțiunea de tare subordonare diferențială liniară.

Definiția 5.2.1. [GIO-GhO10] O tare subordonare diferențială de forma

$$A(z, \xi)zp'(z) + B(z, \xi)p(z) \prec\prec h(z), \quad z \in U, \quad \xi \in \bar{U}, \quad A, B : U \times \bar{U} \rightarrow \mathbb{C},$$

unde $A(z, \xi)zp'(z) + B(z, \xi)p(z)$ este analitică în U , pentru orice $\xi \in \bar{U}$, iar $h(z)$ este analitică și univalentă în U , se numește tare subordonare diferențială liniară de ordinul întâi.

În continuare sunt studiate tare subordonări diferențiale liniare atât într-un disc cu centrul în origine cât și în semiplanul drept.

În cazul discului am obținut următorul rezultat.

Teorema 5.2.1. [GIO-GhO10] Fie $p \in \mathcal{H}[0, n]$, $A, B : U \times \bar{U} \rightarrow \mathbb{C}$, cu $A(z, \xi)zp'(z) + B(z, \xi)p(z)$ analitici în U , pentru orice $\xi \in \bar{U}$ și

$$\operatorname{Re}[nA(z, \xi) + B(z, \xi)] \geq 1, \quad \operatorname{Re} A(z, \xi) > 0.$$

Dacă

$$A(z, \xi)zp'(z) + B(z, \xi)p(z) \prec\prec Mz, \quad z \in U, \quad \xi \in \bar{U},$$

atunci

$$p(z) \prec Mz, \quad z \in U, \quad M > 0.$$

În cazul semiplanului am obținut următorul rezultat.

Teorema 5.2.2. [GIO-GhO10] Fie $p \in \mathcal{H}[1, 1]$, $A, B : U \times \bar{U} \rightarrow \mathbb{C}$, cu $A(z, \xi)zp'(z) + B(z, \xi)p(z)$, o funcție analitică în U pentru orice $\xi \in \bar{U}$ și $\operatorname{Re}(z, \xi) \geq 0$, $\operatorname{Im} B(z, \xi) \leq n\operatorname{Re} A(z, \xi)$. Dacă

$$\operatorname{Re}[A(z, \xi)zp'(z) + B(z, \xi)p(z)] > 0, \quad z \in U, \quad \xi \in \bar{U}$$

atunci $\operatorname{Re} p(z) > 0$, $z \in U$.

În paragraful 5.3 se prezintă tare subordonarea diferențială liniară de ordinul doi:

Definiția 5.3.1. [GIO17] O tare subordonare diferențială

$$A(z, \xi)z^2p''(z) + B(z, \xi)zp'(z) + C(z, \xi)p(z) + D(z, \xi) \prec\prec h(z),$$

unde $A, B, C, D : U \times \bar{U} \rightarrow \mathbb{C}$ și $A(z, \xi)z^2p''(z) + B(z, \xi)zp'(z) + C(z, \xi)p(z) + D(z, \xi)$ o funcție analitică în z pentru orice $\xi \in \bar{U}$, și funcția h analitică și univalentă în U , se numește tare subordonare liniară de ordinul doi.

Sunt studiate aceste tare subordonări atât în discul cu centrul în origine cât și în semiplanul drept.

Din tare subordonarea diferențială liniară definită în semiplanul drept studiată în [GIO17]. Dacă $p \in \mathcal{H}[1, n]$ satisface tare subordonarea diferențială

$$A(z, \xi)z^2p''(z) + B(z, \xi)zp'(z) + C(z, \xi)p(z) + D(z, \xi) \prec\prec \frac{1+z}{1-z}, \quad z \in U, \quad \xi \in \bar{U}$$

atunci $\operatorname{Re} p(z) > 0$, $z \in U$ și se obțin condiții suficiente de univalență pentru funcțiile stelate, convexe, funcții Mocanu, funcții aproape-convexe înlocuind

$$p(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)}, \quad p(z) = 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}, \quad p(z) = (1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)} + \alpha \left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right]$$

și $p(z) = f'(z)$, $z \in U$, în discul unitate.

În paragraful 5.4 se definesc tare subordonările diferențiale neliniare de ordinul doi.

Definiția 5.4.1. [GIO-GhO11] O tare subordonare de forma

$$A(z, \xi)z^2p''(z) + B(z, \xi)zp'(z) + C(z, \xi)p(z) + D(z, \xi)p^2(z) + E(z, \xi) \prec\prec h(z),$$

unde $A, B, C, D, E : U \times \bar{U} \rightarrow \mathbb{C}$, iar $A(z, \xi)z^2p''(z) + B(z, \xi)zp'(z) + C(z, \xi)p(z) + D(z, \xi)p^2(z) + E(z, \xi)$ este o funcție analitică în z pentru orice $\xi \in \bar{U}$, și h o funcție analitică și univalentă în U , se numește tare subordonare neliniară de ordinul doi.

Sunt studiate atât tare subordonările diferențiale în discul cu centrul în origine cât și în semiplanul drept.

Tare subordonarea neliniară definită în semiplanul drept a fost studiată în [GIO-GhO11].

Dacă $p \in \mathcal{H}[1, n]$ și satisface inegalitatea

$$\operatorname{Re}[A(z, \xi)z^2p''(z) + B(z, \xi)zp'(z) + C(z, \xi)p(z) + D(z, \xi)p^2(z) + E(z, \xi)] > 0, \quad z \in U, \quad \xi \in \bar{U},$$

atunci

$$\operatorname{Re} p(z) > 0, \quad z \in U.$$

Din acest studiu se obțin condiții suficiente de univalență pentru funcțiile stelate, convexe, funcții Mocanu, funcții aproape convexe, înlocuind

$$p(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)}, \quad p(z) = 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}, \quad p(z) = (1 - \alpha) \frac{zf'(z)}{f(z)} + \alpha \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right), \quad p(z) = f'(z), \quad z \in U,$$

în discul unitate.

În paragraful 5.5 se prezintă clasele de funcții a căror coeficienți devin funcții olomorfe de variabilă ξ introduse în lucrarea [GIO20] după cum urmează:

Notăm

$$\mathcal{H}^*[a, n, \xi] = \{f \in \mathcal{H}(U \times \bar{U}) \mid f(z, \xi) = a + a_n(\xi)z^n + a_{n+1}(\xi)z^{n+1} + \dots, \quad z \in U, \quad \xi \in \bar{U}\},$$

cu $a_k(\xi)$ funcții olomorfe în \bar{U} , $k \geq n$,

$$\mathcal{H}_u(U \times \bar{U}) = \{f \in \mathcal{H}^*[a, n, \xi] \mid f(z, \xi) \text{ univalentă în } U, \text{ pentru orice } \xi\},$$

$$A\xi_n = \{f(z, \xi) \in \mathcal{H}(U \times \bar{U}) \mid f(z, \xi) = z + a_{n+1}(\xi)z^{n+1} + \dots, \quad z \in U, \quad \xi \in \bar{U}\},$$

cu $a_k(\xi)$ funcții olomorfe în \bar{U} , $k \geq n + 1$ și $A\xi_1 = A\xi$,

$$\mathcal{H}_u(U) = \{f(z, \xi) \in \mathcal{H}_\xi[a, n] \mid f(z, \xi) \text{ este univalentă în } U, \text{ pentru orice } \xi \in \bar{U}\},$$

$$S\xi = \{f(z, \xi) \in A\xi_n \mid f(z, \xi) \text{ univalentă în } U, \text{ pentru orice } \xi \in \bar{U}\},$$

$$S^*\xi = \left\{ f(z, \xi) \in A\xi \mid \operatorname{Re} \frac{z \frac{\partial f}{\partial z}(z, \xi)}{f(z, \xi)} > 0, \quad z \in U, \quad \xi \in \bar{U} \right\},$$

clasa funcții stelate în $\mathcal{H}(U \times \bar{U})$,

$$K\xi = \left\{ f(z, \xi) \in A\xi \mid \operatorname{Re} \frac{z \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(z, \xi)}{\frac{\partial f}{\partial z}(z, \xi)} + 1 > 0, \quad z \in U, \quad \xi \in \bar{U} \right\},$$

clasa funcțiilor convexe în $\mathcal{H}(U \times \bar{U})$,

$$A(p)\xi = \left\{ f(z, \xi) \in \mathcal{H}(U \times \bar{U}) \mid f(z, \xi) = z^p + \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k(\xi)z^k, \quad p \in \mathbb{N}, \quad z \in U, \quad \xi \in \bar{U} \right\},$$

și $A(1)\xi = A\xi$.

În lucrarea [GIO24] am studiat tare subordonările neliniare de forma

$$A(z, \xi)zp'(z) + B(z, \xi)p(z) + C(z, \xi)p^2(z) + D(z, \xi) \prec\prec h(z),$$

unde $A(z, \xi)zp'(z) + B(z, \xi)p(z) + C(z, \xi)p^2(z) + D(z, \xi)$ este o funcție analitică în U , pentru orice $\xi \in \bar{U}$ și funcția h este analitică și univalentă în U .

Din tare subordonarea diferențială studiată în semiplanul drept

$$\operatorname{Re} [A(z, \xi)zp'(z) + B(z, \xi)p(z) + C(z, \xi)p^2(z) + D(z, \xi)] > 0$$

care implică $\operatorname{Re} p(z) > 0$ se obțin condiții suficiente de univalență pentru funcțiile stelate, convexe, funcții Mocanu (α -convexe), funcții aproape convexe, înlocuind

$$p(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)}, \quad p(z) = 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}, \quad p(z) = \frac{(1 - \alpha)zf'(z)}{f(z)} + \alpha \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right)$$

și $p(z) = f'(z)$, $z \in U$, în discul unitate.

În paragraful 5.6 se prezintă studiul tare subordonărilor diferențiale de tipul Briot-Bouquet. S-au demonstrat teoremele necesare dezvoltării acestor tare subordonări diferențiale, pentru a obține dominante și cea mai bună dominantă.

Mai întâi se prezintă tare subordonări diferențiale publicate în [GIO22] și obținute folosind operatorii integrali:

$$L_\gamma^m f(z, \xi) = \frac{\gamma + 1}{z^\gamma} \int_0^z L_\gamma^{m-1} f(t, \xi) t^{\gamma-1} dt$$

și

$$H^m f(z, \xi) = \frac{p+1}{z} \int_0^z H^{m-1} f(t, \xi) dt.$$

În capitolul șase, "Tare superordonări diferențiale" sunt prezentate rezultatele conținute în lucrarea [GIO16]. În această lucrare am introdus pentru prima oară noțiunea de tare superordonare diferențială ca și concept dual celui de tare subordonare diferențială după modelul introducerii noțiunii de superordonare dat de profesorii Miller și Mocanu în [Mi-Mo10]. Forma generală a acestei teorii poate fi dată pe scurt după cum urmează:

Fie Ω și Δ două submulțimi a mulțimii \mathbb{C} , $p(z)$ analitică în discul unitate U , și fie $\varphi : (r, s, t; \xi) : \mathbb{C}^3 \times U \times \bar{U} \rightarrow \mathbb{C}$. Se pune problema studierii unor implicații de forma:

$$(6.1.1) \quad \Omega \subset \{\varphi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z, \xi) : z \in U, \xi \in \bar{U}\} \Rightarrow \Delta \subset p(U).$$

În cazul când Ω și Δ sunt domenii simplu conexe din \mathbb{C} , diferite de \mathbb{C} , atunci există reprezentările conforme $q : U \rightarrow \Delta$, $q(U) = \Delta$, $q(0) = p(0)$ și $h : U \rightarrow \Omega$, $h(U) = \Omega$, $h(0) = \varphi(p(0), 0, 0; 0, \xi)$. Dacă în plus funcțiile p și $\varphi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z, \xi)$ sunt univalente în U , pentru orice $\xi \in \bar{U}$, atunci implicația (6.1.1) se poate reformula în termenii subordonării:

$$(6.1.2) \quad h(z) \prec\prec \varphi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z, \xi) \Rightarrow q(z) \prec p(z), \quad z \in U.$$

Observația 6.1.1. Implicația (6.1.2) are loc și dacă h și q sunt numai funcții analitice.

În continuare sunt prezentate definițiile, lemele și teoremele necesare dezvoltării acestei teorii introduse în [GIO16].

Voi menționa aici definiția clasei funcțiilor admisibile:

Definiția 6.1.1. [GIO16] Fie Ω o submulțime a mulțimii numerelor complexe, $q \in \mathcal{H}[a, n]$, cu $q'(z) \neq 0$. Vom numi clasa funcțiilor admisibile, notată $\Phi_n[\Omega, q]$, formată din funcțiile $\varphi : \mathbb{C}^3 \times U \times \bar{U} \rightarrow \mathbb{C}$ care satisfac condiția de admisibilitate

$$(A') \quad \varphi(r, s, t; \zeta, \xi) \in \Omega$$

$$\text{unde } r = q(z), \quad s = \frac{zq'(z)}{m}$$

$$\operatorname{Re} \left[\frac{t}{s} + 1 \right] \leq \frac{1}{m} \operatorname{Re} \left[\frac{zq''(z)}{q'(z)} + 1 \right],$$

$z \in U$, $\xi \in \bar{U}$, $\zeta \in \partial U \setminus E(q)$ și $m \geq n \geq 1$. Pentru $n = 1$, vom scrie $\Phi_1[\Omega, q] = \Phi[\Omega, q]$.

Dacă $\varphi : \mathbb{C}^2 \times U \times \bar{U} \rightarrow \mathbb{C}$, atunci condiția de admisibilitate (A') devine

$$(A'') \quad \varphi \left(q(z), \frac{zq'(z)}{m}; \zeta, \xi \right) \in \Omega$$

unde $z \in U$, $\zeta \in \partial U \setminus E(q)$, $\xi \in \bar{U}$ și $m \geq n \geq 1$.

Teorema 6.1.1. [GIO16] Fie $\Omega \subset \mathbb{C}$, $q \in \mathcal{H}[a, n]$ și fie $\varphi \in \Phi_n[\Omega, q]$. Dacă $p \in Q(a)$ și $\varphi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z, \xi)$ este o funcție univalentă în U , pentru orice $\xi \in \bar{U}$, atunci

$$\Omega \subset \{\varphi(p(z), zp'(z), z^2p''(z)); z \in U, \xi \in \bar{U}\}$$

implică

$$q(z) \prec\prec p(z), \quad z \in U.$$

În paragraful 6.2 este prezentată tare superordonarea diferențială de ordinul întâi:

Definiția 6.2.1. [GIO15] Se numește tare superordonare de ordinul întâi, o superordonare de forma

$$(6.2.1) \quad h(z) \prec\prec A(z, \xi)zp'(z) + B(z, \xi)p(z), \quad z \in U, \xi \in \bar{U},$$

unde h este o funcție analitică în U , și $A(z, \xi)zp'(z) + B(z, \xi)p(z)$ este o funcție univalentă în U , pentru orice $\xi \in \bar{U}$.

Observația 6.2.1. Dacă $A(z, \xi) = B(z, \xi) \equiv 1$, atunci (6.2.1) devine

$$h(z) \prec zp'(z) + p(z), \quad z \in U$$

o superordonare diferențială studiată de S.S. Miller și P.T. Mocanu în [Mi-Mo10].

Dacă $A(z, \xi) \equiv 1$ și $B(z, \xi) \equiv 0$, atunci (6.2.1) devine

$$h(z) \prec zp'(z), \quad z \in U,$$

superordonarea diferențială studiată de S.S. Miller, P.T. Mocanu în [Mi-Mo10].

În continuare sunt prezentate mai multe teoreme legate de această noțiune, cum ar fi:

Teorema 6.2.1. [GIO21] Fie $\Omega \subset \mathbb{C}$, $q \in \mathcal{H}[a, n]$, $\varphi : \mathbb{C}^2 \times U \times \bar{U} \rightarrow \mathbb{C}$ și presupunem că $\varphi(q(z), tzq'(z); \zeta, \xi) \in \Omega$, pentru $z \in U$, $\zeta \in \partial U \setminus E(q)$, $\xi \in \bar{U}$ și $0 < t < \frac{1}{n} \leq 1$. Dacă $p \in Q(a)$ și $\varphi(p(z), zp'(z); z, \xi)$ este o funcție univalentă în U , pentru orice $\xi \in \bar{U}$, atunci

$$\Omega \subset \{\varphi(p(z), zp'(z); z), z \in U, \xi \in \bar{U}\}$$

implică

$$q(z) \prec p(z).$$

În paragraful 6.3 se prezintă diferite tare superordonări diferențiale folosind ca metodă de demonstrație lanțurile de subordonare Loewner.

Definiția 6.3.1. [GIO18] Funcția $L : U \times \bar{U} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ se numește lanț de subordonare Loewner, dacă $L(z, \xi; t)$ este o funcție analitică și univalentă în U , pentru orice $\xi \in \bar{U}$, $t \geq 0$, $L(z, \xi; t)$ este diferențiabilă în \mathbb{R}^+ pentru $z \in U$, $\xi \in \bar{U}$ și $L(z, \xi; s) \prec\prec L(z, \xi; t)$, unde $0 \leq s \leq t$.

Lema 6.3.1. [GIO18] Fie funcția $L(z, \xi; t) = a_1(\xi, t) + a_2(\xi, t)z^2 + \dots$, cu $a_1(\xi, t) \neq 0$, pentru orice $\xi \in \bar{U}$, $t \geq 0$ și $\lim_{t \rightarrow \infty} |a_1(\xi, t)| = \infty$. Atunci funcția $L(z, \xi; t)$ este un lanț de subordonare Loewner, dacă

$$\operatorname{Re} z \cdot \frac{\partial L(z, \xi; t)/\partial z}{\partial L(z, \xi; t)/\partial t} > 0, \quad z \in U, \quad \xi \in \bar{U}, \quad t \geq 0.$$

În această lucrare am studiat tare superordonări diferențiale pentru funcții din clasele de funcții definite în [GIO20].

Teorema 6.3.1. [GIO18] Fie $q(z, \xi) \in \mathcal{H}^*[a, 1, \xi]$, fie $\varphi : \mathbb{C}^2 \times U \times \bar{U} \rightarrow \mathbb{C}$ și fie

$$\varphi(q(z, \xi), zq'(z, \xi)) \equiv h(z, \xi), \quad z \in U, \quad \xi \in \bar{U}.$$

Dacă $L(z, \xi; t) = \varphi(q(z, \xi), tzq'(z, \xi))$ este un lanț de subordonare și $p \in \mathcal{H}^*[a, 1, \xi] \cap Q_\xi$, atunci

$$h(z, \xi) \prec\prec \varphi(p(z, \xi), zp'(z, \xi))$$

implică

$$q(z, \xi) \prec\prec p(z, \xi), \quad z \in U, \quad \xi \in \bar{U}.$$

Dacă $\varphi(q(z, \xi), zq'(z, \xi)) = h(z, \xi)$ are o soluție univalentă $q(z, \xi) \in Q_\xi$, atunci $q(z, \xi)$ este cea mai bună subordonată.

În paragraful 6.4, folosind operatorii integrali definiți în paragraful 5.7, se prezintă tare superordonări diferențiale de forma:

Teorema 6.4.1. [GIO22] Fie $h(z, \xi)$ o funcție convexă în U , pentru orice $\xi \in \bar{U}$, $h(0, \xi) = a$. Presupunem că ecuația diferențială

$$q(z, \xi) + \frac{zq'_z(z, \xi)}{q(z, \xi)} = h(z, \xi), \quad z \in U, \quad \xi \in \bar{U}$$

are o soluție univalentă $q(z, \xi)$ care satisface $q(0, \xi) = a$ și $q(z, \xi) \prec\prec h(z, \xi)$.

Dacă $p(z, \xi) \in \mathcal{H}[a, 1] \cap Q_\xi$ și $p(z, \xi) + \frac{zp'_z(z, \xi)}{p(z, \xi)}$ este univalentă în U , pentru orice $\xi \in \bar{U}$, $f(z, \xi) \in A_\xi$, atunci

$$h(z, \xi) \prec\prec \frac{L_\gamma^m f(z, \xi)}{z} + \frac{z[L_\gamma^m f(z, \xi)]'_z}{L_\gamma^m f(z, \xi)} - 1$$

implică

$$q(z, \xi) \prec\prec \frac{L_\gamma^m f(z, \xi)}{z}, \quad z \in U, \quad \xi \in \bar{U}.$$

Funcția $q(z, \xi)$ este cea mai bună subordonată.

Noile direcții de cercetare sunt conținute în capitolele 7 și 8 din această teză de abilitare.

În Capitolul 7 "Differential subordinations for non-analytic functions" se prezintă ideea extinderii noțiunii de subordonare diferențială la clasa funcțiilor neanalitice de clasa C^1 și C^2 , folosind ca model teoria clasică a subordonărilor diferențiale pentru funcțiile analitice. În teza de abilitare am prezentat definiția subordonării pentru funcțiile neanalitice de clasă C^1 și C^2 , prezentarea formei generale a noțiunii de subordonare diferențială pentru funcțiile neanalitice de clasa C^1 și C^2 , definiția clasei funcțiilor admisibile pentru funcțiile neanalitice, leme și teoreme necesare dezvoltării în viitor a acestor noțiuni. Rezultatele prezentate în teză vor fi publicate în viitor în reviste de specialitate în țară și străinătate.

Teza de încheie cu capitolul 8 "Differential subordinations for non-analytic functions", unde se prezintă ideea problemei duale problemei subordonărilor diferențiale pentru funcțiile neanalitice de clasă C^1 și C^2 , noțiunea de superordonare diferențială pentru funcții neanalitice de clasă C^1 și C^2 .

În teză sunt prezentate definiția superordonărilor diferențiale pentru funcțiile neanalitice de clasă C^1 și C^2 , definiția clasei funcțiilor admisibile pentru funcții neanalitice de clasă C^1 și C^2 , precum și leme și teoreme pe care le consider necesare dezvoltării acestei teorii. Rezultatele introduse în teză vor fi publicate în viitor în reviste de specialitate din țară și străinătate.

Tot ca direcții noi de cercetare îmi propun continuarea studierii proprietăților de stelaritate și convexitate pentru operatori diferențiali și integrali.

Bibliografie

- [Ac-Ow] M. Acu, S. Owa, *Note on a class of starlike functions*, in Proceeding of the International Short Joint Work on Study on Calculus Operators in Univalent Function Theory, 1-10, RIMS, Kyoto, Japan, August 2006.
- [Ahl1] L. Ahlfors, *Complex Analysis*, Mc Graw-Hill Book Comp., New York, 1966.
- [Ahl2] L. Ahlfors, *Conformal Invariants*, Topics in Geometric Function Theory, Mc Graw-Hill Book Comp., New York, 1973.
- [Al-O] F.M. Al-Oboudi, *On univalent functions defined by a generalized Sălăgean operator*, Ind. J. Math. Math. Sci., 2004, no. 25-28, 1429-1436.
- [Al-Mo] H. Al-Amiri, P.T. Mocanu, *On certain subclass of meromorphic close-to-convex functions*, Bull. Math. Soc. Sc. Mat. Roumanie, 38(86)(1994), no. 1-2, 3-15.
- [Alx] I.W. Alexander, *Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions*, Ann. of Math., 17(1915), 12-22.
- [Ant] J.A. Antonino, *Strong differential subordination and applications to univalence conditions*, J. Korean Math. Soc., 43(2006), no. 2, 311-322.
- [An-Ro] J.A. Antonino, S. Romaguera, *Strong differential subordination to Briot-Bouquet differential equations*, Journal of Differential Equations, 114(1994), 101-105.
- [Au-Mo] M.K. Aouf, A.O. Mustafa, *On a subclass of $n - p$ -valent prestarlike functions*, Comput. Math. Appl., 55(2008), 851-861.
- [Baz] I.E. Bazilević, *On a case of integrability in quadratures of the Lovner-Kuforev equation (limba rusă)*, Mat. Sb., N.S., 37(79)(1955), 471-476.
- [Bec] J. Becker, *Löwnersche Differentialgleichung und quasikonform fortsetzbare schlichte Funktionen*, J. Reine Angew. Math., 255(1972), 23-43.
- [Ber] S.D. Bernardi, *Convex and starlike univalent functions*, Trans. Amer. Math. Soc., 135(1969), 429-446.
- [Bie1] L. Bieberbach, *Über einige Extremalprobleme im Gebiete der Konformen Abbildung*, Math. Ann., 77(1916), 153-172.
- [Bie2] L. Bieberbach, *Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine Schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln*, Preuss Akad. Wiess Sitzungsab., 1916, 940-955.
- [Bie-Lew] A. Bielecki, Z. Lewandrowski, *Sur un théorème concernant les fonctions univalentes linéairement accessibles de M. Biernachi*, Ann. Polon. Math., 12(1962), 61-63.
- [Bra] L. de Branges, *A proof of the Bieberbach conjecture*, Acta Math., 154(1985), 137-152.
- [Br-Br] D. Breaz, N. Breaz, *Two integral operators*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Mathematica, Cluj-Napoca, 3(2002), 13-21.
- [Bri] L. Brichmann, *ϕ -like analytic function I*, Bull. Amer. Math. Soc., 79(1973), 555-558.
- [Bul] T. Bulboacă, *Differential subordinations and superordinations. Recent results*, Casa Cărţii de Ştiinţă, Cluj-Napoca, 2005.
- [Car1] C. Carathéodory, *Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene werte nicht annehmen*, Math. Ann., 64(1907), 95-115.

- [Car2] C. Carathéodory, *Über den Variabilitätsbereich der Fourier schen Konstanten von positiven harmonischen Funktion*, Rend. Circ. Mat. Palermo, 32(1911), 193-217.
- [Car3] C. Carathéodory, *Untersuchungen über die Konformen Abbildungen von testen und veränderlichen Gebieten*, Mat. Ann., 72(1912), 107-144.
- [Ca-Wh] W.M. Causey, W.L. White, *Starlikeness of certain functions with integral representations*, JMAA, 64(1978), 458-466.
- [Căl1] G. Călugăreanu, *Sur la condition nécessaire et suffisante pour l'univalence d'une fonction holomorphe dans un cercle*, C.R. Acad. Sci. Paris, 193(1931), 1150-1153.
- [Căl2] G. Călugăreanu, *Sur les conditions nécessaires et suffisantes pour l'univalence d'une fonction holomorphe dans un cercle*, Mathematica, 6(1932), 75-79.
- [Căl3] G. Călugăreanu, *Elemente de Teoria Funcțiilor de o Variabilă Complexă*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1963.
- [Ch-Sc1] Z. Charzyński, M. Schiffer, *A geometric proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient*, Scripta Math., 25(1960), 173-181.
- [Ch-Sc2] Z. Charzyński, M. Schiffer, *A new proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient*, Arch. Rational Mech. Anal., 5(1960), 187-193.
- [Ch-Le-Ow] M.P. Chen, S.K. Lee, S. Owa, *A remark on certain regular functions*, Simon Stiven, 65(1991), no. 1-2, 23-30.
- [Ch-Ow] M.P. Chen, S. Owa, *A property of certain analytic functions involving Ruscheweyh derivatives*, Proc. Japan Acad., Ser. A65(1989), no. 10, 333-335.
- [Ch-Ki-GIO] N.E. Cho, T.H. Kim, *Multiplier transformations and strongly close-to-convex functions*, Bulletin of the Korean Mathematical Society, 40(2003), no. 3, 399-410.
- [Ch-Ki] N.E. Cho, T.H. Kim, G.I. Oros, *Strong differential subordination and superordination for multivalent functions associated with the multiplier transformation* (to appear).
- [Ch-Sr] N.E. Cho, H.M. Srivastava, *Argument estimates of certain analytic functions defined by a class of multiplier transformation*, Math. and Computer Modelling, 37(2003), no. 1-2, 39-49.
- [Dar] H.E. Darwish, *A remark on p -valent functions of missing coefficients* (to appear).
- [Dur] P.L. Duren, *Univalent Functions*, Springer, New York, 1983.
- [Dz-Sr] J. Dziok, H.M. Srivastava, *Classes of analytic functions associated with the generalized hypergeometric function*, Appl. Math. Comput., 103(1999), 1-13.
- [Ec-Mi-Mo] P. Ecnigenburg, S.S. Miller, P.T. Mocanu, M.O. Reade, *On a Briot-Bouquet differential subordination*, in General Inequalities 3, vol. 64 of International Schriftenreihe Numerische Mathematik, 339-348, Birkhäuser, Basel, Switzerland, 1983.
- [Fr-GhO] B.A. Frasin, Gh. Oros, *Order of certain classes of analytic and univalent functions using Ruscheweyh derivative*, General Mathematics, 12(2004), no. 2, 3-10.
- [Go-So] R.M. Goel, N.S. Sohi, *A new criterion for p -valent functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 78(1980), 353-357.
- [Gol1] G.M. Goluzin, *On the majorization principle in function theory*, Dokl. Akad. SSSR, 42(1935), 647-649.
- [Gol2] G.M. Goluzin, *Geometric Theory of Functions of a Complex Variable*, A.M.S. Transl. of Math. Monographs, 26(1969).
- [Goo] A.W. Goodman, *Univalent Functions*, Mariner Publ. Comp. Tampa, Florida, 1983.
- [Gro] T. Gronwall, *Some remarks on conformal representation*, Ann. of Math. (2), 16(1914-1915), 72-76.
- [Gru] H. Grunsky, *Koeffizientenbedingugen für schlich abbildende meromorphe Funktionen*, Math. Z., 45(1939), 29-61.
- [Ha-Ma] D.J. Hallenbeck, T.H. Mac Gregor, *Linear Problems and Convexity Technique in Geometric Function Theory*, Pitman Adv. Publ. Program, Boston-London-Merbourne, 1984.

- [Ha-Mo-Ne] P. Hamburg, P.T. Mocanu, N. Negoescu, *Analiză matematică (Funcții convexe)*, Editura Didactică și Pedagogică, București, Romania, 1982.
- [Ha-Ru] D.J. Hallenbeck, St. Ruscheweyh, *Subordination by convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 52(1975), 191-105.
- [Hil] E. Hille, *Ordinary differential equations in the complex plane*, John Wiley, New York, 1976.
- [Ho-A1] A.A. Holhoş, *New class of univalent functions*, General Mathematics, vol. 13, nr. 4(2005), 33-38.
- [Ho-A2] A.A. Holhoş, *Some properties of the classes of n -starlike functions*, Bull. Math. Soc. Sci. Math., Roumanie N.S. 49(97/2006), nr. 3, 247-252.
- [Ho-Ho] A.A. Holhoş, V.C. Holhoş, *A remark on the Hadamard products of n -starlike functions*, General Mathematics, Univ. Lucian Blaga, Sibiu, vol. 12, 1(2004), 43-51.
- [Ho-V] V.C. Holhoş, *Conditions for starlikeness and for convexity*, Mathematica, Tome 47(70), nr. 1(2005), 74-76.
- [Jac] I.S. Jack, *Functions starlike and convex of order α* , J. London Math. Soc., 3(1971), 469-474.
- [Ka-Or] M. Kamali, H. Orhan, *On a subclass of certain starlike functions with negative coefficients*, Bull. Korean Math. Soc., 41(2004), no. 1, 53-71.
- [Kap] W. Kaplan, *Close to convex schlicht functions*, Michig. Math. J., 1, 2(1952), 169-185.
- [Ki-Me] J.J. Kim, E.P. Merkes, *On an integral of powers of spirallike function*, Kyungpook Math. J., 12(1972), 249-253.
- [Koe] P. Koebe, *Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven*, Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys., 1907, 191-210.
- [Ki-Me-Ra] S.S. Kumar, H.C. Taneja, *Ravichandran classes of multivalent functions defined by Dziok-Srivastava linear operator and multiplier transformations*, Kyungpook Math., 46(2006), 281-305.
- [Le-Mi-Zl] Z. Lewandowski, S.S. Miller, E. Zlotkiewicz, *Generating for some classes of univalent functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 56(1976), 111-117.
- [Lib] R.J. Libera, *Some classes of regular univalent functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 16(1965), 755-758.
- [Löw1] K. Löwner, *Untersuchungen über die verzerrung bei konformen Abbildungen des Einheitskreises $|z| < 1$, die durch Funktionen mit nichtverschwindender Ableitung geliefert werden*, S.B. Sächs Akad. Wiss. Leipzig, Berichte, 69(1917), 89-106.
- [Löw2] K. Löwner, *Untersuchungen über schlichte Konforme Abbildungen des Einheitskreises*, Math. Ann., 89(1923), 103-121.
- [Mac] T.H. MacGregor, *A subordination for convex functions of order α* , Journal of the London Mathematical Society, 9(1975), no. 4, 530-536.
- [Me-Wr] E.P. Merkes, D.J. Wright, *On univalent of certain integral*, Proc. Amer. Math. Soc., 27(1971), 97-100.
- [Mi-Mo1] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *Second order differential inequalities in the complex plane*, J. Math. Anal. Appl., 65(1978), 298-305.
- [Mi-Mo2] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *Differential subordinations and univalent functions*, Michigan Math. J., 28(1981), 157-171.
- [Mi-Mo3] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *On some classes of first order differential subordinations*, Michigan Math. J., 32(1985), 185-195.
- [Mi-Mo4] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *Differential subordinations and inequalities in the complex plane*, J. of Diff. Eqns., 67(1987), no. 2, 199-211.
- [Mi-Mo5] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *The theory and applications of second order differential subordinations*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Math., 34(1989), no. 4, 3-33.
- [Mi-Mo6] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *Classes of univalent integral operators*, J. Math. Anal. Appl., 157(1991), no. 1, 147-165.

- [Mi-Mo7] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *Briot-Bouquet differential equations and differential subordinations*, Complex Variables, 33(1997), 217-237.
- [Mi-Mo8] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *Differential subordination. Theory and application*, Marcel Dekker, Inc., New York, 2000.
- [Mi-Mo9] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *Subordinants of differential superordinations*, Complex Variables, 48(2003), no. 10, 815-826.
- [Mi-Mo10] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *Subordinants of differential superordinations*, Complex Variables, 48(2003), no. 10, 815-826.
- [Mi-Mo11] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *Briot-Bouquet differential superordinations and sandwich theorem*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 329(2007), no. 1, 327-335.
- [Mi-Mo-Re1] S.S. Miller, P.T. Mocanu, M.O. Reade, *On generalized convexity in conformal mappings II*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 21(1976), no. 2, 219-225.
- [Mi-Mo-Re2] S.S. Miller, P.T. Mocanu, M.O. Reade, *A particular starlike integral operator*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, 22(1977), no. 2, 44-47.
- [Mi-Mo-Re3] S.S. Miller, P.T. Mocanu, M.O. Reade, *Starlike integral operators*, Pacific Journal of Mathematics, 79(1978), no. 1, 157-168.
- [Mi-Mo-Re4] S.S. Miller, P.T. Mocanu, M.O. Reade, *On some particular classes of starlike integral operators*, Babeş-Bolyai Univ., Fac. of Math., Seminar of Geometric Function Theory, Preprint nr. 4, 1982, 159-165.
- [Moc1] P.T. Mocanu, *Une propriété de convexité généralisée dans la théorie de représentation* Mathematica (Cluj), 11(34)(1969), 127-133.
- [Moc2] P.T. Mocanu, *On a close-to-convexity preserving integral operator*, Mathematica (Cluj), 2(1987), 49-52.
- [Moc3] P.T. Mocanu, *Convexity and close-to-convexity preserving integral operator*, Mathematica (Cluj), 25(48), 2(1983), 177-182.
- [Moc3] P.T. Mocanu, *On a class of first-order differential subordinations*, Babeş-Bolyai Univ., Fac. of Math., Res. Sem. on Mathematical Analysis, Preprint 7(1991), 37-46.
- [Mo-Bu-Să] P.T. Mocanu, T. Bulboacă, G.S. Sălăgean, *Teoria geometrică a funcțiilor univalente*, Casa Cărții de Știință, Cluj-Napoca, Romania, 1999.
- [Neh] Z. Nehari, *Conformal mapping*, Dover, New York, NY, USA, 1975.
- [Noo] K.I. Noor, *On quasi-convex functions and related topics*, Internat. J. Math. and Math. Sci., 10(2)(1987), 241-258.
- [Or-Ki] H. Orhan, H. Kiziltunc, *A generalization on subfamily of p -valent function with negative coefficients*, Appl. Math. Comput., 155(2004), 521-530.
- [GIO1] G.I. Oros, *Utilizarea subordonărilor diferențiale în studiul unor clase de funcții univalente*, Casa Cărții de Știință, Cluj-Napoca, 2008.
- [GIO2] G.I. Oros, *New differential subordinations and superordinations. Strong differential subordination, Strong differential superordination*, LAP Lambert Academic Publishing, 2011.
- [GIO3] G.I. Oros, *Differential subordinations obtained by using Sălăgean operator*, J. of Approximation Th. and Applications, 2(2006), no. 2, 113-120.
- [GIO4] G.I. Oros, *A new differential inequality*, Acta Universitatis Apulensis, 16(2008), 81-85.
- [GIO5] G.I. Oros, *Briot-Bouquet differential superordinations and sandwich theorem*, Libertas Mathematica, 26(2006), 55-59.
- [GIO6] G.I. Oros, *First order differential superordinations using the Dziok-Srivastava linear operator*, Math. Reports, 12(62), 1(2010), 37-44.
- [GIO7] G.I. Oros, *An univalence preserving integral operator*, Journal of Inequalities and Applications, vol. 2008, art. ID 263408, 10 pages.

- [GIO8] G.I. Oros, *On an univalent integral operator*, Int. J. Open Problems Complex Analysis, 1(2009), no. 2, 19-28.
- [GIO9] G.I. Oros, *Applications of certain differential inequalities to the univalence of an integral operator*, Journal of Mathematical Inequalities, 3(2009), no. 4, 599-605.
- [GIO10] G.I. Oros, *Briot-Bouquet differential subordinations and superordinations using Dziok-Srivastava differential operator*, Math. Reports, 11(61)(2009), no. 2, 155-163.
- [GIO11] G.I. Oros, *A new class of univalent functions which extends the class of Mocanu functions*, Advances in Applied Mathematica Analysis, 1(2006), no. 2.
- [GIO12] G.I. Oros, *On a new class of univalent functions which extends the class of Mocanu functions*, Proceeding Book of the International Symposium on Geometric Function Theory and Applications, August 20-24, 2007, Istanbul, Turkey, 161-168.
- [GIO13] G.I. Oros, *New results related to the convexity and starlikeness of the Bernardi integral operator*, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistic, 38(2)(2009), 137-143.
- [GIO14] G.I. Oros, *New results related to the starlikeness of Bernardi integral operator*, Complex Variables and Elliptic Equations, 54(2009), no. 10, 923-926.
- [GIO15] G.I. Oros, *First order strong differential superordination*, General Mathematica, 15(2007), no. 2-3, 77-87.
- [GIO16] G.I. Oros, *Strong differential superordination*, Acta Universitatis Apulensis, 19(2009), 101-106.
- [GIO17] G.I. Oros, *Sufficient conditions for univalence obtained by using second order linear strong differential subordinations*, Turk J. Math., 34(2010), 13-20.
- [GIO18] G.I. Oros, *An application of the subordination chain*, Fractional Calculus and Applied Analysis, 13(2010), no. 5, 521-530.
- [GIO19] G.I. Oros, *Briot-Bouquet strong differential subordination*, Journal of Computational Analysis and Applications, 14(2012), no. 4, 733-737.
- [GIO20] G.I. Oros, *On a new strong differential subordination*, Acta Universitatis Apulensis, 32(2012), 243-250.
- [GIO21] G.I. Oros, *New results related to the convexity of the Bernardi integral operator*, Journal of Mathematical Inequalities, 7(2007), no. 3, 535-541.
- [GIO22] G.I. Oros, *Strong differential subordinations and superordinations obtained with some new integral operators*, Advances in Difference Equations, 2013, 2013:317.
- [GIO23] G.I. Oros, *A class of univalent functions obtained by a general multiplier transformation*, General Mathematics, 20(2012), no. 2-3, 74-85.
- [GIO24] G.I. Oros, *Sufficient conditions for univalence obtained by using first order nonlinear strong differential subordinations*, Journal of Computational Analysis and Applications, 16(2014), no. 1, 149-152.
- [GhO-GIO1] Gh. Oros, G.I. Oros, *Differential superordination defined by Ruscheweyh derivative*, Hokkaido Mathematical Journal, 36(2007), 1-8.
- [GhO-GIO2] Gh. Oros, G.I. Oros, *An application of Briot-Bouquet differential subordinations*, Bul. Acad. Moldova, Chişinău, 50(2006), no. 1, 101-104.
- [GhO-GIO3] Gh. Oros, G.I. Oros, *A class of univalent functions which extends the class of Mocanu functions*, Math. Reports, 10(60)(2008), no. 2, 165-168.
- [GhO-GIO4] Gh. Oros, G.I. Oros, *On a class of univalent functions which extends the class of Mocanu functions*, P.U.M.A., 17(2006), no. 3-4, 379-385.
- [GhO-GIO5] Gh. Oros, G.I. Oros, *Convexity condition for the Libera integral operator*, Complex Variables and Elliptic Equations, 51(2006), no. 1, 69-75.
- [GhO-GIO6] Gh. Oros, G.I. Oros, *On a special differential inequality*, Acta Universitatis Apulensis, Proceeding of the International Conference on Theory and Applications of Mathematics and Informatics - ICTAMI 2003, Alba Iulia, Part B, 177-182.

- [GIO-GhO1] G.I. Oros, Gh. Oros, *On univalent functions defined by a generalized Sălăgean operator*, Proceeding of the Sixth Congress of Romanian Mathematicians, Bucharest, 2007, vol. 1, 179-184.
- [GIO-GhO2] G.I. Oros, Gh. Oros, *On a class of univalent functions defined by a generalized Sălăgean operator*, Complex Variables and Elliptic Equations, 53(2008), no. 9, 869-877.
- [GIO-GhO3] G.I. Oros, Gh. Oros, *Differential subordinations obtained by using generalized Sălăgean operator*, Journal of Approximation Theory and Applications, 3(2007), no. 1-2, 75-84.
- [GIO-GhO4] G.I. Oros, Gh. Oros, *The study of a class of univalent functions*, Journal of Approximation Theory and Applications, 2(2006), no. 2, 103-111.
- [GIO-GhO5] G.I. Oros, Gh. Oros, *Differential subordinations obtained by using generalized Sălăgean and Ruscheweyh operators*, Acta Universitatis Apulensis, 14(2007), 129-140.
- [GIO-GhO6] G.I. Oros, Gh. Oros, *A convexity property for an integral operator F_m* , Studia Univ. Babeş-Bolyai, Mathematica, LV(2010), no. 3, 169-177.
- [GIO-GhO7] G.I. Oros, Gh. Oros, *Subordinations and superordinations using the Dziok-Srivastava linear operator*, Journal of Math. and Application, 31 (2009), 99-106.
- [GIO-GhO8] G.I. Oros, Gh. Oros, *On a convexity preserving integral operator*, Fractional Calculus Applied Analysis, 13(2010), no. 5, 531-536.
- [GIO-GhO9] G.I. Oros, Gh. Oros, *Strong differential subordination*, Turk J. Math., 33(2009), 249-257.
- [GIO-GhO10] G.I. Oros, Gh. Oros, *First order linear strong differential subordinations*, General Mathematics, 15(2007), no. 2-3, 98-107.
- [GIO-GhO11] G.I. Oros, Gh. Oros, *Second-order non-linear strong differential subordinations*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, 16(2009), 171-178.
- [GIO-GhO12] G.I. Oros, Gh. Oros, *Second order differential subordinations and superordinations using the Dziok-Srivastava linear operator*, Mathematica, 54(77)(2012), 155-164.
- [GIO-GhO13] G.I. Oros, Gh. Oros, *On a first order nonlinear differential subordination in the right half-plane*, Proceeding Book of the International Symposium on Geometric Function Theory and Applications, August 20-24, 2007, Istanbul, Turkey, 161-168.
- [GIO-Că-GhO] G.I. Oros, A. Cătaş, Gh. Oros, *On certain subclasses of meromorphic close-to-convex functions*, Hindawi Publishing Corporation Journal of Inequalities and Applications, vol. 2008, art. ID246909, 12 pages, doi:101155/2008/246909.
- [GIO-GhO-Ki-Ch] G.I. Oros, Gh. Oros, In Hwa Kim, N.E. Cho, *Differential subordinations associated with the Dziok-Srivastava operator*, Math. Reports, 13(63), 1(2011), 57-64.
- [GIO-GhO-Ow] G.I. Oros, Gh. Oros, S. Owa, *Differential subordinations on p -valent functions of missing coefficients*, International Journal of Applied Mathematics, 22(2009), no. 6, 1021-1030.
- [GIO-Că-GhO] G.I. Oros, A. Cătaş, Gh. Oros, *On certain subclasses of meromorphic close-to-convex functions*, Hindawi Publishing Corporation Journal of Inequalities and Applications, vol. 2008, art. ID246909, 12 pages, doi:101155/2008/246909.
- [Tă-GIO-Şe] A.O. Tăut, G.I. Oros, R. Şendruţiu, *On a class of univalent functions defined by Sălăgean differential operator*, Banach J. Math. Anal., 3(2009), no. 1, 61-67.
- [GhO-Tă] Gh. Oros, A.O. Tăut, *Best subordinants of the strong differential superordination*, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistic, 38(3)(2009), 293-298.
- [Ow-Pa-Pe] S. Owa, N.N. Pascu, V. Pescar, *Univalence of certain analytic functions*, Applications of Complex Function Theory to Differential Equations, Kyoto Univ., 9(1999), 106-112.
- [Ow-Fu-Sa-Og] S. Owa, S. Fukui, X. Sakaguchi, S. Ogawa, *An application of the Ruscheweyh derivatives*, Internat. J. Math. and Math. Sci., 9(4)(1986).
- [Oz-Nu] S. Ozaki, M. Nunokawa, *The Schwarzian derivative and univalent functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 33(2)(1972), 392-394.

- [Pap] M. Papp, *On certain subclass of meromorphic m -valent close-to-convex functions*, PU.M.A. 9(1998), no. 1-2, 155-163.
- [Pas1] N.N. Pascu, *An improvement of Becher's univalence criterion*, Proceedings of the Commemorative Session Simion Stoilow, Braşov, 1978, 43-48.
- [Pas2] N.N. Pascu, *Alpha-close-to-convex functions*, Romanian Finish Seminar on Complex Analysis, Springer, Berlin, 1979, 331-335.
- [Pas3] N.N. Pascu, *On a univalence criterion II*, Itinerant Seminar on Functional Equation, Approximation and Convexity, Cluj-Napoca, Preprint 6(1985), 153-154.
- [Pa-Pe] N.N. Pascu, V. Pescar, *On the integral operators of Kim-Merkes and Pfaltzgraff*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Mathematica, 32(55)(1990), no. 2, 185-192.
- [Pa-Ra] N.N. Pascu, I. Radomir, *A generalization of Ahlfors's and Becher's criterion of univalence*, Preprint no. 5, 1986, Babeş-Bolyai Univ., Fac. of Math., Research Seminars, Cluj-Napoca.
- [Pat] J. Patel, *Inclusion relations and convolution properties of certain subclasses of analytic functions defined by generalized Sălăgean operator*, Bulletin of the Belgian Mathematical Society, Simion Stevin, 15(2008), no. 1, 33-47.
- [Pa-Ch-Sr] J. Patel, N.E. Cho, H.M. Srivastava, *Certain subclasses of multivalent functions associated with a family of linear operators*, Mathematical and Computer Modelling, 43(2006), no. 3-4, 320-338.
- [Pes1] V. Pescar, *On some integral operator which preserve the univalence*, Punjab University Journal of Mathematics, 30(1997), 1-10.
- [Pes2] V. Pescar, *Sufficient conditions for univalence*, General Mathematics, 2(1994), no. 3, 139-144.
- [Pes3] V. Pescar, *On the univalence of some integral operators*, General Mathematics, 14(2006), no. 2, 77-84.
- [Pe-Ow] V. Pescar, S. Owa, *Sufficient conditions for univalence of certain integral operator*, Indian J. Math., 42(2000), no. 3, 347-351.
- [Pom] Ch. Pommerenke, *Univalent functions*, Vanderhoeck and Ruprecht, Göttingen.
- [Pon] S. Ponnusamy, *Differential subordination and starlike functions*, Complex Var. Theory Appl., 19(1992), 185-194.
- [Rob] R.M. Robinson, *Univalent majorants*, Trans. Amer. Math. Soc., 61(1947), 1-35.
- [Rob1] M.S. Robertson, *A remark on the odd schlicht functions*, Bull. Amer. Math. Soc., 42(1936), 366-370.
- [Rob2] M.S. Robertson, *Analytic functions starlike in one direction*, Amer. J. Math., 58(1936), 465-472.
- [Rob3] M.S. Robertson, *On the theory of univalent functions*, Ann. Math., 37(1936), 374-408.
- [Roy] W.C. Royster, *Convexity and starlikeness of analytic functions*, Duke Math. J., 19(1952), 447-457.
- [Ru1] S. Ruscheweyh, *New criteria for univalent functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 49(1975), 109-115.
- [Ru2] S. Ruscheweyh, *An extension of Becker's univalence condition*, Math. Ann., 220(1976), 285-290.
- [Ur-So] B.A. Uralegaddi, C. Somanatha, *Certain classes of univalent functions in Current Topics*, in Analytic Function Theory, World Scientific, River Edge, NJ, USA, 1992, 371-374.
- [Sa] K. Sakaguchi, *A note on p -valent functions*, J. Math. Soc. Japan, 14(1962), 312-321.
- [Säl1] G.S. Sălăgean, *Subclass of univalent functions*, in Complex Analysis, Proceedings of the Romanian Finish Seminar, Part 1 (Bucharest, 1981), vol. 1013 of Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin, Germany, 362-372.
- [Säl2] G.S. Sălăgean, *Properties of starlikeness and convexity preserved by some integral operators*, Romanian Finish Seminar on Complex Analysis (Proc. Bucharest, 1976), Lecture Notes in Mathematics, 743, Springer, Berlin, 1979, 362-372.
- [Sch1] M. Schiffer, *Faber polynomials in the theory of univalent functions*, Bull. Amer. Math. Soc., 54(1948), 503-517.

- [Sch2] M. Schiffer, *Sur un problème d'extrémum de la représentation conforme*, Bull. Soc. Math. France, 66(1938), 48-55.
- [Sin] R. Singh, *On Bazilevic functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 38(1973), 261-271.
- [Siv] S. Sivaprasad, Kumar, H.C. Taneja, V. Ravichandran, *Classes of multivalent functions defined by Dziok-Srivastava linear operator and multiplier transformation*, Kyungpook Mathematical Journal, 46(2006), no. 1, 97-109.
- [Sr-Ow-Pa] H.M. Srivastava, S. Owa, D.Z. Pashkuleva, *Some inequalities associated with a class of regular functions*, Utilitas Math., 34(1988), 163-168.
- [Sr-Su-St-Si] H.M. Srivastava, K. Suchithra, A. Stephen, B. Sivasubramanian, *Inclusion and neighborhood properties of certain subclasses of multivalent functions of complex order*, J. Ineq. Pure Appl. Math., 7(6)(2006), 1-8.
- [Sto] S. Stoilov, *Teoria funcțiilor de variabilă complexă*, vol. I, Editura Academiei, 1954, vol. II, Editura Academiei, 1958, București.
- [Str] E. Strohäcker, *Beiträge zur Theorie der Schlichten Funktionen*, Math. Z., 37(1933), 353-380.
- [Suf] T.J. Suffridge, *Some remarks on convex maps of the unit disc*, Duke Math. J., 37(1970), 775-777.
- [Şe-GIO] R. Şendruţiu, G.I. Oros, *Sufficient conditions for univalence of certain integral operator*, Acta Univ. Apulensis, 9(2012), 287-293.
- [Ur-So] B.A. Uralegaddi, Somanatha, *Certain classes of univalent functions*, In Current Topics in Analytic Function Theory, World Scientific Publishing Company, Singapore, 1992, 371-374.
- [Wh-Wa] E.T. Whittaker, G.N. Watson, *A course of modern analysis: An introduction to the general theory of infinite processes and of analytic functions with an account of the principal transcendental functions*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 4 edition, 1927.
- [Wi-Fe] D.R. Wilken, J. Feng, *A remark on convex and starlike functions*, Journal of the London Mathematical Society, Second Series, 21(1980), no. 2, 287-290.