Rezumatul tezei de abilitare

Operatori de aproximare multidimensionali

Conf. dr. Teodora Cătinaş

Aproximarea şi interpolarea multidimensională sunt instrumente esenţiale în cadrul modelării matematice şi în domeniul aplicaţiilor matematicii. Rezultatele din domeniul teoriei aproximării şi interpolării multidimensionale (wavelets, funcţii spline multidimensionale, funcţii radiale, interpolanţi multidimensionali, etc.) au numeroase aplicaţii practice, cum ar fi în probleme din *computer aided design*, modelare geometrică, geodezie, analiza imaginilor, diferite probleme de inginerie, etc. Teoria aproximării multidimensionale este în prezent un domeniu de cercetare activă şi în continuă dezvoltare.

Există două modalităţi de a rezolva o problemă de aproximare a unei funcţii de mai multe variabile: extinderea unor rezultate cunoscute pentru cazul funcţiilor de o variabilă la cazul multidimensional, sau utilizarea unor procedee specifice cazului multidimensional. In prezenta lucrare, abordăm ambele metode de rezolvare a unei probleme de interpolare multidimensională.

Prezenta teză este structurată în 5 capitole, care reprezintă de fapt principalele direcţii de cercetare pe care le-am abordat în ultimii 10 ani: *Interpolarea datelor arbitrare, Construcţia unor operatori de interpolare de tip produs tensorial şi sumă booleană, Convergenţa iteratelor unor operatori de aproximare liniari şi pozitivi, Funcţii spline elementare* şi *Formule de cuadratură optimale bazate pe metoda funcţiei φ.*

Capitolul 1 este dedicat operatorilor de interpolare pe un domeniu arbitrar. Prezentăm extinderi ale interpolării Shepard folosind funcţionale de tip Abel-Goncharov, Lidstone şi Bernoulli, precum şi folosind funcţii de bază mai eficiente; ne ocupăm de asemenea de studiul restului şi a ratei de convergenţă.

Problema interpolării datelor distribuite arbitrar este des întâlnită în domenii precum geologia, cartografia, ştiinţele pământului, etc. (este elocvent următorul exemplu simplu: generarea unei suprafeţe pentru modelarea unui zăcământ de minerale, folosind date adunate din diverse forări). Fie $f : X \to \mathbb{R}$ şi $X = \{(x_i, y_i) \in X, \quad i = 0, ..., N\} \subset \mathbb{R}^2$, mulţimea nodurilor de interpolare. In 1968, Donald Shepard a introdus in [40] un procedeu de interpolare, în care funcţiile fundamentale de interpolare pe un punct (x, y) se definesc folosind distanţele de la punct la nodurile de interpolare (x_i, y_i), $i = 1, ..., N$. Aceasta este o metodă concepută pentru interpolarea unor mulţimi arbitrare de date, cu număr mare de noduri. Operatorul Shepard bidimensional S este definit prin:

$$(Sf)(x,y) = \sum_{i=0}^{N} A_i(x,y) f(x_i, y_i), \tag{0.1}$$

cu

$$A_i(x,y) = \frac{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{N} r_j^{\mu}(x,y)}{\sum\limits_{k=0}^{N} \prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{N} r_j^{\mu}(x,y)}, \tag{0.2}$$

unde $\mu \in \mathbb{R}_+$ şi r este o metrică pe $\mathbb{R}^2$. De obicei, $r_j(x,y) = ((x-x_j)^2 + (y-y_j)^2)^{1/2}$.

Această metodă prezintă două inconveniente majore: cost computaţional ridicat, precum şi gradul de exactitate scăzut. Ele pot fi atenuate prin două modalităţi: prin modificarea funcţiilor de bază, sau prin mărirea gradul de exactitate folosind alte tipuri de funcţionale.

Modificarea funcţiilor de bază utilizând formula Shepard locală, introdusă de Franke şi Nielson în [37], constă în utilizarea formei:

$$(S^w f)(x,y) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{N} W_i(x,y) f(x_i,y_i)}{\sum\limits_{i=0}^{N} W_i(x,y)}, \tag{0.3}$$

cu

$$W_i(x,y) = \left[\frac{(R_w - r_i)_+}{R_w r_i}\right]^2, \tag{0.4}$$

unde R_w este o rază de influenţă a nodului (x_i, y_i).

Prin combinarea operatorului Shepard cu alţi operatori de interpolare se realizează mărirea gradului de exactitate şi îmbunătăţirea proprietăţilor de interpolare. Intr-o serie de lucrări, am obţinut noi operatori de tip Shepard, cu proprietăţi mai bune, folosind ambele metode de extindere.

In acest prim capitol al lucrării, prezentăm operatorii combinaţi unidimensionali de tip Abel-Goncharov şi Lidstone, obţinuţi în lucrările [11] şi [12], operatorul combinat bidimensional de tip Lidstone, introdus în [14] şi studiat ulterior şi în [15], [17], [22], şi pe cel de tip Bernoulli introdus în [21]. Prezentăm exemple numerice şi comparaţii între metodele existente în literatură şi metodele nou introduse.

Pe lângă interpolarea Shepard, funcţiile radiale sunt şi ele intrumente importante de interpolare a datelor arbitrare. In acest capitol, prezentăm metoda de quasi-interpolare de tip Bernoulli introdusă în [24], obţinută bazându-ne pe lucrarea lui R.K. Beatson şi W.A. Light [3]. Acesta s-a obţinut cu ajutorul operatorului de interpolare *thin-plate spline* şi a operatorului Bernoulli, având proprietăţi îmbunătăţite de interpolare, acurateţe şi precizie.

Tot în acest capitol prezentăm o metodă combinată de interpolare a datelor arbitrare bazată pe metoda de triangularizare introdusă de R. Franke şi G. Nielson în [37].

In capitolul 2 prezentăm o parte dintre de operatorii de interpolare de tip produs tensorial şi sumă booleană obţinuţi pe domenii cu laturi drepte, în [8], [9], [29], şi pe domenii cu laturi curbe în [4], [5], [6], [7], [26], [27], [35], [36].

Am construit operatori de interpolare de tip Lagrange, Hermite şi Birkhoff care interpolează valorile funcţiei şi ale derivatelor funcţiei pe frontiera triunghiului standard, cu laturi drepte; un prim articol în acest domeniu este cel al lui R.E. Barnhill, G. Birkhoff şi W.J. Gordon, [1], din 1973. Astfel de operatori se aplică în generarea de suprafeţe în *computer aided geometric design* şi în teoria elementului finit.

Incepând cu lucrarea [35], am introdus operatori de interpolare de tip Lagrange, Hermite, Birkhoff, precum şi Bernstein, pe domenii cu laturi curbe. Aceştia reprezintă o extensie a operatorilor de interpolare specifici domeniilor cu laturi drepte, dar au avantajul că permit satisfacerea exactă a condiţiilor pe frontiera domeniului. Se aplică în teoria elementului finit pentru probleme de ecuaţii diferenţiale (operatori Lagrange pentru condiţii de tip Dirichlet, operatori Birkhoff pentru condiţii de tip Neumann şi operatori Hermite pentru condiţii de tip Robin); articolul de la care s-a pornit a fost cel al lui R. E. Barnhill şi I. A. Gregory [2]. Am studiat trei aspecte principale ale operatorilor nou obtinuţi: proprietăţile de interpolare, precizia şi termenul rest al formulelor de interpolare.

Astfel de operatori se pot folosi la construcţia unor suprafeţe ce satisfac anumite condiţii (cum ar fi, de exemplu, acoperişurile de săli). In lucrarea [27] am prezentat câteva astfel de exemple de suprafeţe care au baza curbă, obţinute folosind operatori Lagrange, Hermite, Birkhoff şi Bernstein.

Toate rezultatele originale sunt însoţite de exemple numerice realizate în Matlab şi Maple.

Capitolul 3 este dedicat studiului convergenţei iteratelor unor operatori de aproximare liniari şi pozitivi, bazându-ne pe tehnica operatorilor slab Picard şi pe principiul contracţiilor. Am considerat operatori de tip Bernstein pe pătrat şi triunghi cu laturi curbe, operatori de tip Cheney-Sharma bidimensionali şi tridimensionali şi operatori liniari şi pozitivi care reproduc constantele. Rezultatele acestui capitolul se regăsesc în lucrările [32], [25], [31] şi [33]. Ideea se bazează pe tehnica introdusă de R.P. Kelisky şi T.J. Rivlin în lucrarea [39].

In capitolul 4 este prezentată o metodă de construcţie a funcţiilor spline elementare bazată pe definiţia funcţiilor spline polinomiale dată de I.J. Schoenberg, rezultate obţinute în lucrarea [30].

In ultimul capitol sunt prezentate rezultatele obţinute în lucrarea [28] relative la optimalitatea în sens Nikolski a unor clase de formule de cuadratură, folosind metoda funcţiei φ.

In încheiere amintim doar referinţele bibliografice menţionate pe parcursul acestui rezumat. (Lista completă a referinţelor bibliografice poate fi consultată la sfârşitul tezei.)

References

[1] R.E. Barnhill, G. Birkhoff, W.J. Gordon, *Smooth interpolation in triangle*, J. Approx. Theory **8** (1973), pp. 114–128.

[2] R. E. Barnhill, I. A. Gregory, *Polynomial interpolation to boundary data on triangles*, Math. Comp., **29** (1975), no. 131, pp. 726-735.

[3] R.K. Beatson, W.A. Light, *Quasi-interpolation by thin-plate splines on a square,* Constr. Approx., 9 (1993), no. 4, pp. 407–433.

[4] P. Blaga, T. Cătinaş, Gh. Coman, *Bernstein-type operators on tetrahedrons,* Studia Univ. Babes-Bolyai, Mathematica, 54 (2009), no. 4, pp. 3-19.

[5] P. Blaga, T. Cătinaş, Gh. Coman, *Bernstein-type operators on a square with one and two curved sides,* Studia Univ. Babes-Bolyai, Mathematica, 55 (2010), no. 3, pp. 51-67.

[6] P. Blaga, T. Cătinaş, Gh. Coman, *Bernstein-type operators on triangle with all curved sides*, Appl. Math. Comput., 2011, **218** (2011), 3072–3082.

[7] P. Blaga, T. Cătinaş, Gh. Coman, *Bernstein-type operators on triangle with one curved side,* Mediterr. J. Math., Vol. 9 (2012), No. 4, pp.

[8] T. Cătinaş, *Trivariate approximation operators on cube by parametric extensions*, Acta Universitatis Apulensis, Mathematics-Informatics, no. 4 (2002), pp. 29–36.

[9] T. Cătinaş (Gulea), *On trivariate approximation*, Proceedings of the International Symposium on Numerical Analysis and Approximation Theory, Cluj-Napoca, May 9-11, 2002, pp. 207-230.

[10] T. Cătinaş, *Interpolating on some nodes of a given triangle*, Studia Ma-thematica "Babeş-Bolyai", **48** (2003), no. 4, pp. 3–8.

[11] T. Cătinaş, *The combined Shepard-Abel-Goncharov univariate operator*, Rev. Anal. Numér. Théor. Approx., **32** (2003), no. 1, pp. 11–20.

[12] T. Cătinaş, *The combined Shepard-Lidstone univariate operator*, "T. Popoviciu" Itinerant Seminar of Functional Equations, Approximation and Convexity, Cluj-Napoca, May 21–25, 2003, pp. 3–15.

[13] T. Cătinaş, *On the generalized Newton algorithm for some nodes given on tetrahedron*, Seminar on Numerical and Statistical Calculus, "Babeş-Bolyai" University, Cluj-Napoca, 2004, pp. 65–76.

[14] T. Cătinaş, *The combined Shepard-Lidstone bivariate operator*, Trends and Applications in Constructive Approximation, (Eds. M.G. de Bruin, D.H. Mache, J. Szabados), International Series of Numerical Mathematics, Vol. 151, 2005, Springer Group-Birkhäuser Verlag, pp. 77-89.

[15] T. Cătinaş, *Bounds for the remainder in the bivariate Shepard interpolation of Lidstone type*, Rev. Anal. Numér. Théor. Approx., **34** (2005), no. 1, pp. 47-53.

[16] T. Cătinaş, *Bivariate interpolation by combined Shepard operators*, Proceeding of 17^{th}IMACS World Congress, Scientific Computation, Applied Mathematics and Simulation (Eds. P. Borne, M. Benrejeb, N. Dangoumau, L. Lorimier), Paris, July 11-15, 2005, ISBN 2-915913-02-1, pp.1-7.

[17] T. Cătinaş, *Three ways of defining the bivariate Shepard operator of Lidstone type*, Studia Univ. "Babeş-Bolyai", Mathematica, **50** (2005), no. 3, pp. 57–63.

[18] T. Cătinaş, *The Lidstone interpolation on tetrahedron*, J. Appl. Funct. Anal., 2006, no. 4, pp. 425-439.

[19] T. Cătinaş, *A combined method for interpolation of scattered data based on triangulation and Lagrange interpolation*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Mathematica, **51** (2006), no. 4, pp. 55-63.

[20] T. Cătinaş, *Interpolation of scattered data*, Ed. Casa Cărţii de Ştiinţă, 2007.

[21] T. Cătinaş, *The bivariate Shepard operator of Bernoulli type*, Calcolo, 2007, 44 (2007) no. 4, pp. 189-202.

[22] T. Cătinaş, *A modified version of bivariate Shepard-Lidstone operator*, AIP Conf. Proc. - International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics, 2007, vol. 936, (Ed. T. Simos, et al.), ISBN 978-0-7354-0447-2, pp. 109-112.

[23] T. Cătinaş, *A cubature formula based on Bernoulli interpolation for the rectangle*, Proceeding of Internat. Conf. on Engineering and Mathematics, 2007, ISBN 978-84-95809-29-2, pp. 31-36.

[24] T. Cătinaş, *Bivariate quasi-interpolation operator of Bernoulli type*, Mediterr. J. Math., 11 (2014), no.4, pp. 1171-1183

[25] T. Cătinaş, *Iterates of Bernstein type operators on a triangle with all curved sides*, Abstract and Applied Analysis, 2014 (2014), Art. ID 820130.

[26] T. Cătinaş, P. Blaga, Gh. Coman, *Interpolation operators on some triangles with curved sides*, Scientific Annals of "Al.I. Cuza" University of Iasi, 60 (2013), no. 2, pp. 449–487

[27] T. Cătinaş, P. Blaga, Gh. Coman, *Surfaces generation by blending interpolation on a triangle with one curved side,* Results in Mathematics, 64 (2013) nos. 3-4, pp. 343-355.

[28] T. Cătinaş, Gh. Coman, *Optimal quadrature formulas based on φ-function method*, Studia Univ. Babes-Bolyai, Mathematica, **51** (2006), no. 1, pp. 49-64.

[29] T. Cătinaş, Gh. Coman, *Some interpolation operators on a simplex domain,* Studia Univ. Babes-Bolyai, Mathematica, 52 (2007), no. 3, pp. 25-34.

[30] T. Cătinaş, Gh. Coman, *Elementary spline functions*, Rev. Anal. Numér. Théor. Approx., 38 (2008) no. 2, pp. 143-149.

[31] T. Cătinaş, D. Otrocol, *Iterates of multivariate Cheney-Sharma operators,* J. of Computational Analysis and Applications, 15(2013), no. 7, pp. 1240-1246.

[32] T. Cătinaş, D. Otrocol, *Iterates of Bernstein type operators on a square with one curved side via contraction principle,* Fixed Point Theory, 14 (2013), no. 1, 97-106.

[33] T. Cătinaş, D. Otrocol, I. A. Rus, *The iterates of positive linear operators with the set of constant functions as the fixed point set*, Carpathian J. Math., 2015, accepted for publication.

[34] Gh. Coman, T. Cătinaş, *Elementary spline functions*, Rev. Anal. Numer. Theor. Approx., 37 (2008), no. 2, pp. 143-149.

[35] Gh. Coman, T. Cătinaş, *Interpolation operators on a triangle with one curved side,* BIT Numerical Mathematics, 50 (2010), no. 2, pp. 243-267.

[36] Gh. Coman, T. Cătinaş, *Interpolation operators on a tetrahedron with three curved edges,* Calcolo, 47 (2010), no. 2, pp. 113-128.

[37] R. Franke, G.M. Nielson, *Smooth interpolation of large sets of scattered data*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, **15** (1980), pp. 1691–1704.

[38] R. L. Hardy, *Multiquadric equation of topography and other irregular surfaces,* J. Geophysical Res., 76 (1971), pp. 1905-1915.

[39] R.P. Kelisky, T.J. Rivlin, *Iterates of Bernstein polynomials*, Pacific J. Math., **21**(1967), 511-520.

[40] D. Shepard, *A two-dimensional interpolation function for irregularly spaced points*, Proc. 23rd Nat. Conf. ACM (1968), pp. 517–523.