Algebre Ringel-Hall în cazuri blânde și aplicații

Csaba Szántó

Rezumat Teză Abilitare

Facultatea de Matematică și Informatică
Universitatea Babeş-Bolyai Cluj-Napoca
2018

Rezumat

Algebrele Hall clasice asociate inelelor de valuare discretă au fost introduse de Steinitz și Hall pentru a oferi o abordare algebrică combinatoricii clasice a partițiilor. Multiplicarea este dată de polinoamele Hall clasice, care joacă un rol important în teoria reprezentării grupurilor simetrice și a grupurilor liniare generale (vezi [**42**]). În anul 1990, Ringel a definit algebre Hall pentru o clasă mare de inele, și anume inelele finitare, incluzând în special algebrele de drumuri asociate tolbelor peste un corp finit. În general, aceste algebre Ringel-Hall nu sunt comutative, spre deosebire de cele clasice (care corespund unei tolbe formate dintr-o singură buclă în acest context). În cazul algebrelor Ringel-Hall asociate tolbelor, stim în urma unor rezultate obținute de Ringel în [**57**] și Green în [**30**] că așa-numita subalgebră de compoziție generată de modulele simple este izomorfă (până la o modificare minoră) cu grupul cuantic corespunzător Drinfeld-Jimbo, compatibilitatea dintre multiplicare și comultiplicare rezultând din celebra formulă a lui Green (vezi în [**30**]).

Ringel a demonstrat că, în cazul algebrelor Ringel-Hall asociate tolbelor Dynkin, coeficienții de structură ai multiplicării sunt din nou polinoame în numărul de elemente ale corpului de bază, ele fiind numite polinoame Hall. Să observăm că în acest caz teorema lui Gabriel afirmă că modulele indecompozabile corespund rădăcinilor pozitive prin dimensiunea lor, astfel încât modulele pot fi tratate independent de corpul de bază prin intermediul rădăcinilor. În celebrul articol [**51**] Ringel determină aceste polinoame Hall de tip Dynkin asociate modulelor indecompozabile. Acestea pot avea un grad de până la 5, deci nu sunt triviale (constante 0 sau 1) ca și polinoamele Hall clasice asociate indecompozabilelor.

Primele rezultate explicite legate de algebra Ringel-Hall asociate tolbei Kronecker (cea mai simplă tolbă blândă) au fost formulate de către Zhang în [**80**] și Baumann-Kassel în [**5**]. Completând și extinzând aceste rezultate, în teza sa de doctorat autorul a descris explicit structura algebrei Ringel-Hall în cazul Kronecker, obținând toate formulele pentru coeficienții de structură și a construit diverse baze de tip Poincaré-Birkhoff-Witt (PBW) în subalgebra de compoziție. Folosind teorema lui Kac (care este o generalizare a teoremei lui Gabriel) putem observa că în cazurile blânde toate modulele indecompozabile pot fi tratate în mod independent de corpul de bază (prin dimensiunea lor în caz că sunt rădăcini reale pozitive sau prin cvasi-topul și cvasi-lungimea lor) cu excepția așa-numitelor indecompozabile regulare omogene. Tot în teza sa de doctorat autorul a arătat o metodă în cazul Kronecker de a

grupa aceste module omogene regulare în clase independente de corpul de bază, demonstrând modulo aceste clase existența polinoamelor Hall.

Generalizând pentru toate cazurile blânde rezultatele anterioare ale autorului, Hubery în **[35]** a observat că clasele omogene regulare sunt de fapt clase Segre și a demonstrat (modulo clasele Segre) existența polinoamelor Hall. Problema este însă că aceste polinoame Hall blânde nu sunt cunoscute în mod explicit, și așa cum vom vedea, obținerea lor este foarte dificilă. Cunoașterea acestor polinoame Hall ar fi foarte utilă în diverse contexte: așa cum am menționat mai sus, ele sunt coeficienții de structură ai grupurilor cuantice, sunt folosite în teoria algebrelor cluster și cluster cuantificate (prin cardinalități Grassmanniene) și pot fi folosite cu succes și pentru a investiga structura categoriei modulelor (prin teoria măsurii Gabriel-Roiter).

Dacă renunțăm la condiția de finititudine a corpului k, putem folosi în loc de produsul Ringel-Hall produsul monoidului de extensie introdus de Reineke în **[47]**. În acest fel pierdem partea de numărare pentru o extensie specifică, dar putem controla în continuare existența sau inexistența acesteia. Și asta peste un corp comutativ arbitrar, nu numai peste corpuri finite. După cum vom vedea în unele aplicații (de exemplu, în teoria fasciculelor de matrice) este mai important să fim capabili să lucrăm peste corpuri comutative arbitrare.

Prezenta teză de abilitare înregistrează progresele făcute de autor în ultimii zece ani în ceea ce privește polinoamele Hall blânde și produsul monoidului de extensie Kronecker, precum și diversele lor aplicații.

Primul capitol este unul preliminar care sintetizează principalele noțiuni și instrumente utilizate în întreaga teză. Acoperă noțiunile combinatorice, reprezentările tolbelor, functorii de reflecție, șirurile Schofield, algebrele Ringel-Hall, produsul monoidului de extensie, precum și câteva specializări ale acestor noțiuni.

Cel de-al doilea capitol este dedicat polinoamelor Hall blânde. Vom descrie toate produsele Ringel-Hall blânde care implică indecompozabile cu defect absolut cel mult 1. Mai exact, vom prezenta formule explicite pentru trei tipuri de produse Ringel-Hall. Aceste rezultate au fost publicate în principal în **[66]** și parțial în **[75]**. În final vom obține niște polinoame Hall speciale de forma $F^{\delta}_{\delta-a\ a}$ (unde a este o rădăcină reală pozitivă cu defect negativ arbitrar și δ este vectorul radical minimal), care vor fi utilizate în capitolul următor. Aceste rezultate apar în **[67]**.

În capitolul al treilea vom aplica cunoștințele despre polinoamele Hall blânde în teoria măsurilor Gabriel-Roiter. Măsura Gabriel-Roiter (măsura GR) a fost introdusă de Gabriel pentru a da o interpretare combinatorică a schemei de inducție utilizată de Roiter în demonstrația primei conjecturi Brauer-Thrall. Ringel a folosit-o ca și un instrument de fundație pentru teoria reprezentării algebrelor Artin. În primul rând vom demonstra că incluziunile GR în indecompozabilele preproiective și modulele regulare omogene de dimensiune δ, precum și măsurile lor GR, sunt independente de corpul de bază. Un rezultat similar în cazul Dynkin a fost obținut de Ringel în **[52]**. Ca o aplicație a teoremelor de mai sus, vom extinde prin intermediul polinoamelor Hall un rezultat al lui Bo Chen în **[13]**: rezultatul nostru este valabil și pentru cazul $\tilde{E}_8$ (acest caz lipsește din **[13]**) și este independent de corpul de bază (în **[13]** corpul k este algebric închis). Mai precis, demonstrăm că un submodul GR al unui modul regular omogen R de dimensiune δ are defect -1. Aceste rezultate apar în **[67]**.

În cel de-al patrulea capitol vom determina prin intermediul numerelor Ringel-Hall cardinalitățile unor Grassmanniene în cazul Kronecker. Considerăm varietățile Grassmanniene ale submodulelor de dimensiune fixată ale modulelor Kronecker indecompozabile. În [**12**] Caldero și Zelevinsky au descris explicit (prin intermediul celulelor Schubert) formule combinatorice pentru caracteristicile Euler-Poincaré ale acestor Grassmannieni, folosindu-le apoi în teoria algebrelor cluster. Folosind abordarea Ringel-Hall și functorii de reflecție, obținem recurențe specifice pentru cardinalitățile Grassmannienelor. De asomenea, deducem q-analogul unei identitățîi combinatorice Nanjundiah. Combinând aceste două rezultate, deducem formule explicite combinatorice pentru cardinalitățile Grassmannienelor de mai sus. Realizăm în acest fel o cuantificare a formulelor lui Caldero și Zelevinsky, cu aplicații în teoria algebrelor cluster cuantificate. Toate aceste rezultate au fost publicate în [**68**].

Capitolul al cincilea descrie extensiile modulelor Kronecker. Deși extensiile de module blânde sunt dependente de corpul de bază în general, se va dovedi că în cazul Kronecker extensiile sunt independente de corpul de bază modulo clasele Segre, astfel încât produsele monoidului de extensie pot fi descrise pur combinatoric. Vom descrie în mod explicit aceste produse în multe cazuri, folosind o versiune generică a formulei lui Green și combinatorica partițiilor. Obținem astfel o versiune generică, independentă de corpul de bază a listei produselor Ringel-Hall în cazul Kronecker (listă obținută în teza de doctorat a autorului). Secțiunea finală a acestui capitol studiază combinatorica dificilă legată de extensiile și scufundările modulelor preinjective (sau dual preproiective) decompozabile. După cum vom vedea în capitolul final, aceste rezultate publicate în [**69, 70, 71**] au aplicații în teoria fasciculelor de matrice.

Subiectul principal al celui de-al șaselea capitol este următoarea problemă, numită Provocare Modulară: caracterizarea sufundării modulelor Kronecker prin invarianții lor Kronecker. Acest lucru ne va conduce spre descrierea categoriei de submodule a algebrei Kronecker (vezi [**58**]) și de asemenea spre soluția următoarei probleme deschise în teoria fasciculelor de matrice (vezi capitolul următor pentru detalii), numită Provocare Fasciculară: să se găsească o condiție necesară și suficientă (în termenii invarianților clasici Kronecker) pentru ca un fascicul de matrice să fie subfasciculul altuia; în plus să se construiească completarea fasciculului mai mic la cel mai mare (vezi [**41**]). Capitolul este dedicat soluției Provocării Modulare, prin descompunerea modulelor în componente mai mici și utilizarea rezultatelor legate de extensiile modulelor Kronecker enumerate în capitolul precedent. În consecință, putem vedea că asemenea extensiilor, și scufundările modulelor Kronecker sunt independente de corpul de bază modulo clasele Segre. Rezultatele acestui capitol au fost publicate în [**72**].

În capitolul al șaptelea rezultatele prezentate în capitolele anterioare privind extensiile și scufundările modulelor Kronecker sunt aplicate în teoria fasciculelor de matrice. Vom vedea că fasciculele de matrice corespund modulelor Kronecker, astfel încât în acest mod este posibilă o abordare modulară a tuturor problemelor din teoria fasciculelor. În special, vom arăta cum să rezolvăm Provocarea Fasciculară prin soluția Provocării Modulare (vezi capitolul precedent). Ca o primă aplicație, vom da o demonstrație modulară scurtă pentru formula codimensiunii fasciculelor (a se vedea Demmel, Edelman [**17**]). Apoi vom prezenta o scurtă soluție explicită pentru Provocare Fasciculară care implică fascicule determinate doar de indicii minime pentru coloane (respectiv pentru rânduri). Aceste rezultate au fost publicate în [**73**] și [**74**].

Ultimul capitol oferă o scurtă prezentare a planurilor viitoare de cercetare ale autorului.

Bibliography

[1] *P. N. Anh*, Hall polynomials for $\tilde{A}_n$, Arch. Math. 78(2002), pp. 263–267.

[2] *I. Assem, D. Simson, A. Skowronski*, Elements of Representation Theory of Associative Algebras, Volume 1: Techniques of Representation Theory, LMS Student Texts 65, Cambridge Univ. Press 2006.

[3] *M. Auslander, I. Reiten, S. Smalo*, Representation Theory of Artin Algebras, Cambridge Stud. in Adv. Math. 36, Cambridge Univ. Press 1995.

[4] *I. Baragaña, I. Zaballa*, Column completion of a pair of matrices, Linear and Multilinear Algebra 27 (1990), pp. 243–273.

[5] *P. Baumann, C. Kassel*, The Hall algebra of the category of coherent sheaves on the projective line, J. reine angew. Math. 533 (2001), pp. 207–233.

[6] *Th. Beelen, P. Van Dooren*, An improved algorithm for the computation of Kronecker's canonical form of a singular pencil, Linear Algebra Appl. 105 (1988), pp. 9–65.

[7] *A. Berenstein, A. Zelevinsky*, Quantum cluster algebras, Adv. Math. 195 (2005), pp. 405–455.

[8] *A. Berenstein, S. Fomin, A. Zelevinsky*, Cluster algebras. III. Upper bounds and double Bruhat cells, Duke Math. J. 126 (2005), pp. 1-152.

[9] *I. N. Bernstein, I. M. Gelfand, and V. A. Ponomarev*, Coxeter functors and Gabriel's theorem, Uspiehi Mat. Nauk. 28 (1973), pp. 19–33 (in Russian), English translation in Russian Math. Surveys 28 (1973), pp. 17–32.

[10] *P. Caldero and F. Chapoton*, Cluster algebras as Hall algebras of quiver representations, Comment. Math. Helv. 81 (2006), pp. 595–616.

[11] *P. Caldero, B. Keller*, From triangulated categories to cluster algebras, Invent. Math. 172 (2008), pp. 169–211.

[12] *P. Caldero, A. Zelevinsky*, Laurent expansions in cluster algebras via quiver representations, Moscow Mathematical Journal 6 (2006), pp. 411–429.

[13] *B. Chen*, The Gabriel-Roiter submodules of simple homogeneous modules, Proc. AMS 138 (2010), pp. 3415–3424.

[14] *B. Chen*, Comparison of Auslander-Reiten theory and Gabriel-Roiter measure approach to the categories of tame hereditary algebras, Comm. Algebra 36 (2008), pp. 4186–4200.

[15] *B. Chen*, The Gabriel–Roiter measure for representation-finite hereditary algebras, J. of Algebra 309 (2007), pp. 292–317.

[16] *W. Crawley-Boevey*, Lectures on representations of quivers, preprint.

[17] *J. Demmel, A. Edelman*, The dimension of matrices (matrix pencils) with given Jordan (Kronecker) canonical forms, by J. Demmel and A. Edelman. Linear Algebra and its Applications 230 (1995), pp. 61–87.

[18] *J. Demmel, B. Kågström*, The generalized Schur decomposition of an arbitrary pencil $A - \lambda B$: robust software with error bounds and applications. Part I: Theory and algorithms," ACM Trans. Math. Software 19(2) (1993) 2, pp. 160–174.

[19] *V. Dlab, C. M. Ringel*, Indecomposable representations of graphs and algebras, AMS Memoirs 173 (1976).

[20] *V. Dlab, C. M. Ringel*, The representations of tame hereditary algebras, Representation theory of algebras: proceedings of the Philadelphia Conference, Lecture notes in pure and applied mathematics 37, Dekker 1978, pp. 329–353.

[21] *M. Dodig*, Completion up to a matrix pencil with column minimal indices as the only nontrivial Kronecker invariants, Linear Algebra Appl. 438 (2013), pp. 3155–3173.

[22] *M. Dodig, M. Stošić*, On convexity of polynomial paths and generalized majorizations, Electron. J. Combin. 17(1)(2010), R61.

[23] *M. Dodig, M. Stošić*, On properties of the generalized majorization, Electron. J. Linear Algebra 26(2013), pp. 471–509.

[24] *M. Dodig, M. Stošić*, Combinatorics of column minimal indices and matrix pencil completion problems, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 31 (2010), pp. 2318–2346.

[25] *P. Van Dooren*, The computation of Kronecker's canonical form of a singular pencil, Linear Algebra Appl. 27 (1979), pp. 103–141.

[26] *S. Fomin, A. Zelevinsky*, Cluster algebras. I. Foundations, J. Amer. Math. Soc. 15 (2002), pp. 497–529.

[27] *S. Fomin, A. Zelevinsky*, Cluster algebras. II. Finite type classification, Invent. Math. 154 (2003), pp. 63–121.

[28] *W. Fulton*, Young Tableaux, LMS Student Texts 35, Cambridge Univ. Press 1997.

[29] *F. R. Gantmacher*, Matrix theory, vol. 2, Chelsea, New York, 1974.

[30] *J.A. Green* Hall algebras, hereditary algebras and quantum groups, Invent. Math. 120 (1995), pp. 361–377.

[31] *J. Y. Guo*, The Hall algebra of a cyclic serial algebra, Sci. China 37(7) (1994), pp. 789–801.

[32] *Han Yang* Subrepresentations of Kronecker representations, Linear Algebra Appl. 402(2005), pp. 150–164.

[33] *D. Happel, C.M. Ringel*, Tilted algebras. Trans. Amer. Math. Soc. 274 (1982), pp. 399–443

[34] *A. Hubery*, The composition algebra of an affine quiver, preprint, http://arxiv.org/abs/math/0403206

[35] *A. Hubery*, Hall polynomials for affine quivers, Represent. Theory 14 (2010), pp. 355-378.

[36] *G. Cerulli Irelli*, Quiver Grassmannians associated with String Modules, Journal of Algebraic Combinatorics 33(2011), pp. 259–276.

[37] *V. Kac*, Infinite-Dimensional Lie Algebras (3rd ed.), Cambridge University Press 1994.

[38] *T. Klein*, The multiplication of Schur-functions and extensions of p-modules, J. London Math. Soc. 43 (1968), pp. 280-284.

[39] *H. Krause*, Representations of quivers via reflection functors, preprint arXiv:0804.1428.

[40] *P. Lampe*, A quantum cluster algebra of Kronecker type and the dual canonical basis, International Mathematics Research Notices, Issue 13 (2011), pp. 2970–3005.

[41] *J.J Loiseau, S. Mondié, I. Zaballa, P. Zagalak*, Assigning the Kronecker invariants of a matrix pencil by row or column completions, Linear Algebra Appl. 278 (1998), pp. 327–336.

[42] *I. G. Macdonald*, Symmetric Functions and Hall Polynomials, Clarendon Press Oxford 1995.

[43] *S. Mondié*, Contribution á l'Étude des Modifications Structurelles des Systémes Linéares, Ph.D. thesis, Université de Nantes, Nantes, France 1996.

[44] *K. Mulmuley, M. Sohoni*, Geometric Complexity Theory III: on deciding nonvanishing of a Littlewood-Richardson coefficient, Journal of Algebraic Combinatorics 36(1) (2012), pp .103–110.

[45] *T. S. Nanjundiah*, Remark on a note of P. Turán. Am. Monthly 65(1958), p. 354.

[46] *C. Oară, P. Van Dooren*, An improved algorithm for the computation of structural invariants of a system pencil and related geometric aspects, System & Control Letters 30 (1997), pp. 39–48.

[47] *M. Reineke*, The monoid of families of quiver representations. Proc. LMS 84 (2002), pp. 663–685.

[48] *C. Riedtmann*, Lie algebras generated by indecomposables, J. Algebra 170(1994), pp. 526–546.

[49] *C. M. Ringel*, Tame algebras and Integral Quadratic Forms. Lect. Notes Math. 1099 (Springer 1984).

[50] *C.M. Ringel*, Exceptional objects in hereditary categories, Proceedings Constanta Conference, An. St. Univ. Ovidius Constanta Vol. 4 (1996), pp. 150–158.

[51] *C. M. Ringel*, Hall polynomials for the representation-finite hereditary algebras, Adv. Math. 84 (1990), pp. 137–178.

[52] *C. M. Ringel*, The theorem of Bo Chen and Hall polynomials, Nagoya Journal 183 (2006), pp. 143–160.

[53] *C. M. Ringel*, The Gabriel-Roiter measure, Bull. Sci. Math. 129 (2005), pp. 726–748.

[54] *C. M. Ringel*, Exceptional modules are tree modules, Linear Alg. Appl. 275-276 (1998), pp. 471–493.

[55] *C. M. Ringel*, Green's Theorem on Hall Algebras, Representation Theory of Algebras and Related Topics. CMS Conference Proceedings 19. Providence (1996), pp. 185–245.

[56] *C. M. Ringel*, Gabriel–Roiter inclusions and Auslander–Reiten theory, J. of Algebra 324 (2010), pp. 3579–3590.

[57] *C. M. Ringel*, Hall algebras and quantum groups, Invent. Math. 101 (1990), pp. 583–592.

[58] *C. M. Ringel, M. Schmidmeier* Submodule categories of wild representation type, Journal for Pure and Applied Algebra 205 (2006), pp. 412-422.

[59] *D. Rupel*, On Quantum Analogue of The Caldero-Chapoton Formula, International Mathematics Research Notices, Issue 14 (2011), pp. 3207–3236.

[60] *D. Rupel*, Quantum cluster characters, PhD Thesis, University of Oregon 2012.

[61] *S. V. Sam*, The Caldero-Chapoton formula for cluster algebras, preprint.

[62] *A. Schofield* The internal structure of real Schur representations, preprint.

[63] *R.P. Stanley* Enumerative combinatorics, volume 2, Cambridge Univ. Press 1999.

[64] *Cs. Szántó*, Hall numbers and the composition algebra of the Kronecker algebra, Algebras and Representation Theory 9,(2006), pp. 465–495.

[65] *Cs. Szántó*, A generic Hall algebra of the Kronecker algebra, Communications in Algebra 33(8) (2005), pp. 2519–2540.

[66] *Cs. Szántó* , On some Ringel-Hall products in tame cases, Journal of Pure and Applied Algebra, 216 (2012), pp. 2069–2078.

[67] *Cs Szántó, I. Szöllősi*, Hall polynomials and the Gabriel-Roiter submodules of simple homogeneous modules, Bulletin of the London Mathematical Society, 47 (2015), pp. 206–216.

[68] *Cs. Szántó*, On the cardinalities of Kronecker quiver Grassmannians, Mathematische Zeitschrift 269 (2011), pp. 833–846.

[69] *Cs Szántó, I. Szöllősi*, On preprojective short exact sequences in the Kronecker case, Journal of Pure and Applied Algebra, 216 (2012), pp. 1171–1177.

[70] *Cs. Szántó*, Combinatorial aspects of extensions of Kronecker modules, Journal of Pure and Applied Algebra, 219 (2015), pp. 4378–4391.

[71] *Cs Szántó, I. Szöllősi*, The terms in the Ringel-Hall product of preinjective Kronecker modules, Periodica Mathematica Hungarica 63 (2011), pp. 227–244.

[72] *Cs. Szántó*, Submodules of Kronecker modules via extension monoid products, Journal of Pure and Applied Algebra 222 (2018), pp. 3360–3378.

[73] *Cs. Szántó, A. Horváth*, Formulas for Kronecker invariants using a representation theoretical approach, Linear Algebra and its Applications 430 (2009), pp. 664–673.

[74] *Cs. Szántó, I. Szöllősi*, A short solution to the subpencil problem involving only column minimal indices, Linear Algebra and its Applications 517 (2017), pp. 99–119.

[75] *Cs. Szántó*, On some Ringel-Hall numbers in tame cases, Acta Univ. Sapientiae Mathematica 6 (2014), pp. 61–72.

[76] *I. Szöllősi*, Computing the extensions of preinjective and preprojective Kronecker modules, Journal of Algebra 408(2014), pp. 205–221.

[77] *A. Varga*, Computation of Kronecker-like forms of a system pencil: applications, algorithms and software. Proc. of IEEE International Symposium on Computer Aided Control System Design, CACSD'96, Dearborn, MI, CACSD '96 (1996), pp. 77–82.

[78] *Pu Zhang*, Composition algebras of affine type, Journal of Algebra 206 (1998), pp. 505–540.

[79] *Pu Zhang, Ying-Bo Zhang, Jin-Yun Guo*, Minimal generators of Ringel-Hall algebras of affine quivers, Journal of Algebra 239 (2001), pp. 675–704.

[80] *Pu Zhang*, PBW-basis for the composition algebra of the Kronecker-algebra, J. reine angew. Math. 27 (2000), pp. 97–116.

[81] *The GAP Group*, GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.9.1 (2018), (`http://www.gap-system.org`).