Babeş-Bolyai University, Cluj-Napoca
Faculty of Mathematics and Computer Science

HABILITATION THESIS

The size of critical and tangency sets

Cornel Pintea
Associate Professor, Ph.D.
Department of Mathematics

Cluj-Napoca
2019

Abstract

This thesis presents some of the author's results published alone or jointly, after the defense of his doctoral thesis *Contributions to the critical point theory of differentiable maps* (supervised by Mircea Craioveanu) at West University of Timişoara (Romania) in 1996.

The thesis is organized into two parts. In the first part we overview some of the author's published results and the second part presents the current status of the author's research and a few future research directions and career development opportunities. The results presented in the first part have been selected from 12 articles published in 10 journals in the ISI Web of Science and from a few articles published in some BDI journals. The ISI journals are: Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923 -) (DOI 10.1007/s10231-018-0801-5), Bulletin Mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie (2014), Canadian Mathematical Bulletin (2010), Differential Geometry and its Applications (2006) Indiana University Mathematics Journal (2011), Michigan Mathematical Journal (2018), Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications (2010) Topology and its Applications (2010), Proceedings of the American Mathematical Society (2004,2009), Topological Methods in Nonlinear Analysis (2010,2016).

The BDI journals are: Mathematica and Studia Universitatis Babeş-Bolyai-Mathematica. After the defense of his doctoral thesis the author has been a *Young Researcher* of the European Research and Training Network **Geometric Analysis** (Coordinator: Nicolae Teleman). In this framework the author has had several Post Doc positions at University Paul Sabatier, Toulouse (France) and the Institute of Mathematics of the Polish Academy or Sciences (IM PAN, Poland) as well. Some of the results included in this thesis have been obtained jointly with collaborators from abroad during some research visits of the author: Louis Funar (Grenoble, France) and Zoltan Balogh (Bern, Switzerland).

The results are presented in a unifying style, being accompanied by definitions, preliminary results and sometimes by examples, as this habilitation thesis aims to become a useful reference for potential doctoral students interested in various facets of the critical phenomena.

The thesis is organized in five chapters.

In Chapter 1 we first define the differential structures of differential manifolds and recall, right afterwords, the Epstein Theorem on irreducible 3-manifolds with toroidal boundary, the Smale's result on the generator $S^3 \times S^3$ of the semi-group of 2-connected 6-manifolds endowed with the connected sum operation, the Wall's Theorem on the decomposition of 1-connecteed 6-manifolds and the splitting Theorem 1.1.4. These results are used in Section 2.1 to obtain some necessary conditions on a map to have finite critical set. We close the first section 1.1 by proving several facts involving the critical sets and the sets of critical values both in the category of topological manifolds and continuous maps and the category of differential manifolds and differential maps. Among them we emphasize the inclusion of the

critical set of the product of two Lie group valued maps in the cross product of the critical sets of the two factors. Section 1.2 is devoted to the degree of a differentiable map between two compact orientable differentiable manifolds and one of its applications. This application concerns a global injectivity result which is based both on the degree of some radial projection and a separation result. Section 1.3 is devoted to some classical results in the regular and critical settings. Most of these results are used along the thesis. Here we recall the *preimage theorem*, the *Ehresmann Theorem*, various versions of the *Sard Theorem*, an embedding theorem, the *Minimax Principle* and the *Lusternik-Schnirelman multiplicity Theorem*. Some applications of the Ehresmann Theorem and of the Sard Theorem are also pointed out. A subsection on Transversality and related results as well as several applications, closes the Section 1.3. For example it is proved here that the complement of a closed countable subset of a given n-dimensional boundaryless manifold has large $(n-1)$-homology group. In section 1.4 we recall the definition of the φ-category of a pair of manifolds and provide some general estimates for φ. Estimates for the φ-category of some particular pairs of cross products of several copies of the S^4-sphere and the S^3-sphere as well as for cross products of connected sums of $S^2 \times S^2$ and the S^3-sphere are also pointed out. The section 1.5 is devoted to functions with isolated cone-like singularities, such as some *polynomial functions*, *Lefchetz fibrations*, *Morse functions* and also to *vanishing cycles*.

Chapter 2 is devoted to maps with finitely many critical points. In Section 2.1 we describe the regular fiber of some maps with finitely many critical points between two manifolds which are subject to some topological conditions. We also review some much deeper necessary conditions on two manifolds M^{n+3}, N^n or M^{2k}, N^{k+1} in order to have finite φ. Some of them are also sufficient and for them the φ-category is either computed or some estimates are provided. In Section 2.2 we point out several general estimates on the real and circular Morse-Smale characteristics and, for some particular manifolds, the relation between the two as well as complete computations for some other manifolds. Finaly, we compute the circular Morse-Smale characteristic of the compact surfaces. In section 2.3 we first review the φ-category of some pairs of surfaces, completely computed for the involved pairs. We also compute the φ-category of some connected sums of a few products of spheres. The remaining part of Section 2.3 deals with some other examples of pairs of manifolds with finite φ-category. The construction of these manifolds is based, at first, on a given bicolored graph whose black vertices are decorated with local models of isolated singularities and each white vertix is decorated with a manifold whose boundary has as many connected components as the degree of the vertex itself. An identification procedure which depends on the given bicolored decorated graph gives rise to a manifold with boundary which admits a map with finitely many critical points over a certain disk, whose singularities correspond to the black vertices and whose restriction to the boundary is a locally trivial fibration. Working with several bicolored decorated graphs $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_p$, whose restrictions to the boundaries of their associated manifolds are cobounded fibrations, gives rise to a boundaryless manifold $M(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_p)$ which admits a map with finitely many critical points over a sphere S^n. Some estimates for the φ-category of the pair $(M(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_p), S^n)$ are provided and for some particular bicolored decorated graphs, with one single black vertex, this φ-category is shown to be one.

Chapter 3 is devoted to pairs of manifolds with infinite φ-category. Such pairs of manifolds are selected through their topology, via their homology and/or their homotopy groups (Sections 3.1 and 3.2). For some of them we actually prove that every map between them has high dimensional critical set (Section 3.3). This is the case, for example, when $\pi_1(M^n)$

is finite, $\pi_1(N^n)$ is infinite and $n \geq 2$. Using an approach of geometric flavor we recapture some of these results and prove some others.

In the fourth chapter we first observe, in Section 4.1, that the critical points of the restriction f_Σ, where $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ is a regular surface and $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow N$, (with $N = \mathbb{R}$ or S^1), is a submersion, are the characteristic points of Σ with respect to the involutive distribution of tangent plane to the fibers of f. Something similar happens in higher dimension when Σ is a submanifold of $\mathbb{R}^n$ and $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow N$ is a submersion. This is the reason to consider the tangency points and tangency sets (characteristic points and characteristic sets in the case of codimension one) of a submanifold of some Euclidean space with respect to a given distribution, possibliy noinvolutive, in this context of critical points and critical sets. In fact we provide some information on the size of the tangency set of an n-dimensional submanifold of $\mathbb{R}^{n+m}$ with respect a given distribution of rank n on $\mathbb{R}^{n+m}$. Some special attention is paid to the particular case of the highly noninvolutive horizontal distribution of the Heisenberg group $\mathbb{H}^n = (\mathbb{R}^{2n+1}, *)$. In Section 4.2 some bounds on the minimum number of characteristic points of the compact orientable surface $\Sigma_g \subset \mathbb{R}^3$ of genus g with respect to the horizontal distribution of the first Heisenberg group $\mathbb{H}^1 = (\mathbb{R}^3, *)$ are provided. In Section 4.3 a general upper estimate for the Hausdorff dimension of the tangency set of of a submanifold of $\mathbb{R}^{n+m}$ with respect to a distribution of rank n is given. In the remaining part of this section we first prove this upper estimate and generalize the Derridj's theorem. A general lower estimate for the Hausdorff dimension of the above described tangency set is also provided as well as some explicit upper estimates for such tangency sets are also given in the contact and symplectic settings.

In the last chapter an elliptic eigenvalue-transmission problem with Neumann boundary conditions is analysed. The involved elliptic operators are the p- and q-Laplacians and the problem is tackled both variationally and critically through a minimization procedure. In Section 5.1 the variational version of the problem is described alongside with the appropriate functionals for the minimization procedure, which are shown to verify the hypothesis of the *Lusternik-Schnirelmann principle*, or shortly the *L-S principle*. The L-S principle produces an unbounded sequence of positive eigenvalues and the minimization procedure produces infinitely many eigenfunctions of the initial eigenvalue-transmission problem. In Section 5.2 an eigenvalue-transmission problem with Robin boundary conditions is analyzed and the variational version of this new problem is described alongside with the appropriate functionals. The counterparts of the results in Section 5.1 can be proved in a similar manner. Finaly, in Section 5.3 an eigenvalue-transmission problem in Riemannian setting is analyzed and the counterparts of the results in Section 5.1, in this new setting, can be similarly proved.

Rezumat (in Romanian)

Această teză prezintă câteva dintre rezultatele publicate de către autor singur sau în colaborare, după susţinerea tezei sale de doctorat *Contribuţii la teoria punctului critic a aplicaţiilor diferenţiabile* (coordonată de către Mircea Craioveanu) la Universitatea de Vest din Timişoara (România) în anul 1996.

Teza este organizată pe două părţi. In prima parte prezentăm câteva dintre rezultatele publicate de cărte autor, iar partea a doua prezintă stadiul actual al activităţii de cercetare a autorului, precum şi posibile direcţii de cercetare şi dezvoltare a carierei profesionale a autorului.

Rezultatele prezentate în prima parte au fost selectate din 12 articole publicate în 10 reviste ISI Web of Science şi câteva lucrări publicate în reviste BDI. Revistele ISI sunt: Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923 -) (DOI 10.1007/s10231-018-0801-5), Bulletin Mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie (2014), Canadian Mathematical Bulletin (2010), Differential Geometry and its Applications (2006) Indiana University Mathematics Journal (2011), Michigan Mathematical Journal (2018), Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications (2010) Topology and its Applications (2010), Proceedings of the American Mathematical Society (2004,2009), Topological Methods in Nonlinear Analysis (2010,2016) and two articles published in BDI journals

Revistele BDI sunt: Mathematica şi Studia Universitatis Babeş-Bolyai-Mathematica. După susţinerea tezei sale de doctorat, autorul a fost *Tânăr cercetător* al reţelei europene de cercetare şi instruire **Geometric Analysis** (Coordonator: Nicolae Teleman). În cadrul acestui program autorul a avut câteva poziţii post doctorale la Universitatea Paul Sabatier, Toulouse (Franţa) şi la Institutul de Matematică al Academiei Poloneze de Ştiinţe (IM PAN, Polonia). O parte dintre rezultatele prezentate în această teză au fost obţinute în colaborare cu colaboratori afiliaţi unor instituţii de peste hotare în timpul unor vizite de cercetare facute de autor: Louis Funar (Grenoble, Franţa) şi Zoltan Balogh (Berna, Elveţia).

Rezultatele sunt prezentate într-o manieră unitară fiind precedate de definiţii şi rezultate ajutătoare precum şi de exemple uneori, întrucât prezenta teză de abilitare se doreşte a fi o referinţă utilă pentru posibili doctoranzi interesaţi de diverse faţete ale fenomenelor critice.

Lucrarea este organizată în 5 capitole.

În Capitolul 1 definim mai întâi structurile diferenţiale pentru varietăţi şi amintim chiar după aceea Teorema lui Epstein asupra 3-varietăţilor ireductibile cu frontieră toroidală, rezultatul lui Smale asupra generatorului $S^3 \times S^3$ al semigrupului 6-varietăţilor 2-conexe înzestrate cu operaţia sumei conexe, Teorema lui Wall asupra descompunerii 6-varietăţilor 1-conexe, precum şi Teorema de descompunere 1.1.4. Aceste rezultate sunt folosite în secţiunea 2.1 pentru a obţine o serie de condiţii necesare asupra unei aplicaţii pentru a avea mulţimea critică finită. Încheiem Secţiunea 1.1 cu demonstraţia câtorva fapte care implică mulţimile critice şi mulţimile valorilor critice atât în categoria varietăţilor topologice şi a aplicaţiilor continue cât şi în categoria varietăţilor diferenţiale şi a aplicaţiilor diferenţiabile. Dintre ele amintim incluziunea mulţimii critice a produsului a două aplicaţii cu valori într-un grup Lie în produsul cartezian al mulţimilor critice ale celor două aplicaţii. Secţiunea 1.2 este dedicată gradului unei aplicaţii diferenţiabile între varietăţi compacte orientabile, precum şi unei aplicaţii. Această aplicaţie este un rezultat de injectivitate globală bazat pe gradul unei proiecţii radiale şi pe un rezultat de separare. Secţiunea 1.3 este dedicată unor rezultate clasice, atât în context regular cât şi critic. Cele mai multe dintre aceste rezultate sunt folosite de-a lungul tezei. Amintim aici *Teorema preimaginii, Teorema lui Ehresmann* mai multe versiuni ale *Teoremei lui Sard*, o *Teoremă de scufundare, Principiul Minimax* şi *Teorema de multiplicitate L-S*. Unele aplicaţii ale teoremei lui Ehresmann şi ale teoremei lui Sard sunt de asemenea scoase în evidenţă. O subsecţiune asupra Transversalităţii şi a unor rezultate legate de transversalitate, precum şi unele aplicaţii, încheie Secţiunea 1.3. De exemplu se demonstrează aici că mulţime complementară unei submulţimi închise şi numărabile a unei varietăţi n-dimensionale fără frontieră are $(n-1)$-grupul de omologie 'mare'. În Secţiunea 1.4 amintim definiţia φ-categoriei unei perechi de varietăţi şi evidenţiem unele estimări generale pentru aceasta. Estimări ale φ-categoriei unor perechi particulare cum ar fi produsul cartezian al unui număr finit de copii ale lui S^4 şi sfera S^3 precum şi produsul cartezian al unui număr finit de copii ale lui $S^2 \times S^2$ şi sfera S^3 sunt de asemenea evidenţiate. Secţiunea 1.5 este dedica ciclurilor de colapsare şi aplicaţiilor cu puncte critice conice izolate precum anumite *funcţii polinomiale, fibrări Lefschetz şi funcţii Morse*.

Capitolul 2 este consacrat aplicaţiilor cu un număr finit de puncte critice. În Secţiunea 2.1 descriem fibra regulară a unor aplicaţii cu un număr finit de puncte critice între două varietăţi supuse unor condiţii topologice. Prezentăm de asemenea câteva condiţii necesare mult mai puternice asupra a două varietăţi M^{n+3}, N^n sau M^{2k}, N^{k+1} cu φ-categoria finită. Unele sunt de asemenea suficiente, iar pentru aceste perechi φ-categoria este fie calculată fie sunt evidenţiate unele estimări. În Secţiunea 2.2 scoatem în evidenţă câteva estimări generale asupra caracteristicilor Morse-Smale reale şi circulare, iar, în anumite cazuri particulare, relaţia dintre ele este acompaniată de calcule complete. Încheiem această secţiune cu calculul caracteristicii Morse-Smale a suprafeţelor compacte. În Secţiunea 2.3 prezentăm mai întâi φ-categoria unor perechi de suprafeţe complet calculată pentru acestea. Continuăm cu calculul φ-categoriei unor perechi de sume conexe ale unor produse de sfere. Partea rămasă a acestei secţiuni se ocupă de alte exemple de perechi de varietăţi având φ-categoria finită. Construcţia acestor varietăţi se bazează, la început, pe un graf bicolor ale cărui vârfuri negre sunt decorate cu modele locale de singularităţi izolate iar orice vârf alb este decorat cu o varietate ale cărei frontieră are un număr de componente conexe egal cu gradul vârfului pe care-l decorează. Un procedeu de identifiacre, care depinde de graful bicolor decorat, produce o varietate cu frontieră care admite o aplicaţie un număr finit de puncte critice peste un disc, ale cărei singularităţi corespund vârfurilor negre ale grafului şi a cărui restricţie la frontieră este o fibrare local trivială. Considerând mai multe grafe $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_p$, ale căror restricţii la frontierele varietăţilor corespunzătoare sunt fibrări cobordante, putem produce o varietate fără frontieră $M(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_p)$ care admite o aplicaţie peste o sferă S^n cu un număr finit de puncte critice. Sunt prezentate câteva estimări pentru φ-categoria perechii $(M(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_p), S^n)$, iar pentru câteva grafe bicolore decorate, cu un singur vârf negru, aceasta φ-categorie se arată că este unu.

Capitolul 3 este consacrat perechilor de varietăţi care au φ-categoria infinită. Astfel de perechi de varietăţi sunt selectate de toplogia lor, prin unele grupuri de omologie si/sau unele grupuri de omotopie (Secţiunile 3.1 şi 3.2). Pentru anumite perechi arătăm că orice aplicaţie între ele are dimensiunea mulţimii critice mare (Secţiunea 3.3). Aşa stau lucrurile, de exemplu, când $\pi_1(M^n)$ este finit, $\pi_1(N^n)$ este infinit şi $n \geq 2$. Folosind o abordare geometrică, redemonstrăm câteva dintre aceste rezultate precum şi altele noi.

În Capitolul 4 observăm mai întâi că punctele critice ale restricţiei f_Σ, unde $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ este o suprafaţă regulară şi $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow N$, (cu $N = \mathbb{R}$ sau S^1), este o submersie, sunt punctele caracteristice ale lui Σ faţă de distribuţia planelor tangente fibrelor lui f. Fenomenul are loc şi în dimensiune superioară dacă Σ este o subvarietate a lui $\mathbb{R}^n$ şi $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow N$ este o submersie. Acesta este motivul pentru care considerăm punctele şi mulţimile de tangenţă (punctele şi mulţimile caracteristice în cazul codimensiunii unu) ale unei subvarietăţi a spaţiului Euclidian în raport cu o distribuţie, posibil neinvolutivă, în acest context al punctelor şi mulţimilor critice. De fapt evaluăm aici mărimea mulţimii de tangenţă a unei varietăţi n-dimensionale a lui $\mathbb{R}^{n+m}$ în raport cu o distribuţie de rang n a lui $\mathbb{R}^{n+m}$. De o atenţie deosebită se bucură distribuţia, puternic neinvolutivă, orizontală a grupului Heisenberg $\mathbb{H}^n = (\mathbb{R}^{2n+1}, *)$. În Secţiunea 4.2 sunt prezentate câteva estimări ale numărului minim puncte caracteristice ale suprafeţei orientabile compacte $\Sigma_g \subset \mathbb{R}^3$ de gen g, în raport cu distribuţia orizontală a primului grup Heisenberg $\mathbb{H}^1 = (\mathbb{R}^3, *)$. În Secţiunea 4.3 este prezentată o estimare superioară a dimensiunii Hausdorff a mulţimii de tangenţă a unei subvarietăţi a lui $\mathbb{R}^{n+m}$ în raport cu o distribuţie de rang n. În pareta rămasă a acestei secţiuni demonstrăm mai întâi această estimare superioară şi generalizăm Teorema lui Derridj. Prezentăm de asemenea o estimare inferioară generală a dimensiunii Hausdorff a mulţimii de tangenţă descrisă mai sus precum şi unele estimări superioare explicite pentru dimensiunea Hausdorff a unor astfel de mulţimi de tangenţă în contextul structuriilor symplectice şi a structurilor de contact.

In Capitolul 5 analizăm o problemă de autovalori -transmisie eliptică cu condiţie Neumann la frontieră. Operatorii implicaţi sunt p- şi q-Laplacienii, iar problema este abordată atât din punct de vedere variaţional cât şi din punct de vedere critic printr-un procedeu de minimizare. În Secţiunea 5.1 este descrisă versiunea variaţională a problemei precum şi funcţionalele adecvate procedeului de minimizare, despre care se arată că verifică ipotezele principiului Lusternik-Schnirelmann (principiului L-S). Principiul L-S produce un şir nemărginit de de autovalori pozitive ale problemei, iar procedeul de minimizare produce o infinitate de autofuncţii ale problemei iniţiale. În Secţiunea 5.2 analizăm o problemă de autovalori-transmisie cu condiţie Robin la frontieră şi prezentăm versiunea sa variaţională şi funcţionalele adecvate. Rezultatele corespunzătoare secţiunii 5.1 pot fi demonstrate într-o manieră similară. În sfârşit, în Secţiunea 5.3 este analizată o problemă de autovalori-transmisie în context Riemannian, iar rezultatele corespunzătoare secţiunii 5.1 pot fi analog demonstrate în acest context.