Second Order Differential Equations and Systems: Theory and Applications to Oscillators

Rezumat

În Partea 1 a acestei lucrări voi prezenta activitatea mea de cercetare ştiinţifică după susţinerea tezei mele de doctorat, în anul 2001. De atunci, am continuat să investighez mai multe aspecte privind proprietăţi calitative ale soluţiilor unor ecuaţii diferenţiale ordinare sau sisteme de ecuaţii diferenţiale ordinare şi să lucrez alte teme de cercetare, publicând 35 de articole ştiinţifice în reviste de matematică sau în proceedings ale unor conferinţe internaţionale, o monografie, un articol este acceptat şi un alt articol este trimis pentru posibilă publicare. Interesul meu a fost concentrat pe următoarele două direcţii principale de cercetare: proprietăţi calitative ale soluţiilor unor clase de ecuaţii diferenţiale ordinare de ordinul al doilea cu aplicaţii la oscilatori neliniari amortizaţi şi proprietăţi calitative ale soluţiilor unor clase de sisteme de ecuaţii diferenţiale ordinare de ordinul al doilea, cu aplicaţii la oscilatori neliniari amortizaţi cuplaţi. Lucrările publicate în cadrul primei direcţii din clasificarea de mai sus sunt prezentate în Capitolul 1 şi rezultatelor obţinute în cea de-a doua direcţie sunt descrise în Capitolul 2.

Problemele principale studiate se referă la stabilitatea echilibrelor unor sisteme constituite fie dintr-un singur oscilator neliniar, fie din mai mulţi oscilatori neliniari cuplaţi, pentru o investigaţie consistentă a comportamentului pentru timp îndelungat a dinamicii acestor sisteme mecanice. După Introducere, în care sunt specificate pe scurt principalele elemente ce vor fi utilizate în această teză, în Capitolul 1 sunt prezentate rezultatele obţinute cu privire la proprietăţi calitative ale soluţiilor unor ecuaţii de ordinul al doilea. Într-o primă perioadă, am investigat stabilitatea echilibrului unui oscilator neliniar, a cărui dinamică este descrisă de ecuaţia diferenţială de ordinul al doilea (E) $\ddot{x} + 2f(t)\dot{x} + \beta(t)x + g(t,x) = 0$, $t \in \mathbb{R}_+$. Aceste cercetări îşi au originea în lucrarea lui T.A. Burton şi T. Furumochi [32], unde autorii au introdus o nouă metodă pentru studiul stabilităţii soluţiei nule $x = \dot{x} = 0$ a acestei ecuaţii cu $\beta(t) = 1$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, bazată pe teorema de punct fix a lui Schauder. În [81] am prezentat rezultate de stabilitate în acelaşi caz $\beta(t) = 1$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, folosind argumente relativ clasice şi în [82] am demonstrat anumite rezultate de stabilitate a soluţiei nule a acestei ecuaţii, în ipoteze mai generale, ce au necesitat argumente mai complicate. Voi prezenta şi un rezultat nou de stabilitate, ce nu a fost încă publicat, folosind o funcţie Lyapunov adecvată. Abordarea ne permite extinderile, atât la cazul vectorial, cât şi la cazul $t \in \mathbb{R}$. De fapt, o problemă continuă pe care am investigat-o de-a lungul timpului se referă la existenţa soluţiilor unor anumite ecuaţii ori sisteme de ecuaţii diferenţiale ordinare pe întreaga axă reală, publicând o serie de rezultate în această direcţie. Rezultatele ce urmează a fi prezentate în Secţiunea 1.1 îmbunătăţesc rezultatele din [82] şi din [81]. În Secţiunea 1.2 voi prezenta un rezultat de stabilitate a soluţiei banale a ecuaţiei (E) şi voi mai arăta că pentru orice soluţie x a

ecuaţiei, avem $x\,(+\infty) = \dot{x}\,(+\infty) = 0$, pentru date iniţiale mici, în cazul când unicitatea soluţiilor nu este garantată. Demonstraţiile se bazează pe o formă generalizată a teoremei Schauder–Tychonoff de punct fix. Dacă unicitatea soluţiilor este asigurată, voi prezenta un rezultat de stabilitate pentru aceeaşi ecuaţie, bazat pe teorema lui Banach de punct fix pe spaţii Fréchet. O mare parte a conţinutului acestei secţiuni se găseşte în [113], conţine îmbunătăţiri ale rezultatelor din [113] şi extinde rezultatele precedente din lucrarea [19].

În lucrările [26] (unde am considerat cazul $\beta\,(t) = 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$) şi în [114] am demonstrat existenţa soluţiilor homoclinice pentru ecuaţia (E), în anumite condiţii asupra coeficienţilor, în acest scop folosind o metodă bazată în principal pe inegalităţi diferenţiale şi analiză calitativă clasică a soluţiilor. O mare parte a conţinutului Secţiunii 1.3 se găseşte în aceste lucrări, dar conţine îmbunătăţiri semnificative ale rezultatelor noastre precedente. În [115] am discutat existenţa soluţiilor x ale ecuaţiei (E), care nu sunt identic egale cu 0 şi pentru care $x\,(+\infty) = \dot{x}\,(+\infty) = 0$, folosind metoda funcţiei Lyapunov şi inegalităţi diferenţiale. Abordarea a permis extinderea la cazul $t \in \mathbb{R}$, fiind astfel dedusă existenţa soluţiilor homoclinice. Secţiunea 1.4 conţine îmbunătăţiri ale rezultatelor din [115] şi îl generalizează pe cel din [21]. În articolul [22] am considerat o ecuaţie diferenţială de ordinul al II-lea generală pe axa reală şi am prezentat un rezultat de existenţă a soluţiilor x satisfăcând condiţiile pe frontieră $x(-\infty) = x(+\infty)$ şi $\dot{x}(-\infty) = \dot{x}(+\infty)$. Demonstraţia se bazează în principal pe aplicarea teoremei de punct fix Bohnenblust–Karlin pentru funcţii multivoce. Conţinutul Secţiunii 1.5 este preluat din această lucrare.

A doua direcţie de cercetare a fost sugerată de Gheorghe Moroşanu şi în Capitolul 2 voi prezenta rezultatele pe care le-am obţinut referitoare la dinamica oscilatorilor neliniari cuplaţi.

În articolul [84] am cercetat stabilitatea soluţiei nule a unor sisteme ce modelează mişcarea a doi oscilatori neliniari cuplaţi, ambii fiind sub acţiunea unor forţe exogene. În anumite ipoteze am dedus unele rezultate de stabilitate. O mare parte a Secţiunii 2.1 se găseşte în [84], dar conţine îmbunătăţiri ale rezultatelor noastre din acest articol. În Subsecţiunea 2.1.2 vom considera cazul în care avem doi oscilatori neliniari amortizaţi cuplaţi. Subsecţiunea 2.1.3 este dedicată cazului în care sunt doi oscilatori neliniari cuplaţi cu lipsă parţială de amortizare, pe care l-am investigat în [83]. Ipotezele pe care le presupunem asupra coeficienţilor de amortizare şi forţelor exogene sunt noi în comparaţie cu cele din [83] şi rezultatele le generalizează pe cele publicate în acest articol. Cazul în care avem doi oscilatori neliniari fără amortizare cuplaţi este tratat în Subsecţiunea 2.1.4. Fiecare din cele trei cazuri va fi studiat prin două abordări bazate pe argumente clasice, folosind inegalităţi diferenţiale şi cu metoda funcţiei Lyapunov.

În lucrarea [85] am reconsiderat sistemul mecanic constituit din doi oscilatori neliniari cu amortizare cuplaţi şi am cercetat stabilitatea soluţiei banale a sistemului de ecuaţii diferenţiale ce descrie mişcarea. Am arătat că pentru orice soluţie (x, y) a sistemului avem $x\,(+\infty) = \dot{x}\,(+\infty) = y\,(+\infty) = \dot{y}\,(+\infty) = 0$, pentru date iniţiale mici, în cazul în care unicitatea soluţiilor nu este garantată. Demonstraţiile noastre se bazează pe o formă generalizată a teoremei de punct fix Schauder–Tychonoff. Rezultatele din Secţiunea 2.2 sunt foarte asemănătoare cu cele din articolul [85], dar conţin şi îmbunătăţiri ale rezultatelor din această lucrare.

În articolul [86] am investigat sisteme neliniare de ecuaţii diferenţiale de ordinul al doilea ce descriu dinamica a doi oscilatori neliniari cuplaţi ai unui sistem mecanic de reducere a vibraţiilor. Am obţinut, în anumite condiţii, unele rezultate de stabilitate pentru soluţia nulă. Am mai arătat că, în prezenţa unei forţe exogene dependente de timp, fiecare soluţie (x, y) ce porneşte din date iniţiale suficient de mici şi derivata sa sunt mărginite sau au limitele $x(+\infty) = \dot{x}(+\infty) = y(+\infty) = \dot{y}(+\infty) = 0$, dacă sunt satisfăcute condiţii adecvate. Conţinutul Secţiunii 2.3 este preluat din acest articol.

Aproape toate rezultatele teoretice prezentate în Capitolele 1 şi 2 sunt ilustrate prin simulări numerice obţinute folosind `Matlab`.

M-am ocupat şi cu teme de cercetare, care nu au legătură directă cu direcţiile principale de cercetare descrise în această teză. La final, în Partea 4, voi da detalii despre rezultatele pe care le-am obţinut, de teoria punctului fix şi aplicaţiile ei la existenţa soluţiilor sau soluţiilor asimptotic stabile ale unor clase de ecuaţii integrale neliniare şi sisteme de ecuaţii integrale neliniare.

Partea 2 conţine planuri de evoluţie şi dezvoltare a carierei mele ştiinţifice şi academice. Sunt descrise anumite probleme deschise ce pot completa rezultatele pe care le-am obţinut până acum şi pe care le consider utile pentru cercetarea mea ştiinţifică ulterioară. Sunt prezentate un plan de cercetare pentru abordarea acestor probleme şi, de asemenea, un plan pentru cariera mea academică, cu moduri probabile de implementare în practică.

În Partea 3 sunt prezentate cele mai importante referinţe bibliografice studiate pentru pregătirea acestei teze. Toate aceste referinţe sunt citate în primele două părţi ale lucrării.