BABEŞ-BOLYAI UNIVERSITY CLUJ-NAPOCA
FACULTY OF MATHMATICS AND COMPUTERS SCIENCE

Olaru Ion Marian

Metric fixed point results with applications to integral equations

- HABILITATION THESIS-
Rezumat în limba română

2023

Obiectivul acestei teze este acela de a descrie contribuţiile autorului în teoria punctelor fixe pentru operatori definiţi pe spaţii metrice şi are ca bază rezultatele obţinute si publicate de autor după obţinerea titlului de doctor în 2006. Teza este organizată în cinci capitole.

Capitolul 1 conţine patru secţiuni si are două obiective: primul este acela de a descrie noţiuni şi rezultate din teoria operatorilor Picard si slab Picard iar al doilea este de a descrie noţiunile şi conceptele noi introduse de autor. Astfel prima secţiune este dedicată prezentării noţiunilor şi rezultatelor legate de operatorii Picard si slab Picard. A doua secţiune scoate în evidenţă noţiunea de spaţiu D^*- quasi metric, şir convergent respectiv şir Cauchy într-o astfel de structură.

Definiţia 1. *Fie X o mulţime nevidă şi $D^* : X \times X \times X \to \mathbb{R}_+$. Spunem că D^* este o quasimetrică pe X dacă pentru orice $x, y, z, t \in X$ următoarele condiţii sunt verificate:*

(D_1^*) $D^*(x, y, z) = 0$ *dacă şi numai dacă* $x = y = z$;

(D_2^*) $D^*(x, y, z) = D^*(p\{x, y, z\})$, *unde p este o funcţie de permutare;*

(D_3^*) $D^*(x, y, z) \leq a[D^*(x, y, t) + D^*(t, z, z)]$,

unde $a \geq 1$ este un număr real dat. Perechea (X, D^*) se numeşte spaţiu D^*-quasimetric.

Definiţia 2. *(a) Un şir de puncte $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ converge la $x \in X$ dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N \in \mathbb{N}$ astfel încât $D^*(x_n, x_n, x) < \varepsilon$, $\forall n \geq N$;*

(b) Un şir de puncte $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ se numeşte şir Cauchy dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N \in \mathbb{N}$ astfel încât $D^*(x_n, x_n, x_m) < \varepsilon$, pentru orice $n, m \geq N$. Spaţiul (X, D^*) se numeşte complet dacă orice şir Cauchy este convergent.

Secţiunea 2 se continuă cu introducerea noţiunilor de spaţiu metric, spaţiu metric dislocat, şir convergent, şir Cauchy respectiv $A-$Cauchy peste un modul topologic.

Definiţia 3. *Fie X o mulţime nevidă, $(E, +, \cdot, \tau_E)$ un modul topologic peste un inel R, $\leq_P$ relaţia de ordine parţială definită de un con $P \subset E$ şi $d : X \times X \to E$. Spunem că d este o metrică vectorială dacă următoarele condiţii sunt verificate:*

(d_1) $0_E \leq_P d(x, y)$ *pentru orice* $x, y \in X$, *şi* $d(x, y) = 0_E$ *dacă şi numai dacă* $x = y$;

(d_2) $d(x, y) = d(y, x)$ *pentru orice* $x, y \in X$;

(d_3) $d(x, y) \leq_P d(x, z) + d(z, y)$ *pentru orice* $x, y, z \in X$.

(X, d) *se numeşte spaţiu metric vectorial peste modulul topologic E.*

Definiţia 4. *Fie X o mulţime nevidă, $(E, +, \cdot, \tau_E)$ un modul topologic peste un inel R, $\leq_P$ relaţia de ordine parţială definită de un con $P \subset E$ şi $d : X \times X \to E$. Spunem că d este o metrică vectorială dislocată dacă următoarele condiţii sunt verificate:*

(d_1) $0_E \leq_P d(x, y)$ *pentru orice* $x, y \in X$;

(d_2) $d(x, y) \in Fr(P)$ *implică* $x = y$;

(d_3) $d(x, y) = d(y, x)$ *pentru orice* $x, y \in X$;

(d_4) $d(x, y) \leq_P d(x, z) + d(z, y)$ *pentru orice* $x, y, z \in X$.

Perechea (X, d) se numeşte spaţiu metric vectorial dislocat peste modulul topologic E.

Definiţia 5. *(1) Şirul $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$, se numeşte convergent dacă există $x \in X$ astfel încât pentru orice $0_E \ll_P c$ există $k(c) \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $k \geq k(c)$ implică $d(x_k, x) \ll_P c$;*

(2) Şirul $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ se numeşte şir $A-$Cauchy dacă există $A \subseteq P + Fr(P)$ astfel încât pentru orice $c \in A + int(P)$ există $k(c) \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $d(x_k, x_l) \ll_P c$, oricare ar fi $k, l \geq k(c)$;

(3) Şirul $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ se numeşte şir Cauchy dacă pentru orice $c \in int(P)$ există $k(c) \in \mathbb{N}$ astfel încât $d(x_k, x_l) \ll_P c$ pentru orice $k, l \geq n(c)$.

Secţiunea 3 a capitolului unu pune în evidenţă definiţia şi proprietăţile funcţiei de comparaţie vectorială definită pe un con P al unui spaţiu vectorial topologic E .

Definiţia 6. *Aplicaţia $\varphi : P \to P$ se numeste funcţie de comparaţie vectorială dacă următoarele condiţii sunt îndeplinite:*

(c_1) $k_1 \leq_P k_2$ *implică* $\varphi(k_1) \leq_P \varphi(k_2)$;

(c_2) $\varphi(r \cdot e) \ll_P r \cdot e$ *pentru orice* $r > 0$;

(c_3) $\forall t_0 > 0$ *şi* $\forall \varepsilon > 0$, *există* $\delta > 0$ *astfel încât*

$$\varphi(t \cdot e) - \varphi(t_0 \cdot e) \ll_P \varepsilon \cdot e, \ \forall\ t \in (t_0, t_0 + \delta).$$

Capitolul 2 descrie contribuţii ale autorului cu privire la teoria punctelor fixe pe spaţiile metrice generalizate. Astfel prima secţiune evidenţiază rezultate de punct fix pe spaţii metrice scalare în care funcţia distanţa este alterată de o aplicaţie $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ care satisface:

- ψ este continuă;
- ψ este monoton crescătoare;
- $\psi(t) = 0$ dacă şi numai dacă $t = 0$.

Rezultatul principal al acestei secţiuni este:

Teorema 1. *Fie $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ astfel încât:*

(1) $\varphi(0) = 0$;

(2) φ este semicontinuă superior la dreapta;

(3) $\varphi(t) < t$ pentru orice $t > 0$.

Dacă (X, d) este un spaţiu metric complet şi $T : X \to X$ un operator astfel încât:

$$\psi(d(T(x), T(y))) \leq \varphi(\psi(d(x, y))), \ \forall x, y \in X,$$

atunci:

(i) T verifică

$$d(T(x), T(y)) \leq \phi(d(x, y)), \ \forall x, y \in X,$$

unde $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ este definită prin

$$\phi(t) = \sup\{s \in \mathbb{R}_+ \mid \psi(s) \leq \varphi(\psi(t))\};$$

(ii) T este un operator Picard.

Secţiune 2 este dedicată prezentării rezultatelor de existenţa si unicitate a punctelor fixe comune respectiv de coincidenţă pentru doi operatori $S, T : X \to X$ definiţi pe un spaţiu D^*- quasimetric care satisfac una din următoarele condiţii metrice:

- există $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0$, $a(\alpha + \beta + \gamma + \delta) < 1$ astfel încât

$$D^*(Tx, Ty, Tz) \leq \alpha D^*(Sx, Sy, Sz) + \beta D^*(Sx, Tx, Tx) +$$

$$+\gamma D^*(Sy, Ty, Ty) + \delta D^*(Sz, Tz, Tz),$$

  pentru orice $x, y, z \in X$;

- există $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$, $a^2(2\alpha + 2\beta + 2\gamma) < 1$, astfel încât

$$D^*(Tx, Ty, Tz) \leq \alpha[D^*(Sx, Ty, Ty) + D^*(Sy, Tx, Tx)] +$$

$$+\beta[D^*(Sy, Tz, Tz) + D^*(Sz, Ty, Ty)] + \gamma[D^*(Sx, Tz, Tz) + D^*(Sz, Tx, Tx)],$$

  pentru orice $x, y, z \in X$;

Secţiunea 3 are scopul de a prezenta o extensie a principiului lui Banach de punct fix(Teorema 2.3.2.1) pe spaţii metrice vectoriale peste un modul topologic. În ultima secţiune a capitolului 2 se prezintă o aplicaţie a principiului lui Banach pe spaţii metrice vectoriale la o ecuaţie de tip Voltera.

Capitolul 3 prezintă contribuţia autorului cu privire la teoria punctelor fixe pentru operatori care satisfac condiţii metrice generalizate. Astfel prima secţiune este consacrată operatorilor T definiţi pe un spaţiu metric vectorial peste un spaţiu liniar topologic Y care verifcă o condiţie metrică de tipul $d(Tx, Ty) \leq \varphi(d(x, y))$ unde φ este o funcţie de comparaţie vectorială. În această secţiune se arată că pornind de la funcţia de scalarizare $\xi_e : Y \to \mathbb{R}$, $\xi_e(y) = \inf\{r \in \mathbb{R} \mid \ r \cdot e - y \in P\}$ se poate construi o funcţie scalară de comparaţie $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\psi(t) = \xi_e(\varphi(t \cdot e))$ şi o metrică scalară $\rho = \xi_e \circ d$ care transformă condiţia metrică vectorială într-una scalară de forma $\rho(Tx, Ty) \leq \psi(\rho(x, y))$. Secţiunea se încheie cu o aplicaţie la studiul sistemelor iterative de funcţii. Secţiunea 2 a acestui capitol are ca scop studiul operatorilor T care satisfac condiţii scalare respectiv vectoriale de tipul $\psi(d(Tx, Ty)) \leq \varphi(d(x, y))$. Mai exact în prima parte a secţiunii se defineşte clasa $\mathcal{G}$ a perechilor de funcţii $G, H : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ care satisfac condiţiile:

- mulţimea punctelor de continuitate a lui G este densă $(0, \infty)$;
- pentru orice $r \geq t > 0$, avem $G(r) > H(t)$;
- $\liminf\limits_{s \searrow t} \big(G(s) - H(s)\big) > 0$ pentru orice $t > 0$.

Definiţia 7. *Spunem că $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ satisface proprietatea (P) dacă pentru orice şir descrescător de numere pozitive $(t_k)_k$ pentru care $F(t_k) \underset{k}{\longrightarrow} -\infty$, avem $\lim\limits_{k \to \infty} t_k = 0$.*

Primul rezultat principal al acestei secţiuni este:

Teorema 2. *Fie (X, d) un spaţiu metric complet, $(G, H) \in \mathcal{G}$ astfel încât una dintre ele să satisfacă proprietatea (P) şi operatorul $T : X \to X$ verifică următoarea condiţie:*

$$G(d(Tx, Ty)) \leq H(d(x, y)), \ \forall\, x, y \in X, \ Tx \neq Ty.$$

Atunci T este un operator Picard.

Secţiunea 2 se continuă prin considerarea condiţiilor contractive de tipul $\psi(d(Tx, Ty)) \leq \varphi(d(x, y))$ pentru cazul spaţiilor metrice vectoriale cu metrica dislocată. Pentru a putea obţine un rezultat de existenţă şi unicitate pentru punctul fix al operatorului T care satisface condiţia metrică mai sus menţionată sunt necesare să fie impuse următoarele ipoteze asupra conului P din modulul topologic E:

(H1). $P = \bigcup_{i\in\mathcal{I}} K_i$, unde

(a) $\forall i \in \mathcal{I}$, $K_i \subseteq P$ este o submulţime secvenţial compactă a lui E;

(b) pentru orice şir mărginit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset P$ există $i_0 \in \mathcal{I}$ şi $N(i_0) \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n \in K_{i_0}$, $\forall n \geq N(i_0)$.

(H2). există $B_j \subset E$, $j \in J$, astfel încât pentru orice $J_1 \subset J$ familia $(B_j)_{j\in J_1}$ este sumabilă în E şi

(a) $\sum_{j\in J_1} B_j \subseteq Fr(P)$;

(b) $\sum_{j\in J_1} B_j + \sum_{j\in J_1} B_j + \sum_{j\in J_1} B_j + \sum_{j\in J_1} B_j \subseteq Fr(P)$.

Analog cu cazul scalar vom defini clasa $\mathcal{G}$ ca fiind mulţimea perechilor $G, H : int(P) \to E$ care verifică următoarele condiţii:

- G şi H sunt secvenţial continue pe $int(P)$;
- dacă $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset P$ este astfel încât $d_{n+1} \ll d_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ şi pentru orice $c \in int(P)$ $\exists N(c) \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq N(c)$ avem $G(d_n) + c \ll_P 0_E$, atunci $d_n \to z_0 \in \bigcup_{J_1\subset J} (\sum_{j\in J_1} B_j)$;
- $\forall r, t \in P$, $r \neq t$, satisfăcând $G(r) \leq_P H(t)$, avem $r \ll_P t$;
- $\forall r, t \in P$, $r \leq_P t$, avem $H(r) \leq_P H(t)$;
- dacă $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset P$ este un şir cu proprietatea că $d_{n+1} \ll d_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi $c \in int(P)$ atunci $\exists N(c) \in \mathbb{N}$ astfel încât $G(d_0) + \sum_{k=1}^{n} (H(d_{k-1}) - G(d_{k-1})) + c \ll_P 0_E$, $\forall n \geq N(c)$.

Al doilea rezultat principal al acestei secţiuni este:

Teorema 3. *Fie $(R, \oplus, \odot, \tau_R, \preceq)$ un inel topologic parţial ordonat , $(E, +, \cdot, \tau_E)$ un modul topologic Hausdorff, $P \subset E$ un con solid, (X, d) un spaţiu metric vectorial cu metrica dislocată $A-$ complet şi $T : X \to X$ astfel încât:*

(i) ipotezele (H_1) şi (H_2) sunt indeplinite;

(ii) $D = \{d(T(x), T(y)) \mid x, y \in X\}$ este mărginită;

(iii) $0_E \in Fr(P)$;

(iv) există $(G, H) \in \mathcal{G}$ *astfel încât*

$$G(d(Tx, Ty)) \leq_P H(d(x, y))), \ (\forall)x, y \in X, d(Tx, Ty) \in int(P).$$

Atunci T *este un operator Picard.*

În ultima secţiune a acestui capitol se prezintă contribuţia autorului la studiul ecuaţiei integrale

$$x(t) = (g_1(t) + \int_a^t K_1(t, s, x(s))ds) \cdot (g_2(t) + \int_a^t K_2(t, s, x(s))ds), \ t \in [a, b],$$

în contextul laticelor Banach.

Capitolul 4 este dedicat studiului unor ecuaţii integrale şi operatoriale şi are la bază rezultatele publicate de autor şi menţionate in referinţele bibliografice ale tezei. Structura acestui capitol este următoarea: Secţiunile 1 şi 2 prezintă o generalizare a unui model epidemic(împrăştiere unei boli infecţioase care nu induce o imunitate permanentă) si analizează, din punct de vedere al existenţei si unicităţii şi al dependenţei de date, soluţia următoarelor ecuaţii:

$$x(t) = [g_1(t) + \int_a^t K_1(t, s, x(s))ds] \cdot [g_2(t) + \int_a^t K_2(t, s, x(s))ds], \ t \in [a, b],$$

$$x(t) = \prod_{i=1}^{m} A_i(x)(t), t \in [a, b].$$

Scopul Secţiunii 3 este de a studia în contextul structurilor gauge existenţa si unicitatea soluţiei pentru urmatoarea ecuaţie integrală:

$$x(t) = g(t, x(t)) + h(t, x(t)) \cdot \int_0^t K(t, s, x(s))ds, \ t \geq 0$$

Capitolul 5 descrie proiectele autorului din viitorul apropiat legate de dezvoltarea carierei academice şi are două direcţii principale: proiecte de cercetare ştiintifică respectiv proiecte de dezvoltare didactică. Secţiunea 1 a acestui capitol pune în evidenţa câteva proiecte de cercetare ştiinţifică după cum urmează:

- Generalizarea condiţiei metrice $\psi(d(T(x), T(y))) \leq \varphi(d(x, y))$

  (A) Se consideră clasa $\mathcal{G}_0$ a perechilor de funcţii $G, H : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ care satisfac condiţiile:

(a) pentru orice $r \geq t > 0$, avem $G(r) > H(t)$;

(b) $\liminf\limits_{s \searrow t} \big(G(s) - H(s)\big) > 0$ pentru orice $t > 0$.

Definiţia 8. *Fie (X, d) un spaţiu metric şi $T : X \to X$ un operator. Spunem că T este o (F, G)-contracţie perturbată dacă există $(F, G) \in \mathcal{G}_0$ şi $g : (0, \infty) \to (0, \infty)$ o funcţie strict crescătoare, astfel încât:*

$$F(g(\delta(T(B)))) \leq G(g(\delta(B))), \text{ for all } B \in P_b(X), \delta(T(B)) \neq 0,$$

unde $\delta : \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ este definit prin

$$\delta(A) := \sup\{d(a, b) \mid a, b \in A\}$$

şi

$$P_b(X) := \{Y \subseteq X \mid Y \text{ este marginita}\}.$$

Un prim rezultat propus este

Teorema 4. *Fie (X, d) un spaţiu metric complet, $(F, G) \in \mathcal{G}_0$ şi $T : X \to X$ un operator astfel încât:*

(i) există $x_0 \in X$ astfel încât şirul $\{T^n(x_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ este mărginit;

(ii) F verifică proprietatea (P) şi G este monoton crescătoare;

(iii) T este o (F, G)-contracţie perturbată.

Atunci T este un operator Picard.

(B) Se consideră un operator $f : Y \subset X \to X$ pe un spaţiu Kasahara pentru care se propune un principiu de punct fix.

Teorema 5. *Fie $(X, \xrightarrow{F}, d)$ un spaţiu Kasahara, $Y \subset X$ o submulţime închisă a lui $(X, \xrightarrow{F})$ şi $f : Y \to X$ un operator. Presupunem că:*

(a_1) există un şir mărginit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in Y$ astfel încât $f^i(y_n)$ este definit pentru orice $i = \overline{1, n}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

(a_2) f este un operator continuu în $(X, \xrightarrow{F})$;

(a_3) există $G, H : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ astfel încât:

(i) $G(\delta(f(B))) \leq H(\delta(B))$, pentru orice $B \in P_b(Y)$, $\delta(f(B)) \neq 0$;

(ii) $\forall r \geq t > 0$ avem $G(r) > H(t)$;

(iii) există $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ bijectivă, g^{-1} este crescătoare pe $\mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{t \searrow 0} g(t) = 0$ astfel încât $\lim\limits_{t \searrow 0} g(t)G(t) = 0$ şi

$$\sum_{j \geq 1} g^{-1}\left(\frac{M}{\sum\limits_{k=1}^{j} \Big(G(t_{k-1}) - H(t_{k-1})\Big)}\right) < \infty$$

$\forall M \in (0, \infty)$ *şi* $\{t_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *un şir descrescător de numere pozitive convergent la zero;*

(iv) G *are proprietatea* (P) *şi* H *este monoton crescătoare;*

(v) $\liminf_{j\to\infty}(G(t_j) - H(s_{j+1} + t_j)) > 0$ *pentru orice şiruri* $\{t_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, $\{s_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *de numere pozitive,* $s_j \to 0$ *şi* $t_j \to t > 0$, $j \to \infty$.

Atunci

(b_1) *există* $x^* \in X$ *astfel încâtt* $f^n(y_n) \xrightarrow{F} x^*$, $n \to \infty$;

(b_2) $F_f = \{x^*\}$;

(b_3) $f^n(y_n) \xrightarrow{d} x^*$, *as* $n \to \infty$;

(b_4) *dacă aplicaţia* $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *definită prin*

$$\varphi(t) = \sup\{s \geq 0 \mid G(s) \leq H(t)\}$$

este subaditivă, G *este inferior semicontinuă la stânga şi* $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ *este astfel încât* $d(z_{n+1}, f(z_n))$ *converge către zero,* $n \to \infty$ *atunci* $z_n \xrightarrow{d} x^*$, $n \to \infty$.

- Studiul unei ecuaţii operatoriale în raport cu o metrică şi o relaţie de ordine

Se consideră ecuaţia operatorială

$$x(t) = \prod_{i=1}^{m} A_i(x)(t), t \in [a, b]$$

unde $A_i : C([a, b], \mathbb{R}_+) \to C([a, b], \mathbb{R}_+)$. Considerăm

$$X := C([a, b], \mathbb{R}_+) := \{x : [a, b] \to \mathbb{R}_+ \mid x \text{ este continua}\},$$

înzestrat cu norma lui Cebîşev $\|x\|_\infty = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|$ şi relaţia de ordine

$$x \preceq y \Longleftrightarrow x(t) \leq y(t), \ (\forall)t \in [a, b].$$

Definim $A : X^m \to X$ prin

$$A(x_1, \cdots, x_m) := \prod_{i=1}^{m} A_i(x_i)$$

unde $A_i : X \to X$, $i = \overline{1, m}$. Remarcăm faptul că soluţia ecuaţiei operatoriale mai sus menţionată este un punct fix al operatorului

$$\tilde{A} : X \to X,$$

$$\tilde{A}(x) = A(x, \cdots, x).$$

Proiectul de cercetare îsi propune să stabilească un rezultat de existenţă şi unicitate a punctului fix pentru operatorul $\tilde{A}$ în $Y := \overline{B}(0, R)$ cu $R \leq 1$. Un prim rezultat propus este

Teorema 6. *Presupunem că:*

(i) există $\varphi_i : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ crescător astfel încât:

(α) $|A_i(x)(t) - A_i(y)(t)| \leq \varphi_i(|x(t) - y(t)|)$, $\forall t \in [a, b]$, $x, y \in Y$ cu $x \preceq y$, $i = \overline{1, m}$;

(β) $\varphi := \sum_{i=1}^{m} \varphi_i$ este o funcţie de comparaţie tare;

(ii) Y este o mulţime invariantă pentru A_i, $i = \overline{1, m}$;

(iii) $Y_{\tilde{A}} \neq \emptyset$ şi $\tilde{A} : Y \to Y$ este orbital continuu;.

(iv) A_i este un operator monoton, pentru orice $i = \overline{1, m}$.

Atunci

(a) $\tilde{A}$, are în Y un punct fix unic $x^\star$;

(b) dacă $x \in Y$ este astfel încât $x \preceq A(x, \cdots, x)$ atunci $x \preceq x^\star$;

(c) dacă $x \in Y$ este astfel încât $A(x, \cdots, x) \preceq x$ atunci $x^\star \preceq x$;

- Un studiu asupra unor ecuaţii integrale utilizând conceptele introduse

Scopul acestui proiect de cercetare este acela de a considera următoarele ecuaţii:

$$x(t) = [g_1(t) + \int_a^t K_1(t, s, x(s))ds] \cdot [g_2(t) + \int_a^t K_2(t, s, x(s))ds], \ t \in [a, b],$$

$$x(t) = \prod_{i=1}^{m} A_i(x)(t), t \in [a, b], A_i : C([a, b], \mathbb{R}_+) \to C([a, b], \mathbb{R}_+)$$

$$x(t) = g(t, x(t)) + h(t, x(t)) \cdot \int_0^t K(t, s, x(s))ds, \ t \geq 0$$

şi de a furniza rezultate de existenţa şi unicitatea a punctului fix pentru operatorul asociat $T : X \to X$ care verifică una din următoarele condiţii :

– condiţie metrică de tipul $\psi(d(T(x), T(y))) \leq \varphi(d(x, y))$, $\forall x, y \in X$;

– condiţie metrică de tipul $\psi(d(T(x), T(y)), d(x, y)) < 0$, $\forall x, y \in X$;

– Xeste organizat ca un spaţiu D^* quasimetric ori ca un spaţiu metric vectorial peste un modul topologic.

Secţiunile 2 şi 3 ale acestui capitol sunt dedicate aspectelor legate de intenţiile autorului cu privire la activitatea de publicare sau reeditare a unor cărţi respectiv cursuri avute în vedere în viitorul apropiat. Teza se incheie cu referinţele bibliografice utilizate.