Rezumatul tezei de abilitare:
Aplicaţii ale disciminantului de Distanţă Euclidiană

Această teză de abilitare se încadrează în domeniul *"Geometrie algebrică metrică"*. Acest termen este un neologism care unește denumirile de geometrie metrică și geometrie algebrică. Această noțiune a apărut prima dată în titlul disertației lui M. Weinstein. Bazându-se pe teorii clasice, acest domeniu se îmbarcă spre o nouă paradigmă care combină concepte din geometria algebrică și geometrie diferențială, cu scopul de a dezvolta instrumente practice pentru secolul XXI. Un pas important în disertația lui Weinstein este un articol scris împreună cu autorul acestei teze (și anume [12]). Acest articol se află la baza Capitolului 2, iar Capitolul 3 este o continuare și o concluzie a acestuia.

Teza cuprinde şase capitole, primul este un capitol introductiv care prezintă domeniul general de cercetare a acestei lucrări prin reamintirea noțiunilor de bază a *Gradului de Distanță Euclidiană* (pe baza articolului fundamental al autorului [4]), acesta fiind necesar pentru ca această teză să fie o lectură de sine stătătoare. Ultimul capitol conține câteva potențiale direcții şi perspective de dezvoltare în domeniul de cercetare prezentat. Iar capitole rămase sunt fiecare structurate în jurul uneia dintre articolele [8, **?**, 11, 12], toate scrise de autor după terminarea studiilor doctorale.

Această lucrare se încadrează mai exact la tema diferitelor aplicații ale *Discriminantului de Distanță Euclidiană* (DE), **de aici provine titlul**, și are două părți. Prima parte constă din Capitolul 2 și 3 care analizează legătura discriminantului DE cu noțiuni topologice, cum ar fi varietățile offset, reach-ul, axa medială, hipersuprafețele bisectoarelor, centrele și razele de curbură a varietății subiacente.

Partea a doua este formată din Capitolul 4 și 5, unde este introdusă o problemă inversă a problemei Gradului de Distanță Euclidiană din punctul de vedere a *locusului de date* speciale, și anume mulțimi de parametri speciali, astfel încât o problemă dată de optimizare parametrică va avea unele soluții critice într-o varietate predeterminată. De exemplu, cineva poate fi interesat dacă soluția va fi singulară, va avea simetrii, va avea coordonatele însumate la unu etc. Noțiunea de locus de date a fost dezvoltată de echipa de cercetare coordonată de autor în cei șase ani dintre $2017 - 2023$. Cercetarea respectivă s-a concretizat în articolele [7] al autorului, [10] al autorului și lui Rodriguez, articolul [11] al autorului și lui Rodriguez care stă la baza Capitolului 4 și articolul [9] al autorului și lui Turatti care stă la baza Capitolului 5. Deoarece acest ultim articol răspunde la o întrebare deschisă importantă în domeniul descompunerilor de rang scăzut a tensorilor, este punctul primordial al unui proiect de cercetare de peste șase ani. De asemenea, remarcăm că locusul de date speciale (de exemplu, locusul de date singulare și izotropi) sunt subvarietăți ale discriminantului DE și de aici vine conexiunea cu subiectul din titlul tezei.

Urmează un scurt rezumat al fiecărui capitol.

Capitolul 2: Discriminantul DE și offset, cu aplicații în omologie persistentă

Cercetarea experimentală se bazează pe colectarea și analiza datelor. Este foarte important să înțelegem modelul matematic de fundal care definește un anumit fenomen. Una dintre posibilități este ca datele să fie direcționate de un model geometric, să zicem o varietate algebrică. În acest caz, am dori să „învățăm obiectul geometric" din date. De exemplu, am dori să înțelegem caracteristicile topologice ale modelului de bază. O modalitate obișnuită de a face acest lucru este prin *omologie persistentă*, care studiază omologia mulțimii de puncte la o distanță dată (dintr-un interval) față de mulțimea de

date originală și consideră caracteristicile a fi de interes dacă aceste caracterestici persistă pentru un interval larg a parametrului distanței.

Acest capitol se bazează pe articolul E. Horobeț, M. Weinstein, *Offset Hypersurfaces and Persistent Homology of Algebraic Varieties*, Computer Aided Geometric Design, Vol. 74 (2019), Pag. 101767. Studiul de față se află la intersecția dintre geometrie computațională, design geometric, topologie și geometrie algebrică, și leagă toate aceste subiecte împreună. În acest capitol studiem *omologia persistentă a filtrării offset* a unei varietăți algebrice, pe care o definim ca fiind omologia offset-urilor sale.

Arătăm că indicatorii (codurile de bare) omologiei persistente a filtrării offset a unei varietăți definite peste numerele raționale sunt algebrici și astfel pot fi calculați exact (prima teoremă principală a acestui capitol). Mai mult, conectăm omologia persistentă și optimizarea algebrică (prin Gradul de Distanță Euclidiană) prin teoria offset-urilor, aducând perspective de la fiecare domeniu la altul. Și anume, exprimăm gradul corespunzător variabilei distanță a hipersuprafeței offset în termeni de Gradul de Distanță Euclidiană a varietății originale (a doua teoremă principală a acestui capitol), obținând o nouă modalitate de a calcula aceste grade. O consecință a acestui rezultat este o limitare a gradului Discriminantului DE și a gradului închiderii algebrice a axei mediale. Descriem locul de non-properness a construcției offset (Subsecțiunea 2.1) și folosim acesta pentru a descrie mulțimea de puncte (a treia teoremă principală a acestui capitol) din spațiul ambiental care sunt interesante din punct de vedere topologic și relevante pentru calculul omologiei persistente. În cele din urmă, arătăm că reach-ul unei varietăți, o cantitate utilizată pentru a asigura corectitudinea calculelor de omologie persistentă, este algebrică (a patra teoremă principală a acestui capitol).

Capitolul 3: Discriminantul DE și gradul de curbură critică a unei varietăți algebrice

Am văzut în capitolul anterior că eșantionarea unui obiect este o problemă importantă atunci când se încearcă recuperarea informațiilor despre structura acestuia. Folosind informații geometrice, cum ar fi bottlenecks (blocaje) și reach-ul din articolul [3], autorii oferă praguri asupra densității probei necesare pentru a garanta că omologia varietății să poate să fie recuperată folosind numai de proba dată. Dacă proba este mai fină decât acest prag, atunci omologia poate fi recuperată.

Dacă datele noastre eșantion provin de la un model geometric, să spunem o varietate algebrică X, atunci reach-ul poate fi calculat ca minimul a două cantități, mai precis, una dintre acestea fiind raza celui mai îngust bottleneck (blocaj) a lui X, iar cealaltă este raza minimă de curbură sferică a lui X. Vom numi curbura sferică pur și simplu curbură.

În acest capitol ne ocupăm de complexitatea implicată în calculul reach-ului și în special calculul punctelor de curbură local minime, maxime etc. O analiză a gradului de bottlenecks (blocaje) a unei varietăți a fost făcută în [2, 5], dar înțelegerea punctelor de curbură critică în dimensiune arbitrară a fost o probelmă deschisă până acum. În acest capitol vom analiza mulțimea tuturor punctelor de pe Discriminatorul DE a unei varietăț reale X care corespund centrelor de curbură în punctele cu curbură critică (local minim, maxim, tip șa etc.). Construim o varietate care conține aceste puncte și gradul acestei varietăți îl vom numi gradul de *Curbură Critică* a lui X. Mai mult, în acest capitol oferim un algoritm pentru a construi varietatea punctelor de curbură critică și analizăm legătura lor cu locusul singular al discriminantului DE. Acest capitol se bazează pe articolul E. Horobeț, *The critical curvature degree of an algebraic variety*, Journal of Symbolic Computation, Volume 121, March–April 2024, 102259.

Capitolul 4: Discriminantul de date: o metodă de a descrie subvarietăți a Disciminantului DE

În multe tipuri de probleme de optimizare (optimizarea distanței, optimizarea ratei de comunicare etc.) este interesant să ne punem întrebarea dacă soluția îndeplinește anumite condiții (polinomiale) semnificative. De exemplu, cineva poate fi interesat dacă soluția va fi singulară, va avea simetrii, va avea coordonatele însumate la unu etc. La fel de interesant este să punem aceeași întrebare nu numai despre minimizatorul problemei de optimizare, ci și despre toate minimele și maximele locale. Adică vrem să impunem anumite condiții pentru toate punctele critice ale problemei. Cu alte cuvinte, avem în vedere o generalizare a problemei inverse de determinarea mulții parametrilor problemei de optimizare astfel încât pentru parametrii respectivi să avem un anumit tip de punct critic a funcției obiectiv. În acest capitol oferim exemple, metode și algoritmi pentru a testa astfel de proprietăți a unor probleme de optimizare parametrică.

Exemplul nostru motivant pentru a face generalizarea este *funcția de distanță scalată*. O funcție de distanță scalată pe $\mathbb{R}^n$ este prescrisă de un parametru de date $u \in \mathbb{R}^n$ și un vector de scalare fix $w \in \mathbb{R}^n$ ca

$$d_u^w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{i=1}^{n} w_i(u_i - x_i)^2.$$

Pentru acest caz special, principala noastră problemă este să rezolvăm

$$\begin{cases} \min d_u^w(x) \\ \text{având constrângerea } x \in X_{\mathbb{R}}, \end{cases} \tag{1}$$

unde $X_{\mathbb{R}}$ este o varietate în $\mathbb{R}^n$. Dorim să furnizăm mulțimea de parametri $u \in \mathbb{R}^n$ pentru care cel puțin unul dintre punctele critice a Problemei 1 satisface niște condițiile (polinomiale) prescrise.

Principalul rezultat al acestui capitol oferă o descriere a acestui loc special de parametri, precum și un algoritm pentru calcularea acestuia și aplicăm constatările noastre la optimizarea clasică a distanței referitoare la aproximări de rang scăzut și de rang scăzut structurat ale matricelor și tensorilor, acoperim optimizarea distanței scalate, facem conexiuni la Gradul Maximum-Likelihood, din statistică algebrică și în cele din urmă arătăm că optimizarea ratei de comunicare se potrivește, de asemenea, cu setarea problemei noastre. Acest capitol se bazează pe articolul E. Horobeț, J. I. Rodriguez, *Data loci in algebraic optimization*, Journal of Pure and Applied Algebra, Vol. 226 (2022), Nr. 12, Pag. 107144.

Capitolul 5: În ce caz scăderea unui tensor de rang-unu critic scade și rangul tensorului original?

Aproximarea de rang scăzut a matricelor este utilizată pentru modelarea matematică și compresia datelor, mai precis în analiza componentelor principale, analiza factorială, regresia ortogonală etc. Pentru a obține toate aproximările critice de rang-unu a unei matrice, se pot găsi toate punctele critice ale funcției de distanță de la respectiva matrice la varietatea matricelor de rang-unu. Prin teorema Eckhart-Young, acest lucru se realizează prin calculul descompunerii la valori singulare, iar numărul acestor aproximări critice de rang-unu este întotdeauna minimul dimensiunilor matricei. În plus, prin scăderea oricărei astfel de aproximări critice de rang-unu din matricea respectivă, obținem o scădere a rangului matricei care se rezultă, obținând astfel un algoritm adecvat pentru a construi orice aproximare de rang scăzut a matricei.

Aproximările de rang scăzut a tensorilor au și mai mult potențial de aplicare, dar sunt mult mai dificile atât din punct de vedere matematic, cât și din punct de vedere computațional (rangul tensorului și multe probleme asociate sunt NP-grele). În ciuda acestui fapt, există mulți algoritmi pentru găsirea aproximărilor de rang-unu pentru tensori. O modalitate de a face acest lucru, în mod similar cu

cazul matricelor, este găsirea tuturor punctelor critice ale funcției de distanță de la respectivul tensor la varietatea tensorilor de rang-unu (din fericire, aceasta este o mulțime închisă algebric). Numărul genric a acestor aproximări critice a fost calculată în [6] și arată că gradul de complexitate al acestei probleme pentru tensori este substanțial mai ridicat decât pentru matrici.

Pentru aproximări de rang superior, totuși, avem faptul că tensorii de rang mai mic sau egal cu un număr fix nu formează o submulțime închisă, astfel încât cea mai bună aproximare de rang scăzut a unui tensor nu există (vezi [1]). Din aceasta rezultă că scăderea unei aproximații de rang-unu dintr-un tensor ar putea chiar să crescă rangul acestuia (vezi [13]).

În acest capitol, pentru a depăși acest obstacol pentru aproximările de rang superior, ne îndreptăm atenția către definiția *rangului mărginit* a tensorilor și ne punem întrebarea: care este închiderea algebrică a mulțimii acelor tensori pentru care scăzând o aproximare de rang-unu are ca rezultat scăderea rangului (mărginit)?

Abordăm această problemă construind varietatea DL_1 de tensori pentru care scăderea unei aproximări critice de rangu-unu rezultă un tensor de rangu-unu. Apoi construim varietatea DL_2 de tensori pentru care scăderea unei aproximații critice de rang-unu produce un element din DL_1 și așa mai departe. Principalul rezultat din acest capitol poate fi formulat după cum urmează.

Teorema 0.1. *Fie $X \subset \mathcal{S}^d\mathbb{C}^n$ canul supra varietăţii Veronese de tensori simetrici de rang-unu şi considerăm produsul scalar Bombieri-Weyl definit pe $\mathcal{S}^d\mathbb{C}^n$. Avem ca lanţul*

$$X = \mathrm{DL}_1 \subset \cdots \subset \mathrm{DL}_r \subset \ldots$$

se stabilizează. Această limită DL_N (pentru un N suficient de mare) este închiderea algberică a tuturor tensorilor simetrici T, pentru care prin scăderea unei aproximări critice de rang-unu din T și repetând acest proces vom ajunge în cele din urmă la zero.

Mai mult, studiem în profunzime varietatea DL_2. Vom vedea că această varietate este determinată de *punctele de bottleneck (blocaj)* ale varietății de tensori de rang-unu și este legată de singularitățile nodale ale *hiperdeterminantului*. De asemenea, arătăm relația dintre DL_i și tensorii care pot fii descompuși în factori ortogonali.

Acest capitol se bazează pe articolul recent E. Horobeț, E. T. Turatti, *When does subtracting a rank-one approximation decrease tensor rank?*, arXiv:2303.14985, 2023. Deoarece acest articol răspunde la o întrebare deschisă importantă în domeniul descompunerilor de rang scăzut a tensororilor, este astfel punctul primordial al unui proiect de cercetare cu o derulare de șase ani care a fost coordonat de autor.

References

[1] V. De Silva, L.-H. Lim, *Tensor rank and the ill-posedness of the best low-rank approximation problem*, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, (2008), 30(3), 1084-1127.

[2] S. Di Rocco, D. Eklund, M. Weinstein, *The bottleneck degree of algebraic varieties*, SIAM Journal on Applied Algebra and Geometry 4.1 (2020), 227-253.

[3] S. Di Rocco,D. Eklund, O. Gäfvert, *Sampling and homology via bottlenecks*, Mathematics of Computation, (2022), 91(338), 2969-2995.

[4] J. Draisma, E. Horobeţ, G. Ottaviani, B. Sturmfels and R.R. Thomas: *The Euclidean distance degree of an algebraic variety*, Foundations of Computational Mathematics **16** (2016), 99–149.

[5] D. Eklund, *The numerical algebraic geometry of bottlenecks*, Advances in Applied Mathematics, (2023), 142, 102416.

[6] S. Friedland, G. Ottaviani, *The number of singular vector tuples and uniqueness of best rank-one approximation of tensors*, Foundations of Computational Mathematics, (2014), 14, 1209-1242.

[7] E. Horobeț, *The Data Singular and the Data Isotropic Loci for Affine Cones*, Comm. Algebra, Volume 45 (2017), Issue 3,1177 – 1186

[8] E. Horobeț, *The critical curvature degree of an algebraic variety*, Journal of Symbolic Computation, Volume 121, March–April 2024, 102259.

[9] E. Horobeț, E. T. Turatti, *When does subtracting a rank-one approximation decrease tensor rank?*, arXiv:2303.14985, 2023.

[10] E. Horobeț, J. I. Rodriguez, *The Maximum Likelihood Data Singular Locus*, J. Symbolic Comput., Volume 79 (2017), Part 1, 99–107

[11] E. Horobeţ, J. I. Rodriguez, *Data loci in algebraic optimization*, Journal of Pure and Applied Algebra 226, no. 12 (2022): 107144.

[12] E. Horobeţ, M. Weinstein, *Offset hypersurfaces and persistent homology of algebraic varieties*, Computer Aided Geometric Design 74 (2019) : 101767.

[13] A. Stegeman, P. Comon, *Subtracting a best rank-1 approximation does not necessarily decrease tensor rank*, Linear Algebra and its Applications, 2010, 433 (7), pp.1276–1300.