Rezumatul tezei de abilitare

Contributions to the Existence and Approximation of Fixed Points for Some Classes of Generalized Contractions

Contribuţii la existenţa şi aproximarea punctelor fixe pentru câteva clase de contracţii generalizate

Mădălina Păcurar

Această teză de abilitare reprezintă o contribuţie în domeniul teoriei metrice a punctului fix, concentrându-se pe câteva probleme tipice privind anumite clase particulare de operatori. În general am fost preocupaţi de stabilirea condiţiilor care asigură existenţa şi eventual unicitatea punctului fix pentru operatorii studiaţi. Sunt obţinute şi teoreme constructive, care oferă metode iterative de aproximare a punctului fix, însoţite de informaţii privind estimarea erorii de aproximare. În cazul operatorilor ciclici şi r-ciclici, punctele fixe sunt obţinute folosind iteraţia de tip Picard, în timp ce pentru operatorii îmbogăţiţi am folosit iteraţia de tip Krasnoselskij. Problemele studiate sunt uşor diferite pentru fiecare clasă în parte, aşa încât vom prezenta în continuare principalele contribuţii şi rezultate din fiecare capitol.

Operatorii ciclici cărora le este dedicat *Capitolul 1* nu sunt de mai bine de un deceniu o noutate, lor fiindu-le dedicat un număr destul de mare de lucrări publicate de diverşi autori. În acest context s-a făcut simţită necesitatea de a inventaria rezultatele deja publicate, pentru a delimita zonele care mai necesită explorare. Un asemenea demers e sintetizat în acest capitol, în care am prezentat câteva direcţii noi de cercetare şi am demonstrat cel puţin câte o teoremă de punct fix în fiecare caz. Dintre acestea menţionăm rezultate de existenţă pentru operatori ciclici progresivi, respectiv crescători, în mulţimi ordonate; variante saturate (completate cu informaţii privind stabilitatea, bine-punerea problemei etc.) ale unor teoreme de punct fix cunoscute, pentru câteva clase de operatori ciclici contractivi, în spaţii metrice; teoreme de tip Maia pentru l-contracţii ciclice, respectiv operatori ciclici Kannan, pe mulţimi înzestrate cu două metrici; teoreme de punct fix pentru l-contracţii ciclice în câteva tipuri de spaţii metrice generalizate; o teoremă de punct fix comun pentru o pereche de operatori ciclici de tip Kannan; variante ciclice ale celor două teoreme de punct fix Rutten-Smyth în spaţii distanţă ordonate. În toate aceste cazuri cercetarea poate continua pentru a stabili rezultate asemănătoare pentru alte clase de operatori ciclici.

Deşi operatorii r-ciclici despre care este vorba în *Capitolul 2* sunt o generalizare a operatorilor ciclici din capitolul precedent, în sensul că orice operator ciclic este un operator 1-ciclic, am ales să-i prezentăm separat deoarece sunt o contribuţie relativ nouă, iar definiţia şi proprietăţile de bază implică mai multe aspecte noi. Am introdus noţiunea de acoperire r-ciclică în raport cu un operator, respectiv de operator r-ciclic în raport cu o acoperire, şi am inclus câteva exemple relevante. Specific acestei tematici este faptul că un rol important îl joacă aşa-numitele reprezentări vizuale, folosite destul de mult pentru ilustrarea unor cazuri particulare, întrucât în cazurile generale notaţia riguroasă devine destul de stufoasă. Majoritatea rezultatelor sunt condiţionate de relaţia dintre m, numărul submulţimilor din acoperirea ciclică, şi r, "pasul" operatorului ciclic, cel care indică "peste" câte submulţimi ale acoperirii se găseşte imaginea fiecărui element prin respectivul operator. O altă particularitate a operatorilor r-ciclici, atunci când dorim să impunem o condiţie de tip contracţie (noi am abordat deocamdată doar cazul unei condiţii de tip Banach), este faptul că studiul continuă pe două direcţii: atunci când condiţia e respectată pentru oricare două elemente incluse în submulţimi aflate la o distanţă de r submulţimi în acoperire, numite contracţii r-ciclice sincrone, respectiv atunci când condiţia e respectată pentru oricare două elemente aparţinând unor mulţimi consecutive în acoperire, numite contracţii r-ciclice asincrone. Am stabilit rezultate de punct fix pentru ambele tipuri de operatori şi am inclus o discuţie despre comportamentul lor pe alocuri diferit. Ceea ce am prezentat este doar începutul unei direcţii de cercetare care se arată cel puţin la fel de promiţătoare în ceea ce priveşte rezultatele teoretice şi aplicative, ca şi în cazul operatorilor ciclici.

Capitolul 3 este dedicat operatorilor aşa-numit îmbogăţiţi. Ideea de a îmbogăţi o clasă cunoscută de operatori se bazează pe faptul că, în cazul unui operator T având anumite proprietăţi, într-un anumit cadru, iteraţia Picard nu converge, în schimb se poate demonstra convergenţa unei iteraţii de tip Krasnoselskij la un punct fix, posibil unic. Aceasta este de fapt iteraţia Picard a operatorului de mediere asociat, $T_\lambda = (1-\lambda)I + \lambda T$, $\lambda \in (0,1]$, care are proprietatea importantă că deţine exact aceleaşi puncte fixe ca şi T. Această tematică a trezit interesul mai multor autori în ultimii ani, astfel incât ar fi binevenită şi inventarierea lucrărilor publicate deja. Am inclus în acest capitol mai multe teoreme de existenţă şi în general şi de unicitate pentru contracţii îmbogăţite (în spaţii Banach şi în spac tii metrice convexe în sensul lui Takahashi), contracţii îmbogăţite de tip Kannan, Bianchini, Chatterjea, Ćirić-Reich-Rus, Berinde (aproape contracţii), respectiv operatori îmbogăţiţi de tip Prešić. O noţiune importantă pe care am introdus-o este aceea de clasă de operatori saturată/nesaturată relativ la operatorul de mediere T_λ. Am identificat asemenea clase saturate, respectiv nesaturate de operatori. Folosind faptul că o clasă saturată nu mai poate fi îmbogăţită, am arătat că pentru anumite clase importante de operatori tehnica îmbogăţirii nu ar duce la rezultate noi.

În cele din urmă, în *Capitolul 4*, am trasat principalele direcţii de cercetare viitoare, care se desprind din rezultatele prezentate în primele trei capitole.