Babeş-Bolyai University of Cluj-Napoca

Luminiţa-Ioana Cotîrlă

Studies and Results on Geometric Properties of the Special Functions and the Classical Conjectures in Complex Analysis

Habilitation Thesis

2025

Contents

1 Rezumat

1.1 Rezumat în română

Analiza complexă este unul dintre domeniile în care Şcoala românească de matematică a adus contribuţii substanţiale. Aceasta constituie o ramură a matematicii cu aplicaţii largi în diverse domenii ale ştiinţei şi tehnologiei.
Teoria geometrică a funcţiilor de variabilă complexă reprezintă o ramură distinctă a analizei complexe. Fundamentele acestei teorii au fost puse la începutul secolului trecut prin lucrările lui P. Koebe, T.H. Gronwall şi L. Bieberbach. În anul 1916, L. Bieberbach a formulat celebra conjectură care îi poartă numele, rămasă nedemonstrată până în anul 1984, când a fost în cele din urmă demonstrată de Louis de Branges. Funcţiile analitice de variabilă complexă servesc drept model ideal pentru transformările geometrice în plan. Matematicienii români au jucat, de asemenea, un rol semnificativ în dezvoltarea acestui domeniu al matematicii. G. Călugăreanu este recunoscut ca fondatorul şcolii româneşti de Teoria funcţiilor univalente, fiind cel care a stabilit primele condiţii necesare şi suficiente pentru univalenţă. P.T. Mocanu a introdus clasa funcţiilor α-convexe, a abordat problema injectivităţii pentru funcţii neanalitice şi împreună cu S.S. Miller a dezvoltat binecunoscuta metodă de studiere a claselor de funcţii univalente cunoscută sub denumirea de „metoda funcţiilor admisibile" sau metoda subordonărilor diferenţiale. Mai recent, aceasta a fost extinsă la teoria superordonărilor diferenţiale.
Metoda subordonărilor diferenţiale joacă un rol esenţial atât în simplificarea semnificativă a demonstraţiilor rezultatelor deja cunoscute şi în organizarea lor sistematică, cât şi în obţinerea unui număr considerabil de rezultate noi.
Printre lucrările de referinţă majoră dedicate Teoriei funcţiilor univalente se numără cele semnate de P. Duren, A.W. Goodman, S.S. Miller și P. Mocanu, P. Montel și C. Pommerenke.
Această lucrare este structurată pe patru capitole şi include o bibliografie cu 171 de referinţe.
Capitolul I, intitulat "Rezultate preliminare", conţine doar un subcapitol numit "Definiţii, Notaţii şi Rezultate" şi oferă o prezentare generală a conceptelor fundamentale şi a rezultatelor

consacrate necesare pentru dezvoltarea ulterioară a tezei.

Capitolul al II-lea intitulat ”Asupra proprietăților de monotonie, stelaritate și convexitate ale funcțiilor speciale” este structurat pe cinci subcapitole.

Primul subcapitol este intitulat „Despre monotonia funcţiilor Bessel de speța întâi”.
Se crede că funcţiile Bessel au fost introduse pentru prima dată de D. Bernoulli în 1732 şi au fost denumite ulterior după astronomul F. W. Bessel $(1784–1846)$. De-a lungul timpului, importanţa lor a fost demonstrată în diverse domenii ştiinţifice, inclusiv în astronomie, mecanică, electricitate, hidrodinamică şi fizică.”
Funcţia Bessel de speţa întâi este notată prin J_p şi este definită în lucrarea [109], p.217, prin

$$J_p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+p+1)} \big(z/2\big)^{2n+p}.$$

Ne vom ocupa de următoarea normare a funcţiei Bessel

$$\mathcal{J}_p(z) = 2^p\Gamma(1+p)z^{-p}J_p(z) =$$

$$= 1 - \frac{1}{4(p+1)}z^2 + \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{2^{2n}n!(p+1)(p+2)\ldots(p+n)}.$$

In lucrarea [Á. Baricz, S. András, *Monotony property of generalized and normalized Bessel functions of complex order*, Complex Var. Elliptic Equ. Vol. 54, No. 7, (2009), pp.689-696] autorii au dedus un tip de monotonie pentru o formă normată a funcţiei Bessel J_p.
In lucrarea de faţă se demonstrează folosind reprezentări integrale că inegalităţile $-\frac{1}{4} < q < p$ implică $\mathcal{J}_p\big(\mathbb{D}\big) \subset \mathcal{J}_q\big(\mathbb{D}\big)$, unde $\mathcal{J}_p$ este forma normată a lui J_p.
În această secţiune, vom arăta că o abordare bazată pe şiruri factor de subordonare conduce la rezultatul dorit.
Rezultatele prezentate aici fac parte din lucrarea
L.I. Cotîrlă, R. Szasz, *On the monotony of Bessel functions of the first kind,* Comput.

Methods Funct. Theory, vol.24, (2024), pp.747–752.

Subcapitolul cuprinde două leme, o teoremă şi o remarcă.

Lema 2.1.1[42] Dacă $p > q > -1$, atunci şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ definit prin

$$b_n = \frac{(q+1)(q+2)\dots(q+n)}{(p+1)(p+2)\dots(p+n)}, \ \ n \in \mathbb{N}^*$$

este un şir factor de subordonare.

Remarca 2.1.2[42] Daca f este o funcţie analitică de forma $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ cu $a_1 \neq 0$ şi

(1.1.1) $$\left|\frac{f''(z)}{f'(0)}\right| < \frac{1}{2}, \ z \in \mathbb{D},$$

atunci $f \in K$.

Lema 2.1.3[42] Dacă $q > -1$ şi $H_q(z) = 1 - \mathcal{J}_q(\sqrt{z})$, atunci aplicaţia H_q aparţine clasei K.

Teorema 2.1.4[42] Dacă $-1 < q < p$, atunci următoarea incluziune are loc:

$$\mathcal{J}_p(\mathbb{D}) \subset \mathcal{J}_q(\mathbb{D}).$$

Al doilea subcapitol este intitulat „Monotonia funcţiilor Lommel”.

În lucrarea [Á. Baricz, S. András, *Monotony property of generalized and normalized Bessel functions of complex order*, Complex Var. Elliptic Equ. Vol. 54, No. 7, (2009), pp.689-696] s-a demonstrat un tip de monotonie pentru funcţiile Bessel, utilizând reprezentări integrale.

Lucrarea noastră stabileşte o proprietate de monotonie pentru funcţia Lommel normată de speța întâi, folosind metoda şirurilor factor de subordonare.

Considerăm funcţia Lommel de speţa întâi $s_{\mu,\nu}$, care este o soluţie particulară a ecuaţiei diferenţiale neomogene Bessel

$$z^2y'' + zy' + (z^2 - \nu^2)y = z^{1+\nu},$$

şi poate fi exprimată în termeni de serii hipergeometrice

$$s_{\mu,\nu}(z) = \frac{z^{1+\mu}}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\Gamma((\mu-\nu+1)/2)\Gamma((\mu+\nu+1)/2)}{\Gamma((\mu-\nu+2n+3)/2)\Gamma((\mu+\nu+2n+3)/2)}\Big(\frac{z}{2}\Big)^{2n}$$
$$= \frac{z^{\mu+1}}{(\mu-\nu+1)(\mu+\nu+1)}\,{}_1F_2\Big(1; \frac{\mu-\nu+3}{2}, \frac{\mu+\nu+3}{2}; -\frac{z^2}{4}\Big),$$

unde $\mu \pm \nu$ nu este un număr întreg impar negativ.

Considerăm următoarea normare a funcţiei Lommel de prima speţa:

$$H_{\mu,\nu} = z^{\frac{1-\nu}{2}} s_{\mu,\nu}(\sqrt{z}) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{2^{2n}(a)_n(b)_n}, \tag{1.1.2}$$

unde $a = \frac{\mu-\nu+3}{2}$, $b = \frac{\mu+\nu+3}{2}$, şi $(c)_n$ este simbolul Pochhammer definit în termenii funcţiei Gamma prin $(c)_n = \frac{\Gamma(c+n)}{\Gamma(c)}$.

Scopul nostru este să demonstrăm incluziunea: $H_{\mu,\nu}(\mathbb{D}) \subset H_{\alpha,\beta}(\mathbb{D})$ în anumite condiţii impuse parametrilor α, β, μ, ν.

Acesta este un rezultat analog celui prezentat în lucrările [17] şi [42] pentru funcţii normate Bessel de prima speţă.

Rezultatele prezentate aici fac parte din lucrarea

L.I. Cotîrlă, R. Szasz, *The monotony of the Lommel functions,* Results Math., Vol.78, No. 127, (2023).

Subcapitolul cuprinde două leme şi o teoremă.

Lema 2.2.1[44] Dacă $a > c > 0$ şi $b > d > 0$, atunci şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ definit prin

$$b_n = \frac{(c)_n(d)_n}{(a)_n(b)_n},\ \ n \in \{1, 2, 3, \ldots\},$$

este un şir factor de subordonare.

Lema 2.2.2 [44] Dacă $\mu, \nu \in \mathbb{R},\ \mu-\nu+1 > \frac{2}{3},\ \mu+\nu+1 > \frac{2}{3},\ a = (\mu-\nu+1)/2,\ b = (\mu+\nu+1)/2$ şi

$$H_{\mu,\nu}(z) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{2^{2n}(a)_n(b)_n}, \forall z \in \mathbb{D},$$

atunci aplicaţia $H_{\mu,\nu}$ este o funcţie convexă.

Teorema 2.2.3.[44] Dacă $\alpha, \beta, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ şi $\mu-\nu+1 > \alpha-\beta+1 > \frac{2}{3},\ \mu+\nu+1 > \alpha+\beta+1 > \frac{2}{3}$, atunci următoarea incluziune are loc:

$$H_{\mu,\nu}\big(\mathbb{D}\big) \subset H_{\alpha,\beta}\big(\mathbb{D}\big). \tag{1.1.3}$$

Al treilea subcapitol este intitulat „Teoreme privind stelaritatea şi convexitatea".

În aceast subcapitol demonstrăm versiunea exactă (sharp) a unei condiţii de stelaritate.

Instrumentul de bază al studiului nostru este teoria convoluţiei.

În teoremele prezentate în această secţiune toate rezultatele exacte sunt demonstrate prin metoda convoluției.

Teorema 1.25 este un exemplu care a fost demonstrat prin subordonare diferenţială şi considerăm că această metodă este cea mai eficientă în acest caz.

Ca direcţie de cercetare ar fi interesant să se dea versiunea exactă a unei implicaţii din Teorema 1.25.

Teorema 1.25[103] Dacă $f \in \mathcal{A}$, atunci următoarele implicaţii au loc:

$$\mathrm{Re}\left[f'(z) + zf''(z)\right] > 0,\ z \in \mathbb{D} \Rightarrow \left|\arg \frac{zf'(z)}{f(z)}\right| < \frac{\pi}{3}; \tag{1.1.4}$$

$$\left|\arg[f'(z) + zf''(z)]\right| < \frac{2\pi}{3},\ z \in \mathbb{D} \Rightarrow \mathrm{Re}\, \frac{zf'(z)}{f(z)} > 0,\ z \in \mathbb{D}; \tag{1.1.5}$$

$$\mathrm{Re}\left[f'(z) + \frac{z}{2}f''(z)\right] > 0,\ z \in \mathbb{D} \Rightarrow \left|\arg \frac{zf'(z)}{f(z)}\right| < \frac{4\pi}{9},\ z \in \mathbb{D}; \tag{1.1.6}$$

$$\left|\arg[f'(z) + zf''(z)]\right| < \frac{5\pi}{9},\ z \in \mathbb{D} \Rightarrow \mathrm{Re}\, \frac{zf'(z)}{f(z)} > 0,\ z \in \mathbb{D}. \tag{1.1.7}$$

Rezultatele prezentate aici fac parte din lucrarea

L.I. Cotîrlă, O. Engel, R. Szasz, *Theorems regarding starlikeness and convexity,* Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math., Vol.68, No.3, (2023), 517-526.

Acest subcapitol cuprinde trei teoreme, un corolar şi o remarcă.

Teorema 2.3.1[40] Dacă $F \in \mathcal{A}$ este o funcţie cu proprietatea

$$\mathrm{Re}\left(zF''(z) + \frac{z^2}{3}F'''(z)\right) > -\frac{2}{3},\ z \in \mathbb{D}, \tag{1.1.8}$$

atunci F aparţine clasei K.

Teorema 2.3.2[40] Fie $f \in \mathcal{A}$. Dacă

$$\mathrm{Re}[zf''(z) + \frac{z^2}{2}f'''(z)] > -c,\ z \in \mathbb{D}, \tag{1.1.9}$$

unde $c = \frac{1}{4(2\ln 2 - 1)}$, atunci avem $f \in S^*$. Rezultatul este exact.

Corolarul 2.3.3[40] Dacă $f \in \mathcal{A}$ şi $\mathrm{Re}(zf''(z)) > -c, z \in \mathbb{D}$, unde $c = \frac{1}{2(2\ln 2-1)}$, atunci imaginea funcţiei F definită prin operatorul Alexander

$$F(z) = A(f)(z) = \int_0^z \frac{f(t)}{t} dt, z \in \mathbb{D}$$

aparţine clasei S^*.

Teorema 2.3.4[40] Dacă $c_1 > \frac{1}{4(2\ln 2-1)}$, atunci există funcţiile $f \in \mathcal{A}$ care verifică condiţia

$$zf''(z) + \frac{z^2}{2} f'''(z) > -c_1,\ z \in \mathbb{D} \qquad (1.1.10)$$

şi care nu sunt univalente.

Remarca 2.3.5[40] Metoda convoluţiei conduce la rezultate precise în cazul condiţiilor de stelaritate liniară şi convexitate.

Rezultate interesante privind stelaritatea şi convexitatea pot fi găsite şi în lucrările:

E. Deniz, A. Kiziltepe, **L.I. Cotîrlă,** *Radii of Lemniscate starlikeness and convexity of the functions including derivatives of Bessel functions*, J. Math. Inequal., (2024), 18/3, 971-982;

E.A. Adegani, T. Bulboacă and A. Motamednezhad, *Sufficient Condition for p-Valent Strongly Starlike Functions.*, Contemp. Math. 55(2020), pp.213–223.

Al patrulea subcapitol este intitulat „Rezultate privind raza de convexitate şi convexitatea uniformă a funcţiilor Bessel”.

În aceast subcapitol vom determina rezultate privind raza de convexitate uniformă pentru două tipuri de normări ale funcţiei Bessel J_ν în cazul $\nu \in (-2, -1)$ şi vom oferi o demonstraţie alternativă pentru raza de convexitate de ordin α. Comparăm rezultate referitoare la convexitatea şi convexitatea uniformă a funcţiilor considerate şi evidenţiem conexiuni interesante între acestea.

Rezultatele din această secţiune pot fi considerate o continuare a celor prezentate în lucrările

E. Deniz, R. Szász, *The radius of uniform convexity of Bessel functions*, J.Math. Anal. Appl., (2017), 453/1, 572–588;

R. Szász, *About the radius of starlikeness of Bessel functions of the first kind,* Monatsh. Math., (2015), 176/2, 323–330,
care abordează proprietăţi geometrice ale funcţiilor Bessel.
Problema existenţei rădăcinilor reale ale produsului şi produsului încrucişat a funcţiilor Bessel şi a funcţiilor Bessel modificate de speţa întâi este studiată în lucrarea
Á. Baricz,; A. Szakál, R. Szász, N. Yagmur, *Radii of starlikeness and convexity of a product and cross-product of Bessel functions*, Results Math., (2018), 73/62.
Ca o consecinţă se obţine problema existenţei rădăcinilor reale a două polinoame hipergeometrice, împreună cu numărul punctelor critice Fourier ale formelor normalizate ale funcţiilor Bessel. Ca aplicație, sunt studiate unele proprietăți geometrice ale formelor normate ale produsului și produsului încrucişat al funcţiilor Bessel şi a funcţiilor Bessel modificate de speța întâi. Sunt date, de asemenea, condiţii necesare şi suficiente pentru parametri astfel încât patru dintre cele şase funcţii normate să fie convexe în discul unitate deschis (a se vedea şi lucrarea
Á. Baricz,; A. Szakál, R. Szász, N. Yagmur, *Radii of starlikeness and convexity of a product and cross-product of Bessel functions*, Results Math., (2018), 73/62).
Rezultatele prezentate aici fac parte din lucrarea
L.I. Cotîrlă, P.A. Kupan, R. Szasz, *New results about radius of convexity and uniform convexity of Bessel functions,* Axioms, 11, (2022), 380.
Acest subcapitol cuprinde patru leme, patru teoreme şi doua corolarii.

Lema 2.4.1[41] Dacă $v \in \mathbb{C}$, $\delta, \gamma, \rho \in \mathbb{R}$, $\gamma \geq \delta > \rho \geq |v|$, atunci

$$\left|\frac{v^2}{(\delta+v)(\gamma-v)}\right| \leq \frac{\rho^2}{(\delta-\rho)(\gamma+\rho)}. \tag{1.1.11}$$

Lema 2.4.2[41] Dacă $v \in \mathbb{C}$, $\delta, \gamma, \rho \in \mathbb{R}$ şi $\gamma \geq \delta > \rho \geq |v|$, atunci

$$\left|\frac{2v^2(2\gamma\delta+(\gamma-\delta)v)}{(\gamma-v)^2(\delta+v)^2}\right| \leq \frac{2\rho^2(2\gamma\delta-(\gamma-\delta)\rho)}{(\gamma+\rho)^2(\delta-\rho)^2}. \tag{1.1.12}$$

Lema 2.4.3[41] Daccă funcţiile g_ν şi h_ν sunt definite prin (1.1.29) şi (1.1.30) din Capitolul 1, atunci

$$\frac{zg_\nu''(z)}{g_\nu'(z)} = z\frac{zJ_{\nu+2}(z)-3J_{\nu+1}(z)}{J_\nu(z)-zJ_{\nu+1}(z)}. \tag{1.1.13}$$

$$(1.1.14) \qquad \frac{zh''_\nu(z)}{h'_\nu(z)} = \frac{zJ_{\nu+2}(z^{\frac{1}{2}}) - 4z^{\frac{1}{2}}J_{\nu+1}(z^{\frac{1}{2}})}{4J_\nu(z^{\frac{1}{2}}) - 2z^{\frac{1}{2}}J_{\nu+1}(z^{\frac{1}{2}})}.$$

Reamintesc relaţiile (1.1.29) şi (1.1.30) din Capitolul 1:

$$g_\nu(z) = 2^\nu\Gamma(1+\nu)z^{1-\nu}J_\nu(z) = z - \frac{1}{4(\nu+1)}z^3 + \dots,$$

şi

$$h_\nu(z) = 2^\nu\Gamma(1+\nu)z^{1-\nu/2}J_\nu(z^{\frac{1}{2}}) = z - \frac{1}{4(\nu+1)}z^2 + \dots,$$

unde ν este un număr real, $-2 < \nu < -1$ şi g_ν şi h_ν sunt funcţii întregi.

Teorema 2.4.4[41] Daccă $\alpha \in [0,1)$ şi $\nu \in (-2,-1)$, atunci funcţia Bessel $J_\nu(z)$ are două zerouri pur imaginare $\pm a$ şi oricare alt zerou este real. Raza de convexitate de ordinul α pentru aplicaţia g_ν este $r_\nu^c(\alpha) = r_1$, unde r_1 este unica radăcină a ecuaţiei

$$(1.1.15) \qquad 1 + r\frac{I_{\nu+2}(r) + 3I_{\nu+1}(r)}{I_{\nu+1}(r) + rI_\nu(r)} = \alpha$$

în intervalul $(0, a)$.

Teorema 2.4.5[41] Dacă $\nu \in (-2,-1)$, atunci raza de uniform convexitate a aplicaţiei g_ν este $r_\nu^*(\alpha) = r_2$, unde r_2 este cea mai mica rădăcină a ecuaţiei

$$(1.1.16) \qquad \frac{1}{2} + r\frac{I_{\nu+2}(r) + 3I_{\nu+1}(r)}{I_{\nu+1}(r) + rI_\nu(r)} = 0$$

din intervalul $(0, r_\nu^*)$.

Corolarul 2.4.6[41] Aplicaţia g_ν este uniform convexă în discul $\mathbb{D}(r)$ dacă şi numai dacă este convexă de ordinul $\frac{1}{2}$.

Teorema 2.4.7[41] Dacă $\alpha \in [0,1)$ şi $\nu \in (-2,-1)$, atunci raza de convexitate de ordinul α pentru aplicaţia h_ν este $r_{h_\nu}^c(\alpha) = r_3$, unde r_3 este cea mai mică radăcină reală a ecuaţiei

$$(1.1.17) \qquad 1 + \frac{rI_{\nu+2}(r^{\frac{1}{2}}) + 4r^{\frac{1}{2}}I_{\nu+1}(r^{\frac{1}{2}})}{4I_\nu(r^{\frac{1}{2}}) + 2r^{\frac{1}{2}}I_{\nu+1}(r^{\frac{1}{2}})} = \alpha$$

din intervalul $(0, r_{h_\nu}^*)$.

Teorema 2.4.8[41] Dacă $\alpha \in [0,1)$ şi $\nu \in (-2,-1)$, atunci raza de uniform convexitate a lui h_ν este $r^*_{h_\nu}(\alpha) = r_4$, unde r_4 este cea mai mică radăcină pozitivă a ecuaţiei

$$\frac{rI_{\nu+2}(r^{\frac{1}{2}}) + 4r^{\frac{1}{2}}I_{\nu+1}(r^{\frac{1}{2}})}{4I_\nu(r^{\frac{1}{2}}) + 2r^{\frac{1}{2}}I_{\nu+1}(r^{\frac{1}{2}})} = \frac{1}{2} \tag{1.1.18}$$

din intervalul $(0, r^*_{h_\nu})$.

Corolarul 2.4.9[41] Funcţia h_ν este uniform convexă în discul $\mathbb{D}(r)$ dacă şi numai dacă este convexă de ordin $\frac{1}{2}$.

În lucrarea [41] vom da o altă demonstraţie a Lemei 1.34 si vom redenumi această lemă ca Lema 2.4.10.

Lema 2.4.10[41] Dacă $v \in \mathbb{C},\ \delta, \rho \in \mathbb{R}$ şi $\delta > \rho \geq |v|$, atunci

$$\left|\frac{v}{\delta - v}\right| \leq \frac{\rho}{\delta - \rho} \text{ and } \left|\frac{v}{(\delta - v)^2}\right| \leq \frac{\rho}{(\delta - \rho)^2}.$$

Subcapitolul cinci este intitulat „Stelaritatea operatorului integral Bernardi".

În lucrarea prezentată aici demonstrăm versiunea exactă a unei condiţii de stelaritate pentru operatorul integral Bernardi. Metoda convoluţiei este utilizată în demonstraţie. Rezultatele prezentate aici fac parte din lucrarea

L.I. Cotîrlă, *Starlikeness of the Bernardi integral operator,* submitted in Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, in reviewer, (2025);

Acest subcapitol cuprinde patru leme, două teoreme, un corolar şi o remarcă.

Lema 2.5.1[39] Există un număr pozitiv $\alpha_0 \in (0,1)$ astfel încât dacă $\alpha \in \Big(-1, \alpha_0\Big]$, atunci următoarea inegalitate are loc

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{tu^{1+\alpha}}{1+tu} dtdu \geq \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{t^2u^{1+\alpha}}{1-t^2u^2} dtdu. \tag{1.1.19}$$

Rezultatele numerice sugerează că $\alpha_0 \approx 0.618\ldots$

Lema 2.5.2[39] Egalitatea are loc

$$\min_{\theta \in [0,2\pi]} \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n(n+\alpha+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+\alpha+1)}. \tag{1.1.20}$$

Lema 2.5.3[39] Următoarele reprezentări integrale sunt valabile cu condiţia ca $\theta \in (0, 2\pi)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{(n+1)(n+1+\alpha)} = \int_0^1\int_0^1 tu^{1+\alpha} \frac{e^{i\theta} - tu}{1 + t^2u^2 - 2tu\cos\theta} dtdu, \tag{1.1.21}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n(n+1+\alpha)} = \int_0^1\int_0^1 u^{1+\alpha} \frac{e^{i\theta} - tu}{1 + t^2u^2 - 2tu\cos\theta} dtdu. \tag{1.1.22}$$

Lema 2.5.4[39] Următoarea inegalitate are loc

(1.1.23)

$$L_2(\theta, T) = (1 + \cos\theta) \int_0^1\int_0^1 \frac{u^{1+\alpha}(1 - tu)}{(1 + tu)(1 + t^2u^2 - 2tu\cos\theta)} dtdu +$$
$$+ T\sin\theta \int_0^1\int_0^1 \frac{tu^{1+\alpha}}{1 + t^2u^2 - 2tu\cos\theta} dtdu + T^2 \int_0^1\int_0^1 \frac{tu^{1+\alpha}}{1 + tu} dtdu \geq 0,$$

$\forall\, \theta \in [0, 2\pi],\ T \in \mathbb{R}$.

Teorema 2.5.5[39] Fie $f \in \mathcal{A}$. Dacă $\alpha \in (-1, \alpha_0]$, $\Big(\alpha_0 \in (0,1)$, α_0 este definit în Lema 2.5.1$\Big)$ şi

$$\operatorname{Re}\Big(\frac{2+\alpha}{1+\alpha} z f''(z) + \frac{z^2}{1+\alpha} f'''(z)\Big) > -c,\ z \in \mathbb{D} \tag{1.1.24}$$

unde $c = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1+\alpha)}$, atunci avem $f \in S^*$. Valoarea lui c nu poate fi înlocuită printr-un număr mai mare.

Corolarul 2.5.6[39] Dacă $f \in \mathcal{A}$, $\alpha \in (-1, \alpha_0]$ şi

$$\operatorname{Re}(z f''(z)) > -\frac{1}{2\int_0^1\int_0^1 \frac{u^{1+\alpha}}{1+tu} dtdu}, z \in \mathbb{D}, \tag{1.1.25}$$

atunci funcţia F definită prin $F(z) = \frac{\alpha+1}{z^\alpha} \int_0^z f(t) t^{\alpha-1} dt$, $z \in \mathbb{D}$ aparţine clasei S^*.

Remarca 2.5.7[39] Egalitatea are loc

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{u^{1+\alpha}}{1+tu} dtdu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1+\alpha)}.$$

Teorema 2.5.8[39] Dacă $\alpha \in (-1, \alpha_0]$ şi $c_2 < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1+\alpha)}$, atunci există funcţiile $f \in \mathcal{A}$ care verifică

$$\mathrm{Re}\left(\frac{2+\alpha}{1+\alpha} z f''(z) + \frac{z^2}{1+\alpha} f'''(z)\right) > -c_2,\ z \in \mathbb{D} \tag{1.1.26}$$

şi nu sunt univalente.

Capitolul al III-lea "Rezultate asupra conjecturilor clasice ale lui: Brannan, Sendov şi Schmeisser" este structurat pe trei subcapitole şi este dedicat studiului unor conjecturi clasice.

Primul subcapitol este intitulat „Asupra cazului general al conjecturii Brannan".
În această secţiune vom demonstra conjectura lui Brannan cu condiţia ca parametrii α şi β verifică condiţiile $\frac{3}{4} \le \alpha \le \beta \le 1$.
Instrumentul de bază al studiului este o nouă reprezentare integrală dedusă în această lucrare. Vom demonstra un rezultat parțial al cazului general, care sugerează că conjectura lui Brannan este valabilă şi în formă generală.
Rezultatele prezentate aici fac parte din lucrarea
L.I. Cotîrlă, R. Szasz, *On the general case of Brannan conjecture,* J. Math. Inequal., Vol. 18, No.3, (2024), 953-969.
Acest subcapitol cuprinde nouă leme, o teorema şi o remarcă.
Conjectura lui Brannan:
Dacă $\alpha, \beta \in (0, 1]$ şi $x \in \mathbb{C},\ |x| = 1$, atunci inegalitatea următoare are loc

$$|A_{2n+1}(\alpha, \beta, x)| \le A_{2n+1}(\alpha, \beta, 1),\ x \in \mathbb{C},\ |x| = 1$$

pentru orice număr natural n, unde $A_n(\alpha, \beta, x)$ este definit prin

$$A_n(\alpha, \beta, x) =$$
$$= \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+n-1)}{n!} + \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+n-2)}{(n-1)!} \cdot \frac{\alpha}{1!} x -$$
$$- \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+n-3)}{(n-2)!} \cdot \frac{\alpha(1-\alpha)}{2!} x^2 + \dots$$

$$+(-1)^{n-2}\frac{\beta}{1!}\cdot\frac{\alpha(1-\alpha)(2-\alpha)\cdots(n-2-\alpha)}{(n-1)!}x^{n-1}+$$
$$+(-1)^{n-1}\frac{\alpha(1-\alpha)(2-\alpha)\cdots(n-1-\alpha)}{n!}x^{n}.$$

.

Lema 3.1.1[45] Următoarea egalitate are loc:

$$(1-\alpha)\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_p}{(p+1)!}=1. \tag{1.1.27}$$

Lema 3.1.2[45] Dacă $\alpha,\beta\in(0,1)$, $k,n\in\mathbb{N}$, $n\geq k\geq 2$ şi $I_{n,k}=\int_0^1 t^{k-1-\alpha}(1-t)^{n-k-1+\beta}dt$, atunci următoarea egalitate are loc:

$$I_{n,k}=\frac{k-1-\alpha}{n-k+\beta}\frac{k-2-\alpha}{n-k+1+\beta}\frac{k-3-\alpha}{n-k+2+\beta}\cdots\frac{1-\alpha}{n-2+\beta}I_{n,1} \tag{1.1.28}$$

şi

$$B_n(\alpha,\beta,x)= \tag{1.1.29}$$

$$=1+\frac{\alpha}{(n-1+\beta)I_{n,1}}\int_0^1 t^{-1-\alpha}(1-t)^{-1+\beta}\big[(1-t)^n-(1-t-xt)^n\big]dt.$$

Lema 3.1.3[45] Dacă $\alpha,\beta\in(0,1)$, $\alpha\leq\beta$ şi $n\in\mathbb{N}$, atunci următoarea egalitate are loc:

$$1-\frac{\alpha}{(n-1+\beta)I_{n,1}}\int_0^1 t^{-1-\alpha}(1-t)^{-1+\beta}[1-(1-t)^n]dt>0. \tag{1.1.30}$$

Lema 3.1.4[45] Fie $x\in\mathbb{C}$ un număr complex cu $|x|=1$. Dacă $0\leq\alpha\leq\beta\leq 1$, atunci condiţia

$$\int_0^1\left(\frac{2}{1+u}\right)^{1+\alpha-\beta}\Upsilon_n\left(\frac{|x+u|}{1-u}\right)du\leq \tag{1.1.31}$$
$$\leq\int_0^1\left(\frac{2}{1+u}\right)^{1+\alpha-\beta}\Upsilon_n\left(\frac{1+u}{1-u}\right)du,$$

implică inegalitatea:

$$\big|B_{2n+1}(\alpha,\beta,x)\big|\leq B_{2n+1}(\alpha,\beta,1). \tag{1.1.32}$$

Definim şirul $(D_n(\alpha,\beta,x))_{n\geq 1}$ astfel:

$$D_n(\alpha,\beta,x)=\int_0^1\left(\frac{2}{1+u}\right)^{1+\alpha-\beta}\Upsilon_n\left(\frac{1+u}{1-u}\right)du-$$
$$-\int_0^1\left(\frac{2}{1+u}\right)^{1+\alpha-\beta}\Upsilon_n\left(\frac{|u+x|}{1-u}\right)du=$$
$$=\int_0^1\left(\frac{2}{1+u}\right)^{1+\alpha-\beta}\left\{\left[\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{\alpha}-\left(\frac{|u+x|}{1-u}\right)^{\alpha}\right]\frac{1-u^{2n+1}}{1-u}+\right.$$
$$\left.+\left[\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^{\beta}-\left(\frac{1-u}{|u+x|}\right)^{\beta}\right]\frac{1+u^{2n+1}}{1+u}\right\}du.$$

Lema 3.1.5[45] Dacă $0<\alpha\leq\beta\leq 1$ şi $|x|=1$ atunci avem

(1.1.33) $$D_{n+1}(\alpha,\beta,x)\geq D_n(\alpha,\beta,x).$$

Lema 3.1.6[45] Fie $\kappa,\lambda:[a,b]\to\mathbb{R}$ două funcţii continue. Dacă κ este crescătoare, $\kappa(a)\geq 0$ şi există un punct $x_0\in(a,b)$ astfel încât $\lambda(x)\geq 0,\ x\in[x_0,b]$ şi $\lambda(x)\leq 0,\ x\in[a,x_0]$, atunci

$$\int_a^b\kappa(x)\lambda(x)dx\geq\kappa(x_0)\int_a^b\lambda(x)dx.$$

Lema 3.1.7[45] Funcţia $\lambda:[0,1]\to\mathbb{R}$, unde $\lambda(u)=\left(\frac{8}{3}\right)^{\frac{1}{3}}-1-\left(\frac{1-u}{\sqrt{1+u^2-\frac{1}{2}u}}\right)^{\frac{1}{3}}+\frac{2^{\frac{2}{3}}}{3}\frac{1-u}{1+u}$ are o radăcină unică $u_0\in(0,1)$ pentru care $\lambda(u)\leq 0,\ u\in[0,u_0]$ şi $\lambda(u)\geq 0,\ u\in[u_0,1]$.

Lema 3.1.8[45] Dacă $\frac{2}{3}\leq\alpha\leq\beta\leq 1,\ |x|=1$ şi $\arg(x)\in\left[\arccos(-\frac{1}{4}),\pi\right]$, atunci următoarea inegalitate are loc:

(1.1.34) $$J_{2n+1}(\alpha,\beta,1)\geq|J_{2n+1}(\alpha,\beta,x)|,\ n\in\mathbb{N}^*,$$

unde

$$J_{2n+1}(\alpha,\beta,x)=\int_0^1 t^{-1-\alpha}(1-t)^{-1+\beta}\big[1-(1-t(1+x))^{2n+1}\big]dt.$$

Lema 3.1.9[45] Ecuaţia

$$(1.1.35) \qquad \frac{3}{4} - (1+u)\frac{(1-u)^{\frac{1}{2}}}{(1+u^2-\frac{1}{2}u)^{\frac{3}{4}}} = 0, \quad u \in [0,1]$$

are o unică rădăcină $u_0 \in (0,1)$, $\frac{3}{4} - (1+u)\frac{(1-u)^{\frac{1}{2}}}{(1+u^2-\frac{1}{2}u)^{\frac{3}{4}}} < 0,\ u \in (0,u_0)$ şi $\frac{4}{5} - (1+u)\frac{(1-u)^{\frac{1}{2}}}{(1+u^2-\frac{1}{2}u)^{\frac{3}{4}}} > 0,\ u \in (u_0, 1)$.

Teorema 3.1.10[45] Dacă $\frac{3}{4} \leq \alpha \leq \beta \leq 1$ şi $x \in \mathbb{C}$ cu $|x| = 1$, atunci inegalitatea următoare are loc:

$$|A_{2n+1}(\alpha, \beta, x)| \leq A_{2n+1}(\alpha, \beta, 1), \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Remarca 3.1.11[45] Aproximarea numerică sugerează că inegalitatea $g'(t) > 0,\ t \in \big[-\frac{1}{4}, 1\big]$ are loc pentru $\frac{2}{3} \leq \alpha \leq \beta \leq 1$. Ţinând cont de acest fapt vom demonstra Lema 3.1.8 în cazul $\frac{2}{3} \leq \alpha \leq \beta \leq 1$. Considerăm că abordarea prezentată ar putea conduce la următorul rezultat îmbunătățit:

Dacă $\frac{2}{3} \leq \alpha \leq \beta \leq 1$ şi $x \in \mathbb{C}$ cu $|x| = 1$, atunci inegalitatea are loc

$$|A_{2n+1}(\alpha, \beta, x)| \leq A_{2n+1}(\alpha, \beta, 1), \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Rezultate interesante pe această temă se pot găsi şi în lucrările:

R.W. Barnard, *Brannan's coefficient conjecture for certain power series,* Open problems and conjectures in complex analysis, Computational Methods and Function Theory, 1-26. Lecture notes in Math. 1435, Springer, Berlin, 1990;

R.W. Barnard, U.C. Jayatilake, A.Y. Solynin, *Brannan's conjecture and trigonometric sums,* Proc. Amer. Math. Soc. Volume 143, Number 5, May (2015), Pages 2117-2128;

U.C. Jayatilake, *Brannan's conjecture for initial coefficients,* Complex Var. Elliptic Equ. 58 (2013), no. 5, 685-694;

J.G. Milcetich, *On a coefficient conjecture of Brannan,* J. Math. Anal. Appl. 139 (1989), no. 2, 515-522;

R. Szász, *A sharp criterion for starlikeness,* Mathematica (Cluj), Tome 48 (71), No 1, (2006,) pp. 89-98.

Al doilea subcapitol este intitulat „Asupra conjecturii lui Sendov”.

Aici sunt prezentate condiţii suficiente care implică validitatea conjecturii lui Sendov.

Pentru demonstrarea rezultatului principal vom utiliza metode din teoria convexității.

În lucrarea

T. Tao, *Sendov's conjecture for sufficiently high degree polynomials,* arXiv:2012.04125 este demonstrat că există un numar natural n_0 pentru care condiţia $grad(P) \geq n_0,\ P \in \mathcal{P}$ implică conjectura lui Sendov.

Rezultatele prezentate aici fac parte din lucrarile:

L.I. Cotîrlă, R. Szasz, *On Sendov's conjecture,* Filomat, Vol. 37, No.16, (2023), 5283-5286.

L.I. Cotîrlă, *New results regarding Sendov's conjecture,* submitted in Result Math. (in reviewer), (2025).

Aici sunt prezentate cinci corolarii, trei teoreme şi un exemplu.

Conjectura lui Sendov[73]

Dacă polinomul

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_n), n \geq 2$$

are rădăcinile $z_1, z_2, \dots, z_n$ în interiorul discului unitate închis $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, atunci pentru fiecare rădăcină $z_k \in \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$, discul $|z_k - z| \leq 1$ conţine un punct critic al lui P.

Corolarul 3.2.1[43] Fie $z_k,\ k \in \{1, 2, 3, \dots, n - 1\}$ afixele vârfurilor unui n gon regulat înscris în cercul $|z| = 1$.

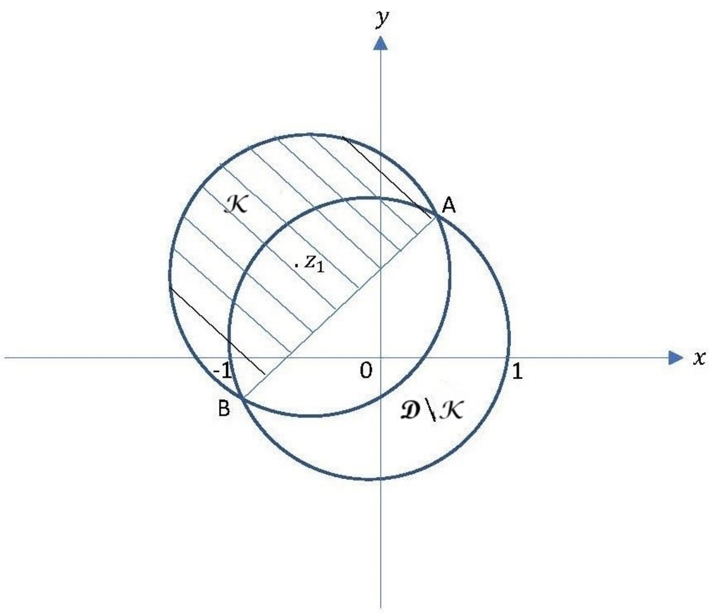
Dacă z_0 este un punct arbitrar în $\mathcal{D}$, atunci în cazul polinomului $Q(z) = (z-z_0)\prod_{k=1}^{n}(z-z_k)$ conjectura lui Sendov are loc.

Rezultate interesante despre conjectura lui Sendov au fost obţinute de Kumar, vezi lucrarea [89].

Scopul lucrării noastre este de a deduce noi condiţii cu privire la rădăcinile polinomului P care implică conjectura lui Sendov.

Teorema 3.2.2[43] Fie $P \in \mathbb{C}[z]$, $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ un polinom complex. Presupunem că toate rădăcinile polinomului P sunt în discul unitate $\mathcal{D}$. Presupunem că

z^* este o rădăcină a lui P şi cercul $|z - z^*| = 1$ intersectează $\partial\mathcal{D}$ în punctele A şi B. Fie mulţimea închisă $\mathcal{K}$ limitată de arcul AB din cercul $|z - z^*| = 1$, care nu aparţine lui $\mathcal{D}$ şi segmentul $[AB]$ iar Ω definit prin $\Omega = \mathcal{D} \setminus \mathcal{K}$.
Dacă în cazul lui $k \in \{1, 2, 3, \ldots, n-1\}$ fixat, ecuaţia $P^{(k)}(z) = 0$ are o rădăcină în $\mathcal{K}$, atunci discul $|z - z^*| < 1$ conţine o rădăcină a lui $P'(z) = 0$.



Luând cazuri particulare ale rezultatului anterior obţinem condiţii interesante referitoare la rădăcinile unui polinom, care implică conjectura lui Sendov.

Corolarul 3.2.3[43] Presupunem că gradul polinomului $Q \in \mathbb{C}[z]$ este mai mic decât $n - 2$ şi toate rădăcinile polinomului

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + Q(z)$$

sunt în discul $\mathcal{D}$. Dacă z^* este o rădăcină a polinomului P care satisface una dintre următoarele două inegalităţi

$$\left|\frac{-a_1+\sqrt{a_1^2-\frac{2n}{n-1}a_2}}{n}-z^*\right|<\frac{|z^*|}{2}, \tag{1.1.36}$$

sau

$$\left|\frac{-a_1-\sqrt{a_1^2-\frac{2n}{n-1}a_2}}{n}-z^*\right|<\frac{|z^*|}{2}, \tag{1.1.37}$$

atunci conjectura lui Sendov are loc pentru z^*, ceea ce înseamnă că $|z-z^*|<1$ conţine un punct critic.

Corolarul 3.2.4[43] Presupunem că gradul polinomului $Q\in\mathbb{C}[z]$ este mai mic decât $n-1$ şi toate rădăcinile polinomului $P(z)=z^n-n\alpha z^{n-1}+Q(z)$ sunt în discul unitate $\mathcal{D}$. Dacă z^* este o rădăcină a polinomului P care satisface $|\alpha-z^*|<\frac{|z^*|}{2}$, atunci conjectura lui Sendov are loc in cazul lui z^*, ceea ce înseamnă că discul $|z-z^*|<1$ conţine un punct critic.

Exemplul 3.2.5[43] Fie $P(z)=z^3+a_1z^2+a_2z+a_3$ polinomul monic cu rădăcinile $z_1=\frac{1}{2}+i\frac{1}{3},\ z_2=\frac{1}{3}+i\frac{1}{2},\ z_3=\frac{5}{6}+i\frac{1}{10}$.
Folosim notaţiile Corolarului 3.2.1: $\alpha=\frac{z_1+z_2+z_3}{3}=\frac{5}{6}+i\frac{14}{45}$ şi $z^*=z_3=\frac{5}{6}+i\frac{1}{10}$. Avem $|\alpha-z^*|=\frac{19}{90}<\frac{1}{2}\sqrt{\frac{143}{180}}=\frac{|z^*|}{2}$, şi în consecinţă conjectura lui Sendov are loc în cazul lui $z^*=z_3$.
Un simplu calcul arată că $3>\left|P'(z_1)\right|$ şi $3>\left|P'(z_2)\right|$, prin urmare, conform Teoremei 1.10, conjectura lui Sendov este valabilă în cazul z_1 şi z_2.
Reamintesc şi aici

Teorema 1.10[124] Fie $P\in\mathbb{C}[z]$, $P(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n$. Dacă $P(z_1)=0$ şi $|P'(z_1)|<n$, atunci discul $|z-z_1|<1$ conţine cel puţin un punct critic al lui P.

Teorema 3.2.6[38] Fie n un număr natural cu proprietatea ca $n\geq 2$ şi $\{z_1,z_2,z_3,\ldots z_n\}\subset\mathcal{D}$ mulţimea de rădăcini a polinomului $P(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n\in\mathbb{C}[z]$. Dacă există o rădăcină $z_k\in\{z_1,z_2,z_3,\ldots z_n\}$ pentru care $z_k\neq 0$ şi inegalitatea

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z_1+z_2+z_3+\ldots+z_n}{nz_k}\right)>\frac{1}{2} \tag{1.1.38}$$

are loc, atunci discul $|z - z_k| \leq 1$ conţine un punct critic al lui P.

Corolarul 3.2.7[38] Presupunem că $P \in \mathbb{C}[z]$, $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_n$. Fie toate rădăcinile ecuaţiei

$$z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

elemente din discul $\mathcal{D}$. Dacă $a \in (0,1)$ şi $(n-1)a + 2\operatorname{Re} a_1 < 0$, atunci discul $|z-a| \leq 1$ conţine o rădăcină a ecuaţiei $Q'(z) = 0$, unde $Q(z) = (z-a)P(z)$.

Următorul rezultat este o consecinţă simplă a Teoremei 3.2.2.

Teorema 3.2.8[38] Fie $P(z) = (z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)\ldots(z-z_n)$ un polinom din clasa $\mathcal{P}$. Dacă există o rădăcină $z_k \in \{z_1, z_2, z_3, \ldots z_n\}$ astfel încât

$$\left|\frac{z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n}{n} - z_k\right| < \frac{|z_k|}{2}, \tag{1.1.39}$$

atunci discul $|z - z_k| \leq 1$ conţine o rădăcină a lui $P'(z) = 0$.

Corolarul 3.2.9[38] Fie z_1 şi z_2 două numere complexe cu $|z_1| = |z_2| = 1,\ z_1 \neq -z_2$ şi $0 < |z_1 - z_2| \leq 1$. Presupunem că

$$b = \frac{z_1 + z_2}{2}\Big(\frac{1}{|z_1 + z_2|} + \frac{1}{2}\Big) \text{ şi } 0 < |a| < \frac{1}{2}\Big(1 - \Big|\frac{z_1 + z_2}{2}\Big|\Big). \tag{1.1.40}$$

Fie $D_1 = \mathcal{K} \cap \mathcal{D}$ şi $D_2 = \Omega$. Presupunem că toate rădăcinile polinomului $P_1 \in \mathbb{C}[z]$, sunt în $\mathcal{D}$, $P_1(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$, $P_2(z) = (z-b)^p - a^p$ şi $Q(z) = P_1(z) \cdot P_2(z)$. Dacă p este un număr natural suficient de mare astfel ca următoarea inegalitate să fie îndeplinită

$$\left|\frac{nb + a_1}{n + p}\right| < \frac{1}{2}\Big(1 - \Big|\frac{z_1 + z_2}{2}\Big|\Big), \tag{1.1.41}$$

atunci în cazul polinomului Q conjectura lui Sendov are loc pentru fiecare rădăcină a polinomului P_2.

Rezultate interesante privind această conjectură pot fi găsite şi în lucrările:

Q.I. Rahman, Ge. Schmeisser, *Analytic Theory of Polynomials*, Oxford University Press, (2002);

B. Bojanov, Q. Rahman, J. Szynal, *On a conjecture of Sendov about the critical points of a polynomial.* Math. Z. 190, (1985), 281–285;

I. Borcea, *On the Sendov conjecture for polynomials with at most six distinct roots,* J.

Math. Anal. Appl. 200, (1996), p.182–206;

J. Dégot, *Sendov's conjecture for high degree polynomials*, Proc. Amer. Math. Soc. 142 (4), (2014), p.1337–1349;

M. Miller, *Maximal Polynomials and the Illieff-Sendov Conjecture,* Trans. Am. Math. Soc. 321 (1), (1990), p.285–303.

Al treilea subcapitol este intitulat „Asupra conjecturilor lui Sendov şi Schmeisser".

Conjectura lui Sendov se referă la punctele critice ale polinoamelor, iar conjectura lui Schmeisser reprezintă o afirmaţie mai puternică decât cea a lui Sendov.

În această secţiune vom prezenta câteva condiţii care implică validitatea ambelor conjecturi.

Pentru demonstrarea rezultatelor principale vom utiliza transformări geometrice.

Rezultatele prezentate aici fac parte din lucrarea

L.I. Cotîrlă, R. Szasz, *On Sendov's and Schmeisser's conjecture,* submitted in Mathematische Zeitschrift, in reviewer, (2025).

Aici sunt prezentate patru leme, două teoreme, două corolarii şi două remărci.

Conjectura lui Sendov [73] Dacă polinomul

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n), n \geq 2$$

are rădăcinile $z_1, z_2, \dots, z_n$ în interiorul discului unitate închis $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, atunci pentru fiecare rădăcina $z_k \in \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$, discul $|z_k - z| \leq 1$ conţine un punct critic al lui P.

Profesorul G. Schmeisser a extins conjectura lui Sendov în [131] astfel:

Conjectura lui Schmeisser[131] Dacă polinomul $P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n), n \geq 2$, are rădăcinile $z_1, z_2, \dots, z_n$ în interiorul discului unitate închis $|z| \leq 1$, atunci pentru fiecare punct $\zeta \in \mathcal{KH}(P)$ discul închis $|z - \zeta| \leq 1$ conţine cel puţin un punct critic al lui P.

Notăm prin $\mathcal{KH}(P)$ învelitoarea convexă închisă a mulţimii rădăcinilor $\{z_1, z_2, z_3, \dots, z_n\}$ a lui P şi fie $E\mathcal{KH}(P)$ mulţimea punctelor de extrem ale lui $\mathcal{KH}(P)$.

Lema 3.3.1[46] Fie $P(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) \dots (z - z_n)$ un polinom cu toate rădăcinile în discul unitate $|z| \leq 1$. Dacă toate punctele de extrem ale învelitorii convexe închise $\mathcal{KH}(P)$ sunt pe cercul $|z| = 1$, atunci conjectura lui Schmeisser are loc în cazul polinomului P.

Lema 3.3.2[46] Fie $P(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) \dots (z - z_n)$ un polinom complex arbitrar şi $P'(z) = n(z - \zeta_1)(z - \zeta_2)(z - \zeta_3) \dots (z - \zeta_{n-1})$ derivata sa.
Dacă P_ω este polinomul definit prin

$$P_\omega(z) = (z - z_1 \cdot \omega)(z - z_2 \cdot \omega)(z - z_3 \cdot \omega) \dots (z - z_n \cdot \omega)$$

şi $P'_\omega(z) = n(z - \xi_1)(z - \xi_2)(z - \xi_3) \dots (z - \xi_{n-1})$ derivata sa, atunci egalitatea următoare are loc

$$\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_{n-1}\} = \{\zeta_1 \cdot \omega, \zeta_2 \cdot \omega, \zeta_3 \cdot \omega, \dots, \zeta_{n-1} \cdot \omega\}.$$

Lema 3.3.3[46] Fie P un polinom cu toate rădăcinile în discul $|z| \leq \rho$, $\rho \in (0, 1]$. Dacă toate punctele de extrem ale învelitorii convexe închise $\mathcal{KH}(P)$ sunt pe cercul $|z| = \rho$, atunci conjectura lui Schmeisser are loc pentru fiecare $\zeta \in \mathcal{KH}(P)$ şi cercul $|z - \zeta| \leq 1$ conţine un punct critic.

Lema 3.3.4[46] Fie $P(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) \dots (z - z_n)$ un polinom complex arbitrar şi $P'(z) = n(z - \zeta_1)(z - \zeta_2)(z - \zeta_3) \dots (z - \zeta_{n-1})$ derivata sa.
Dacă P_w este un polinom definit prin

$$P_w(z) = (z - (z_1 + w))(z - (z_2 + w))(z - (z_3 + w)) \dots (z - (z_n + w))$$

şi $P'_w(z) = n(z - \xi_1)(z - \xi_2)(z - \xi_3) \dots (z - \xi_{n-1})$ derivata sa, atunci următoarea egalitate are loc

$$\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_{n-1}\} = \{\zeta_1 + w, \zeta_2 + w, \zeta_3 + w, \dots, \zeta_{n-1} + w\}$$

Rezultatul principal privind conjectura lui Sendov

Teorema 3.3.5[46] Fie $P(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) \dots (z - z_n)$ un polinom complex cu toate rădăcinile în discul unitate închis $|z| \leq 1$. Dacă există o rădăcină a lui P notată prin z_k pentru care mulţimea $\{z_1 - z_k, z_2 - z_k, z_3 - z_k, \dots, z_n - z_k\}$ este o submulţime a discului unitate închis $|z| \leq 1$, atunci conjectura lui Sendov are loc în cazul polinomului P.

Corolarul 3.3.6[46] Fie $P(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)\dots(z - z_n)$ un polinom complex cu toate radăcinile în discul unitate închis $|z| \leq 1$. Dacă rădăcinile verifică condiţia

$$\min_{1 \leq p \leq n} |z_p| \leq \min_{1 \leq p \leq n} (1 - |z_p|), \tag{1.1.42}$$

atunci conjectura lui Sendov are loc în cazul polinomului P.

Remarca 3.3.7[46] Corolarul 3.3.6 reprezintă o îmbunătăţire a Lemei 1.17
Într-adevăr, în cazul $P(0) = 0$, condiţia (1.1.42) este echivalentă cu

$$0 \leq \min_{1 \leq p \leq n} (1 - |z_p|).$$

Această inegalitate este condiţia din conjectura lui Sendov.
Reamintesc şi aici

Lema 1.17[130] Dacă un polinom complex P are toate rădăcinile în discul unitate închis $|z| \leq 1$ şi $P(0) = 0$, atunci conjectura lui Sendov are loc în cazul acestui polinom.

Rezultatul principal privind conjectura lui Schmeisser
Următoarea teoremă este o îmbunătăţire a rezultatului demonstrat în [130].

Teorema 3.3.8[46] Fie $P(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)\dots(z - z_n)$ un polinom cu toate rădăcinile în discul unitate $|z| \leq 1$. Dacă toate punctele de extrem ale învelitorii convexe închise $\mathcal{KH}(P)$ sunt pe cercul $\mathcal{C}$ cu rază care nu depăşeşte 1, (centrul cercului poate fi oriunde) atunci conjectura lui Schmeisser are loc, ceea ce înseamnă că, în cazul fiecărui punct $z^* \in \mathcal{KH}(P)$ discul $|z^* - z| \leq 1$ conţine cel puţin un punct critic.

Corolarul 3.3.9[46] Fie $P(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)\dots(z - z_n)$ un polinom cu toate rădăcinile în discul unitate $|z| \leq 1$. Dacă învelitoarea convexă închisă $\mathcal{KH}(P)$ este un triunghi ale cărui unghiuri nu depăşesc $\frac{\pi}{2}$, atunci conjectura lui Schmeisser are loc.

Profesorul G. Schmeisser a demonstrat un rezultat analog Corolarului 3.3.9, în legătură cu conjectura lui Sendov.
El a demonstrat în [131] că dacă învelitoarea convexă închisă $\mathcal{KH}(P)$ este o regiune triunghiulară, atunci conjectura lui Sendov este valabilă în cazul polinomului P.

Capitolul al IV-lea este intitulat ”Studii asupra funcţiilor analitice, univalente şi bi-univalente” şi este structurat pe patru subcapitole.

Primul subcapitol este intitulat „Rezultate de incluziune implicând funcţiile hipergeometrice gaussiene pentru funcţii univalente cu derivate univalente”.
Clasele de funcţii analitice pentru care atât f cât şi f' sunt univalente in discul unitate deschis $\mathbb{D}$ au fost studiate de Silverman în anul 1987. Totuşi, aplicarea funcţiilor hipergeometrice gaussiene asupra acestor clase de funcţii analitice, pentru care atât f cât şi f' sunt univalente în discul unitate deschis $\mathbb{D}$, nu a fost studiată pe larg în literatură.
Explorând această direcţie, în această secţiune investigăm condiţiile necesare şi suficiente, precum şi relaţiile de incluziune pentru anumite funcţii care implică funcţii hipergeometrice gaussiene, astfel încât acestea să aparţină unor subclase de funcţii analitice pentru care atât f cât şi f' sunt univalente în discul unitate deschis $\mathbb{D}$. De asemenea, considerăm un operator integral legat de funcțiile hipergeometrice gaussiene, discutăm mai multe proprietăţi ale acestor funcţii şi subliniem anumite corolare şi consecinţe ale rezultatelor principale. În final am determinat condiţii pentru ca un operator integral să aparţină claselor menţionate anterior. Vom da condiţii suficiente pentru ca funcţia hipergeometrică Gaussiana (GHF) să fie în clasele $\mathcal{T}_1$,$\mathcal{T}_2$ şi $\mathcal{T}_m$.
Rezultatele din acest subcapitol fac parte din lucrarea
V. Prakash, S. Sivasubramanian, G. Murugusundaramoorthy, D. Breaz, **L.I. Cotîrlă**, *Inclusion results involving Gaussian hypergeometric functions for univalent functions having univalent derivatives*, accepted in Rev. Roumaine Math. Pures Appl., (2025).
Aici sunt prezentate nouă teoreme şi zece corolarii.

Teorema 4.1.1[116] Dacă $a, b > 0$ şi $c > a + b + 2$, atunci o condiţie necesară pentru ca $zF(a, b; c; z)$ să fie în S_1, unde S_1 este definit în Capitolul 1 (Definiţia 1.19), este ca următoarea inegalitate să aibă loc

$$\frac{\Gamma(c+1)\Gamma(c-a-b-1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\left[\frac{(a+1)(b+1)}{(c-a-b-2)}+2\right] \leq 4. \tag{1.1.43}$$

Dacă $0 \leq ab \leq \dfrac{c}{3}$, atunci condiţia (1.1.43) este atât necesara cât şi suficientă pentru ca $F_1(a, b; c; z)$ să fie în clasa $\mathcal{T}_1$.

Reamintesc şi aici

Definiţia 1.19[137] Definim S_1 ca o subclasă a lui S alcătuită din toate funcţiile f care sunt analitice şi univalente în discul unitate $\mathbb{D}$ pentru care atât f cât şi f' sunt univalente în $\mathbb{D}$.

Fucţia hipergeometrică Gaussiană este definită pentru $|z| < 1$ prin seria hipergeometrică

$$F(a,b;c;z) ={}_2 F_1(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n(1)_n} z^n$$

şi este o soluţie a ecuaţiei diferenţiale hipergeometrice

$$z(1-z)w''(z) + (c-(a+b+1)z)\, w' - abw(z) = 0.$$

Funcţia $F_1(a,b;c;z)$ este forma normată a funcţiei hipergeometrice $F(a,b;c;z)$ dată prin

$$F_1(a,b;c;z) = z\,(2 - F(a,b;c;z)) = z - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(a)_{n-1}(b)_{n-1}}{(c)_{n-1}(1)_{n-1}} z^n.$$

Clasa $\mathcal{T}$ conţine toate funcţiile analitice din $\mathbb{D}$ date prin

$$f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n \geq 0,$$

normate prin condiţiile $f(0) = f'(0) - 1 = 0$, vezi [139].

Fixând $b = a$ în Teorema 4.1.1 obţinem următorul rezultat.

Corolarul 4.1.2[116] Dacă $a > 0$ şi $c > 2a + 2$, atunci o condiţie necesară pentru ca $zF(a,b;c;z)$ să fie în S_1 este ca următoarea inegalitate să aiba loc:

$$\frac{\Gamma(c+1)\Gamma(c-2a-1)}{[\Gamma(c-a)]^2}\left[\frac{(a+1)^2}{(c-2a-2)} + 2\right] \leq 4. \tag{1.1.44}$$

Dacă $0 \leq a \leq \sqrt{\dfrac{c}{3}}$, atunci condiţia (1.1.44) atât necesară cât şi suficientă pentru ca $F_1(a,b;c;z)$ să fie în clasa $\mathcal{T}_1$, unde $\mathcal{T}_1$ este o subfamilie a lui $\mathcal{T}$ alcătuită din toate funcţiile f pentru care atât f cât şi f' sunt univalente în $\mathbb{D}$.

Teorema 4.1.3[116] Dacă $a, b > 0$ şi $c > a+b+3$, atunci o condiţie suficientă pentru ca $F_1(a,b;c;z)$ să fie în clasa $\mathcal{T}_2$ este ca:

$$\frac{\Gamma(c+2)\Gamma(c-a-b-2)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\left[\frac{(a+2)(b+2)}{(c-a-b-3)} + 3\right] \leq 6. \tag{1.1.45}$$

O funcţie f de forma

$$f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n \geq 0,$$

este în clasa $\mathcal{T}_m, m > 1$ dacă f şi primele m derivate sunt univalente în $\mathbb{D}$. Dacă $f \in \mathcal{T}_m$, atunci f este în $\mathcal{T}_\infty$.

Presupunând că $b = a$ în Teorema 4.1.3 obţinem următorul rezultat.

Corolarul 4.1.4[116] Dacă $a > 0$ şi $c > 2a + 3$, atunci o condiţie suficientă pentru ca $F_1(a, b; c; z)$ să fie în clasa $\mathcal{T}_2$ este ca

$$\frac{\Gamma(c+2)\Gamma(c-2a-2)}{[\Gamma(c-a)]^2}\left[\frac{(a+2)^2}{(c-2a-3)} + 3\right] \leq 6. \tag{1.1.46}$$

Teorema 4.1.5[116] Dacă $a, b > 0$ şi $c > a + b + (k+1)$, atunci o condiţie suficientă pentru ca $F_1(a, b; c; z)$ să fie în $\mathcal{T}_m$ este ca

$$\frac{\Gamma(c+k)\Gamma(c-a-b-k)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\left[\frac{(a+k)(b+k)}{(c-a-b-(k+1))} + (k+1)\right] \leq 2(k+1). \tag{1.1.47}$$

Observând că dacă $f \in \mathcal{T}_m$ pentru orice număr întreg m, atunci $f \in \mathcal{T}_\infty$ şi avem următorul corolar.

Corolarul 4.1.6[116] Dacă

$$F_1(a, b; c; z) = z - \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{(a)_{n-1}(b)_{n-1}}{(c)_{n-1}(1)_{n-1}}\right) z^n \in \mathcal{T},$$

$$\frac{(a)_{n-1}(b)_{n-1}}{(c)_{n-1}(1)_{n-1}} \neq 0$$

şi

$$\sum_{n=k+2}^{\infty}(n-k)(n-k+1)\cdots(n-1)n\frac{(a)_{n-1}(b)_{n-1}}{(c)_{n-1}(1)_{n-1}} \leq (k+1)!\frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k(1)_k},$$

unde $k = 1, 2, \cdots, m$, are loc pentru orice k, atunci $F_1(a, b; c; z) \in \mathcal{T}_\infty$.

Luând $b = a$ în Teorema 4.1.5 obţinem următorul corolar.

Corolarul 4.1.7[116] Dacă $a > 0$ şi $c > 2a + (k+1)$, atunci o condiţie suficientă pentru ca $F_1(a, b; c; z)$ să fie în clasa S_m este ca

$$\frac{\Gamma(c+k)\Gamma(c-2a-k)}{[\Gamma(c-a)]^2}\left[\frac{(a+k)^2}{(c-2a-(k+1))} + (k+1)\right] \leq 2(k+1). \tag{1.1.48}$$

O funcţie f de forma $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ este în $S_m, m > 1$ dacă f şi primele m derivate sunt univalente în $\mathbb{D}$, (a se vedea [137]).

Vom da acum condiţii suficiente pentru forma integrală a funcţiei hipergeometrice Gaussiene (GHF).

Considerăm funcţiile $G(a, b; c; z)$ and $G_1(a, b; c; z)$ date prin

$$G(a, b; c; z) = \int_0^z F(a, b; c; t)dt = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(a)_{n-1}(b)_{n-1}}{(c)_{n-1}(1)_n} z^n,$$

$$G_1(a, b; c; z) = \int_0^z (2 - F(a, b; c; t))\, dt = z - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(a)_{n-1}(b)_{n-1}}{(c)_{n-1}(1)_n} z^n.$$

Teorema 4.1.8[116] Dacă $a, b > 0$ şi $c > a + b + 1$, atunci o condiţie necesară pentru ca $G(a, b; c; z)$ să aparţină lui S_1 este ca următoarea inegalitate să aibă loc

$$\frac{\Gamma(c+1)\Gamma(c-a-b-1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \leq 2. \tag{1.1.49}$$

Dacă $0 \leq ab \leq \dfrac{c}{3}$, atunci condiţia (1.1.49) este atât necesară cât si suficientă pentru ca $G_1(a, b; c; z)$ să aparţină lui $\mathcal{T}_1$.

Fixând $b = a$ în Teorema 4.1.8 obţinem următorul rezultat.

Corolarul 4.1.9[116] Fie $a > 0$ şi $c > 2a + 1$, atunci o condiţie necesară pentru ca $G(a, a; c; z)$ să fie în clasa S_1 este ca următoarea inegalitate să aibă loc

$$\frac{\Gamma(c+1)\Gamma(c-2a-1)}{[\Gamma(c-a)]^2} \leq 2. \tag{1.1.50}$$

Dacă $0 \leq a \leq \sqrt{\dfrac{c}{3}}$, atunci condiţia (1.1.50) este atât necesară cât şi suficientă pentru ca $G_1(a, b; c; z)$ să aparţină clasei $\mathcal{T}_1$.

Teorema 4.1.10[116] Dacă $a, b > 0, \quad c > a + b + 1$, atunci o condiţie suficientă pentru ca $G_1(a, b; c; z)$ să aparţină clasei $\mathcal{T}_2$ este ca

$$\frac{\Gamma(c+2)\Gamma(c-a-b-2)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \leq 2. \tag{1.1.51}$$

Fixând $b = a$ în Teorema 4.1.10 obţinem următorul corolar.

Corolarul 4.1.11[116] Dacă $a > 0$ şi $c > 2a + 2$, atunci o condiţie suficientă pentru ca $G_1(a, a; c; z)$ să fie în clasa $\mathcal{T}_2$ este ca următoarea inegalitate să aibă loc

$$\frac{\Gamma(c+2)\Gamma(c-2a-2)}{[\Gamma(c-a)]^2} \leq 2 \tag{1.1.52}$$

Vom da acum câteva rezultate pentru $H_{a,b,c}(f)$.

Teorema 4.1.12[116] Fie $a, b > 0$ şi $c > |a| + |b| + 3$. Mai mult, fie f care satisface $|a_n| \leq n \quad$ pentru $\quad n = 1, 2, 3 \ldots$. Dacă inegalitatea

$$\frac{\Gamma(c+1)\Gamma(c-|a|-|b|-1)}{\Gamma(c-|a|)\Gamma(c-|b|)} \cdot \tag{1.1.53}$$

$$\cdot \left(\frac{(|a|+1)(|a|+2)(|b|+1)(|b|+2)}{(c-|a|-|b|-3)(c-|a|-|b|-2)} + 5\frac{(|a|+1)(|b|+1)}{(c-|a|-|b|-2)} + 4 \right) \leq 8$$

este satisfăcută, atunci $H_{a,b,c}(f) \in S_1$, unde $H_{a,b,c}(f)$ este definit în Capitolul 1 prin

$$H_{a,b,c}(f)(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(a)_{n-1}(b)_{n-1}}{(c)_{n-1}(1)_{n-1}} a_n z^n.$$

Fixând $|b| = |a|$ în Teorema 4.1.12 obţinem următorul corolar.

Corolarul 4.1.13[116] Dacă $a > 0$, $c > 2|a| + 3$ şi $f \in S$ atunci o condiţie suficientă pentru $H_{a,a,c}(f) \in S_1$ este ca următoarea inegalitate

$$\frac{\Gamma(c+1)\Gamma(c-2|a|-1)}{[\Gamma(c-|a|)]^2} \left(\frac{(|a|+1)^2(|a|+2)^2}{(c-2|a|-3)(c-2|a|-2)} + 5\frac{(|a|+1)^2}{(c-2|a|-2)} + 4 \right) \leq 8 \tag{1.1.54}$$

sa aibă loc.

În cazul în care $b = 1$ în Teorema 4.1.12 obţinem un rezultat legat de operatorul Carlson-Shaffer $\mathcal{L}(a, c)$, operator definit în [35].

Corolarul 4.1.14[116] Fie $a > 0$, $c > |a| + 4$ şi $f \in S$. Atunci o condiţie suficientă pentru ca $H_{a,1,c}(f) = \mathcal{L}(a, c) \in S_1$ este ca următoarea inegalitate să fie adevărată

$$\frac{c(c-1)}{(c-|a|-2)(c-|a|-1)} \left(\frac{3(|a|+1)(|a|+2)}{(c-|a|-4)(c-|a|-3)} + 5\frac{(|a|+1)}{(c-|a|-3)} + 2 \right) \leq 4. \tag{1.1.55}$$

Teorema 4.1.15[116] Fie $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Fie c un număr real pentru care $c > |a| + |b| + 1$. Dacă $f \in \mathcal{R}^\tau(A, B)$ şi dacă următoarea inegalitate este satisfăcută

$$\frac{\Gamma(c+1)\Gamma(c-|a|-|b|-1)}{\Gamma(c-|a|)\Gamma(c-|b|)} \leq 2, \tag{1.1.56}$$

atunci $H_{a,b,c}(f) \in S_1$.

Fixând $|b| = |a|$ putem formula afirmaţia Teoremei 4.1.15 după cum urmează.

Corolarul 4.1.16[116] Fie $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Fie de asemenea c un număr real pentru care $c > 2|a| + 1$. Dacă $f \in \mathcal{R}^\tau(A, B)$ şi inegalitatea

$$\frac{\Gamma(c+1)\Gamma(c-2|a|-1)}{[\Gamma(c-|a|)]^2} \leq 2 \tag{1.1.57}$$

este satisfăcută, atunci $H_{a,a,c}(f) \in S_1$.

În cazul special când $b = 1$ Teorema 4.1.15 duce imediat la un rezultat referitor la operatorul Carlson–Shaffer $\mathcal{L}(a, c)$.

Corolarul 4.1.17[116] Fie $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Fie de asemenea c un număr real pentru care $c > |a| + 2$. Dacă $f \in \mathcal{R}^\tau(A, B)$ şi dacă inegalitatea

$$\frac{(c-1)_2}{(c-|a|-2)_2} \leq 2 \tag{1.1.58}$$

este satisfăcută, atunci $H_{a,1,c}(f) = \mathcal{L}(a, c) \in S_1$.

Teorema 4.1.18[116] Fie $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Fie de asemenea c un număr real pentru care $c > |a| + |b| + P_1$, unde $P_1 = P_1(k)$ este dat prin relaţia

$$P_1(k) = \begin{cases} \dfrac{8(\arccos k)^2}{\pi^2(1-k^2)}, & 0 \leq k < 1 \\[2ex] \dfrac{8}{\pi^2}, & k = 1 \\[2ex] \dfrac{\pi^2}{4\sqrt{u}(1+u)(k^2-1)h^2(u)}, & k > 1 \end{cases},$$

unde $t \in (0, 1)$ este determinat prin $k = \cosh\left(\pi h'(u)/4h(u)\right)$, h este integrala eliptică completă de ordinul întâi a lui Legendre

$$h(u) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-u^2x^2)}}$$

şi $h'(u) = h(\sqrt{1-u^2})$ este integrala complementară a lui $h(u)$. Daca pentru $k(0 \leq k < \infty), f \in k - \mathcal{UKV}$, inegalitatea

$$(1.1.59) \qquad {}_3F_2(|a|+1, |b|+1, P_1+1; c+1, 2) \leq 2$$

este satisfăcută, atunci $H_{a,b,c}(f) \in S_1$.

Teorema 4.1.19[116] Fie $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Fie de asemenea c un număr real pentru care $c > |a| + |b| + P_1$, unde $P_1 = P_1(k)$. Dacă pentru $k(0 \leq k < \infty), f \in k - \mathcal{ST}$, inegalitatea

$$(1.1.60) \quad {}_3F_2(|a|+1, |b|+1, P_1+1; c+1, 1; z) + {}_3F_2(|a|+1, |b|+1, P_1+1; c+1, 2; z) \leq 4$$

este satisfăcută, atunci $H_{a,b,c} \in S_1$.

Al doilea subcapitol este intitulat ”Noi condiţii pentru ca seria distribuţiei Pascal să aparţină unei anumite clase de funcţii analitice”.
Studiile asupra operatorului diferenţial Sălăgean D^k în legătură cu numerele Stirling sunt relativ noi.
În această secțiune se consideră operatorul diferenţial D^k care implică numerele Stirling.
Se discută noi condiţii necesare şi suficiente care implică numere Stirling pentru seria $\Upsilon_\theta^s(z)$, exprimată prin distribuţia Pascal, în cazul subclasei $T_k(\epsilon, \alpha)$.
De asemenea, sunt analizate proprietăţile operatorului integral legat de seria distribuţiei Pascal.
Vom obţine condiţii necesare şi suficiente pentru ca $\Upsilon_\theta^s(z)$ să fie în $T_k(\epsilon, \alpha)$.
Definiţiile lui D^k, $\mathcal{I}_\theta^s f$, $\mathcal{R}^\tau(A, B)$, $C(\epsilon, \alpha)$, $C(\alpha)$, $\Upsilon_\theta^s(z)$, $T(k, \alpha)$ şi $T_k(\epsilon, \alpha)$ sunt date în Capitolul 1 (a se vedea şi [129], [14], [12], [137], [78], [137]).
Vom considera peste tot în acest subcapitol că $0 \leq \alpha < 1$, $0 \leq \epsilon < 1$, $s \geq 1$ şi $0 \leq \theta < 1$.
Rezultatele prezentate aici fac parte din lucrarea
B.A. Frasin, **L.I. Cotîrlă**, *New conditions for Pascal distribution series to be in a certain class of analytic functions,* Heliyon, 10(2024).
Aici sunt prezentate trei teoreme, opt corolarii şi o remarcă.

Teorema 4.2.1[64] Seria $\Upsilon_\theta^s(z) \in T_k(\epsilon, \alpha)$, $k \geq 1$, dacă şi numai dacă

$$(1-\alpha\epsilon)(k+1)!\theta^{k+1}\frac{\binom{s+k}{s-1}}{(1-\theta)^{s+k+1}}+$$

$$+\sum_{j=2}^{k+1}[(1-\alpha\epsilon)S_{k+2,j}-(\alpha-\alpha\epsilon)S_{k+1,j}]\left((j-1)!\theta^{j-1}\frac{\binom{s+j-2}{s-1}}{(1-\theta)^{s+j-1}}\right)\leq$$

$$\leq 1-\alpha.$$

Luând $k=1$ în Teorema 4.2.1, obţinem următorul corolar.

Corolarul 4.2.2[64] Seria $\Upsilon_\theta^s(z) \in C(\epsilon, \alpha)$ dacă şi numai dacă

$$(1-\alpha\epsilon)\theta^2\frac{s(s+1)}{(1-\theta)^{s+2}}+(3-\alpha-2\alpha\epsilon)\left(\theta\frac{s}{(1-\theta)^{s+1}}\right)\leq 1-\alpha.$$

Luând $k=2$ în Teorema 4.2.1, obţinem următorul corolar.

Corolarul 4.2.3[64] Seria $\Upsilon_\theta^s(z) \in T_2(\epsilon, \alpha)$ dacă şi numai dacă

$$(1-\alpha\epsilon)\frac{\theta^3 s(s+1)(s+2)}{(1-\theta)^{s+3}}+(6-5\alpha\epsilon-\alpha)\frac{\theta^2 s(s+1)}{(1-\theta)^{s+2}}+$$

$$+(7-4\alpha\epsilon-3\alpha)\frac{\theta s}{(1-\theta)^{s+1}}\leq 1-\alpha.$$

Luând $\epsilon=0$ în Corolarul 4.2.2, obţinem următorul corolar.

Corolarul 4.2.4[64] Seria $\Upsilon_\theta^s(z) \in C(\alpha)$ dacă şi numai dacă

$$\theta^2\frac{s(s+1)}{(1-\theta)^{s+2}}+(3-\alpha)\,\theta\frac{s}{(1-\theta)^{s+1}}\leq 1-\alpha.$$

Luând $\epsilon=0$ în Teorema 4.2.1, obţinem următorul corolar.

Corolarul 4.2.5[64] Seria $\Upsilon_\theta^s(z) \in T(k, \alpha)$, $k \geq 1$ dacă şi numai dacă

$$\begin{aligned}&(k+1)!\theta^{k+1}\frac{\binom{s+k}{s-1}}{(1-\theta)^{s+k+1}}+\\ &+\sum_{j=2}^{k+1}(S_{k+2,j}-\alpha S_{k+1,j})\left((j-1)!\theta^{j-1}\frac{\binom{s+j-2}{s-1}}{(1-\theta)^{s+j-1}}\right)\\ \leq\ & 1-\alpha.\end{aligned}$$

Teorema 4.2.6[64] Fie $f \in \mathcal{R}^\tau(A, B)$. Atunci $\mathcal{I}_\theta^s f(z) \in T_k(\epsilon, \alpha)$, $k \geq 2$ dacă

$$(A-B)\,|\tau|\left[(1-\alpha\epsilon)k!\theta^k\frac{\binom{s+k-1}{s-1}}{(1-\theta)^k}+\right. \tag{1.1.61}$$

$$+\sum_{j=2}^{k}\left((1-\alpha\epsilon)\,S_{k+1,j}-(\alpha-\alpha\epsilon)S_{k,j}\right)\left((j-1)!\theta^{j-1}\frac{\binom{s+j-2}{s-1}}{(1-\theta)^{j-1}}\right)+$$

$$+(1-\alpha)\left(1-(1-\theta)^{s}\right)\Big]$$

$$\leq 1-\alpha.$$

Luând $k=2$ în Teorema 4.2.6, obţinem următorul corolar.

Corolarul 4.2.7[64] Fie $f\in\mathcal{R}^{\tau}(A-B)$. Atunci $\mathcal{I}_{\theta}^{s}f(z)\in T_{2}(\epsilon,\alpha)$ dacă

$$\begin{aligned}&(A-B)\,|\tau|\left[(1-\alpha\epsilon)\theta^{2}\frac{s(s+1)}{(1-\theta)^{2}}+(3-2\alpha\epsilon-\alpha)\theta\frac{s}{(1-\theta)}\right.\\&\left.+(1-\alpha)\left(1-(1-\theta)^{s}\right)\right]\\ \leq\ &1-\alpha.\end{aligned}$$

Luând $\epsilon=0$ în Teorema 4.2.6, obţinem următorul corolar

Corolarul 4.2.8[64] Fie $f\in\mathcal{R}^{\tau}(A-B)$. Atunci $\mathcal{I}_{\theta}^{s}f(z)\in T(k,\alpha)$, $k\geq 2$ dacă

$$\begin{aligned}&(A-B)\,|\tau|\left[k!\theta^{k}\frac{\binom{s+k-1}{s-1}}{(1-\theta)^{k}}+\right.\\&+\sum_{j=2}^{k}\left(S_{k+1,j}-\alpha S_{k,j}\right)\left((j-1)!\theta^{j-1}\frac{\binom{s+j-2}{s-1}}{(1-\theta)^{j-1}}\right)+\\&\left.+(1-\alpha)\left(1-(1-\theta)^{s}\right)\right].\\ \leq\ &1-\alpha.\end{aligned}$$

Operatorul integral $\mathcal{G}_{\theta}^{s}$ este definit în lucrarea [58] prin

(1.1.62) $$\mathcal{G}_{\theta}^{s}f(z)=\int_{0}^{z}\frac{\Upsilon_{\theta}^{s}(t)}{t}dt,\ f\in\mathcal{A},s\geq 1,0\leq\theta<1,z\in\mathbb{D}.$$

Teorema 4.2.9[64] Operatorul integral $\mathcal{G}_{\theta}^{s}f(z)$ este în clasa $T_{k}(\epsilon,\alpha)$, $k\geq 2$ dacă şi numai dacă

(1.1.63) $$(1-\alpha\epsilon)k!\theta^{k}\frac{\binom{s+k-1}{s-1}}{(1-\theta)^{k}}+$$

$$+\sum_{j=2}^{k}\left[(1-\alpha\epsilon)S_{k+1,j}-(\alpha-\alpha\epsilon)S_{k,j}\right]\left((j-1)!\theta^{j-1}\frac{\binom{s+j-2}{s-1}}{(1-\theta)^{j-1}}\right)+$$

$$+(1-\alpha)\left(1-(1-\theta)^{s}\right) \leq 1-\alpha.$$

Luând $k=2$ în Teorema 4.2.9 obţinem următorul corolar.

Corolarul 4.2.10[64] Operatorul integral $\mathcal{G}_{\theta}^{s} f(z)$ este în clasa $T_2(\epsilon, \alpha)$ dacă şi numai dacă

$$\frac{(1-\alpha\epsilon)\theta^{2} s(s+1)}{(1-\theta)^{s+2}}+(3-2\alpha\epsilon-\alpha) \frac{\theta s}{(1-\theta)^{s+1}} \leq 1-\alpha.$$

Luând $\epsilon=0$ în Teorema 4.2.9, obţinem următorul corolar.

Corolarul 4.2.11[64] Operatorul integral $\mathcal{G}_{\theta}^{s} f(z)$ este în clasa $T(k, \alpha)$, $k \geq 2$ dacă şi numai dacă

$$k!\theta^{k} \frac{\binom{s+k-1}{s-1}}{(1-\theta)^{k}}+\sum_{j=2}^{k}\left(S_{k+1, j}-\alpha S_{k, j}\right)\left((j-1)!\theta^{j-1} \frac{\binom{s+j-2}{s-1}}{(1-\theta)^{j-1}}\right)+$$

$$+(1-\alpha)\left(1-(1-\theta)^{s}\right) \leq 1-\alpha.$$

Remark 4.2.12[64] Alegând valori diferite pentru $k \in \mathbb{N}$, se pot determina condiţii necesare şi suficiente, împreună cu relaţii de incluziune, pentru ca seriile de tip distribuţie Pascal să aparţină clasei $T_k(\epsilon, \alpha)$.

Subcapitolul al treilea este intitulat ”Inegalităţi de tipul Fekete - Szegö şi studii asupra determinantului Hankel de ordinul trei pentru anumite clase de funcţii analitice”.

În prima parte a acestui subcapitol ne-am concentrat pe inegalitaţi Fekete-Szegö asociate cu transformări de ordinul *m* folosind domenii conice, pentru valori particulare ale lui k.

Rezultatele prezentate aici fac parte din lucrarea

P. Gurusamy, M. Caglar, S. Sivasubramanian, **L.I. Cotîrlă,** *The Fekete-Szegö functional associated with the m-th root transformation using conical domains,* Ukrainean Math. J., Vol.76, No.7, (2024).

Aici sunt prezentate o definiţie, patru teoreme, opt corolarii şi cinci remărci.

Fie $\mathcal{R}_\alpha$ operatorul definit pe $\mathcal{A}$ prin $\mathcal{R}_\alpha = f(z) * \frac{z}{(1-z)^{2(1-\alpha)}}, 0 \leq \alpha < 1, z \in \mathbb{D}$, (a se vedea lucrarea [99]).

Funcţia f din $\mathcal{A}$ este în clasa k - $\mathcal{SP}_\alpha$ dacă $\mathcal{R}_\alpha(f)$ este o funcţie k - *parabolică stelată*, unde funcţia k - *parabolică stelată* este definită în Capitolul 1 (vezi şi [146]).

Definiţia 4.3.1[72] Funcţia $f \in \mathcal{A}$ dată prin relaţia $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ este în clasa k - $\mathcal{SP}_\alpha$ $(0 \leq k < \infty)$ dacă $\mathcal{R}_\alpha(f) \in k - \mathcal{SP}$ sau echivalent

(1.1.64) $\operatorname{Re}\left(\frac{z\left(\mathcal{R}_\alpha(f)\right)'(z)}{\mathcal{R}_\alpha(f)(z)}\right) > k\left|\frac{z\left(\mathcal{R}_\alpha(f)\right)'(z)}{\mathcal{R}_\alpha(f)(z)} - 1\right|, 0 \leq \alpha < 1, z \in \mathbb{D}.$

Teorema 4.3.2[72] Fie funcţia $f \in \mathcal{A}$ dată prin relaţia $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ din clasa k-$\mathcal{SP}_\alpha$, $0 \leq k < \infty$. Dacă F este a-*m*-a rădăcină a transformării lui f, atunci

(1.1.65)
$$|b_{2m+1} - \mu b_{m+1}^2| \leq$$
$$\leq \begin{cases} \frac{Q_1}{2m(1-\alpha)(3-2\alpha)}\left(\frac{(2\mu+m-1)(3-2\alpha)Q_1}{4m(1-\alpha)} - Q_1 - D\right), & \mu \geq \sigma_1 \\ \frac{Q_1}{2m(1-\alpha)(3-2\alpha)}, & \sigma_2 \leq \mu \leq \sigma_1 \\ \frac{Q_1}{2m(1-\alpha)(3-2\alpha)}\left(Q_1 + D - \frac{(2\mu+m-1)(3-2\alpha)Q_1}{4m(1-\alpha)}\right), & \mu \leq \sigma_2 \end{cases}$$

$$\sigma_1 = \frac{2m(1-\alpha)}{(3-2\alpha)Q_1}\left(1 + Q_1 + D - \frac{(m-1)(3-2\alpha)Q_1}{4m(1-\alpha)}\right),$$

$$\sigma_2 = \frac{2m(1-\alpha)}{(3-2\alpha)Q_1}\left(Q_1 + D - 1 - \frac{(m-1)(3-2\alpha)Q_1}{4m(1-\alpha)}\right).$$

şi Q_1 şi D sunt date ca în Lema 1.51 (Capitolul 1).

Reamintesc aici Lema 1.51:

Lema 1.51[83] Fie $k \in [0, \infty)$ fixat şi fie $q_k(z)$ aplicaţia Riemann din $\mathbb{D}$ în Ω_k care satisface $q_k(0) = 1$, $q_k'(0) > 0$. Dacă

$$q_k(z) = 1 + Q_1(k)z + Q_2(k)z^2 + Q_3(k)z^3 + \cdots, z \in \mathbb{D},$$

atunci

$$Q_1 = Q_1(k) = \begin{cases} \frac{2A^2}{1-k^2}, & 0 \leq k < 1 \\ \frac{8}{\pi^2}, & k = 1 \\ \frac{\pi^2}{4\kappa^2(t)(k^2-1)(1-t)\sqrt{t}}, & k > 1, \end{cases}$$

$$Q_2 = Q_2(k) = D(k)\, Q_1(k),$$

unde

$$D = D(k) = \begin{cases} \dfrac{A^2+2}{3}, & 0 \le k < 1 \\ \\ \dfrac{2}{3}, & k = 1 \\ \\ \dfrac{4\kappa^2(t)\left(t^2+6t+1\right)-\pi^2}{24\kappa^2(t)(1+t)\sqrt{t}}, & k > 1, \end{cases},$$

$A = \dfrac{2}{\pi} \arccos k$ şi $\kappa(t) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-t^2x^2)}}$, $t \in (0,1)$, este integrala eliptică completă de prima speţă, pentru detalii vezi şi ([6], [15], [147]) .

Dacă $m = 1$ în Teorema 4.3.2, atunci obţinem următorul corolar:

Corolarul 4.3.3[72] Fie funcţia $f \in \mathcal{A}$ dată prin $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ din clasa k - $\mathcal{SP}_\alpha$ $(0 \le k < \infty)$. Atunci

$$|b_3 - \mu b_2^2| \le \begin{cases} \dfrac{Q_1}{2(1-\alpha)(3-2\alpha)} \left[\dfrac{\mu(3-2\alpha)Q_1}{2(1-\alpha)} - Q_1 - D\right], & \mu \ge \alpha_1 \\ \\ \dfrac{Q_1}{2(1-\alpha)(3-2\alpha)}, & \alpha_2 \le \mu \le \alpha_1 \\ \\ \dfrac{Q_1}{2(1-\alpha)(3-2\alpha)} \left[Q_1 + D - \dfrac{\mu(3-2\alpha)Q_1}{2(1-\alpha)}\right], & \mu \le \alpha_2 \end{cases},$$

unde

$$\alpha_1 = \frac{2(1-\alpha)}{(3-2\alpha)Q_1}(1+Q_1+D),$$

$$\alpha_2 = \frac{2(1-\alpha)}{(3-2\alpha)Q_1}(Q_1+D-1).$$

iar Q_1 şi D sunt date ca în Lema 1.51.

Dacă $m = 1$ şi $\alpha = 0$ în Teorema 4.3.2 atunci avem următorul corolar:

Corolarul 4.3.4[72] Fie funcţia $f \in \mathcal{A}$ dată prin $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ din clasa k - $\mathcal{SP}_\alpha$ $(0 \leq k < \infty)$. Atunci

$$\left|b_3 - \mu b_2^2\right| \leq \begin{cases} \frac{\mathrm{Q}_1}{6}\left(Q_1 + D - \frac{3\mu Q_1}{2}\right), & \mu \leq \frac{2}{3Q_1}\left(Q_1 + D - 1\right) \\ \frac{Q_1}{6}, & \frac{2}{3Q_1}\left(Q_1 + D - 1\right) \leq \mu \leq \frac{2}{3Q_1}\left(1 + Q_1 + D\right), \\ \frac{\mathrm{Q}_1}{6}\left(\frac{3\mu Q_1}{2} - Q_1 - D\right), & \mu \geq \frac{2}{3Q_1}\left(1 + Q_1 + D\right) \end{cases}$$

unde Q_1 şi D sunt date ca în Lema 1.51.

Înlocuind valorile lui $\mathrm{Q}_1 = \mathrm{Q}_1(k)$ şi $D = D(k)$ din Lema 1.51 în Teorema 4.3.2 pentru $0 \leq k < 1$, $k = 1$ şi $k > 1$, obţinem următoarea teoremă:

Teorema 4.3.5[72] Fie funcţia $f \in \mathcal{A}$ dată prin $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ din clasa k - $\mathcal{SP}_\alpha$ şi $0 \leq k < 1$. Atunci

(1.1.66)
$$|b_{2m+1} - \mu b_{m+1}^2| \leq$$

$$\leq \begin{cases} \frac{1}{m(1-\alpha)(3-2\alpha)}\left(\frac{A^2}{1-k^2}\right)\left[\frac{2A^2}{1-k^2} + \left(\frac{A^2+2}{3}\right) - \frac{(3-2\alpha)(2\mu+m-1)}{2m(1-\alpha)}\left(\frac{A^2}{1-k^2}\right)\right], & \mu \leq \rho_2 \\ \frac{1}{m(1-\alpha)(3-2\alpha)}\left(\frac{A^2}{1-k^2}\right), & \rho_2 \leq \mu \leq \rho_1 \ , \\ \frac{1}{m(1-\alpha)(3-2\alpha)}\left(\frac{A^2}{1-k^2}\right)\left[\frac{(3-2\alpha)(2\mu+m-1)}{2m(1-\alpha)}\left(\frac{A^2}{1-k^2}\right) - \left(\frac{2A^2}{1-k^2}\right) - \left(\frac{A^2+2}{3}\right)\right], & \mu \geq \rho_1 \end{cases}$$

unde

$$\rho_1 = \frac{2m\left(1-\alpha\right)}{\left(3-2\alpha\right)}\left(\frac{1-k^2}{A^2}\right)\left[\left(\frac{2A^2}{1-k^2}\right) + \left(\frac{A^2+2}{3}\right) - \frac{\left(m-1\right)\left(3-2\alpha\right)}{2m\left(1-\alpha\right)}\left(\frac{A^2}{1-k^2}\right) + 1\right]$$

şi

$$\rho_2 = \frac{2m\left(1-\alpha\right)}{\left(3-2\alpha\right)}\left(\frac{1-k^2}{A^2}\right)\left[\left(\frac{2A^2}{1-k^2}\right) + \left(\frac{A^2+2}{3}\right) - \frac{\left(m-1\right)\left(3-2\alpha\right)}{2m\left(1-\alpha\right)}\left(\frac{A^2}{1-k^2}\right) - 1\right],$$

unde A este dat ca în Lema 1.51.

Dacă $m = 1$ în Teorema 4.3.5, atunci avem următorul corolar:

Corolarul 4.3.6[72] Fie funcţia $f \in \mathcal{A}$ dată prin $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ din clasa k - $\mathcal{SP}_\alpha$ şi $0 \leq k < 1$. Atunci

$$|b_3 - \mu b_2^2| \leq \begin{cases} \frac{1}{(1-\alpha)(3-2\alpha)} \left(\frac{A^2}{1-k^2}\right) \left[\frac{2A^2}{1-k^2} + \left(\frac{A^2+2}{3}\right) - \frac{(3-2\alpha)\mu}{(1-\alpha)} \left(\frac{A^2}{1-k^2}\right)\right], & \mu \leq \rho_4 \\ \frac{1}{(1-\alpha)(3-2\alpha)} \cdot \frac{A^2}{1-k^2}, & \rho_4 \leq \mu \leq \rho_3 \\ \frac{1}{(1-\alpha)(3-2\alpha)} \left(\frac{A^2}{1-k^2}\right) \left[\frac{(3-2\alpha)\mu}{(1-\alpha)} \left(\frac{A^2}{1-k^2}\right) - \left(\frac{2A^2}{1-k^2}\right) - \left(\frac{A^2+2}{3}\right)\right], & \mu \geq \rho_3 \end{cases}$$

unde

$$\rho_3 = \frac{(1-\alpha)}{(3-2\alpha)} \left(\frac{1-k^2}{A^2}\right) \left[\left(\frac{2A^2}{1-k^2}\right) + \left(\frac{A^2+2}{3}\right) + 1\right]$$
$$\rho_4 = \frac{(1-\alpha)}{(3-2\alpha)} \left(\frac{1-k^2}{A^2}\right) \left[\left(\frac{2A^2}{1-k^2}\right) + \left(\frac{A^2+2}{3}\right) - 1\right],$$

şi A este dat ca în Lema 1.51.

Dacă $m = 1$ şi $\alpha = 0$ în Teorema 4.3.5 atunci obţinem următorul corolar:

Corolarul 4.3.7[72] Fie funcţia $f \in \mathcal{A}$ dată prin $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ din clasa k - $\mathcal{SP}_\alpha$ şi $0 \leq k < 1$. Atunci

$$\left|b_3 - \mu b_2^2\right| \leq \begin{cases} \frac{1}{3} \left(\frac{A^2}{1-k^2}\right) \left[\frac{2A^2}{1-k^2} + \left(\frac{A^2+2}{3}\right) - \left(\frac{3\mu A^2}{1-k^2}\right)\right], & \mu \leq \rho_6 \\ \frac{1}{3} \left(\frac{A^2}{1-k^2}\right), & \rho_6 \leq \mu \leq \rho_5 \\ \frac{1}{3} \left(\frac{A^2}{1-k^2}\right) \left[\left(\frac{3\mu A^2}{1-k^2}\right) - \left(\frac{2A^2}{1-k^2}\right) - \left(\frac{A^2+2}{3}\right)\right], & \mu \geq \rho_5 \end{cases},$$

unde

$$\rho_5 = \frac{1}{3} \left(\frac{1-k^2}{A^2}\right) \left[1 + \left(\frac{2A^2}{1-k^2}\right) + \left(\frac{A^2+2}{3}\right)\right],$$
$$\rho_6 = \frac{1}{3} \left(\frac{1-k^2}{A^2}\right) \left[\left(\frac{2A^2}{1-k^2}\right) + \left(\frac{A^2+2}{3}\right) - 1\right],$$

iar A este dat ca în Lema 1.51.

Teorema 4.3.8[72] Fie funcţia $f \in \mathcal{A}$ dată prin $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ din clasa k - $\mathcal{SP}_\alpha$ şi $k = 0$. Atunci

(1.1.67) $$|b_{2m+1} - \mu b_{m+1}^2| \leq$$

$$\leq \begin{cases} \frac{4}{m(1-\alpha)(3-2\alpha)\pi^2}\left[\frac{8}{\pi^2}+\frac{2}{3}-\frac{2(3-2\alpha)(2\mu+m-1)}{m(1-\alpha)\pi^2}\right], & \mu \leq \beta_2 \\ \frac{4}{m(1-\alpha)(3-2\alpha)\pi^2}, & \beta_2 \leq \mu \leq \beta_1 \\ \frac{4}{m(1-\alpha)(3-2\alpha)\pi^2}\left[\frac{2(3-2\alpha)(2\mu+m-1)}{m(1-\alpha)\pi^2}-\frac{8}{\pi^2}-\frac{2}{3}\right], & \mu \geq \beta_1 \end{cases},$$

unde

$$\beta_1 = \frac{m\,(1-\alpha)\,\pi^2}{4\,(3-2\alpha)}\left[\frac{8}{\pi^2}+\frac{5}{3}-\frac{2\,(3-2\alpha)\,(m-1)}{m\,(1-\alpha)\,\pi^2}\right],$$

şi

$$\beta_2 = \frac{m\,(1-\alpha)\,\pi^2}{4\,(3-2\alpha)}\left[\frac{8}{\pi^2}-\frac{1}{3}-\frac{2\,(3-2\alpha)\,(m-1)}{m\,(1-\alpha)\,\pi^2}\right].$$

Dacă $m = 1$ în Teorema 4.3.8, atunci avem următorul corolar:

Corolarul 4.3.9[72] Fie funcţia $f \in \mathcal{A}$ dată prin $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ din clasa k - $\mathcal{SP}_\alpha$ şi $k = 0$. Atunci

$$\left|b_3 - \mu b_2^2\right| \leq \begin{cases} \frac{4}{(1-\alpha)\,(3-2\alpha)\,\pi^2}\left[\frac{8}{\pi^2}+\frac{2}{3}-\frac{4\,(3-2\alpha)\,\mu}{(1-\alpha)\,\pi^2}\right], & \mu \leq \beta_4 \\ \frac{4}{(1-\alpha)\,(3-2\alpha)\,\pi^2}, & \beta_4 \leq \mu \leq \beta_3 \\ \frac{4}{(1-\alpha)\,(3-2\alpha)\,\pi^2}\left[\frac{4\,(3-2\alpha)\,\mu}{(1-\alpha)\,\pi^2}-\frac{8}{\pi^2}-\frac{2}{3}\right], & \mu \geq \beta_3 \end{cases},$$

unde

$$\beta_3 = \frac{(1-\alpha)\,\pi^2}{4\,(3-2\alpha)}\left(\frac{8}{\pi^2}+\frac{5}{3}\right),$$

$$\beta_4 = \frac{(1-\alpha)\,\pi^2}{4\,(3-2\alpha)}\left(\frac{8}{\pi^2}-\frac{1}{3}\right).$$

Daca $m = 1$ şi $\alpha = 0$ în Teorema 4.3.8, atunci obţinem următorul corolar:

Corolarul 4.3.10[72] Fie funcţia $f \in \mathcal{A}$ dată prin $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ din clasa k

- $\mathcal{SP}_\alpha$ şi $k=0$. Atunci

$$\left|b_3-\mu b_2^2\right| \leq \begin{cases} \dfrac{4}{3\pi^2}\left(\dfrac{8}{\pi^2}+\dfrac{2}{3}-\dfrac{12\mu}{\pi^2}\right), & \mu \leq \beta_6 \\ \\ \dfrac{4}{3\pi^2}, & \beta_6 \leq \mu \leq \beta_5 \\ \\ \dfrac{4}{3\pi^2}\left(\dfrac{12\mu}{\pi^2}-\dfrac{8}{\pi^2}-\dfrac{2}{3}\right), & \mu \geq \beta_5 \end{cases},$$

unde

$$\beta_5 = \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{8}{\pi^2}+\frac{5}{3}\right),$$

$$\beta_6 = \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{8}{\pi^2}-\frac{1}{3}\right).$$

Teorema 4.3.11[72] Fie funcţia $f \in \mathcal{A}$ dată prin $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ din clasa k - $\mathcal{SP}_\alpha$ şi $k>0$. Atunci

(1.1.68) $$|b_{2m+1}-\mu b_{m+1}^2|$$

$$\leq \begin{cases} \frac{1}{2m(1-\alpha)(3-2\alpha)}\left[\frac{\pi^2}{4\kappa^2(t)(k^2-1)(1-t)\sqrt{t}}\right] A(t), & \mu \leq \delta_2 \\ \\ \frac{1}{2m(1-\alpha)(3-2\alpha)}\left[\frac{\pi^2}{4\kappa^2(t)(k^2-1)(1-t)\sqrt{t}}\right], & \delta_2 \leq \mu \leq \delta_1 \\ \\ \frac{1}{2m(1-\alpha)(3-2\alpha)}\left[\frac{\pi^2}{4\kappa^2(t)(k^2-1)(1-t)\sqrt{t}}\right] (-A(t)), & \mu \geq \delta_1 \end{cases},$$

unde

$$A(t) = \frac{\pi^2}{4\kappa^2(t)(k^2-1)(1-t)\sqrt{t}} + \frac{4\kappa^2(t)(t^2+6t+1)-\pi^2}{24\kappa^2(t)(1+t)\sqrt{t}} -$$
$$-\frac{(3-2\alpha)(2\mu+m-1)\pi^2}{16m(1-\alpha)\kappa^2(t)(k^2-1)(1-t)\sqrt{t}},$$

$$\delta_1 = \frac{8m(1-\alpha)\kappa^2(t)(k^2-1)(1-t)\sqrt{t}}{(3-2\alpha)\pi^2} A_1(t),$$

$$A_1(t) = 1 + \frac{\pi^2}{4\kappa^2(t)(k^2-1)(1-t)\sqrt{t}} + \frac{4\kappa^2(t)(t^2+6t+1)-\pi^2}{24\kappa^2(t)(1+t)\sqrt{t}}$$
$$-\frac{(3-2\alpha)(m-1)}{4m(1-\alpha)}\left[\frac{\pi^2}{4\kappa^2(t)(k^2-1)(1-t)\sqrt{t}}\right],$$

$$\delta_2 = \frac{8m(1-\alpha)\kappa^2(t)(k^2-1)(1-t)\sqrt{t}}{(3-2\alpha)\pi^2}A_2(t),$$

şi

$$A_2(t) = \frac{\pi^2}{4\kappa^2(t)(k^2-1)(1-t)\sqrt{t}} + \frac{4\kappa^2(t)\left(t^2+6t+1\right)-\pi^2}{24\kappa^2(t)(1+t)\sqrt{t}} - \frac{(3-2\alpha)(m-1)}{4m(1-\alpha)}\left[\frac{\pi^2}{4\kappa^2(t)(k^2-1)(1-t)\sqrt{t}}\right] - 1.$$

Dacă $m = 1$ în Teorema 4.3.11, atunci obţinem următorul corolar:

Corolarul 4.3.12[72] Fie funcţia $f \in \mathcal{A}$ dată prin $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ din clasa k - $\mathcal{SP}_\alpha$ şi $k > 0$. Atunci

$$\left|b_3 - \mu b_2^2\right| \leq \begin{cases} \frac{1}{2(1-\alpha)(3-2\alpha)}\left[\frac{\pi^2}{4\kappa^2(t)(k^2-1)(1-t)\sqrt{t}}\right]A_3(t), & \mu \leq \delta_4 \\ \frac{1}{2(1-\alpha)(3-2\alpha)}\left[\frac{\pi^2}{4\kappa^2(t)(k^2-1)(1-t)\sqrt{t}}\right], & \delta_4 \leq \mu \leq \delta_3 \\ \frac{1}{2(1-\alpha)(3-2\alpha)}\left[\frac{\pi^2}{4\kappa^2(t)(k^2-1)(1-t)\sqrt{t}}\right](-A_3(t)), & \mu \geq \delta_3 \end{cases},$$

unde

$$A_3(t) = \frac{\pi^2}{4\kappa^2(t)(k^2-1)(1-t)\sqrt{t}} + \frac{4\kappa^2(t)(t^2+6t+1)-\pi^2}{24\kappa^2(t)(1+t)\sqrt{t}} -$$
$$-\frac{(3-2\alpha)\pi^2\mu}{8(1-\alpha)\kappa^2(t)(k^2-1)(1-t)\sqrt{t}},$$

$$\delta_3 = \frac{8(1-\alpha)\kappa^2(t)(k^2-1)(1-t)\sqrt{t}}{(3-2\alpha)\pi^2}\left[1 + \frac{\pi^2}{4\kappa^2(t)(k^2-1)(1-t)\sqrt{t}} + \right.$$
$$\left. + \frac{4\kappa^2(t)(t^2+6t+1)-\pi^2}{24\kappa^2(t)(1+t)\sqrt{t}}\right.,$$

şi

$$\delta_4 = \frac{8(1-\alpha)\kappa^2(t)(k^2-1)(1-t)\sqrt{t}}{(3-2\alpha)\pi^2}\left[\frac{\pi^2}{4\kappa^2(t)(k^2-1)(1-t)\sqrt{t}} + \right.$$

$$+\frac{4\kappa^2(t)(t^2+6t+1)-\pi^2}{24\kappa^2(t)(1+t)\sqrt{t}}-1.$$

Daca $m=1$ şi $\alpha=0$ în Teorema 4.3.11, atunci avem următorul corolar:

Corolarul 4.3.13[72] Fie funcţia $f\in\mathcal{A}$ dată prin $f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}a_k z^k$ din clasa k - $\mathcal{SP}_\alpha$ şi $k>0$. Atunci

$$\left|b_3-\mu b_2^2\right|\leq\begin{cases}\frac{1}{6}\left[\frac{\pi^2}{4\kappa^2(t)(k^2-1)(1-t)\sqrt{t}}\right](A_4(t)), & \mu\leq\delta_6\\ \\ \frac{1}{6}\left[\frac{\pi^2}{4\kappa^2(t)(k^2-1)(1-t)\sqrt{t}}\right], & \delta_6\leq\mu\leq\delta_5\\ \\ \frac{1}{6}\left[\frac{\pi^2}{4\kappa^2(t)(k^2-1)(1-t)\sqrt{t}}\right](-A_4(t)), & \mu\geq\delta_5\end{cases},$$

unde

$$A_4(t)=\frac{\pi^2}{4\kappa^2(t)(k^2-1)(1-t)\sqrt{t}}+$$
$$+\frac{4\kappa^2(t)(t^2+6t+1)-\pi^2}{24\kappa^2(t)(1+t)\sqrt{t}}-\frac{3\pi^2\mu}{8\kappa^2(t)(k^2-1)(1-t)\sqrt{t}},$$
$$\delta_5=\frac{8\kappa^2(t)(k^2-1)(1-t)\sqrt{t}}{3\pi^2}\left[1+\frac{\pi^2}{4\kappa^2(t)(k^2-1)(1-t)\sqrt{t}}+\right.$$
$$\left.+\frac{4\kappa^2(t)(t^2+6t+1)-\pi^2}{24\kappa^2(t)(1+t)\sqrt{t}}\right.,$$

şi

$$\delta_6=\frac{8\kappa^2(t)(k^2-1)(1-t)\sqrt{t}}{3\pi^2}\left[\frac{\pi^2}{4\kappa^2(t)(k^2-1)(1-t)\sqrt{t}}+\right.$$
$$\left.+\frac{4\kappa^2(t)(t^2+6t+1)-\pi^2}{24\kappa^2(t)(1+t)\sqrt{t}}-1.\right.$$

Remarca 4.3.14[72] Pentru $0\leq\alpha<1$, ultima inegalitate din (1.1.65) poate fi îmbunătăţită astfel:

(1.1.69) $$\left|b_{2m+1}-\mu b_{m+1}^2\right|+(\mu-\sigma_2)\left|b_{m+1}\right|^2\leq\frac{Q_1}{2m(1-\alpha)(3-2\alpha)},\sigma_2\leq\mu\leq\sigma_3$$

şi

$$\text{(1.1.70)}\quad \left|b_{2m+1}-\mu b_{m+1}^2\right|+(\sigma_1-\mu)\left|b_{m+1}\right|^2\leq\frac{Q_1}{2m(1-\alpha)(3-2\alpha)},\sigma_3\leq\mu\leq\sigma_1,$$

unde

$$\sigma_3=\frac{2m(1-\alpha)}{(3-2\alpha)Q_1}\left[Q_1+D-\frac{(m-1)(3-2\alpha)Q_1}{4m(1-\alpha)}\right]$$

şi Q_1 şi D sunt date ca în Lema 1.51.

Remarca 4.3.15[72] Dacă $m=1$, atunci pentru $0\leq\alpha<1$ ultima inegalitate din (1.1.65) poate fi îmbunătăţită astfel:

$$\text{(1.1.71)}\quad \left|b_3-\mu b_2^2\right|+(\mu-\alpha_2)\left|b_2\right|^2\leq\frac{Q_1}{2(1-\alpha)(3-2\alpha)},\alpha_2\leq\mu\leq\alpha_3$$

şi

$$\text{(1.1.72)}\quad \left|b_3-\mu b_2^2\right|+(\alpha_1-\mu)\left|b_2\right|^2\leq\frac{Q_1}{2(1-\alpha)(3-2\alpha)},\alpha_3\leq\mu\leq\alpha_1,$$

unde

$$\alpha_3=\frac{2(1-\alpha)(Q_1+D)}{(3-2\alpha)Q_1},$$

iar Q_1 şi D sunt date ca în Lema 1.51.

Remarca 4.3.16[72] Introducând valorile lui $Q_1(k)$ şi $D(k)$ pentru $0\leq k<1$ în (1.1.69) şi (1.1.70), cu $0\leq\alpha<1$, putem îmbunătăţi a doua parte a estimării din (1.1.66) după cum urmează:

$$\left|b_{2m+1}-\mu b_{m+1}^2\right|+(\mu-\rho_2)\left|b_{m+1}\right|^2\leq\frac{A^2}{m(1-\alpha)(3-2\alpha)(1-k^2)},\rho_2\leq\mu\leq\rho_7$$

şi

$$\left|b_{2m+1}-\mu b_{m+1}^2\right|+(\rho_1-\mu)\left|b_{m+1}\right|^2\leq\frac{A^2}{m(1-\alpha)(3-2\alpha)(1-k^2)},\rho_7\leq\mu\leq\rho_1,$$

unde

$$\rho_7=\frac{2m(1-\alpha)}{(3-2\alpha)}\left[1+\frac{(A^2+2)(1-k^2)}{6A^2}-\frac{(m-1)(3-2\alpha)}{4m(1-\alpha)}\right].$$

Remarca 4.3.17[72] Înlocuind valorile lui $Q_1(k)$ şi $D(k)$ pentru $k=1$ şi $0\leq\alpha<1$ în (1.1.69) şi (1.1.70), putem îmbunătăţi ultima parte a estimării din relaţia (1.1.67) astfel:

$$\left|b_{2m+1}-\mu b_{m+1}^2\right|+(\mu-\beta_2)\left|b_{m+1}\right|^2\leq\frac{4}{m(1-\alpha)(3-2\alpha)\pi^2},\beta_2\leq\mu\leq\beta_7$$

şi

$$\left|b_{2m+1}-\mu b_{m+1}^{2}\right|+(\beta_1-\mu)\left|b_{m+1}\right|^{2}\leq\frac{4}{m(1-\alpha)(3-2\alpha)\pi^{2}},\beta_7\leq\mu\leq\beta_1,$$

unde

$$\beta_7=\frac{2m(1-\alpha)}{(3-2\alpha)}\left[1+\frac{\pi^2}{12}-\frac{(m-1)(3-2\alpha)}{4m(1-\alpha)}\right].$$

Remarca 4.3.18[72] Înlocuind valorile lui $Q_1(k)$ şi $D(k)$ pentru $0\leq\alpha<1$, $k>1$, $t\in(0,1)$ în (1.1.69) şi (1.1.70), putem îmbunătăţi ultima parte a estimării din (1.1.68) după cum urmează:

$$\left|b_{2m+1}-\mu b_{m+1}^{2}\right|+(\mu-\delta_2)\left|b_{m+1}\right|^{2}\leq$$

$$\leq\frac{\pi^2}{8m(1-\alpha)(3-2\alpha)\kappa^2(t)(k^2-1)(1-t)\sqrt{t}},\delta_2\leq\mu\leq\delta_7$$

şi

$$\left|b_{2m+1}-\mu b_{m+1}^{2}\right|+(\delta_1-\mu)\left|b_{m+1}\right|^{2}\leq$$

$$\leq\frac{\pi^2}{8m(1-\alpha)(3-2\alpha)\kappa^2(t)(k^2-1)(1-t)\sqrt{t}},\delta_7\leq\mu\leq\delta_1,$$

unde

$$\delta_7=\frac{2m(1-\alpha)}{(3-2\alpha)}[1+$$

$$+\frac{(4\kappa^2(t)(t^2+6t+1)-\pi^2)4\kappa^2(t)(k^2-1)(1-t)\sqrt{t}}{24\pi^2\kappa^2(t)(1+t)\sqrt{t}}-\frac{(m-1)(3-2\alpha)}{4m(1-\alpha)}].$$

În cea de a doua parte a acestui subcapitol am investigat determinantul Hankel de ordinul trei $H_3(1)$ pentru o anumită clasă de funcţii analitice f în discul unitate deschis, normate prin condiţiile $f(0)=f'(0)-1=0$, asociate cu funcţia exponenţială, obţinând astfel limita superioară a dereminantului $H_3(1)$, dar şi inegalităţi de tipul Fekete-Szegö.

Rezultatele prezentate aici sunt conţinute în lucrarea:

D. Breaz, A. Cătaş, **L.I. Cotîrlă**, *On the upper bound of the third Hankel determinant for certain class of analytic functions related with exponential function,* An. Ştiinţ. Univ.

”Ovidius” Constanta Ser. Mat., Vol.30(1), (2022), 75-89.

Aici sunt prezentate o definiţie, patru teoreme şi o remarcă.

Definiţia 4.3.19[27] O funcţie $f \in S$ este în clasa SC_{α}^{*}, $\alpha \in [0,1]$, dacă satisface următoarea condiţie:

$$(1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)}+\alpha\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\prec e^{z}.$$

Remarca 4.3.20[27] Pentru $\alpha=0$, familia $SC_{0}^{*}:=\mathcal{S}_{e}^{*}=\mathcal{S}^{*}\left(e^{z}\right)$ a fost introdusa de Mediratta et al. în [94] şi pentru $\alpha=1$ obţinem clasa $SC_{1}^{*}:=C_{e}$.

Teorema 4.3.21[27] Dacă funcţia $f \in SC_{\alpha}^{*}$, unde f este dată prin relaţia $f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}a_kz^k$, atunci avem

$$\left|a_3-a_2^2\right|\leq\frac{1}{2(1+2\alpha)}. \tag{1.1.73}$$

Teorema 4.3.22[27] Dacă funcţia $f \in SC_{\alpha}^{*}$, unde f este dată prin $f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}a_kz^k$, $z\in\mathbb{C}$, atunci avem

$$|a_2a_3-a_4|\leq\frac{\left(4-\widetilde{c}^{2}\right)\widetilde{c}}{24}+\frac{3\left(4-\widetilde{c}^{2}\right)\widetilde{c}}{8}+\frac{4-\widetilde{c}^{2}}{12}+\frac{\widetilde{c}^{3}\varepsilon(\rho)}{72} \tag{1.1.74}$$

unde

$$\widetilde{c}=-\frac{9\sqrt{\frac{499\,312}{3}-\frac{23\,840}{3}\sqrt{298}}-108}{298\sqrt{298}-6236}\simeq 1.507\in[0,2]$$

şi $\varepsilon(\rho)=-2\alpha^3-14\alpha^2+17\alpha+5$, $\rho=\frac{1}{6}\sqrt{2}\sqrt{149}-\frac{7}{3}$.

Teorema 4.3.23[27] Dacă funcţia $f \in SC_{\alpha}^{*}$, unde f este dată prin $f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}a_kz^k$, $z\in\mathbb{C}$, atunci avem

$$\left|a_2a_4-a_3^2\right|\leq 2. \tag{1.1.75}$$

Teorema 4.3.24[27] Dacă funcţia $f\in SC_{\alpha}^{*}$, atunci avem

$$|H_3(1)|\leq 18,001. \tag{1.1.76}$$

Subcapitolul patru este intitulat ” Clase de funcţii analitice şi bi-univalente definite printr-un operator diferenţial.”

În prima parte a acestui subcapitol, folosind operatorul diferenţial $D_{p,q}f(z) = \frac{f(pz)-f(qz)}{(p-q)z}, z \in \mathbb{D}^*, 0 < q < p \leq 1$ din Capitolul 1 (Definiţia 1.41), introducem noi subclase de funcţii analitice şi bi-univalente, obţinem estimări pentru coeficienţi şi inegalităţi de tipul Fekete-Szegö.

Ideea acestei lucrări a fost extinsă la funcţiile bi-univalente m-simetrice definite prin acelaşi operator diferenţial în lucrarea

D. Breaz, **L.I. Cotîrlă**, *The study of coefficient estimates and Fekete-Szego inequalities for the new classes of m-fold symmetric bi-univalent functions defined using an operator,* J. Inequal. Appl., (2023).

Rezultatele prezentate în acest subcapitol fac parte din lucrarea

L.I. Cotîrlă, *New classes of analytic and bi-univalent functions,* AIMS Math., 6(10), (2021), 10642–10651.

Aici sunt prezentate trei definiţii, cinci teoreme şi două remărci.

Definiţia 4.4.1[37] O funcţie $f \in \mathcal{A}$ dată prin relaţia $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ se spune că este în clasa $H_{\Sigma}^{p,q,\alpha}(0 < q < p \leq 1, 0 < \alpha \leq 1)$, dacă următoarele condiţii sunt îndeplinite:

$$\begin{cases} f \in \Sigma \\ |arg(D_{p,q}f(z))| < \frac{\alpha\pi}{2}, z \in \mathbb{D} \end{cases} \tag{1.1.77}$$

şi

$$|arg(D_{p,q}g(w))| < \frac{\alpha\pi}{2}, w \in \mathbb{D}, \tag{1.1.78}$$

unde funcţia g este dată prin relaţia $g(w) = f^{-1}(w) = w - a_2w^2 + (2a_2^2 - a_3)w^3 - (5a_2^3 - 5a_2a_3 + a_4)w^4 + ...$

Remarca 4.4.2[37] Când $p = 1$ şi $q \to 1^-$, se obţine clasa H_{Σ}^{α} introdusă în lucrarea [148].

În următoarea teoremă determinăm limite pentru coeficienţii funcţiilor din clasa $H_{\Sigma}^{p,q,\alpha}$.

Teorema 4.4.3[37] Fie funcţia $f \in \mathcal{A}$ dată prin $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ din clasa $H_{\Sigma}^{p,q,\alpha}(0 < q < p \leq 1, 0 < \alpha \leq 1)$. Atunci

$$|a_2| \leq \frac{2\alpha}{\sqrt{2[3]_{p,q}\alpha + (1-\alpha)[2]_{p,q}^2}} \tag{1.1.79}$$

şi

$$|a_3| \leq \frac{4\alpha^2}{[2]_{p,q}^2} + \frac{2\alpha}{[3]_{p,q}}. \tag{1.1.80}$$

Definiţia 4.4.4[37] O funcţie $f \in \mathcal{A}$ dată prin $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ se spune că este în clasa $H_{\Sigma}^{p,q,\beta}(0 < q < p \leq 1, 0 \leq \beta < 1)$ dacă următoarele condiţii sunt satisfăcute:

$$\begin{cases} f \in \Sigma \\ \mathrm{Re}\{D_{p,q} f(z)\} > \beta, z \in \mathbb{D} \end{cases} \tag{1.1.81}$$

$$\mathrm{Re}\{D_{p,q} g(w)\} > \beta, w \in \mathbb{D}, \tag{1.1.82}$$

unde funcţia g este dată prin $g(w) = f^{-1}(w) = w - a_2 w^2 + (2a_2^2 - a_3)w^3 - (5a_2^3 - 5a_2 a_3 + a_4)w^4 + ...$

Remarca 4.4.5[37] Când $p = 1$ şi $q \to 1^-$ obţinem clasa $H_{\Sigma}(\beta)$ introdusă în [148].

În teorema următoare determinăm limite pentru coeficienţii funcţiilor aparţinând clasei $H_{\Sigma}^{p,q,\beta}$.

Teorema 4.4.6[37] Fie funcţia $f \in \mathcal{A}$ dată prin $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ din clasa $H_{\Sigma}^{p,q,\beta}(0 < q < p \leq 1)$. Atunci

$$|a_2| \leq min\{\frac{2(1-\beta)}{[2]_{p,q}}, \sqrt{\frac{2(1-\beta)}{[3]_{p,q}}}\} \tag{1.1.83}$$

$$|a_3| \leq \frac{2(1-\beta)}{[3]_{p,q}}. \tag{1.1.84}$$

Definiţia 4.4.7[37] Fie $b, t : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ funcţii analitice şi

$$min\{\mathrm{Re}(b(z)), \mathrm{Re}(t(z))\} > 0, z \in \mathbb{D},$$

$$b(0) = t(0) = 1.$$

Spunem că $f \in \mathcal{A}$ dată prin relaţia $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ este în clasa $H_{\Sigma}^{p,q,b,t}$ dacă următoarele condiţii sunt satisfăcute:

$$D_{p,q} f(z) \in b(\mathbb{D}) \tag{1.1.85}$$

şi

$$D_{p,q}g(w) \in t(\mathbb{D}), \tag{1.1.86}$$

unde $z, w \in \mathbb{D}$ şi funcţia g este dată prin relaţia $g(w) = f^{-1}(w) = w - a_2w^2 + (2a_2^2 - a_3)w^3 - (5a_2^3 - 5a_2a_3 + a_4)w^4 + ...$

În teorema care urmează, determinăm limite pentru coeficienţii funcţiilor din această clasă $H_{\Sigma}^{p,q,b,t}$.

Teorema 4.4.8[37] Fie $f \in \mathcal{A}$ dată prin relaţia $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ din clasa $H_{\Sigma}^{p,q,b,t}$. Atunci

$$|a_2| \leq min\{\sqrt{\frac{|b'(0)|^2 + |t'(0)|^2}{2[2]_{p,q}^2}}, \sqrt{\frac{|b''(0)| + |t''(0)|}{2[3]_{p,q}}}\} \tag{1.1.87}$$

şi

$$|a_3| \leq min\{\frac{|b'(0)|^2 + |t'(0)|^2}{2[2]_{p,q}^2} + \frac{|b''(0)| + |t''(0)|}{4[3]_{p,q}}, \frac{|b''(0)|}{2[3]_{p,q}}\}. \tag{1.1.88}$$

În următoarea teoremă vom determina funcţionala Fekete-Szegö pentru funcţiile din clasa $H_{\Sigma}^{p,q,\alpha}$.

Teorema 4.4.9[37] Fie $f \in \mathcal{A}$ de forma $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ din clasa $H_{\Sigma}^{p,q,\alpha}$. Atunci

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \begin{cases} \frac{\alpha}{[3]_{p,q}}, |r(\mu)| \leq \frac{1}{2[3]_{p,q}} \\ \\ 2\alpha|r(\mu)|, |r(\mu)| \geq \frac{1}{2[3]_{p,q}}. \end{cases} \tag{1.1.89}$$

În următoarea teoremă vom determina funcţionala Fekete-Szegö pentru funcţiile din clasa $H_{\Sigma}^{p,q,\beta}$.

Teorema 4.4.10[37] Fie $f \in \mathcal{A}$ de forma $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ din clasa $H_{\Sigma}^{p,q,\beta}$. Atunci

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \begin{cases} \frac{1-\beta}{[3]_{p,q}}, |r(\mu)| \leq \frac{1}{2[3]_{p,q}} \\ \\ 2(1-\beta)|r(\mu)|, |r(\mu)| \geq \frac{1}{2[3]_{p,q}} \end{cases}. \tag{1.1.90}$$

Ca direcţie nouă de cercetare, folosind acelaşi operator diferenţial, putem studia proprietăţi de stelaritate, convexitate şi aproape convexitate pentru clase de funcţii deja introduse.

În cea de-a doua parte a acestui subcapitol am introdus şi studiat subclase de funcţii bi-univalente în discul unitate deschis $\mathbb{D}$, definite printr-un operator diferenţial, asociate cu polinoamele Horadam.

Pentru funcţiile aparţinând claselor recent stabilite obţinem estimări pentru primii doi coeficienți. De asemenea, este furnizată o estimare a problemei Fekete-Szegö pentru funcţiile din aceste clase. Totodată, oferim câteva observaţii şi stabilim conexiuni relevante cu cercetările anterioare. Pe baza aceluiaşi concept şi al lucrării

H.M. Srivastava, *Some formulas for the Bernoulli and Euler polynomials at rational arguments,* Math. Proc. Camb. Philos. Soc. (2000), 129, 77–84.

în lucrarea

A. Amourah, **L.I. Cotîrlă**, D. Breaz, S.M. El-Deeb, M. Al-hobied, M. Cojocnean, *Euler Polynomials coefficient estimates for bi-univalent functions defined by subordinations,* Journal of Mathematics and Computer science(JMCS), (2025)

au fost introduse noi clase de funcţii bi-univalente definite în termeni de polinoame Euler. Rezultatele prezentate în această sectiune fac parte din lucrarea

S.R. Swamy, D. Breaz, **L.I. Cotîrlă**, K. Venugopal, *Bi-univalent Function Subclasses with (p, q)-derivative Operator linked to Horadam Polynomials,* Kragujevac J. Math., Volume 50(8), (2026), 1279-1296.

Aici sunt prezentate două definiţii, două teoreme, opt corolarii şi cinci remărci.

Definiţia 4.4.11[154] O funcţie f din Σ dată prin $f(z) = z+\sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ este din clasa $Y^{\tau,d}_{\Sigma,p,q}(\nu, k)$, $\nu \geq 1, 0 < d \leq 1$ şi $\tau \geq 1$, dacă

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{\nu[D_{p,q}(zD_{p,q}f(z))]^{\tau} + (1-\nu)}{D_{p,q}f(z)} + \left(\frac{\nu[D_{p,q}(zD_{p,q}f(z))]^{\tau} + (1-\nu)}{D_{p,q}f(z)}\right)^{\frac{1}{d}}\right\}$$

$$\prec 1 - u + \mathsf{H}(k, z),$$

şi

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{\nu[D_{p,q}(wD_{p,q}g(w))]^{\tau} + (1-\nu)}{D_{p,q}g(w)} + \left(\frac{\nu[D_{p,q}(wD_{p,q}g(w))]^{\tau} + (1-\nu)}{D_{p,q}g(w)}\right)^{\frac{1}{d}}\right\},$$

$$\prec 1 - u + \mathsf{H}(k, w).$$

În cazul unor selecţii particulare ale p, q, ν şi τ, familia $Y^{\tau,d}_{\Sigma,p,q}(\nu,k)$ cuprinde atât subfamilii noi, cât şi subfamilii existente din Σ, aşa cum putem vedea mai jos:

1. $H^{d}_{\Sigma,p,q}(\nu,k) \equiv Y^{1,d}_{\Sigma,p,q}(\nu,k), \nu \geq 1, 0 < d \leq 1$ este mulţimea funcţiilor f din Σ care satisface

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{\nu D_{p,q}(zD_{p,q}f(z))+(1-\nu)}{D_{p,q}f(z)}+\left(\frac{\nu D_{p,q}(zD_{p,q}f(z))+(1-\nu)}{D_{p,q}f(z)}\right)^{\frac{1}{d}}\right\}$$
$$\prec 1-u+\mathsf{H}(k,z),$$

şi

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{\nu D_{p,q}(wD_{p,q}g(w))+(1-\nu)}{D_{p,q}g(w)}+\left(\frac{\nu D_{p,q}(wD_{p,q}g(w))+(1-\nu)}{D_{p,q}g(w)}\right)^{\frac{1}{d}}\right\}$$
$$\prec 1-u+\mathsf{H}(k,w).$$

2. $I^{\tau,d}_{\Sigma,p,q}(k) \equiv Y^{\tau,d}_{\Sigma,p,q}(1,k), 0 < d \leq 1$ şi $\tau \geq 1$, este familia de funcţii f din Σ care verifică

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{[D_{p,q}(zD_{p,q}f(z))]^{\tau}}{D_{p,q}f(z)}+\left(\frac{[D_{p,q}(zD_{p,q}f(z))]^{\tau}}{D_{p,q}f(z)}\right)^{\frac{1}{d}}\right\} \prec 1-u+\mathsf{H}(k,z),$$

şi

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{[D_{p,q}(wD_{p,q}g(w))]^{\tau}}{D_{p,q}g(w)}+\left(\frac{[D_{p,q}(wD_{p,q}g(w))]^{\tau}}{D_{p,q}g(w)}\right)^{\frac{1}{d}}\right\} \prec 1-u+\mathsf{H}(k,w).$$

3.Dacă $p=1$ şi $q \to 1^-$ în $Y^{\tau,d}_{\Sigma,p,q}(\nu,k)$, atunci obţinem o submulţime $\Upsilon^{\tau,d}_{\Sigma}(\nu,k)(\tau \geq 1, 0 < d \leq 1, \nu \geq 1)$, care este o colecţie de funcţii f din Σ care satisface

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{\nu[(zf'(z))']^{\tau}+(1-\nu)}{f'(z)}+\left(\frac{\nu[(z\,f'(z))']^{\tau}+(1-\nu)}{f'(z)}\right)^{\frac{1}{d}}\right\} \prec 1-u+\mathsf{H}(k,z),$$

şi

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{\nu[(wg'(w))']^{\tau}+(1-\nu)}{g'(w)}+\left(\frac{\nu[(wg'(w))']^{\tau}+(1-\nu)}{g'(w)}\right)^{\frac{1}{d}}\right\} \prec 1-u+\mathsf{H}(k,w).$$

4. $Z^{\tau}_{\Sigma,p,q}(\nu,k) \equiv Y^{\tau,1}_{\Sigma,p,q}(\nu,k), \nu \geq 1$ şi $\tau \geq 1$ este mulţimea funcţiilor f din Σ care satisfac

$$\left\{\frac{\nu[D_{p,q}(zD_{p,q}f(z))]^{\tau}+(1-\nu)}{D_{p,q}f(z)}\right\} \prec 1-u+\mathsf{H}(k,z),$$

şi
$$\left\{\frac{\nu[D_{p,q}(wD_{p,q}g(w))]^{\tau}+(1-\nu)}{D_{p,q}g(w)}\right\}\prec 1-u+\mathsf{H}(k,w).$$

Remarca 4.4.12[154] Avem

i. $H^{d}_{\Sigma,p,q}(1,k)\equiv I^{1,d}_{\Sigma,p,q}(k)$, ii. $H^{1}_{\Sigma,p,q}(\nu,k)\equiv Z^{1}_{\Sigma,p,q}(\nu,k)$ şi iii. $Z^{\tau}_{\Sigma,p,q}(1,k)\equiv I^{\tau,1}_{\Sigma,p,q}(k)$.

Definiţia 4.4.13[154] O funcţie f din Σ de forma $f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}a_kz^k$ este din clasa $T^{\tau,d}_{\Sigma,p,q}(\gamma,k)$, $0\leq\gamma\leq 1, 0<d\leq 1$ ş*i* $\tau\geq 1$, dacă

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{z(D_{p,q}f(z))^{\tau}}{\gamma f(z)+(1-\gamma)z}+\left(\frac{z(D_{p,q}f(z))^{\tau}}{\gamma f(z)+(1-\gamma)z}\right)^{\frac{1}{d}}\right\}\prec 1-u+\mathsf{H}(k,z),$$

şi
$$\frac{1}{2}\left\{\frac{w(D_{p,q}g(w))^{\tau}}{\gamma g(w)+(1-\gamma)w}+\left(\frac{w(D_{p,q}g(w))^{\tau}}{\gamma g(w)+(1-\gamma)w}\right)^{\frac{1}{d}}\right\}\prec 1-u+\mathsf{H}(k,w).$$

Pentru valori particulare ale lui γ, τ şi d, familia $T^{\tau,d}_{\Sigma,p,q}(\gamma,k)$ include atât subfamilii noi, cât şi subfamilii preexistente de funcţii din Σ, după cum putem vedea:

1. $C^{\tau,d}_{\Sigma,p,q}(k)\equiv T^{\tau,d}_{\Sigma,p,q}(0,k), 0<d\leq 1$ ş*i* $\tau\geq 1$, este mulţimea funcţiilor f din Σ care satisfac
$$\frac{1}{2}\left((D_{p,q}f(z))^{\tau}+(D_{p,q}f(z))^{\frac{\tau}{d}}\right)\prec 1-u+\mathsf{H}(k,z),$$

şi
$$\frac{1}{2}\left((D_{p,q}g(w))^{\tau}+D_{p,q}g(w)^{\frac{\tau}{d}}\right)\prec 1-u+\mathsf{H}(k,w).$$

2. $D^{\tau,d}_{\Sigma,p,q}(x)\equiv T^{\tau,d}_{\Sigma,p,q}(1,k), 0<d\leq 1$ ş*i* $\tau\geq 1$, este familia de funcţii f din Σ care satisfac
$$\frac{1}{2}\left\{\frac{z(D_{p,q}f(z))^{\tau}}{f(z)}+\left(\frac{z(D_{p,q}f(z))^{\tau}}{f(z)}\right)^{\frac{1}{d}}\right\}\prec 1-u+\mathsf{H}(k,z),$$

şi
$$\frac{1}{2}\left\{\frac{w(D_{p,q}g(w))^{\tau}}{g(w)}+\left(\frac{w(D_{p,q}g(w))^{\tau}}{g(w)}\right)^{\frac{1}{d}}\right\}\prec 1-u+\mathsf{H}(k,w).$$

3. Dacă $p=1$ şi $q\to 1^{-}$ în clasa $T^{\tau,d}_{\Sigma,p,q}(\nu,k)$, atunci avem submulţimea $\Gamma^{\tau,d}_{\Sigma}(\nu,k)(\tau\geq 1, 0<d\leq 1, 0\leq\gamma\leq 1)$ a lui $f\in\Sigma$ care satisface

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{z(f'(z))^{\tau}}{\gamma f(z)+(1-\gamma)z}+\left(\frac{z(f'(z))^{\tau}}{\gamma f(z)+(1-\gamma)z}\right)^{\frac{1}{d}}\right\}\prec 1-u+\mathsf{H}(k,z),$$

şi

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{w(g'(w))^{\tau}}{\gamma g(w)+(1-\gamma)w}+\left(\frac{w(g'(w))^{\tau}}{\gamma g(w)+(1-\gamma)w}\right)^{\frac{1}{d}}\right\}\prec 1-u+\mathsf{H}(k,w).$$

4. $O^{\tau}_{\Sigma,p,q}(\gamma,k)\equiv T^{\tau,1}_{\Sigma,p,q}(\gamma,k), 0\leq\gamma\leq 1$ şi $\tau\geq 1$, este grupul de funcţii $f\in\Sigma$ care satisfac

$$\frac{z(D_{p,q}f(z))^{\tau}}{\gamma f(z)+(1-\gamma)z}\prec 1-u+\mathsf{H}(k,z),$$

şi

$$\frac{w(D_{p,q}g(w))^{\tau}}{\gamma g(w)+(1-\gamma)w}\prec 1-u+\mathsf{H}(k,w).$$

Remarca 4.4.14[154]Avem:

$i.$ $D^{\tau,1}_{\Sigma,p,q}(x)\equiv O^{\tau}_{\Sigma,p,q}(1,k)$ şi ii. $\Gamma^{\tau,1}_{\Sigma}(\nu,k)\equiv O^{\tau}_{\Sigma,p=1,q\to 1^-}(\gamma,k)$.

Vom găsi estimări ale lui $|a_2|$, $|a_3|$ şi $|a_3-\mu a_2^2|, \mu\in\mathbb{R}$ pentru funcţiile $\in Y^{\tau,d}_{\Sigma,p,q}(\nu,k)$ şi estimări ale $|a_2|$, $|a_3|$ şi $|a_3-\mu a_2^2|, \mu\in\mathbb{R}$ pentru funcţiile din $T^{\tau,\delta}_{\Sigma,p,q}(\gamma,k)$.

Rezultate pentru clasa $Y^{\tau,d}_{\Sigma,p,q}(\nu,k)$

Mai întâi vom determina estimări ale coeficienţilor pentru o anumită funcţie $f\in\mathfrak{Y}^{\tau,d}_{\Sigma,p,q}(\nu,k)$, unde această clasă este introdusă în Definiţia 4.4.11.

Teorema 4.4.15[154] Fie $0<d\leq 1$, $\nu\geq 1$ şi $\tau\geq 1$. Dacă $f\in Y^{\tau,d}_{\Sigma,p,q}(\nu,k)$, atunci

$$|a_2|\leq\frac{2d|vk|\sqrt{|vk|}}{\sqrt{|(2d(d+1)X+(1-d)W^2[2]^2_{p,q})(vk)^2-(d+1)^2W^2[2]^2_{p,q}Z|}},\tag{1.1.91}$$

$$|a_3|\leq\frac{4d^2(vk)^2}{(d+1)^2W^2[2]^2_{p,q}}+\frac{2d|vk|}{(d+1)U[3]_{p,q}}\tag{1.1.92}$$

şi pentru $\mu\in\mathbb{R}$

$$|a_3-\mu a_2^2|\leq\begin{cases}\frac{2d|vk|}{(d+1)U[3]_{p,q}}, & |1-\mu|\leq J\\ \frac{4d^2|vk|^3\,|1-\mu|}{|(2d(d+1)X+(1-d)^2W^2[2]^2_{p,q})(vk)^2-(d+1)^2W^2[2]^2_{p,q}Z|}, & |1-\mu|\geq J,\end{cases}\tag{1.1.93}$$

unde

$$J=\left|\frac{(2d(d+1)X+(1-d)W^2[2]^2_{p,q})v^2k^2-(d+1)^2W^2[2]^2Z}{2d(1+d)U[3]_{p,q}v^2k^2}\right|,\tag{1.1.94}$$

$$X=U[3]_{p,q}+V[2]^2_{p,q},\tag{1.1.95}$$

(1.1.96) $$U = \nu\tau[3]_{p,q} - 1,$$

(1.1.97) $$V = 1 - \nu\tau[2]_{p,q} + \frac{\nu\tau(\tau-1)[2]_{p,q}^2}{2},$$

(1.1.98) $$W = \nu\tau[2]_{p,q} - 1,$$

şi Z dat prin relaţia $\mathcal{H}_3(k) = rvk^2 + su = Z$ din Capitolul 1.

Corolarul 4.4.16[154] Presupunem că $\tau = 1$ în Teorema 4.4.15. Atunci pentru orice funcţie $f \in H^d_{\Sigma,p,q}(\nu, k)$ limitele superioare ale $|a_2|$, $|a_3|$ şi $|a_3 - \mu a_2^2|$, $\mu \in \mathbb{R}$, sunt date prin $(1.1.91), (1.1.92)$ şi $(1.1.93)$, respectiv $U = U_1 = \nu[3]_{p,q} - 1$, $V = V_1 = 1 - \nu[2]_{p,q}$, $W = W_1 = -V_1$ şi $X = X_1 = U_1[3]_{p,q} + V_1[2]_{p,q}^2$.

Corolarul 4.4.17[154] Să presupunem că $\nu = 1$ în Teorema 4.4.15. Atunci pentru $f \in I^{\tau,d}_{\Sigma,p,q}(k)$ marginile superioare ale $|a_2|$, $|a_3|$ şi $|a_3 - \mu a_2^2|$, $\mu \in \mathbb{R}$, sunt date prin $(1.1.91), (1.1.92)$ şi $(1.1.93)$, cu $U = U_2 = \tau[3]_{p,q} - 1$, $V = V_2 = 1 - \tau[2]_{p,q} + \frac{\tau(\tau-1)[2]_{p,q}^2}{2}$, $W = W_2 = \tau[2]_{p,q} - 1$ $şi$ $X = X_2 = U_2[3]_{p,q} + V_2[2]_{p,q}^2$. Pentru J din $(1.1.94)$, U_2, V_2, W_2 şi X_2 pot fi folosite în locul lui U,V, W şi X şi Z dat prin relaţia $\mathcal{H}_3(k) = rvk^2 + su = Z$ din Capitolul 1.

Luând $p = 1$ şi $q \to 1^-$ în Theorem 4.4.15, obţinem următorul corolar.

Corolarul 4.4.18[154] Fie $0 < d \le 1$, $\tau \ge 1$ şi $\nu \ge 1$. Dacă $f \in \Upsilon^{\tau,d}_{\Sigma}(\nu, k)$ atunci

$$|a_2| \le \frac{d|vk|\sqrt{2|vk|}}{\sqrt{|(d(d+1)Y + 2(1-d)(2\nu\tau-1)^2)(vk)^2 - 2(d+1)^2(2\nu\tau-1)^2 Z|}},$$

$$|a_3| \le \left(\frac{dvk}{(d+1)(2\nu\tau-1)}\right)^2 + \frac{2d|vk|}{3(d+1)(3\nu\tau-1)}$$

şi pentru $\mu \in \mathbb{R}$

$$|a_3 - \mu a_2^2| \le \begin{cases} \frac{2d|vk|}{3(d+1)(3\nu\tau-1)}, & |1-\mu| \le J_1 \\ \frac{2d^2|vk|^3\,|1-\mu|}{|(d(d+1)Y+2(1-d)(2\nu\tau-1)^2)(vk)^2 - 2(d+1)^2(2\nu\tau-1)^2 Z|}, & |1-\mu| \ge J_1, \end{cases}$$

unde

$$J_1 = \left|\frac{(d(d+1)Y + 2(1-d)(2\nu\tau-1)^2)(vk)^2 - 2(d+1)^2(2\nu\tau-1)^2 Z}{d(d+1)(8\nu\tau^2 - 7\nu\tau + 1)v^2k^2}\right|,$$

$Y = 8\nu\tau^2 - 7\nu\tau + 1$ şi Z dat prin relaţia $\mathcal{H}_3(k) = rvk^2 + su = Z$ din Capitolul 1.

Remarca 4.4.19[154] i). În Corolarul 4.4.18, $d = 1$ determină Teorema 2.2 din lucrarea [155]. Mai mult, obţinem Corolarul 2.3 şi Corolarul 2.4 din lucrarea [155], pentru $\tau = 1$ şi $\nu = 1$. ii). Folosind $\delta = \tau = \nu = 1$ în Corolarul 4.4.18 obţinem Corolarul 1 din [112].

Luând $d = 1$ în teorema de mai sus, obţinem următorul corolar.

Corolarul 4.4.20[154] Dacă $f \in Z^{\tau}_{\Sigma,p,q}(\nu,k)$ $\nu \geq 1$ şi $\tau \geq 1$, atunci

$$|a_2| \leq \frac{|vk|\sqrt{|vk|}}{\sqrt{|X(vk)^2 - W^2[2]^2_{p,q}Z|}}, \quad |a_3| \leq \frac{(vk)^2}{W^2[2]^2_{p,q}} + \frac{|vk|}{U[3]_{p,q}},$$

şi pentru $\mu \in \mathbb{R}$

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \begin{cases} \frac{|vk|}{U[3]_{p,q}}, & |1-\mu| \leq \left|\dfrac{Xv^2k^2 - W^2[2]^2Z}{U[3]_{p,q}v^2k^2}\right| \\ \frac{|vk|^3\,|1-\mu|}{|X(vk)^2 - W^2[2]^2_{p,q}Z|}, & |1-\mu| \geq \left|\dfrac{Xv^2k^2 - W^2[2]^2Z}{U[3]_{p,q}v^2k^2}\right|, \end{cases}$$

unde X, U, V şi W sunt definite în $(1.1.95), (1.1.96), (1.1.97)$ şi $(1.1.98)$.

Remarca 4.4.21[154] În Corolarul 4.4.20, $q \to 1^-$ şi $p = 1$ determină Teorema 2.2 din lucrarea [155]. Mai mult, obţinem Corolarul 2.3 şi Corolarul 2.4 din lucrarea [155], pentru $\tau = 1$ şi $\nu = 1$. ii. Folosind $\nu = \tau = 1, q \to 1^-$ şi $p = 1$ în Corolarul 4.4.20 obţinem Corolarul 1 din lucrarea [112].

Rezultate pentru $T^{\tau,d}_{\Sigma,p,q}(\gamma,k)$

Pentru început, determinăm estimările coeficienţilor pentru o funcţie $f \in T^{\tau,d}_{\Sigma,p,q}(\gamma,k)$, clasă definită în Definiţia 4.4.3.

Teorema 4.4.22[154] Fie $0 < d \leq 1, \tau \geq 1$ şi $0 \leq \nu \leq 1$. Dacă $f \in T^{\tau,d}_{\Sigma,p,q}(\gamma,k)$, atunci

$$|a_2| \leq \frac{2d|vk|\sqrt{|vk|}}{\sqrt{|(2d(d+1)(A+S) + (1-d)B^2)(vk)^2 - (d+1)^2B^2Z|}}, \tag{1.1.99}$$

$$|a_3| \leq \frac{4d^2(vk)^2}{(d+1)^2B^2} + \frac{2d|vk|}{(d+1)A} \tag{1.1.100}$$

şi pentru $\mu \in \mathbb{R}$

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \begin{cases} \frac{2d|vk|}{(d+1)A}, & |1-\mu| \leq Q \\ \frac{4d^2|vk|^3\,|1-\mu|}{|(2d(d+1)(A+S)+(1-d)B^2)(vk)^2-(d+1)^2B^2Z|}, & |1-\mu| \geq Q, \end{cases} \tag{1.1.101}$$

unde

$$Q = \left| \frac{[2d(d+1)(A+S)+(1-d)B^2]v^2k^2-(d+1)^2B^2Z}{2d(1+d)Av^2k^2} \right|, \tag{1.1.102}$$

$$A = \tau[3]_{p,q} - \gamma, \tag{1.1.103}$$

$$S = \frac{\tau(\tau-1)[2]_{p,q}^2}{2} - \gamma\tau[2]_{p,q} + \gamma^2, \tag{1.1.104}$$

$$B = \tau[2]_{p,q} - \gamma, \tag{1.1.105}$$

iar Z definit prin relaţia $\mathcal{H}_3(k) = rvk^2 + su = Z$ din Capitolul 1.

Corolarul 4.4.23[154] Fie $\gamma = 0$ în teorema de mai sus. Atunci marginile superioare pentru $|a_2|$, $|a_3|$ şi $|a_3 - \mu a_2^2|$, $\mu \in \mathbb{R}$, pentru orice funcţie $f \in H_{\Sigma,p,q}^d(k)$ sunt date prin (1.1.99), (1.1.100) şi (1.1.101), unde $A = A_1 = \tau[3]_{p,q}$, $S = S_1 = \frac{\tau(\tau-1)[2]_{p,q}^2}{2}$ şi $B = B_1 = \tau[2]_{p,q}$. A_1, S_1 şi B_1 pot fi folosite în locul lui A, S şi B, pentru Q dat în (1.1.102) şi Z dat prin relaţia $\mathcal{H}_3(k) = rvk^2 + su = Z$ din Capitolul 1.

Corolarul 4.4.24[154] Fie $\gamma = 1$ în teorema de mai sus. Atunci marginile superioare ale lui $|a_2|$, $|a_3|$, şi $|a_3 - \mu a_2^2|$, $\mu \in \mathbb{R}$, pentru orice funcţie $f \in I_{\Sigma,p,q}^{\tau,d}(k)$ dată prin (1.1.99), (1.1.100) şi (1.1.101), cu $A = A_2 = \tau[3]_{p,q} - 1$, $S = S_2 = 1 + \frac{\tau(\tau-1)[2]_{p,q}^2}{2} - \tau[2]_{p,q}$ şi $B = B_2 = \tau[2]_{p,q} - 1$. A_2, S_2 şi B_2 pot fi folosite în locul lui A, S şi B, pentru Q dat în (1.1.102) iar Z dat prin relaţia $\mathcal{H}_3(k) = rvk^2 + su = Z$ din Capitolul 1. Luând $p = 1$ şi $q \to 1^-$ din Teorema 4.4.22, obţinem

Corolarul 4.4.25[154] Fie $0 < d \leq 1$, $\tau \geq 1$ şi $0 \leq \gamma \leq 1$. Dacă $f \in \Gamma_\Sigma^{\tau,d}(\gamma, k)$, atunci

$$|a_2| \leq \frac{2d|vk|\sqrt{2|vk|}}{\sqrt{|2d(d+1)F(vk)^2 - (d+1)^2(2\tau-\gamma)^2 Z|}},$$

$$|a_3| \leq \left(\frac{2dvk}{(d+1)(2\tau-\gamma)}\right)^2 + \frac{2d|vk|}{(d+1)(3\tau-\gamma)},$$

şi pentru $\mu \in \mathbb{R}$

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \begin{cases} \frac{2d|vk|}{(d+1)(3\tau-\gamma)}, & |1-\mu| \leq Q_1 \\ \frac{2d^2|vk|^3\,|1-\mu|}{|2d(d+1)F(vk)^2-(d+1)^2(2\tau-\gamma)^2Z|}, & |1-\mu| \geq Q_1, \end{cases}$$

unde

$$Q_1 = \left| \frac{2d(d+1)F(vk)^2 - (d+1)^2(2\tau-\gamma)^2 Z}{d(d+1)(3\tau-\gamma)v^2k^2} \right|,$$
$$F = (2\tau+1)(\tau-\gamma) + \gamma^2 + (1-d)(2\tau-\gamma)^2,$$

iar Z dat prin $\mathcal{H}_3(k) = rvk^2 + su = Z$ din Capitolul 1.

Remarca 4.4.26[154] i). În Corolarul 4.4.25, $\gamma = 1$ şi $\tau = 1$ obţinem Teorema 2 din Srivastava et al. [145]. ii). Din corolarul 4.4.25, unde $d = 1$, obţinem Corolarul 3.3 din [152]. Mai mult, Teorema 2.1 din [2] este obţinută când $\gamma = 1$. iii). În Corolarul 4.4.25, $d = 1, \tau = 1$ şi $\gamma = 0$ obţinem Corolarul 2 din Horan et al. [112].

Corolarul 4.4.27[154] Dacă $f \in O^{\tau}_{\Sigma,p,q}(\gamma, k)$ $0 \leq \gamma \leq 1, \quad \tau \geq 1$, atunci

$$|a_2| \leq \frac{|vk|\sqrt{|vk|}}{\sqrt{|(A+S)(vk)^2 - B^2 Z|}}, \qquad |a_3| \leq \frac{(vk)^2}{B^2} + \frac{|vk|}{A},$$

şi pentru $\mu \in \mathbb{R}$

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \begin{cases} \frac{|vk|}{A}, & |1-\mu| \leq \left| \frac{(A+S)v^2k^2 - B^2 Z}{Av^2k^2} \right| \\ \frac{|vk|^3\,|1-\mu|}{|(A+S)(vk)^2 - B^2 Z|}, & |1-\mu| \geq \left| \frac{(A+S)v^2k^2 - B^2 Z}{Av^2k^2} \right|, \end{cases}$$

unde A, S şi B sunt date în (1.1.103), (1.1.104) şi (1.1.105), şi Z este dat prin relaţia $\mathcal{H}_3(k) = rvk^2 + su = Z$ din Capitolul 1.

Remarca 4.4.28[154] i). Din Corolarul 4.4.27, luând $p = 1$ şi $q \to 1^-$, obţinem Corolarul 4.4.25, care este demonstrat în [152]. Mai mult, Teorema 2.1 din [2] este obţinută când $\gamma = 1$. ii) Obţinem Corolarul 2 din Horan et al. [112], dacă luăm $p = 1$ $q \to 1^-$, $\gamma = 0$ şi $\tau = 1$ în Corolarul 4.4.27.

Rezultatele originale prezentate în această teză sunt actuale şi constituie subiectul unor articole ştiinţifice publicate sau acceptate în reviste de prestigiu, dintre care menţionez: Results in Mathematics, Journal of Mathematics and Computer Science, Journal of Inequalities and Applications, AIMS Mathematics, Computational Methods and Function Theory, Filomat, Studia Universitatis Babeș-Bolyai Mathematica, Journal of Mathematical Inequalities, Heliyon, Ukrainian Mathematical Journal, Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées, Kragujevac Journal of Mathematics, Boundary Value Problems, Rendiconti

del Circolo Matematico di Palermo, Mathematische Zeitschrift şi Demonstratio Mathematica.
În dezvoltarea acestor articole am colaborat cu matematicieni din România şi din străinătate, după cum se poate observa şi în bibliografie.

Rezultatele obţinute au fost citate de autori atât din ţară, cât şi din străinătate.

Intenţionez să continui colaborările cu matematicieni de renume din ţară şi din străinătate, în vederea dezvoltării şi extinderii ulterioare a rezultatelor obţinute.

References

[1] M. Abbasi, A. Morassaei, F. Mirzapour, *Jensen-Mercer Type Inequalities for Operator $h-$Convex Functions,* Bull. Iranian Math. Soc., 48, (2022), 2441–2462.

[2] C. Abirami, N. Magesh, J. Yamini, N.B. Gatti, *Horadam polynomial coefficient estimates for the classes of $\lambda-$bi-peeudo-starlike and bi-Bazilevic functions*, J. Anal. 28 (2020), 951–960;

[3] M. Abramowitz, I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover Books on Mathematics, 0009-Revised Edition;

[4] E.A. Adegani, T. Bulboacă, A. Motamednezhad, *Sufficient Condition for p-Valent Strongly Starlike Functions*, Contemp. Math., 55(2020), 213–223;

[5] D. Aharonov, S. Friedland, *On an inequality connected with the coefficient conjecture for functions of bounded boundary rotation,* Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I 524, 14, (1972);

[6] N.I. Ahiezer, *Elements of theory of elliptic functions*, Moscow, in Russian, (1970);

[7] I. Aktas, **L.I. Cotîrlă,** *Certain Geometrical Properties and Hardy Space of Generalized k-Bessel Functions,* Symmetry-Basel, 16 (12), (2024);

[8] M.A. Ali, T. Hussain, M.Z. Iqbal, F. Ejaz, *Inequalities of Hermite-Hadamard-Mercer type for convex functions via $k-$fracttional integrals,* Inter. Jour. Math. Mod. Comp., 10 (03), (2020), 227-238;

[9] M.A. Ali, T. Sitthiwirattham, E. Köbis, A. Hanif, *Hermite-Hadamard-Mercer Inequalities Associated with Twice-Differentiable Functions with Applications,* Axioms, 13, 114, (2024);

[10] M.W. Alomari, M. Darus, U.S. Kirmaci, *Some inequalities of Hermite-Hadamard type for $s-$convex functions,* Acta Mathematica Scientia, 31(4), (2011), 1643-1652;

[11] Ş. Altinkaya, S. Yalçin, *On some subclasses of m-fold symmetric bi-univalent functions,* Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat, (2018), 67 (1), 29-36;

[12] O. Altıntaş, S. Owa, *On subclasses of univalent functions with negative coefficients,* Pusan Kyongnam Math. J. 4 (1988), no.4, 41-46;

[13] A. Amourah, **L.I. Cotîrlă**, D. Breaz, S.M. El-Deeb, M. Al-hobied, M. Cojocnean, *Euler Polynomials coefficient estimates for bi-univalent functions defined by subordinations,* Journal of Mathematics and Computer science(JMCS), (2025);

[14] M.K. Aouf, N.E. Cho, *On a certain subclass of analytic functions with negative coefficients,* Turk. J. Math., 22, (1998), 15-32;

[15] G.D. Anderson, M.K. Vamanamurthy, M.K. Vourinen, *Conformal invariants, inequalities and quasiconformal maps*, Wiley-Interscience, (1997);

[16] K.O. Babalola, *On $\lambda-$pseudo-starlike function,* J. Classical Anal, (2013), 3, 137-147;

[17] Á. Baricz, S. András, *Monotony property of generalized and normalized Bessel functions of complex order*, Complex Var. Elliptic Equ. Vol. 54, No. 7, (2009), 689-696;

[18] Á. Baricz, A.P. Kupán, R. Szász, *The radius of starlikeness of normalized Bessel functions of the first kind*, Proc. of the AMS, (2014), 142/5, 2019–2025;

[19] Á. Baricz,; A. Szakál, R. Szász, N. Yagmur, *Radii of starlikeness and convexity of a product and cross-product of Bessel functions*, Results Math., (2018), 73/62. https://doi.org/10.1007/s00025-018-0823-8;

[20] R.W. Barnard, *Brannan's coefficient conjecture for certain power series. Open problems and conjectures in complex analysis,* Computational Methods and Function Theory (1989), 1-26 and Lecture notes in Math. 1435, Springer, Berlin, (1990);

[21] R.W. Barnard, U.C. Jayatilake, A.Y. Solynin, *Brannan's conjecture and trigonometric sums,* Proc. Amer. Math. Soc., 143, 5, (2015), 2117-2128;

[22] R.W.Barnard, K.C. Richards, *A direct proof of Brannan's conjecture for* $\beta = 1$, J. Math. Anal. Appl. 493, (2) (2021) 124534;

[23] B. Bojanov, Q. Rahman, J. Szynal, *On a conjecture of Sendov about the critical points of a polynomial.* Math. Z. 190, (1985), 281–285;

[24] I. Borcea, *On the Sendov conjecture for polynomials with at most six distinct roots,* J. Math. Anal. Appl. 200, (1996), 182–206;

[25] D.A. Brannan, *On coefficient problems for certain power series,* Proceedings of the Symposium on Complex Analysis (Univ. Kent, Canterbury, 1973), Cambridge Univ. Press, London, (1974), 17-27;

[26] D. Breaz, **L.I. Cotîrlă**, *The study of coefficient estimates and Fekete-Szego inequalities for the new classes of m-fold symmetric bi-univalent functions defined using an operator,* J. Inequal. Appl., 15, (2023);

[27] D. Breaz, A. Cătaş, **L.I. Cotîrlă**, *On the upper bound of the third Hankel determinant for certain class of analytic functions related with exponential function,* An. Ştiinţ. Univ. "Ovidius" Constanta Ser. Mat., Vol.30(1), (2022), 75-89;

[28] D. Breaz, G. Murugusundaramoorthy, **L.I. Cotîrlă**, *Geometric Properties for a New Class of Analytic Functions Defined by a Certain Operator*, Symmetry-Basel, 14 (12),(2022);

[29] P.S. Bullen, *Error estimates for some elementary quadrature rules,* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz., (1978), 602–633;

[30] S. Bulut, O. Engel, *The radius of starlikeness, Convexity and uniform convexity of the Legendre polynomials of odd degree*, Results Math., Vol. 74, No. 48, (2019), https://doi.org/10.1007/s00025-019-0975-1;

[31] S.I. Butt, P. Agarwal, J.J. Nieto, *New Hadamard-Mercer Inequalities Pertaining Atangana–Baleanu Operator in Katugampola Sense with Applications,* Mediterr. J. Math, 21(1), 9 (2024);

[32] S.I. Butt, M. Nadeem, S. Qaisar, V. Akdemir, T. Abdeljawad, *Hermite-Jensen-Mercer type inequalities for conformable integrals and related results,* Adv. Differential Equations, (2020), 1–24;

[33] S.I. Butt, J. Nasir, S. Qaisar, K.M. Abualnaja, $k-$*Fractional variants of Hermite-Mercer-type inequalities via* $s-$*convexity with applications,* J. Funct. Spaces, (2021), 1–15;

[34] S.I. Butt, J. Nasir, M. Dokuyucu, A. Akdemir, E. Set, *Some Ostrowski-Mercer type inequalities for differentiable convex functions via fractional integral operators with strong kernels,* Appl. Comput. Math., 21(3) (2022);

[35] B.C. Carlson, D.B. Shaffer, *Starlike and prestarlike hypergeometric functions,* SIAM J. Math. Anal, 15 (1984), no. 4, 737–745;

[36] R.B. Corcino, *On* p, q*-binomial coefficients,* Integers, 8 (2008), A29;

[37] **L.I. Cotîrlă**, *New classes of analytic and bi-univalent functions*, AIMS Math., 6(10), (2021), 10642-10651;

[38] **L.I. Cotîrlă,** *New results regarding Sendov's conjecture*, submitted in Result Math., (in reviewer), (2025);

[39] **L.I. Cotîrlă,** *Starlikeness of the Bernardi integral operator*, submitted in Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, (in reviewer), (2025);

[40] **L.I. Cotîrlă,** O. Engel, R. Szász, *Theorems regarding starlikeness and convexity*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math., Vol.68, No.3, (2023), 517-526;

[41] **L.I. Cotîrlă,** P.A. Kupán, R. Szász, *New results about radius of convexity and uniform convexity of Bessel fuctions*, Axioms, 11, (2022), 380, https://doi.org/10.3390/axioms11080380;

[42] **L.I. Cotîrlă,** R. Szász, *On the monotony of Bessel functions of the first kind,* Comput. Methods Funct. Theory, Vol.24, (2024), 747-752;

[43] **L.I. Cotîrlă**, R. Szász, *On Sendov's conjecture*, Filomat, Vol. 37, No.16, (2023), 5283-5286;

[44] **L.I. Cotîrlă,** R. Szász, *The monotony of the Lommel functions,* Results Math.,Vol.78, No.127, (2023);

[45] **L.I. Cotîrlă,** R. Szász, *On the general case of Brannan conjecture,* J. Math. Inequal., Vol.18, No.3, (2024), 953-969;

[46] **L.I. Cotîrlă,** R. Szász, *On Sendov's and Schmeisser's conjecture*, submitted in Mathematische Zeitschrift, (in reviewer), (2025);

[47] **L.I. Cotîrlă**, A.K. Wanas, *Coefficient-Related Studies and Fekete-Szego Type Inequalities for New Classes of Bi-Starlike and Bi-Convex Functions,* Symmetry-Basel, 14 (11), (2022);

[48] J. Dégot, *Sendov's conjecture for high degree polynomials*, Proc. Amer. Math. Soc. 142 (4), (2014), 1337–1349;

[49] E. Deniz, M. Çaglar, R. Szász, *The final step in a proof of Brannan's conjecture for* $\beta = 1,$ J. Math. Anal. Appl. 487 (2) (2020) 124001;

[50] E. Deniz, A. Kiziltepe, **L.I. Cotîrlă,** *Radii of Lemniscate starlikeness and convexity of the functions including derivatives of Bessel functions*, J. Math. Inequal., (2024), 18/3, 971-982;

[51] E. Deniz, R. Szász, *The radius of uniform convexity of Bessel functions*, J.Math. Anal. Appl., (2017), 453/1, 572–588;

[52] P. Dienes, *The Taylor Series: An Introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable.* NewYork-Dover: Mineola, NY, USA, (1957);

[53] K.K. Dixit, S.K. Pal, *On a class of univalent functions related to complex order,* Indian J. Pure Appl. Math., 26 (1995), no. 9, 889–896;

[54] S.S. Dragomir, *On the Hadamard's inequlality for convex functions on the co-ordinates in a rectangle from the plane,* Taiwanese J. Math., (2001), 775-788;

[55] S.S. Dragomir, R. Agarwal, *Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula,* Appl. Math. Lett., 11(5), (1998), 91–95.

[56] P.L. Duren, *Univalent Functions*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften; Springer-Verlag, New York, (1983);

[57] R. Ehrenborg, *The Hankel determinant of exponential polynomials,* Amer. Math. Monthly, 107, 557–560 (2000);

[58] S.M. El-Deeb, T. Bulboacă, J. Dziok, *Pascal distribution series connected with certain subclasses of univalent functions,* Kyungpook Math. J., 59(2019), 301–314;

[59] S.M. El-Deeb, **L.I. Cotîrlă**, *New Results about Fuzzy Differential Subordinations Associated with Pascal Distribution,* Symmetry-Basel, 15 (8), (2023);

[60] S. Erden, B.G. Ozdemir, Ç. Yildiz, **L.I. Cotîrlă**, D. Breaz, *New Approaches On Fractional Integral Inequalities for Functions whose Higher-Order Derivatives are Bounded*, Demonstratio Mathematica, accepted june (2025);

[61] G. Farid, F.M.O. Tawfiq, D. Breaz, **L.I. Cotîrlă**, *Inequalities for fractional Riemann-liouville integrals via monotone functions,* Fractals-complex geometry patterns and scaling in nature and society, DOI10.1142/S0218348X25401474, (2025);

[62] B.A. Frasin, *An application of Pascal distribution series on certain analytic functions associated with Stirling numbers and Sălăgean operator,* J. Funct. Spaces, (2022), Article ID 4745312, 13 pages;

[63] B.A. Frasin, *Poisson distribution series on certain analytic functions involving Stirling numbers,* Asian-Eur. J. Math., Vol. 16, No. 07, 2350120 (2023);

[64] B.A. Frasin, **L.I. Cotîrlă**, *New conditions for Pascal distribution series to be in a certain class of analytic functions,* Heliyon, 10(2024);

[65] B.A. Frasin, **L.I. Cotîrlă**, *On Miller-Ross-Type Poisson Distribution Series,* Mathematics 11 (18), (2023);

[66] B.A. Frasin, **L.I. Cotîrlă**, *Salagean Differential Operator in Connection with Stirling Numbers*, Axioms 13 (9), (2024);

[67] B.A. Frasin, Y. Sailaja, S.R. Swamy and A.K. Wanas, *Coefficients bounds for a family of bi-univalent functions defined by Horadam polynomials*, Acta et Comment. Univ. Tartu. Math., 26(1) (2022), 25–32;

[68] C.F. Gauss, *Disquisitiones generales circa seriem infinitam,* H. Morin publisher, Germany, (1809).

[69] A.W. Goodman, *On uniformly convex functions,* Ann. Polon. Math. 56 (1991), no. 1, 87–92;

[70] A.W. Goodman, *Univalent functions,* Vol. II, Mariner Publishing Co., Inc., Tampa, FL, (1983);

[71] T.H.Gronwall, *Some remarks on conformal representation*, Ann. of Math., 16(15) (1914), 72–76;

[72] P. Gurusamy, M. Caglar, S. Sivasubramanian, **L.I. Cotîrlă**, *The Fekete-Szego functional associated with the m th root transformation using conical domains,* Ukrainean Math. J., Vol.76, No.7, December, (2024);

[73] W.K. Hayman, *Research Problems in Function Theory*, Athlone Press, London, (1967);

[74] C. Hermite, *Sur deux limites d'une intégrale définie*, Mathesis, 3, (1883), 82;

[75] Y. E. Hohlov, *Operators and operations on the class of univalent functions,* Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. 197, (1978), no. 10, 83–89;

[76] A. F. Horadam, J. M. Mahon, *Pell and Pell-Lucas polynomials*, Fibonacci Quart. 23, (1985), 7–20;

[77] T. Horzum, E.G. Koçer, *On some properties of Horadam polynomials*, Int. Math. Forum, 4 (2009), 1243–1252;

[78] M.D. Hur and G.H. Oh, *On certain class of analytic functions with negative cofficients,* Pusan Kyongnam Math. J. 5 (1989), 69-80;

[79] M. El-Ityan, Q.A. Shakir, T. Al-Hawary, R. Buti, D. Breaz, **L.I. Cotîrlă**, *On the Third Hankel Determinant of a Certain Subclass of Bi-Univalent Functions Defined by (p,q)-Derivative Operator*, Mathematics, 13 (8), (2025);

[80] U.C. Jayatilake, *Brannan's conjecture for initial coefficients,* Complex Var. Elliptic Equ. 58 (2013), no. 5, 685-694;

[81] J.L.W.V. Jensen, *On convex functions and inequalities between mean values,* Nyt Tidsskrift for Matematik,16, (1905),49—69;

[82] J.L.W.V. Jensen, *Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes,* Acta Math., 30, (1906);

[83] S. Kanas, *Coefficient estimates in subclasses of the Caratheodory class related to conic domains*, Acta. Math. Comenianae LXXIV (2005), 149–161;

[84] S. Kanas, H.M. Srivastava, *Linear operators associated with k-uniformly convex functions,* Integral Transforms Spec. Funct. 9 (2000), no. 2, 121–132;

[85] S. Kanas, A. Wiśniowska-Wajnryb, *Conic regions and k-uniform convexity,* J. Comput. Appl. Math. 105 (1999), no. 1-2, 327–336;

[86] H. Kara, S. Erden, H. Budak, *Hermite-Hadamard, Trapezoid and Midpoint Type Inequalities Involving Generalized Fractional Integrals for Convex Functions,* Sahand Communications in Mathematical Analysis, 20(2), (2023), 85-107;

[87] F.R. Keogh, E.P. Merkes, *A coefficient inequality for certain classes of analytic functions,* Proc. Amer. Math. Soc. 20(1969), 8–12;

[88] M. Kian, M.S. Moslehian, *Refinements of the operator Jensen–Mercer inequality,* Electron. J. Linear Algebra, 26, (2013), 742–753;

[89] P. Kumar, *A remark on Sendov conjecture,* Comptes rendus de l'Academie Bulgare des Sciences, 71, (2018), 731–734;

[90] M. Lewin, *On a coefficient problem for bi-univalent functions,* Proc. Amer. Math. Soc., 18 (1967), 63–68;

[91] R.J. Libera, E.J. Złotkiewicz, *Early coefficients of the inverse of a regular convex function,* Proc. Amer. Math. Soc. 85(2), 225-230 (1982);

[92] R.J. Libera, E.J. Złotkiewicz, *Coefficient bounds for the inverse of a function with derivative in $\mathcal{P}$,* Proc. Amer. Math. Soc. 87(2), 251-257 (1983);

[93] W.C. Ma, D. Minda, *A unified treatment of some special classes of univalent functions,* Proceedings of the Conference on Complex Analysis, Tianjin, (1992), Conf. Proc. Lecture Notes Anal. I, Int. Press, Cambridge, MA, 157-169;

[94] R. Mendiratta, S. Nagpal, V. Ravichandran, *On a subclass of strongly starlike functions associated with exponential function,* Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 38, 365–386 (2015);

[95] A.M. Mercer, *A variant of Jensen's inequality,* J. Inequal. Pure Appl. Math., 4(4) 73 (2003);

[96] J.G. Milcetich, *On a coefficient conjecture of Brannan,* J. Math. Anal. Appl. 139 (1989), no. 2, 515-522;

[97] M. Miller, *Maximal Polynomials and the Illieff-Sendov Conjecture,* Trans. Am. Math. Soc. 321 (1), (1990), 285–303;

[98] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *Second-order differential inequalities in the complex plane,* Journal of Mathematical Analysis and Applications, 65 (1978), 289–305;

[99] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *Differential Subordinations and Univalent Functions,* Studies in Mathematics and Its Applications, 25, (2000);

[100] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *Differential Subordinations: Theory and Applications*, Series of Monographs and Textbooks in Pure Appl. Math., vol. 225. Marcel Dekker Inc., New York/Basel (2000);

[101] P.T. Mocanu, *Some simple criteria for starlikeness and convexity*, Lib. Math., Vol.13, No.1, (1993), 27-40;

[102] P.T. Mocanu, *On starlikeness of Libera transform*, Mathematica (Cluj) 28(51), 2(1986), 153-155;

[103] P.T. Mocanu, *New extensions of a theorem of R. Singh and S. Singh,* Mathematica (Cluj), 37(60), 1-2(1995), 171-182;

[104] P.T. Mocanu, T. Bulboacă, G.Şt. Sălăgean, *Teoria geometrică a funcţiilor univalente,* Casa carţii de ştiinţă, Cluj-Napoca, (1999);

[105] G. Murugusundaramoorthy, T.E. Bulboacă, *Sufficient conditions of subclasses of spiral-like functions associated with Mittag-Leffler functions,* Kragujevac J. Math. 48 (2024), no. 6, 921–934;

[106] G. Murugusundaramoorthy, *Subclasses of starlike and convex functions involving Poisson distribution series,* Afr. Mat. 28 (2017), no. 7-8, 1357–1366;

[107] J.W. Noonan, D.K. Thomas, *On the second Hankel determinant of areally mean p-valent functions,* Trans. Amer. Math. Soc. 223(2), 337–346 (1976);

[108] H. Öğulmüş, M.Z. Sarıkaya, *Hermite-Hadamard-Mercer type inequalities for fractional integrals,* Filomat, 35(7), (2021), 2425–2436;

[109] F.W.J. Olver, D.W. Lozier, R.F. Boisvert, C.W. Clark (Eds.), *NIST Handbook of Mathematical Functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (2010);

[110] H. Orhan, M. Çaglar, **L.I. Cotîrlă**, *Third Hankel Determinant for a Subfamily of Holomorphic Functions Related with Lemniscate of Bernoulli,* Mathematics, 11 (5), (2023);

[111] H. Orhan, **L.I. Cotîrlă**, *Fekete-Szego Inequalities for Some Certain Subclass of Analytic Functions Defined with Ruscheweyh Derivative Operator,* Axioms, 11 (10), (2022);

[112] H. Orhan, P.K. Mamatha, S.R. Swamy, N. Magesh, J. Yamini, *Certain classes of bi-univalent functions associated with the Horadam polynomials*, Acta Univ. Sapientiae Math. 13(1) (2021), 258–272;

[113] M.E. Özdemir, S.S. Dragomir, Ç. Yıldız, *The Hadamard inequality for convex function via fractional integrals,* Acta Math. Sci. Ser. A, (Chinese Ed.), 33(5), (2013), 1293–1299;

[114] Z. Pavić, *The Jensen–Mercer inequality with infinite convex combinations,* Math. Sci. Appl. E Notes, 7, (2019), 19–27;

[115] C. Pommerenke, *Univalent functions*, Vanderhoeck and Ruprecht: Gottingen, Germany, (1975);

[116] V. Prakash, S. Sivasubramanian, G. Murugusundaramoorthy, D. Breaz, **L.I. Cotîrlă**, *Inclusion results involving Gaussian hypergeometric functions for univalent functions having univalent derivatives*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., Tome LXX, No.4, (2025);

[117] J. Quaintance, H. W. Gould, *Combinatorial Identities for Stirling Numbers (The Unpublished Notes of H.W. Gould),* World Scientific Publishing Co., Singapore, (2015);

[118] Q.I. Rahman, Ge. Schmeisser, *Analytic Theory of Polynomials*, Oxford University Press, (2002);

[119] S. Ravichandran, R. Seenivasagan, *Radius of uniform convexity of certain analytic functions,* Mathematica Slovaca, 55 (2005), No. 6, 603–611;

[120] M. Raza, S.N. Malik, Q. Xin, M.U. Din, **L.I. Cotîrlă,** *On Kudriasov Conditions for Univalence of Integral Operators Defined by Generalized Bessel Functions,* Mathematics, 10 (9), (2022);

[121] F. Rønning, *Uniformly convex functions and a corresponding class of starlike functions,* Proc. Amer. Math. Soc. 118 (1993), no. 1, 189–196;

[122] M.A. Roshian, *On a subclass of starlike functions,* Rocky Mountain J. Math., Vol. 24, Spring, (1994), No. 2, pp. 447-454;

[123] S. Ruscheweyh, L. Salinas, *On Brannan's coefficient conjecture and applications,* Glasg. Math. J. 49 (2007), no. 1, 45-52;

[124] Z. Rubenstein, *On a problem of Ilyeff.,* Pacific J. of Math. 26 (1), (1968), 159–161;

[125] S. Ruscheweyh, *Convolutions in Geometric Function Theory*, Les Presses De L'Universite De Montreal, Montreal, (1982);

[126] P.N. Sadjang, *On the fundamental theorem of (p,q)-calculus and some (p,q)-Taylor formulas,* archiv:1309.3934[math.QA];

[127] M.Z. Sarikaya, A. Saglam, H. Yildirim, *On some Hadamard-type inequalities for* $h-$*convex functions,* J. Math. Inequal., 2(3), (2008), 335–341;

[128] M.Z. Sarikaya, E. Set, H. Yaldiz, N. Başak, *Hermite-Hadamard's inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities,* Math. Comput. Model. Dyn. Syst., 57(9-10), (2013), 2403–2407;

[129] G.Şt. Sălăgean, *Subclasses of univalent functions,* Lecture notes in Mathematics, Springer Verlag, 1013(1983), 362-372;

[130] G. Schmeisser, *Bemerkungen zu einer Vermutung von Ilieff,* Math. Z., 111, (1969) 121- 125;

[131] G. Schmeisser, *On Ilieff's Conjecture,* Math. Z., 156, (1977), 165 - 173;

[132] G. Schmeisser, Q.I. Rahman, *Analytic Theory of Polynomials,* London Mathematical Society Monographs, (2002);

[133] Q.A. Shakir, A.S. Tayyah, D. Breaz, **L.I. Cotîrlă**, E. Rapeanu, F.M. Sakar, *Upper Bounds of the Third Hankel Determinant for Bi-Univalent Functions in Crescent-Shaped Domains*, Symmetry-Basel, 16 (10), (2024);

[134] A.E. Shammaky, B.A. Frasin, S.R. Swamy, *Fekete-Szegö inequality for bi-univalent functions subordinate to Horadam polynomials*, J. Funct. Spaces (2022), Article ID 9422945;

[135] T. Sheil-Small, *Complex polynomials,* Cambridge University Press, (2002);

[136] H. Silverman, *Univalent functions having univalent derivatives,* Rocky Mountain J. Math. 16 (1986), no. 1, 55–61;

[137] H. Silverman, *Univalent functions with negative coefficients,* Proc. Amer. Math. Soc. 51 (1975), 109–116;

[138] H. Silverman, *Starlike and convexity properties for hypergeometric functions,* J. Math. Anal. Appl. 172 (1993), no. 2, 574–581;

[139] H. Silverman, *Partial Sums of Starlike and Convex Functions,*J. Math. Anal. Appl.209 (1997), 221–227;

[140] R. Singh, S. Singh, *Starlikeness and convexity of certain integrals,* Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska Sect. A, Sect. A 35 (1981), 45-47;

[141] T. Sitthiwirattham, M.A. Vivas-Cortez, H. Budak, İ Avcı, *A study of fractional Hermite-Hadamard-Mercer inequalities for differentiable functions,* Fractals, 32 (2), 2440016 (2024);

[142] J. Soontharanon, T. Sitthiwirattham, *On fractional* $(p,q)-$*calculus*, Adv. Differential Equations, 35 (2020);

[143] J.V.d.C. Sousa, D.S. Oliveira, E.C. de Oliveira, *Grüss-Type Inequalities by Means of Generalized Fractional Integrals,* Bull. Braz. Math. Soc., New Series, 50, (2019), 1029–1047;

[144] H.M. Srivastava, *Some formulas for the Bernoulli and Euler polynomials at rational arguments,* Math. Proc. Camb. Philos. Soc. (2000), 129, 77–84.

[145] H.M. Srivastava, Ş. Altınkaya, S. Yalçın, *Certain Subclasses of bi-univalent functions associated with the Horadam polynomials*, Iran J. Sci. Technol. Trans. A 43 (2019), 1873–1879;

[146] H.M. Srivastava, A.K. Mishra, *Applications of fractional calculus to parabolic starlike and uniformly convex functions,* Comput. Math. Appl. 39 (2000), no. 3-4, 57–69;

[147] H.M. Srivastava, S. Owa, *Current Topics in Anlytic function theory*, World Scientific Publishing Company, Singapore (1992);

[148] H.M. Srivastava, A.K. Mishra, P. Gochhayat, *Certain subclasses of analytic and bi-univalent functions,* Appl. Math. Lett., 23 (2010), 1188–1192;

[149] H.M. Srivastava, S. Sivasubramanian, R. Sivakumar, *Initial coefficient bounds for a subclass of m-fold symmetric bi-univalent functions,* Tbilisi Math. J. (2014), 7(2), 1–10;

[150] H.M. Srivastava, A.K. Wanas, R. Srivastava, *Applications of the q-Srivastava-Attiya operator involving a family of bi-univalent functions associated with Horadam polynomials*, Symmetry-Basel, 13(7) (2021), 1230;

[151] J. Stirling, *Methodus differentialis: sive tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum,* London, Gul. Bowyer, (1730);

[152] S.R. Swamy, *Coefficient bounds for Al-Oboudi type bi-univalent functions based on a modified sigmoid activation function and Horadam polynimials*, Earthline J. Math. Sci., 7(2) (2021), 251–270;

[153] S.R. Swamy, B.A. Frasin, D. Breaz, **L.I. Cotîrlă**, *Two Families of Bi-Univalent Functions Associating the (p, q)-Derivative with Generalized Bivariate Fibonacci Polynomials*, Mathematics 12 (24), (2024);

[154] S.R. Swamy, D. Breaz, **L.I. Cotîrlă**, K. Venugopal, *Bi-univalent Function Subclasses with (p,q)-derivative Operator linked to Horadam Polynomials,* Kragujevac J. Math., Volume 50(8), (2026), 1279-1296;

[155] S.R. Swamy, Y. Sailaja, *Horadam polynomial coefficient estimates for two families of holomorphic and bi-univalent functions*, International J. Math., 66(8) (2020), 131–138;

[156] S.R. Swamy, K. Venugopal, **L.I. Cotîrlă**, *Some te-univalent function subfamilies linked to generalized bivariate Fibonacci polynomials,* Gulf Journal of Mathematics, 20 (2), (2025), 443-459;

[157] R. Szász, *About the radius of starlikeness of Bessel functions of the first kind,* Monatsh. Math., (2015), 176/2, 323–330;

[158] R. Szász, *On the Brannan's conjecture,* Mediterr. J. Math., 17 (1) (2020), 38;

[159] R. Szász, *A sharp criterion for starlikeness,* Mathematica (Cluj), Tome 48 (71), No 1, (2006,) 89-98;

[160] R. Szász, *The sharp version of a criterion for starlikeness related to the operator of Alexander,* Ann. Polon. Math., Vol. 94,(2008) No. 1, 1-14;

[161] R. Szász, *A sharp criterion for the univalence of Libera operator,* Creat. Math. Inform., Vol. 17, (2008), No.1, 65-71;

[162] R. Szász, L.-R. Albert, *About a condition for starlikeness,*J. Math. Anal. Appl. 335 (2007), 1328-1334;

[163] T. Tao, *Sendov's conjecture for sufficiently high degree polynomials,* arXiv:2012.04125 [math.CV];

[164] M. Vivas-Cortez, M.U. Awan, M.Z. Javed, A. Kashuri, M.A. Noor, K.I. Noor, A. Vlora, *Some new generalized $k-$fractional Hermite-Hadamard-Mercer type integral inequalities and their applications,* AIMS Math., 7, (2022), 3203-3220;

[165] A.K. Wanas, **L.I. Cotîrlă**, *New family of bi-univalent functions with respect to symmetric conjugate points associated with Borel distribution,* Acta Universitatis Sapientiae-Mathematica, 15(1), (2023), 198-212;

[166] A.K. Wanas, **L.I. Cotîrlă**, *Initial Coefficient Estimates and Fekete-Szego Inequalities for New Families of Bi-Univalent Functions Governed by (p - q)-Wanas Operator,* Symmetry-Basel, 13 (11), (2021);

[167] A.K. Wanas, A.A. Lupas, *Applications of Horadam polynomials on Bazilevic bi-univalent function satisfying subordinate conditions*, IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1294, 032003, (2019);

[168] G.N. Watson, *A Treatise of the Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, (1944);

[169] H.S. Wilf, *Subordinating factor sequences for convex maps of the unit circle*, Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 12, No.5 (Oct.1961), 689-693.

[170] Ç. Yildiz, *New inequalities of the Hermite-Hadamard type for $n-$time differentiable functions which are quasiconvex,* J. Math. Inequal., (10)(3), (2016), 703-711;

[171] Ç. Yildiz, S. Erden, S. Kermausuor, D. Breaz, **L.I. Cotîrlă**, *New estimates on generalized Hermite-Hadamard-Mercer-type inequalities,* Bound. Value Probl., doi.org/10.1186/s13661-025-02012-y, (2025).